Úloha II.5 ... skleněný déšť

7 bodů; (chybí statistiky)

Dělník si na stavbu mrakodrapu přinesl vak se skleněnkami, aby se s nimi mohl pochlubit svým kolegům. A co se nestane – vak se vysype a kuličky padají skrze lešení směrem k zemi. Lešení se skládá z jednotlivých poschodí o výšce h. Podlaha každého poschodí se skládá ze stejných mříží, ve kterých díry zaujímají $k\,\%$ z celkové plochy mříže. Uvažujme zjednodušený model propadávání kuliček lešením, kdy, pokud kulička spadne na díru v lešení, tak projde bez ovlivnění, a pokud spadne na pevnou část mříže, tak se její rychlost sníží na 0 a ihned začne dále padat (tj. velikost kuliček je zanedbatelná vůči velikosti děr v lešení, kuličky se od lešení nijak neodráží a po dopadu na pevnou část mříže se ihned skutálí do díry a dále začínají padat). Nakonec neuvažujme ani potenciální srážky kuliček mezi sebou. Předpokládejte, že kuličky se z tašky sypou s konstantním hmotnostním průtokem Q. Jakou silou budou kuličky působit na každé patro lešení, až se situace ustálí? *Mirek chtěl převést Ohmův zákon do mechaniky.*

Patro, ve kterém dělník upustí kuličky, označíme číslem 0. Zároveň předpokládáme, že počáteční rychlost všech kuliček je nulová. Pro maximální rychlost kuličky v $n$tém patře (v žádném z předchozích pater se nezpomalila o lešení) potom platí rovnice

$$v_n = gt_n\,,$$
$$nh = \frac{1}{2}gt_n^2\,,$$

jejichž řešením je vztah $v_n = \sqrt{2ngh}$.

Každá kulička může v každém patře buď narazit na lešení, nebo propadnout dírou a pokračovat dál. To znamená, že její cestu až do $n$tého patra můžeme jednoznačně popsat pomocí řetězce jedniček a nul o délce $n-1$. Například 0100 bude znamenat, že kulička v prvním patře propadla dírou, ve druhém narazila na mříž, ve třetím znovu propadla a ve čtvrtém také. Do $n$tého patra se tak každá kulička mohla dostat 2^{n-1} způsoby. Vydělme k stovkou; pravděpodobnost, že kulička propadne patrem, pak je k, zatímco pravděpodobnost, že narazí, je $(1-k)$. Pro pravděpodobnost cesty do pátého patra ve tvaru 0100 tak platí $P\,(0100) = k\,(1-k)\,k\cdot k = k^3\,(1-k)$. V praxi to znamená, že cestou 0100 se vydá hmotnostní tok $Q_{0100} = P\,(0100)\,Q = k^3\,(1-k)\,Q$.

Počet nul na konci zápisu cesty kuličky do $n$tého patra označíme d. V našem případě tedy platí $d\,(0100) = 2$. Odtud vidíme, že daná kulička, která dopadla do $n$tého patra touto cestou, narazila naposledy přesně v $(n-d-1)$tém patře. Její rychlost v $n$tém patře tedy bude v_{d+1}. Je zřejmé, že $d \in \langle 0, n-1\rangle$.

Jestliže kulička narazí, veškerá její hybnost se změní na nulu. Pokud tedy za čas t dopadnou na patro lešení kuličky s celkovou hmotností $m = Q't$ a rychlostí v, působí tím silou

$$F = m\frac{v}{t} = Q'v\,.$$

Hmotnostní tok pro kuličky popsané řetězcem i je rovný $Q' = QP(i)$.

Nyní už dokážeme popsat všechny možné cesty kuliček do $n$tého patra a víme, jaký hmotnostní tok jimi bude proudit. Zároveň umíme vyjádřit rychlost, kterou se dané kuličky budou pohybovat, a víme, jak z toho spočítat výslednou sílu. Ještě je potřeba dodat, že jen $(1-k)$

kuliček se v $n$tém patře zastaví, takže celkovou sílu působící na dané patro můžeme spočítat sumou

$$F_n = Q\,(1-k) \sum_{i \in M_{n-1}} P\,(i)\, v_{d(i)+1}\,, \tag{1}$$

kde M_{n-1} je množina všech řetězců jedniček a nul s délkou $n-1$.

Tato suma obsahuje celkem 2^{n-1} sčítanců. Rozdělíme si je na n skupin tak, aby všechny členy v jedné skupině měly stejnou hodnotu d. Díky tomu můžeme člen v_{d+1} z každé skupiny vytknout a potom počítat jen sumu členů $P\,(i)$ v dané skupině. Všechny řetězce z jedné skupiny mají $n-1$ číslic a končí na číslici 1, následovanou d nulami.[1] To znamená, že ještě nemáme určených prvních $n-d-2$ číslic. V každé skupině budou přítomny jejich všechny možné kombinace. Sumu všech členů z jedné skupiny tak můžeme vyjádřit výrazem

$$S\,(d) = v_{d+1}\,(1-k)\,k^d \sum_{j \in M_{n-d-2}} P\,(j)\ , \tag{2}$$

který ovšem neplatí pro skupinu s $d = n-1$. Ta obsahuje jen samé nuly, takže pro ni platí $S\,(n-1) = v_n k^{n-1}$.

Připomeňme si, že množina M_{n-d-2} obsahuje všechny možné řetězce jedniček a nul o celkové délce $n-d-2$. Pro každý řetězec j z této množiny potom platí $P\,(j) = k^\alpha\,(1-k)^\beta$, kde α je počet nul v této sekvenci a $\beta = n-d-2-\alpha$ je počet jedniček v této sekvenci. Jestliže známe binomickou větu, neměla by nás překvapit rovnost

$$\sum_{j \in M_{n-d-2}} P\,(j) = (k + (1-k))^{n-d-2} = 1\,,$$

která nám umožní přepsat vzorec (2) do tvaru $S\,(d) = v_{d+1}\,(1-k)\,k^d$ pro $d \neq n-1$ a $S\,(n-1) = v_n k^{n-1}$.

Všechny členy ze sumy ve vzorci (1) jsme si rozdělili do několika skupin podle d a poté jsme spočítali součet všech členů v každé této skupině. Celkovou sumu z (1) tak můžeme nahradit sumou těchto jednotlivých součtů a dostaneme

$$F_n = Q\,(1-k) \sum_{d=0}^{n-1} S\,(d) = Q\,(1-k)\left(v_n k^{n-1} + (1-k)\sum_{d=0}^{n-2} v_{d+1} k^d\right)$$

$$F_n = Q\sqrt{2gh}\,(1-k)\left(k^{n-1}\sqrt{n} + (1-k)\sum_{i=1}^{n-1} k^{i-1}\sqrt{i}\right).$$

Tento vzorec je řešením úlohy, protože sumu v něm obsaženou už není možné dále zjednodušit[2].

Ačkoli se to na první pohled nezdá, tento výsledek je velmi intuitivní a dává smysl: první člen v závorce je případ, kdy kulička ani jednou nenarazí a dopadne až na $n$té poschodí. Její hybnost je tedy úměrná $\sqrt{n}$. Druhý člen představuje případy, ve kterých kulička padá přímo

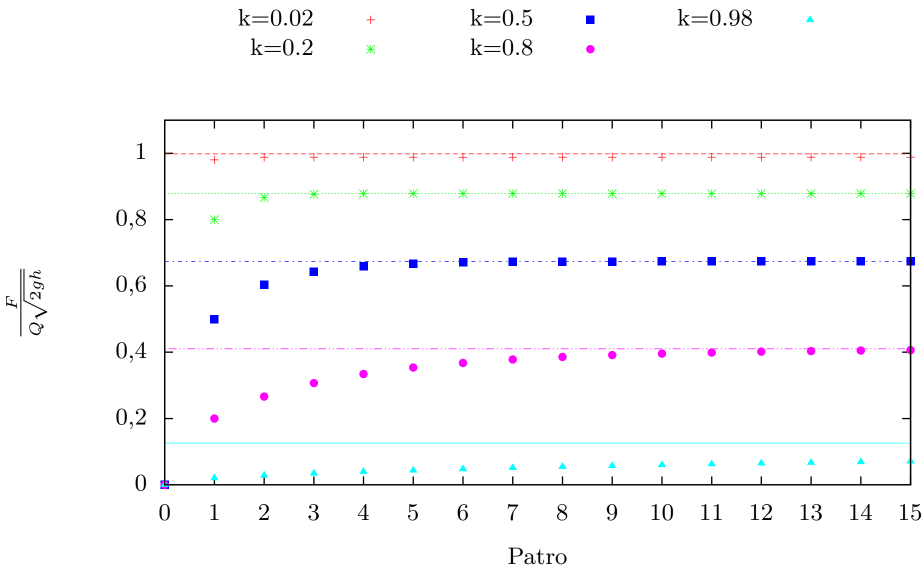
[1] S výjimkou skupiny s $d = n-1$, ve které je jen jeden řetězec tvořený samými nulami.
[2] lze ji pouze vyjádřit pomocí speciálních funkcí

z výšky i nad $n$tým poschodím. Aby spadla z výšky i, musela překonat $i-1$ poschodí (proto se v sumě vyskytuje činitel k^{i-1}) a dopadnout na poschodí předtím, z čehož máme $(k-1)$. Její hybnost je potom úměrná $\sqrt{i}$. Pro kontrolu, pokud ze závorky vypustíme členy s odmocninami (takže nebudeme počítat součet hybností, ale jen součet hmotností), dostaneme v závorce výraz

$$k^{n-1} + (1-k)\sum_{i=1}^{n-1} k^{i-1} = k^{n-1} + (1-k)\,\frac{k^{n-1}-1}{k-1} = 1\,.$$

To je ale jen jinak vyjádřený fakt, že se na $n$té poschodí (a tím pádem na každé poschodí) dostanou všechny kuličky.

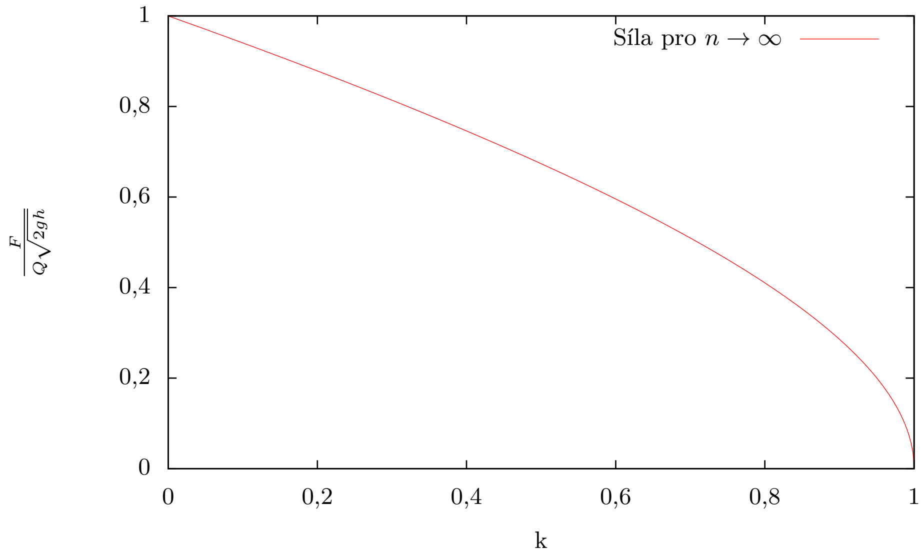
Můžeme si všimnout další zajímavé skutečnosti – pro velká n suma konverguje ke kladnému reálnému číslu, zatímco výraz $k^{n-1}\sqrt{n}$ konverguje k nule. Díky tomu se i F_n blíží k nějaké konkrétní hodnotě, což je přesně to, co bychom z fyzikálního hlediska čekali. Tohoto chování si můžeme všimnout v grafu 1 pro různé hodnoty k.



Obr. 1: Síla působící na jednotlivá patra pro různé hodnoty k. Vodorovné přímky ukazují teoretickou hodnotu, ke které síla konverguje v nekonečném patře.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.



Obr. 2: Síla působící na patro $n \to \infty$ pro různé hodnoty k.