Úloha II.4 ... jaderný odpad nikdy více
6 bodů; (chybí statistiky)

Představme si, že máme něco (například jaderný odpad) a chceme se toho zbavit. Těleso dostaneme na oběžnou dráhu Slunce shodnou s oběžnou dráhou Země, ale dostatečně daleko od Země, abychom mohli gravitační působení Země nadále zanedbávat. Otázka je, jaký způsob zbavení se inkriminovaného předmětu by nás stál kolik energie a který postup by byl tedy nejvýhodnější. Varianty jsou

- *Hodit to do Slunce. Stačí, aby se to dostalo na sluneční povrch a bude to dostatečně usmažené.*
- *Převést to na kruhovou dráhu v Hlavním pásu (pás planetek mezi Marsem a Jupiterem).*
- *Vyhodit to zcela ze Sluneční soustavy.*

Karel přemýšlel nad tím, co je vlastně SEO a narazil na úlohu.

Nebudeme uvažovat gravitační vliv ostatních planet Sluneční soustavy. Kdybychom povolili využití gravitačního praku (tj. manévr, při kterém je těleso urychleno nebo zpomaleno při průletu okolo planety, přičemž lze změnit i směr rychlosti), stačilo by pak těleso dopravit k nějaké planetě (Venuši nebo Marsu) a pomocí opakovaných gravitačních manévrů bychom ho byli schopni dopravit téměř kamkoliv bez dalších energetických nákladů. V této úloze nám nejde o to, jak dlouho bude trvat přeprava tělesa, proto bychom mohli velmi dlouho čekat, dokud se určitá planeta nevyskytne v určité pozici a postupnými manévry (mezi nimiž mohou být staleté prostoje) náklad dostat do požadované pozice.

Označme si hmotnost tělesa m, hmotnost Slunce M, vzdálenost Země–Slunce R a počáteční rychlost (před výstřelem) v_0, kterou spočítáme z rovnosti odstředivého a gravitačního zrychlení

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{v_0^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}\,.$$

Z energetického hlediska je pro nás nejvýhodnější rovnou těleso vystřelit z původní orbity. Kdybychom ho naložili na nějakou raketu, která by ho postupně urychlovala, tak by se zbytečně spotřebovávala energie na urychlování rakety a paliva a raketový motor nemůže mít ani teoreticky 100% účinnost. Uvažujeme tedy, že těleso odpálíme jednorázově z nějaké stanice, které má mnohem větší hmotnost, a proto můžeme předpokládat, že celková spotřebovaná energie odpovídá změně rychlosti tělesa

$$E = \frac{1}{2}m|\Delta \boldsymbol{v}|^2\,.$$

Pryč ze Sluneční soustavy

Našim cílem je uvést těleso na parabolickou dráhu tak, aby se nikdy nevrátilo zpět. Odletí od Slunce tak, že se bude neustále vzdalovat a zpomalovat, ale teoreticky se zastaví až v nekonečnu (za nekonečný čas). V nekonečnu bude mít nulovou potenciální i kinetickou energii. Ze zákona zachování energie tedy vyplývá, že bychom ho měli urychlit na rychlost v_1 tak, aby jeho celková energie byla nulová

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM}{R} = 0\,,$$

kde jsme využili vztah pro potenciální energii v radiálním gravitačním poli. Výsledná rychlost je

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\,.$$

Této rychlosti dosáhneme nejsnáze (při minimálním $|\Delta \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0|$) tak, že těleso urychlíme ve směru jeho rychlosti, tedy ve směru tečném k oběžné dráze. Potřebujeme tedy zvýšit jeho rychlost o

$$\Delta v_1 = v_1 - v_0 = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{GM}{R}} \doteq 12{,}4\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,. \tag{1}$$

Této rychlosti se mimochodem někdy říká 3. kosmická rychlost. Potřebná energie je

$$E_1 = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)\frac{GMm}{2R}\,.$$

Hlavní pás

Chceme-li těleso dostat na kruhovou oběžnou dráhu v Hlavním pásu, bude potřeba provést dva manévry. Nejprve těleso převedeme na eliptickou dráhu (tzv. Hohmannova elipsa) s periheliem na oběžné dráze Země a afeliem v Hlavním pásu. Až se dostaneme do afelia, zvýšíme rychlost tak, aby těleso zůstalo na kruhové dráze v této vzdálenosti od Slunce. Tomuto přechodu mezi dvěma orbitami se říká Hohmannova trajektorie.

Problém je v tom, že nemůžeme těleso jen jednou urychlit (vystřelit), ale potřebujeme manévrovat dvakrát. Takže si musíme vyslat těleso i spolu s nějakou raketou, motorem, který ho pak může převést na kruhovou dráhu.

Poloměr Hlavního pásu označíme R_A. Chceme spočítat rychlost v_3, na kterou těleso musíme urychlit, aby se pohybovalo po zmíněné eliptické dráze. Vyjdeme ze zákona zachování energie pro stav v periheliu a afeliu

$$\frac{1}{2}m' v_3^2 - \frac{GMm'}{R} = \frac{1}{2}m' v_\mathrm{A}^2 - \frac{GMm'}{R_\mathrm{A}}\,,$$

kde m' je hmotnost tělesa i s raketou a v_A je rychlost v afeliu, kterou můžeme vyjádřit z Keplerova zákona

$$v_\mathrm{A} R_\mathrm{A} = v_3 R\,.$$

Vyjádřením v_3 z těchto dvou rovnic dostáváme

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GMR_\mathrm{A}}{R\left(R_\mathrm{A} + R\right)}}\,.$$

Nyní, když máme těleso na eliptické dráze, musíme v afeliu zvýšit jeho rychlost

$$v_\mathrm{A} = \sqrt{\frac{2GMR}{R_\mathrm{A}\left(R_\mathrm{A} + R\right)}}$$

na rychlost

$$v_4 = \sqrt{\frac{GM}{R_\mathrm{A}}}\,.$$

Postupné změny rychlostí (znaménko jsme volili tak, aby $\Delta v_3, \Delta v_4 > 0$) jsou tedy

$$\Delta v_3 = \sqrt{\frac{GM}{R}}\left(\sqrt{\frac{2R_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A} + R}} - 1\right)\,,$$

$$\Delta v_4 = \sqrt{\frac{GM}{R_\mathrm{A}}}\left(1 - \sqrt{\frac{2R}{R + R_\mathrm{A}}}\right)\,.$$

Uvažujme, že těleso společně s palivem a další zátěží o hmotnosti $m_2 = m' - m$ vyšleme z původní orbity Slunce na eliptickou dráhu. Na to je potřeba energie

$$E_{3\mathrm{a}} = \frac{1}{2}(m + m_2)\Delta v_3^2 \,.$$

Když se vyslaný objekt dostane do afelia, potřebujeme jeho rychlost zvýšit o Δv_4. Ale to nepůjde jen tak. Abychom těleso urychlili, musíme podle zákona zachování hybnosti něco jiného zpomalit (nebo urychlit opačným směrem). To by se dalo vyřešit zapnutím raketového motoru, který vysílá urychlené palivo opačným směrem. Z energetického hlediska bude nejvýhodnější, když všechno palivo vyšleme určitou rychlostí Δu_2 najednou. Skutečný motor by měl menší účinnost, ale následujícím způsobem lze spočítat alespoň teoretické minimum potřebné energie.

Ze zákona zachování hybnosti

$$\Delta v_4 m = \Delta u_2 m_2 \,,$$

$$E_{3\mathrm{b}} = \frac{1}{2}m\Delta v_4^2 + \frac{1}{2}m_2\Delta u_2^2 = \frac{1}{2}m\Delta v_4^2 + \frac{m^2}{2m_2}\Delta v_4^2 \,.$$

My hledáme takovou hmotnost m_2, aby celková spotřebovaná energie $E_3 = E_{3\mathrm{a}} + E_{3\mathrm{b}}$ byla co nejmenší. To najdeme tak, že derivaci E_3 podle m_2 položíme rovnou nule.

$$\frac{\mathrm{d}E_3}{\mathrm{d}m_2} = -\frac{m^2}{2m_2^2}\Delta v_4^2 + \frac{1}{2}\Delta v_3^2 = 0 \,,$$

$$\frac{m^2}{2m_2^2}\Delta v_4^2 = \frac{1}{2}\Delta v_3^2 \,,$$

$$m^2\Delta v_4^2 = m_2^2\Delta v_3^2 \,,$$

$$m_2 = m\frac{\Delta v_4}{\Delta v_3} \,.$$

Jde skutečně o minimum, protože v extrémních případech pro velmi malé nebo velmi velké m_2 jde E_3 k nekonečnu a tento výsledek je jakýsi kompromis mezi těmito extrémy. Po dosazení můžeme spočítat energii E_3

$$E_3 = \frac{1}{2}(m + m_2)\Delta v_3^2 + \frac{1}{2}m\Delta v_4^2 + \frac{m^2}{2m_2}\Delta v_4^2,$$

$$E_3 = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{\Delta v_4}{\Delta v_3}\right)\Delta v_3^2 + \frac{1}{2}m\Delta v_4^2 + \frac{1}{2}m\Delta v_3\Delta v_4 = \frac{1}{2}m\left(\Delta v_3 + \Delta v_4\right)^2 .$$

Vyšlo nám tedy, že potřebujeme minimálně takovou energii, která by stačila na urychlení tělesa na rychlost $\Delta v_{34} = \Delta v_3 + \Delta v_4$. Tomu se mimochodem říká delta–v budget, což je celkový součet změn rychlosti během manévru, a to určuje celkovou potřebnou energii. Součet změn rychlosti je

$$\Delta v_{34} = \Delta v_3 + \Delta v_4 = \sqrt{\frac{GM}{R}}\left(\sqrt{\frac{2R_\mathrm{A}}{R_\mathrm{A} + R}} - 1\right) + \sqrt{\frac{GM}{R_\mathrm{A}}}\left(1 - \sqrt{\frac{2R}{R + R_\mathrm{A}}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{GM}{RR_\mathrm{A}\left(R_\mathrm{A} + R\right)}}\left(\sqrt{2}\left(R_\mathrm{A} - R\right) + \left(\sqrt{R} - \sqrt{R_\mathrm{A}}\right)\sqrt{R_\mathrm{A} + R}\right) .$$

Je známo[1], že se Hlavní pás nachází ve vzdálenosti od 2 AU až po 4 AU, tedy $R_{\mathrm{Amin}} = 2R$ a $R_{\mathrm{Amax}} = 4R$.

$$\Delta v_{34\mathrm{min}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\sqrt{\frac{GM}{R}} \doteq 8{,}46\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,,$$

$$\Delta v_{34\mathrm{max}} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{GM}{R}} \doteq 13{,}3\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Z energetického hlediska je tedy nejvýhodnější vyslat těleso na bližší okraj Hlavního pásu. Potřebná energie pak je

$$E_{3\mathrm{min}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 \frac{GMm}{2R}\,.$$

Tento způsob vyžaduje nejméně energie ze všech tří možností, i když je relativně složitý.

Poznámka Někdo by mohl navrhovat použití přechodu pomocí dvou půlelips („bi-eliptic transfer“), který spočívá v uvedení tělesa na eliptickou dráhu, jejíž hlavní poloosa je řádově větší, než je poloměr požadované finální orbity v Hlavním pásu. Následně je těleso v afeliu, kde se pohybuje malou rychlostí, zrychleno (na to není potřeba velké množství energie) tak, aby se perihelium nové eliptické trajektorie nacházelo ve vzdálenosti R_{A} od Slunce. V perihelu je pak těleso zpomaleno, aby zůstalo na kruhové oběžné dráze. Tato trajektorie může být v některých případech opravdu energeticky výhodnější, než je Hohmannova trajektorie. Ukazuje se ale[2], že poměr poloměru konečné a původní trajektorie musí být alespoň 11,94 nebo větší. Takže v našem případě by se to nevyplatilo.

Do Slunce

V předchozích případech jsme těleso urychlovali, teď se nabízí ho zpomalit a nechat ho „spadnout“ do Slunce. Konkrétně ho stačí zpomalit tak, aby jeho eliptická trajektorie měla afelium na původní trajektorii a perihelium na obrácené straně povrchu Slunce (jiné trajektorie vyřešíme později). Při svém pohybu tedy jen „škrtne“ o povrch Slunce, ale to stačí na pohlcení. Označme R_{S} poloměr Slunce. Znovu použijeme zákon zachování energie.

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{P}}^2 - \frac{GMm}{R_{\mathrm{S}}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R}\,,$$

kde v_2 je rychlost, na kterou jsme těleso zpomalili a v_{P} je rychlost v perihelu, kterou vyjádříme pomocí druhého Keplerova zákona

$$v_{\mathrm{P}} = \frac{v_2 R}{R_{\mathrm{S}}}\,.$$

Po dosazení dostáváme

$$\frac{v_2^2 R^2}{2R_{\mathrm{S}}^2} - \frac{GM}{R_{\mathrm{S}}} = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{GM}{R}\,,$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GMR_{\mathrm{S}}\left(R - R_{\mathrm{S}}\right)}{R(R^2 - R_{\mathrm{S}}^2)}} = \sqrt{\frac{2GMR_{\mathrm{S}}}{R(R + R_{\mathrm{S}})}}\,.$$

[1] https://cs.wikipedia.org/wiki/Hlavn%C3%AD_p%C3%A1s

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Bi-elliptic_transfer

Rychlost potřebujeme změnit o

$$\Delta v_2 = v_0 - v_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{2R_\mathrm{S}}{R + R_\mathrm{S}}}\right)\sqrt{\frac{GM}{R}} \approx \left(1 - \sqrt{\frac{2R_\mathrm{S}}{R}}\right)\sqrt{\frac{GM}{R}}\,.$$

Při porovnání s (1) vidíme, že pokud platí

$$1 - \sqrt{\frac{2R_\mathrm{S}}{R + R_\mathrm{S}}} > \sqrt{2} - 1\,,$$

odeslání tělesa ven ze Sluneční soustavy je výhodnější, než by bylo jeho odeslání do Slunce. Po úpravě nerovnice dostáváme

$$R/R_\mathrm{S} > \frac{2}{\sqrt{2} - 1}\,,$$

což platí vždy pro $R_\mathrm{S} \ll R$.

Existují ale i jiné, energeticky výhodnější způsoby, jak poslat těleso do Slunce. Například můžeme poslat těleso do nekonečna (tedy pryč ze Sluneční soustavy) a tam ho o malinko zpomalit. Vhodně zvolené (nekonečně malé) zpomalení způsobí, že jeho celková energie bude záporná a Slunce si ho tedy přitáhne zpět a pohltí. Sice spotřebujeme mnohem menší množství energie (stejné, jako v prvním případě – výstřelu do nekonečna), problém této metody ale spočívá v tom, že zabere nekonečně dlouhý čas.

Zajímá-li nás pouze minimální potřebná energie (a ne čas), je naše delta–v:

$$v_1 = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\frac{GM}{R}}\,.$$

Chceme-li těleso spálit Sluncem rychleji, stačí ho urychlit o něco menší rychlostí než v_1. Tím se dostane na eliptickou trajektorii, jejíž afelium bude velmi daleko, je-li rychlost jen o málo menší než v_1. V afeliu pak těleso zpomalíme na (skoro) nulovou rychlost a těleso tak prakticky spadne do Slunce. Na to ale spotřebujeme více energie, než by stačilo na samotný výstřel do nekonečna.

Čím rychleji ho budeme chtít dostat do Slunce, tím větší delta-v bude potřeba a tím více energeticky náročný náš manévr bude. V extrémním případě můžeme těleso vystřelit vysokou rychlostí směrem ke Slunci (resp. kousek stranou, aby se tangenciální složka rychlosti odečetla), čímž by se dostalo do Slunce velmi rychle.

Tvrzení, že pro hod do Slunce je nejefektivnější vyslání tělesa do nekonečna a následné zpomalení, je dokázáno v další podkapitole.

A nevyplatilo by se střílet šikmo?

Pojďme případ hození do Slunce vyřešit obecněji. Budeme se nyní zabývat jen bieliptickým manévrem, který je jednodušší a na teoretický popis nám bude stačit. Jiné typy manévrů zahrnují i konstrukci rakety, účinnost jejích motorů, která může záviset na jejich výkonu, a další parametry.

Máme těleso, které obíhá Slunce ve vzdálenosti R rychlostí v_0. Rychlost si rozdělíme na tři vzájemně kolmé složky

- tečná – ve směru pohybu oběhu okolo Slunce

- radiální – ve směru od Slunce
- axiální – ve směru kolmém na rovinu oběhu

Počáteční rychlost je v tečném směru v_0, v ostatních směrech je nulová. V okamžiku po výstřelu si složky označíme po řadě $v_\mathrm{t}, v_\mathrm{r}, v_\mathrm{a}$. Těleso tak navedeme na eliptickou dráhu a v jejím afeliu ho zpomalíme tak, aby spadlo do Slunce. Poloměr Slunce je velmi malý v porovnání s poloměrem oběhu Země, jenž je menší, než hlavní poloosa vzniklé elipsy. Proto můžeme předpokládat, že těleso v afeliu úplně zastavíme. Pak začne padat přímo do středu Slunce.

Celá naše Δv spotřeba pak bude

$$\Delta v = v_\mathrm{A} + \sqrt{(v_\mathrm{t} - v_0)^2 + v_r^2 + v_a^2}\,, \tag{2}$$

kde v_A je rychlost v afeliu. Tuto spotřebu se snažíme minimalizovat.

Zamyslíme-li se nad tím, jak axiální rychlost ovlivňuje naší trajektorii, tak zjistíme, že jen „naklání" rovinu elipsy. Potom si stačí změnit souřadnou soustavu a pozorovat pohyb v rovině nakloněné elipsy. Radiální složka v nové soustavě zůstane stejná, axiální složka je nulová a tečná složka je součet původní radiální a tečné

$$v_\mathrm{t}' = \sqrt{v_\mathrm{t}^2 + v_\mathrm{a}^2}$$

Urychlili jsme-li těleso v axiálním směru, způsobili jsme tak jen náklon rotace a zvýšení tečné rychlosti. Stejně jako při výstřelu ze Sluneční soustavy ale víme, že se nám nevyplatí urychlovat těleso v axiálním směru. Dále tedy budeme počítat s $v_\mathrm{a} = 0$. Taky si můžeme rozmyslet, že stačí uvažovat $v_\mathrm{t} \geq 0$.

Budeme znovu vycházet ze zákona zachování momentu hybnosti a zákona zachování energie

$$v_\mathrm{t} R = v_\mathrm{A} R_\mathrm{A}\,,$$
$$v_\mathrm{t}^2 + v_\mathrm{r}^2 - 2K = v_\mathrm{A}^2 - 2K\frac{R}{R_\mathrm{A}}\,,$$

kde je vzdálenost v afeliu a v_A rychlost v afeliu. V ZZE jsme rovnou vypustili hmotnost tělesa a zavedli substituci $K = \frac{GM}{R}$. R_A můžeme z rovnic eliminovat

$$v_\mathrm{A}^2 - 2K\frac{v_\mathrm{A}}{v_\mathrm{t}} - v_\mathrm{t}^2 - v_\mathrm{r}^2 + 2K = 0\,.$$

Důležité je, že náš model platí pro eliptický pohyb, tedy dodaná rychlost nesmí být větší než úniková. Vyjádříme v_A a dosadíme do (2)

$$v_\mathrm{A} = \frac{K}{v_\mathrm{t}} - \sqrt{\frac{K^2}{v_\mathrm{t}^2} + v_\mathrm{t}^2 + v_\mathrm{r}^2 - 2K}\,,$$
$$\Delta v = \frac{K}{v_\mathrm{t}} - \sqrt{\frac{K^2}{v_\mathrm{t}^2} + v_\mathrm{t}^2 + v_\mathrm{r}^2 - 2K} + \sqrt{(v_\mathrm{t} - v_0)^2 + v_\mathrm{r}^2}\,,$$

kde jsme při řešení kvadratické rovnice zvolili pouze menší řešení (s mínusem před odmocninou), druhé řešení by udávalo rychlost v periheliu (která je vyšší).

Hledáme minimum funkce Δv. Problém je v tom, že závisí na dvou nezávislých parametrech v_t a v_r. To uděláme pomocí parciálních derivací

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial v_\mathrm{r}} = -\frac{v_\mathrm{r}}{\sqrt{\frac{K^2}{v_\mathrm{t}^2} + v_\mathrm{t}^2 + v_\mathrm{r}^2 - 2K}} + \frac{v_\mathrm{r}}{\sqrt{(v_\mathrm{t} - v_0)^2 + v_\mathrm{r}^2}} = 0\,,$$

$$\frac{v_\mathrm{r}}{\sqrt{\frac{K^2}{v_\mathrm{t}^2} + v_\mathrm{t}^2 + v_\mathrm{r}^2 - 2K}} = \frac{v_\mathrm{r}}{\sqrt{(v_\mathrm{t} - v_0)^2 + v_\mathrm{r}^2}}\,.$$

Vidíme, že jedno řešení je $v_\mathrm{r} = 0$. Za v_0 můžeme dosadit $\sqrt{K}$ a pokračovat v úpravách

$$\sqrt{\left(\frac{K}{v_\mathrm{t}} - v_\mathrm{t}\right)^2 + v_\mathrm{r}^2} = \sqrt{(v_\mathrm{t} - \sqrt{K})^2 + v_\mathrm{r}^2}\,,$$

$$\left|\frac{K - v_\mathrm{t}^2}{v_\mathrm{t}}\right| = \left|v_\mathrm{t} - \sqrt{K}\right|\,,$$

$$\frac{|\sqrt{K} - v_\mathrm{t}||\sqrt{K} + v_\mathrm{t}|}{v_\mathrm{t}} = |\sqrt{K} - v_\mathrm{t}|\,,$$

$$v_\mathrm{t} = \sqrt{K} = v_0\,.$$

Docházíme tedy k tomu, že pro $v_\mathrm{t} = v_0$ je řešením podmínky nulové parciální derivace libovolné v_r. To odpovídá stavu, kdy těleso vystřelíme kolmo na původní kruhovou dráhu; dosazením do Δv vidíme, že $\Delta v = v_0$. Pro jiné v_t může minimum nastat jen pro $v_\mathrm{r} = 0$ nebo maximální v_r (tedy výstřel do nekonečna, který jsme už vyřešili).

Zjistili jsme tedy, že je nejvýhodnější nestřílet „šikmo“ a těleso urychlovat pouze v tečném směru. Vztah pro Δv se nám znovu zjednoduší

$$\Delta v = \frac{K}{v_\mathrm{t}} - \left|\frac{K}{v_\mathrm{t}} - v_\mathrm{t}\right| + |v_\mathrm{t} - \sqrt{K}|\,.$$

Řešíme dva případy, $v_\mathrm{t} < \sqrt{K}$ a $v_\mathrm{t} > \sqrt{K}$. Pro $v_\mathrm{t} < \sqrt{K}$ je afelium na původní dráze, proto tento případ nemusíme uvažovat. Pro $v_\mathrm{t} > \sqrt{K}$ dostaneme

$$\Delta v = \frac{K}{v_\mathrm{t}} + \frac{K}{v_\mathrm{t}} - v_\mathrm{t} + v_\mathrm{t} - \sqrt{K} = \frac{2K}{v_\mathrm{t}} - \sqrt{K}\,.$$

To znamená, že čím vyšší rychlost v_t, tím méně bude potřeba energie na manévr. Jsme ovšem omezeni podmínkou, že rychlost nesmí být vyšší, než je rychlost úniková, jinak náš model selže a může vycházet záporná Δv. Nejefektivnější bude znovu výstřel do nekonečna.

Pojďme se ještě zamyslet nad tím, co kdybychom nepoužili bieliptický přesun, ale pouze bychom těleso z oběžné dráhy vystřelili tak, že perihelium jeho trajektorie bude uvnitř Slunce (resp. na jeho okraji ve vzdálenosti R_S, protože určitě bude výhodnější těleso zpomalit/urychlit tak, aby se dostalo na povrch Slunce, než někam dovnitř). Stejnou úvahou, jako v předchozím případě, dojdeme k tomu, že nemá smysl dodávat tělesu axiální složku rychlosti. Znovu vyjdeme z rovnic pro zákon zachování energie a momentu hybnosti

$$v_\mathrm{P}^2 - 2K\frac{R}{R_\mathrm{S}} = v_\mathrm{t}^2 + v_\mathrm{r}^2 - 2K\,,$$

$$v_\mathrm{t} R = v_\mathrm{P} R_\mathrm{S}\,.$$

Označíme poměr $R/R_S = r$ a eliminujeme rychlost v periheliu v_P

$$v_\mathrm{r}^2 = v_\mathrm{t}^2 r^2 - 2Kr - v_\mathrm{t}^2 + 2K\,. \tag{3}$$

Dosadíme do vztahu pro Δv, který nyní nezahrnuje rychlost v_A, protože nepotřebujeme nikde brzdit

$$\Delta v = \sqrt{\left(v_\mathrm{t} - \sqrt{K}\right)^2 + v_\mathrm{r}^2}\,,$$
$$\Delta v = \sqrt{\left(v_\mathrm{t} - \sqrt{K}\right)^2 + v_\mathrm{t}^2 r^2 - 2Kr - v_\mathrm{t}^2 + 2K} = \sqrt{v_\mathrm{t}^2 r^2 - 2v_\mathrm{t}\sqrt{K} + (3-2r)K}\,.$$

Hledáme nyní takovou rychlost v_t, pro kterou je Δv nejmenší. Výraz pod odmocninou je kvadratická funkce, víme tedy, že minimum má pro $v_\mathrm{t} = \sqrt{K} r^{-2} = v_0 r^{-2}$. Toto minimum je ale vždy záporné; podíváme-li se ale na rovnici (3), zjistíme, že není splněna podmínka řešitelnosti pro v_r (v_r^2 vychází taky záporné).

Fyzikální význam je takový, že ZZE určuje minimální možnou rychlost v periheliu a tedy i minimální možnou hodnotu tečné složky rychlosti; pokud zvolíme tečnou rychlost menší, neexistuje dráha s periheliem na povrchu Slunce. Rychlost v_t tedy musíme zvýšit z hodnoty $v_0 r^{-2}$ tak, aby v_r^2 bylo nezáporné. Protože minimalizujeme kvadratickou funkci, víme, že je optimální zvýšit v_t minimálně, čímž dostaneme znovu $v_\mathrm{r} = 0$. To je případ, který jsme počítali výše, kdy těleso pouze (tečně) zpomalíme a necháme ho spadnout po elipse.

Víme ale, že výhodnější zůstává stejně případ vyhození do nekonečna a ještě výhodnější vyhození do Hlavního pásu.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz