

Zadání V. série



Termín odeslání: 28. dubna 1997

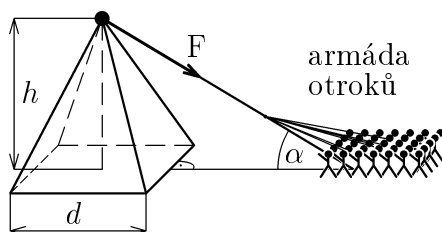
Úloha V.1 ... rozmazaný šroub

Po nakloněné rovině se sklonem β se z klidové pozice valí válec, na kterém je předkreslen závit. Válec se stále zrychluje a postupně se nám jednotlivé závitů „rozmažou“, až není poznat, že tam jednotlivé závitů byly. Měříme čas od puštění válce do chvíle, kdy nerozeznáme jednotlivé závitů. Jak tento čas závisí na úhlu β ? Předpokládejte, že oko má snímkovací frekvenci f , válec má průměr R , stoupání závitů je s .

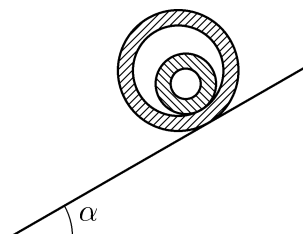
Úloha V.2 ... Vykradená pyramida

Jistý duševně chorý faraon si před mnoha tisíci lety nechal vytesat mnoha tisíci otroků z jednoho kusu mohutné skály pyramidu. Starověcí zloději o dvě dynastie později chtěli pyramidu vyloupit, leč nenašli vchod, a tak se rozhodli, že se pokusí pyramidu převrhnout. Do její špičky zaklesli pevný kruh, jímž provlékli ještě pevnější lano. Za lano pak zapřáhli organizovanou skupinu otroků táhnoucích směrem od pyramidy kolmo ke dvěma hranám podstavy (obr. 1). Podaří se otrokům pyramidu převrhnout, když jich bude dostatečně mnoho, nebo ji po písku jen kus popotáhnou?

Okolní písek je dokonale udusán minulými generacemi vykradačů hrodek, kteří už celá staletí obhlíželi, kudy pyramidu vykrást, takže se pyramida do písku nebude bořit. Hmotnost pyramidy je M , koeficient statického smykového tření je μ . Pyramidu považujte za jehlan (pohřební dutina je velmi malá, protože vládce je celý seschlý).



Obr. 1



Obr. 2

Úloha V.3 ... velké válení

Mějme dva duté válce vnějších poloměrů R_1, R_2 a vnitřních poloměrů r_1, r_2 ($r_2 < R_2 < r_1 < R_1$). Válce jsou vloženy do sebe (obr. 2) a navzájem se po sobě valí, ale nekloužou. Vnější válec se začne valit po nakloněné rovině s úhlem α . Jakého zrychlení celá soustava dosáhne?

Nad rámec zadání se můžete pokusit popsat pohyb jednotlivých válců. Hmotnosti válců jsou M_1, M_2 a materiál válce můžeme považovat za homogenní. Změní se řešení výrazně pro tři válce?

Úloha V.4 ... vodotrysk v lodi, aneb Rychlé šípy nikdo nedoběhne

Rychlé šípy si postavily šlapohyb neboli obojživelný vůz, s nímž podnikly závod přes řeku s Bratrstvem kočičí pracky. Bratrstvo prohrálo a málem se utopilo. „Vy budete mokrá taky, koukněte se na ty mraky!“ procedil Dlouhé Bidlo po nedobrovolné koupeli, načerž následující den vyvrstal do dna šlapohybu Rychlých šípů nebozecem díru průřezu S . Jak vysokým vodotryskem se na příštích závodech mohly kochat davy příznivců sportu, když Rychlé šípy včetně Rychlonožky usedly do lodi?

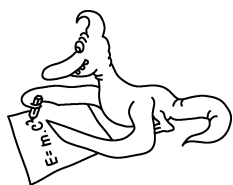
Úloha V.5 ... šlechtic

Veliký šéf semináře radostně přeskakuje fluktuace hmoty ve svém pokoji B 609. Právě dopadl plnou vahou z výše $H = 1$ m nad zemí volným pádem na hrábě. Násada je dlouhá $l = 2,0$ m a váží $m_2 = 1$ kg, část ocelového hrabla kolmá k násadě je dlouhá $z = 7$ cm a váží $m_1 = 2,5$ kg (považujte je za homogenní).

Jakou rychlost má konec násady hrábí v okamžiku, kdy se opovážlivě dotkne nosu našeho nejvyššího? Srážku považujte za nepružnou. Šéfův nos se nachází 180 cm nad podlahou, šéfova hmotnost činí 92 kg včetně klíčů v pravé kapse.

Úloha V.6 ... experimentální v dešti

Teď už nebude sněžit, a proto můžete pozorovat déšť. Pokuste se změřit objem jedné dešťové kapky. Nezapomeňte si zapsat, kdy to vlastně přšelo a jestli déšť přišel ze západu nebo z východu (porovnávejte kvalitu východních a západních dešťů). Např. při pádu padákem lze měřit šuplerou všechny rozměry kapky, ocejchujeme-li si dalekohled, můžeme v něm odhadovat velikost kapek...

**Řešení III. série****Úloha III.1 ... skokan** (4 body, řešilo 74 studentů)

Na začátku výpočtů si nejprve uvědomme, v jakých časových sledech probíhá celý děj:

- skok z výšky h (volný pád) až po dopad na hladinu,
- postupné ponořování skokana (tuto skutečnost si mnozí z vás neuvědomili),
- pohyb směrem dolů pro již zcela ponořeného skokana až do hloubky ponoření H ,
- pohyb směrem nahoru, dokud je skokan celý ponořen,
- vynořování; skokan zůstává nakonec částečně vynořen nad hladinou.

Po tomto ujasnění se nyní věnujme rozboru sil, které v bodech b) až e) na skokana působí. Jednak je to hydrostatická vztlaková síla, která působí na každý předmět v kapalině, jednak odporová síla prostředí, která působí proti pohybu skokana díky jeho nenulové rychlosti.

1) Zanedbáváme odporovou sílu kapaliny

Jelikož nám jde o určení hloubky ponoření H , nemusíme znát časové závislosti veličin charakterizující pohyb. Lze potom užít zákona zachování energie pro skokana, který se nachází v poli gravitační síly. To ovšem předpokládá znalost potenciální energie (E_p) a průběh sil, které konají práci, abychom mohli tyto práce (W_b , W_c) spočítat.

Předpokládáme-li, že skokan bude při skoku stále ve svislé poloze, nemusíme (pro jednoduchost) vztahovat potenciální energii vzhledem k těžišti, nýbrž i vzhledem k patám skokana. Nulovou hladinu potenciální energie stanovme v zatím neznámé hloubce H (tj. od hladiny k patám).

Rozebereme jednotlivé kroky:

- Skokan má potenciální energii

$$E_p = Mg(h + H). \quad (1)$$

- Na skokana působí hydrostatická vztlaková síla, která vykoná práci

$$W_b = \int_0^L F_{vz} dx, \quad (2)$$

kde

$$F_{vz} = Sx\rho_k g, \quad (3)$$

přičemž S je plošný průřez skokana (zjednodušíme ho na tvar kvádrů nebo válce), x hloubka, do které je ponořen, ρ_k hustota vody, g tíhové zrychlení. Integrál je součtem přes všechny elementy práce

$$F_{vz} dx \quad (4)$$

na dráze dx , kde je F_{vz} možno pokládat za konstantní.

Integrováním zjistíme: $W_b = \frac{1}{2}SL^2\rho_k g$. Tento výpočet lze provést i úvahou, neboť W_b je lineárně závislá na x , takže celkový součet je obsahem trojúhelníku.

- c) Zde $F_{vz} = V\rho_k g = SL\rho_k g$ je tedy konstantní. Vykonaná práce na dráze $H - L$ je $W_c = SL\rho_k g(H - L)$. Sepíšme zákon zachování energie:

$$E_p = W_b + W_c, \quad (5)$$

neboť energie, jakou má skokan, se spotřebuje na brzdění. Z toho po dosazení snadno spočteme:

$$H = \frac{h\rho + \frac{1}{2}\rho_k L}{\rho_k - \rho}, \quad (6)$$

uvážíme-li $M = V\rho = SL\rho$.

Dosadíme-li hodnotu $h = 10$ m, zjistíme, že skokan by se ponořil do hloubky $H = 98,5$ m, což je zjevný nesmysl, neboť skokan by se utopil, a on se přitom neutopí. Odporová síla tedy bude mít podstatný vliv.

- d) Potom se skokan začne vynořovat rovnoměrně zrychleně, dokud je zcela ponořen neboť vztlková síla je konstantní.
e) Při vynořování nad hladinu bude proces e) probíhat shodně jako b). Skokan má v poloze, kdy „stojí“ na hladině takovou rychlost, že ho vynese do výšky h , což je dáno tím, že energie se nikde neztrácí (nedisipuje), tzn. po zabrzdění je skokan zase urychlován.

2) Odporovou sílu kapaliny nezanedbáváme

- a) Spočteme nejprve rychlost v bodě, kde se dotýká skokan hladiny. Je to rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením g , tedy

$$h = \frac{gt^2}{2}, \quad v_0 = gt. \quad (7)$$

Vyloučením času dostaneme $v_0 = \sqrt{2gh}$.

- b) Sepíšme 2. Newtonův zákon pro zrychlení a skokana. Zrychlující síla je tíhová Mg , zpomalující síla vztlková $F_{vz} = Sx\rho_k g$, podobně jako v případě 1b), odporová síla prostředí (kapaliny) $F_o = \frac{1}{2}CS\rho_k v^2$. Celkově tedy

$$Mg - Sx\rho_k g - \frac{1}{2}CS\rho_k v^2 = Ma. \quad (8)$$

Výpočet můžeme provést jednoduchým modelováním třeba i na programovatelné kalkulačce. Jeho myšlenka spočívá v posouvání času, kdy v časovém okamžiku t dopočteme podle naší rovnice a , a pomocí něho spočteme

$$v' = v + a dt, \quad (9)$$

$$x' = x + v dt + \frac{a dt^2}{2}, \quad (10)$$

předpokládáme-li v intervalu (dostatečně malém) $(t, t + dt)$ rovnoměrně zrychlený pohyb s konstantním zrychlením.

Hodnoty x', v' jsou již v čase $t + dt$. Pomocí nich spočteme novou hodnotu a' a postup se opakuje.

V našem případě b) jsou počáteční hodnoty $x = 0$ a $v = v_0 = \sqrt{2gh}$, přičemž výpočet končí v okamžiku, kdy $x \geq 1,7$.

c) Dostáváme podobnou rovnici jako u b). Zde výpočet končí pro nulové (nebo přibližně nulové) hodnoty rychlosti, a konečné $x = H$.

Dále už jen uvedu rovnice pro bod d) a e):

$$SL(\varrho_k - \varrho)g - \frac{1}{2}CS\varrho_k v^2 = Ma, \quad (11)$$

$$-Mg + Sx\varrho_k g - \frac{1}{2}CS\varrho_k v^2 = Ma, \quad (12)$$

kde druhá z rovnic vede při řešení ke kmitavému pohybu, který se utlumí.

K vlastní technice výpočtu se sluší dodat, že dt můžeme zjistit zkusmo a to tak, že dáváme stále menší a menší hodnoty, pokud se výsledky výpočtu od sebe dost liší. Já jsem použil hodnotu $dt = 0,005$ a odporovou konstantu $C = 1$.

Při výpočtu s menší obměnou vztahu (10)

$$x' = x + \frac{v + v'}{2}dt \quad (13)$$

jsem se na programovatelné kalkulačce Casio dostal k výsledkům pro

$$\begin{aligned} h = 10, & \quad H = 6,4, \\ h = 2, & \quad H = 4,7, \\ h = 1,8, & \quad H = 4,6, \end{aligned} \quad (14)$$

což je přece jen realističtější výsledek (byť se hodnoty zdají také poněkud velké) než v případě 1).

Úmyslně někde neuvádím jednotky, abych zdůraznil, že jde o výpočty numerické, nikoliv fyzikální.

Hvězdičká

Úloha III.2 ... *dopravní prostředek* (3 body, řešilo 74 studentů)

Vaše řešení se dala rozdělit v zásadě do tří skupin.

1) První skupina řešitelů se opírala víceméně o představu, že Doppler vjel do křižovatky na zelenou a z křižovatky vyjel, když už svítila na semaforu (někde 10 metrů za ním) červená. Každý soudný člověk ovšem nahlédne, že toto v žádném případě není dopravní přestupek! Dopplerova rychlost se z toho navíc dá spočítat jen velmi, velmi těžko. Pokud chceme problému přijít na kloub, musíme předpokládat, že policista viděl červenou v tentýž okamžik, kdy Doppler viděl zelenou.

2) To udělali řešitelé z druhé skupiny. Použili vztahů pro Dopplerův jev. Uvažovali asi takto: Světlo ze semaforu se šíří proti Dopplerovi rychlostí c , má vlnovou délku λ a frekvenci f . Doppler se však pohybuje proti tomuto elektromagnetickému vlnění rychlostí v , připadá mu tedy, že se světlo přibližuje rychlostí $c + v$ a jeho vlnoplochy jsou zhuštěnější. Jedna vlna projde okem pana Dopplera za čas $T_z = \frac{\lambda}{c + v}$, proto bude přijímat světlo o frekvenci

$$f_z = \frac{1}{T_z} = \frac{c + v}{c} f = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f. \quad (15)$$

Z toho lehce dopočítáme

$$v = c \left(\frac{f_z}{f} - 1 \right), \quad (16)$$

což pro $f_z = 5,75 \cdot 10^{14}$ Hz (zelená), $f = 4,6 \cdot 10^{14}$ Hz (červená) a rychlost světla ve vakuu dá rychlost asi 270 milionů $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, což je asi $0,25c$, a tedy pokutu přibližně 270 mil. Kč. **Toto řešení je ovšem špatně!** Bylo by jej možné použít pouze pro rychlost v řádově menší než c . Předpokládá se zde totiž, že se světlo vůči panu Dopplerovi šíří rychlostí $c + v$. Fyzikové na konci minulého a počátku našeho (dvacátého) století dokázali, že se světlo ve všech vztažných soustavách (tedy i v autě pana Dopplera) šíří rychlostí c . Jaké je tedy správné řešení?

3) Třetí skupina řešitelů byla nejuspěšnější. Použila vztahů pro relativistický Dopplerův jev: Zavedeme si dvě souřadné soustavy. Souřadnou soustavu semaforu S1 (v ní se nachází i policista) a soustavu Dopplera auta S2. Tyto souřadné soustavy se přibližují rychlostí v .

Co vidí pozorovatel v S1? Semafor vyšle 1 vlnu červeného světla rychlostí c za čas $T = \frac{1}{f}$.

V soustavě S2, z hlediska pana Dopplera, se ale přibližuje semafor rychlostí v . Z toho, že v S1 i v S2 se světlo pohybuje rychlostí c , lze odvodit, že v S2 vyšle semafor 1 vlnu za čas $T = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (dilatace času). Jelikož se semafor přibližuje rychlostí v , je vlnová délka přijímaného světla a jeho frekvence

$$\lambda_z = (c - v)T = \frac{c}{f} \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}, \quad f_z = f \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}. \quad (17)$$

Vyjádříme si rychlost v :

$$v = c \frac{f_z^2 - f^2}{f_z^2 + f^2} \doteq 0,22c = 237 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}, \quad (18)$$

což odpovídá pokutě 237 mil. Kč.

Tento výsledek je možno považovat za správný, pokud ovšem uvedeme podmínky, za kterých platí.

- i) Především jsme jaksi mimoděk předpokládali, že semafor stojí přímo ve směru jízdy pana Dopplera. Jelikož ke srážce semaforu a pana Dopplera nedošlo, musíme předpokládat, že se pan Doppler díval na semafor ve vzdálenosti minimálně srovnatelné s jeho výškou (či horizontální vzdáleností), neboť v případě, že pan Doppler projíždí pod semaforem a dívá se přitom na něj, nemůže už docházet k podélnému Dopplerovu jevu. Dojde zato k příčnému Dopplerovu jevu způsobenému dilatací času $f' = f \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, což v našem případě znamená, že pan Doppler uvidí červenou, a to ještě o něco tmavší než je v S1.
- ii) Ve výpočtu jsme použili velikost rychlosti světla ve vakuu. Při správném zaokrouhlení nebude ani zemská atmosféra na obtíž.

Nakonec je třeba učinit poznámku k přesnosti výpočtu.

Policista udělující pokutu může znát frekvenci (vln. délku) semaforu s poměrně velkou přesností. Pokud však pan Doppler řekne, že viděl zelenou, pak lze výši pokuty pouze odhadnout nebo učinit výpočet pro pana Dopplera co nejprůzračnější a použít v něm frekvenci nějaké žlutozelené barvy. V každém případě je zbytečné odečíst oněch 60 Kč, obzvláště, když uvážíme, že se incident odehrál na vzduchu, a ne ve vakuu.

Je tedy nanejvýš vhodné zaokrouhlit výsledek s ohledem na přesnost zadaných (či zvolených) veličin.

Na úplný závěr se můžeme zamyslet nad (ne)reálností příkladu.

- a) Na automobil jezdící rychlostí $0,22c$ si asi ještě pár let počkáme. Jízda v něm bude ale velmi nepohodlná. Zkuste si spočítat odstředivou sílu působící na pasažéry v tomto autě jedoucím po povrchu zemském. Prostředky, kterými by policista v historicky krátké době takto rozjeté auto zastavil a pan Doppler by přitom neutrpěl újmu na zdraví, zatím neznáme.
- b) Pan Doppler si mohl všimnout, že zelená se nachází na semaforu na místě červené.
- c) Ať už pan Doppler zelenou viděl nebo ne, bylo by pro něj určitě výhodnější zaplatit pokutu za jízdu na červenou, než riskovat částku o několik řádů vyšší.

Jirka Franta

Úloha III.3 ... koule (5 bodů, řešilo 77 studentů)

V zadání to nebylo patřičně zdůrazněno, ale předpokládáme, že náboje, které přivedeme na koule mají stejnou velikost. Ti z vás, kteří navíc nastínili řešení pro různé náboje, dostali o nějaký ten bodík víc. A teď tedy k řešení.

To, že stranu trojúhelníka musíme zvětšit $\sqrt{2}$ -krát, aby se obsah zvětšil dvakrát ($2S = 2 \cdot \frac{1}{2}l^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2}(\sqrt{2}l)^2 \sin 60^\circ$), bylo jasné téměř každému z vás¹. Horší už to bylo se silovým působením.

Je zřejmé, že všechny náboje musí mít stejné znaménko, protože chceme-li, aby se obsah trojúhelníka zvětšil, všechny tři kuličky se musí odpuzovat. Na každou kuličku působí elektrostatické síly F_{el} od dalších dvou kuliček a síly od gumiček F_k viz obr. 3. Působící síly musí být v rovnováze. Síla F_{el} , kterou působí jedna kulička na druhou, má podle Coulombova zákona velikost $F_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{(\sqrt{2}l)^2}$. Síla F_k , má velikost $F_k = k\Delta l = k(\sqrt{2} - 1)l$. Musí tedy platit

$$k(\sqrt{2} - 1)l = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{(\sqrt{2}l)^2}. \quad (19)$$

Náboj, který musíme přivést na každou kuličku tedy je

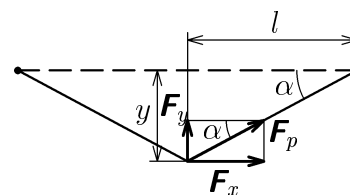
$$Q = \pm 2l\sqrt{2\pi\epsilon k l(\sqrt{2} - 1)}. \quad (20)$$

Veronika Štulíková & Jana Gřondilová

Úloha III.4 ... cirkus (5 bodů, řešilo 51 studentů)

V zadání je napsáno, že plachta, na kterou artista padá, je silně napjatá. Co to znamená? Pnutí uvnitř plachty je natolik velké, že jeho přírůstek příslušející dalšímu malému protažení plachty je oproti původní hodnotě zanedbatelný. Dále uvažme, že zmíněná protažení jsou dostatečně malá právě v tomto smyslu.

Z předchozího odstavce plyne, že síla F_p (viz obr. 4), působící ve směru plachty, má konstantní velikost. Pro další výpočet je zajímavá pouze její složka F_y . Složka F_x musí být nulová, jinak by se nám artista začal pohybovat ve vodorovném směru. To však není možné, protože situace je dostatečně symetrická, jak plyne ze zadání.



Obr. 4

¹To samozřejmě platí obecněji. Když nějakému objektu zvětšíme lineární rozměry n -krát, pak se jeho plochy, povrchy atd. zvětší n^2 -krát a jeho objem vzroste n^3 -krát.

Pro velikost síly F_y platí (použijeme $\sin \alpha \doteq \operatorname{tg} \alpha$ platné pro malé úhly α)

$$F_y = F_p \sin \alpha \doteq F_p \frac{y}{l} = ky. \quad (21)$$

Konstantu k určíme ze silové rovnováhy v poloze, v níž je artista v klidu (prohnutí o Δy). Síla plachty musí být kompenzována gravitační silou.

$$mg = k\Delta y \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta y}, \quad (22)$$

kde m je hmotnost artysty.

Maximální průhyb plachty vypočteme ze zákona zachování energie. Během pádu se nejprve mění potenciální energie artysty na kinetickou energii a na energii pružnosti plachty. Nejhlouběji bude artista zřejmě v místě, kde se zastaví, tedy kde jeho kinetická energie bude nulová. Jelikož pružné síle $F = ky$ odpovídá energie $W = \frac{1}{2}ky^2$, máme

$$mg(h + y_{max}) = \frac{1}{2}ky_{max}^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{\Delta y} y_{max}^2. \quad (23)$$

Toto je kvadratická rovnice, jejímž jediným fyzikálně smysluplným řešením je

$$y_{max} = \Delta y + \sqrt{(\Delta y)^2 + 2h\Delta y} \doteq 22,1 \text{ cm} \quad (24)$$

Nakonec se zmíníme o výsledku, které vychází ze zcela jiných předpokladů, totiž že plachta bez artysty má právě klidovou „délku“ (zde se asi není možné vyhnout nějaké úvaze o struktuře plachty, aby se vyjasnil význam té „délky“). Pak je z Hookova zákona $F_p = \tilde{k}\Delta l$, kde Δl je změna délky plachty. V tomto případě, pokud zanedbáme y_{max} vůči h v potenciální energii, získáme

$$y_{max} = \sqrt[4]{4h(\Delta y)^3}. \quad (25)$$

Jindřich Koloreň

Úloha III. 5 ... *kuřil* (5 bodů, řešilo 42 studentů)

Cívka je charakterizována v elektrickém obvodu dvěma veličinami – svým odporem R a indukčností L . Budeme předpokládat, že cívka ze zadání úlohy má rovnoměrně rozloženy všechny své závity po celé délce a je blízka ideální cívce.

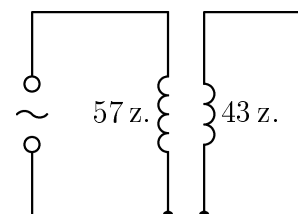
V obvodech stejnosměrného proudu se v ustáleném stavu neprojeví odlišné vlastnosti zkratované cívky od cívky s 57 závity. Její odpor tedy bude $\frac{57}{100}R$, kde R je odpor celé nezkratované cívky.

Zapojení ze zadání úlohy si lze ekvivalentně překreslit dle obr. 5.

Celá cívka se tedy bude chovat jako transformátor s poměrem závitů $\frac{N_1}{N_2} = \frac{57}{43}$, který má zkratované sekundární vinutí. Provedme

následující myšlenkový pokus: Zvýšíme-li nepatrně napětí na primárním vinutí (nezkratované části cívky), nastane zvětšení proudu procházejícího primárním vinutím a zvětší se magnetická indukce uvnitř primárního vinutí. Na primárním vinutím se bude indukovat napětí, směřující **proti zvýšení** napětí. Potud je popis vlastností zkratované cívky

shodný s popisem vlastností cívky nezkratované. Avšak magnetická indukce se zároveň zvětšila i v sekundárním vinutím a tedy i na něm se bude indukovat napětí, opačného směru než původní vzrůst napětí, a sekundárním vinutím začne procházet proud opačného směru



Obr. 5

než v primárním vinutí (tento proud bude poměrně velký, neboť sekundární vinutí je zkratováno; bude pouze omezován odporem sekundárního vinutí). Tento proud ovšemže snižuje magnetickou indukci vznikající v primárním vinutí (lépe řečeno vytváří magnetickou indukci opačného směru). To má za přímý následek indukci napětí na primárním vinutí směřujícího **shodně s původním** zvýšením napětí. Samozřejmě nyní lze celou úvahu několikrát zopakovat. Jaký tedy z těchto kvalitativních úvah plyne závěr? Zkratovaná cívka bude mít menší indukčnost než obdobná cívka s 57 závitů. Bude jí procházet větší proud ($Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$) s menším fázovým posunem ($\Delta\varphi = \arctg \frac{L\omega}{R}$). Cívka odebírá ze zdroje větší energii (větší proud i účinnost), která se použije k pokrytí ztrát vzniklých v sekundárním vinutí.

Daniel Král'

Úloha III.6 ... optické vlastnosti vody (7 bodů, řešilo 51 studentů)

Obecný teoretický úvod společný všem metodám

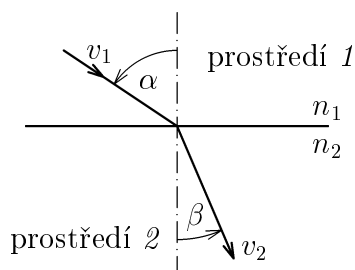
Nechceme opisovat učebnice, avšak na základních pojmech a vztazích je nutné se v teorii dohodnout.

Měřit budeme absolutní index lomu vody, který je definován poměrem $n = c/v$, kde c je rychlost světla ve vakuu, v je rychlost světla ve vodě.

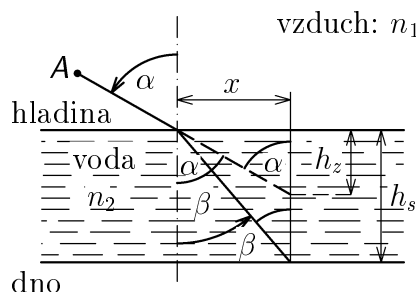
Základním fyzikálním vztahem popisujícím lom z prostředí 1 do prostředí 2 je tzv. Snellův zákon (viz obr. 6):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (26)$$

kde α je úhel dopadu na rozhraní, β je úhel lomu, v_1 (resp. v_2) je rychlost světla v prostředí 1 (resp. 2), n_1 (resp. n_2) je index lomu prostředí 1 (resp. 2).



Obr. 6



Obr. 7

Na vodorovné dno nádoby s vodou položíme předmět a pozorujeme jej z bodu A nad hladinou (obr. 7). Vzdálenost od hladiny, ve které by předmět musel ležet, abychom jej po vypuštění vody pozorovali z bodu A na téže místě, jako když v nádobě byla voda, označme h_z . Skutečnou hloubku předmětu označme h_s .

Podle obrázku 7 platí:

$$\frac{x}{h_z} = \sin \alpha, \quad \frac{x}{h_s} = \sin \beta. \quad (27)$$

Odtud snadno plyne

$$\frac{h_s}{h_z} = \frac{1}{\frac{h_z}{h_s}} = \frac{x}{\frac{x}{h_s}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad (28)$$

příčemž podle Snellova zákona

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (29)$$

kde n_2 je index lomu vody, n_1 vzduchu. Tedy

$$\frac{h_S}{h_Z} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (30)$$

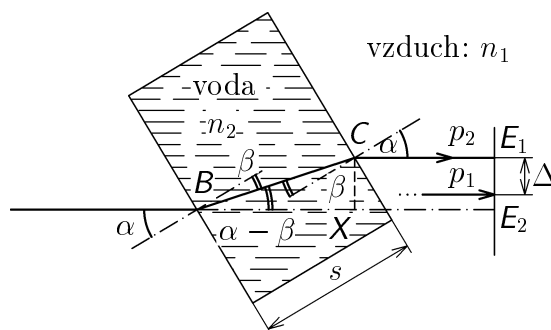
Nakonec uveďme, co nám prorokuje teorie – ta říká, že libovolnou metodou bychom měli naměřit $n = n_{vody} \in \langle 1,329; 1,344 \rangle$ pro vlnové délky viditelného světla. V dalším výkladu budeme občas využívat znalosti indexu lomu vzduchu n_1 . Protože n_1 je velmi blízký jedné (např. pro žluté sodíkové světlo se uvádí $n_1 = 1,000292$), dopustíme se zaokrouhlením $n_1 \doteq 1$ chyby řádově mnohem menší, než bude systematická chyba našich měření.

Uvádíme 4 metody měření, z nichž první je zpracována pořádně a další jsou zkrácené (nejsou uvedeny tabulky naměřených hodnot, ale jen shrnuté výsledky).

Metoda 1 (Měření, které vejde do dějin)

Teorie: Laserové ukazovátko namíříme kolmo na zeď a do cesty mu postavíme obdélníkovou nádobu, zatím bez vody (obr. 8). Na zeď nalepíme milimetrový papír. Bod, do něhož dopadá střed paprsku, označíme křížkem. Pak nalijeme do nádoby vodu a na milimetrovém papíře vyznačíme novou polohu paprsku.

Vzdálenost obou značek na milimetrovém papíře označíme $\Delta = |E_1 E_2|$. Z rovnoběžnosti stěn nádoby plyne rovnoběžnost paprsku p_1 vycházejícího z prázdné nádoby s paprskem p_2 z plné nádoby. Laskavý (i nelaskavý) čtenář sám odvodí, že průchod paprsku stěnami nemá žádný vliv na veličinu Δ . Určeme obecně Δ bez uvažování stěn nádoby (viz obr. 8). Vnitřní šířka nádoby je s . Z pravoúhlého trojúhelníka BXC je $\frac{\Delta}{s} = \sin(\alpha - \beta)$, a tedy $\beta = \alpha - \arcsin \frac{\Delta}{s}$. Ze Snellova zákona



Obr. 8: Půdorys

$$n_2 = n_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \left(\alpha - \arcsin \frac{\Delta}{s} \right)}, \quad (31)$$

kde položíme $n_1 = 1$, jak odůvodněno výše.

Naměřené hodnoty:

Měření	α/grad	Δ/cm	n	Δn
1	44	2,2	1,53	0,06
2	54	2,8	1,53	0,06
3	52	2,7	1,54	0,05
4	39	1,5	1,36	0,23
5	58	4,1	1,99	0,40

Šířka nádoby byla $s = (8,5 \pm 0,3) \text{ cm}$.

Střední hodnota $\bar{n} = 1,59$, průměrná chyba $\overline{\Delta n} = 0,16$. Systematická chyba je způsobena těmito vlivy: chyba při měření Δ na milimetrovém papíře je $\pm 2 \text{ mm}$, chyba při měření α je $\pm 0,5 \text{ grad}$, chyba při měření vzdálenosti stěn nádoby je $\pm 3 \text{ mm}$. Odtud $\sigma_{SYS} = 0,15$.

Diskuse: Námi naměřené hodnoty neodpovídají tabulkovým údajům. Příčinu této skutečnosti spatřujeme v nedokonalé rovnoběžnosti stěn nádoby, kterážto skutečnost unikla při měření naší pozornosti. Velká chyba plyne také z obtížného určení středu dopadajícího paprsku na milimetrový papír, neboť se paprsek při průchodu nádobou a vodou značně rozptyluje. Chyba měření úhlu je proti těmto chybám zanedbatelná. Měření č. 5 je patrně hrubou chybou (způsobenou spícími experimentátory). Korekci na nerovnoběžnost stěn zpřesněním teorie zřejmě není možné provést. Proto křivost stěn zahrneme do celkové systematické chyby, kterou odhadneme na $\delta_{YS} = 0,3$.

Závěr: Realizace této metody v našich podmínkách nedává výsledky s uspokojivou přesností. Kdybychom měli nádobu, jejíž stěny bychom mohli považovat za rovné a rovnoběžné s dostatečnou přesností, dosáhli bychom uspokojivé přesnosti měření.

Metoda 2 (Bystrozraký a Krátkozraký)

Teorie: Do kýblu nalijeme do výšky H ode dna vodu a na dno položíme minci. Identickou mincí pohybuje ve vertikálním směru ve vzdušném prostoru stranou kýblu, dokud nejsme přesvědčeni, že obě mince jsou stejně hluboko. Následně změříme hloubku mince vedle kýblu. Podle vztahu (30) je

$$n_2 = \frac{h_S}{h_Z} n_1 \approx \frac{h_S}{h_Z}, \quad (32)$$

kde h_S je skutečná hloubka mince v kýblu, h_Z vzdálenost mince vedle kýblu od hladiny, n_2 je index lomu vody, n_1 vzduchu.

Obávali jsme se, že měření zdánlivé hloubky bude do značné míry subjektivní, proto jsme je provedli každý zvlášť desetkrát a výsledky jsme zpracovali také samostatně.

Měření všech délek jsme prováděli pravítkem s dílkem stupnice 1mm.

Naměřené hodnoty:

V obou případech byla skutečná hloubka $h_S = (20,5 \pm 0,2)$ cm.

Martinův výsledek: $n_2 = 1,37 \pm (0,04 + \text{chyba systematická})$.

Matoušův výsledek: $n_2 = 1,60 \pm (0,03 + \text{chyba systematická})$.

Diskuse: Větší přesnosti odhadu dosáhneme, pokud odhadujeme, kdy se nám zdá mince být na dně nádoby. Měření vyžaduje jistou zkušenost experimentátora v odhadování. Všimněte si, že nám vyšly každému výrazně jiné výsledky. Právě jsme se v praxi setkali s chybou osobní systematickou. (Pozn. M. J.: není to chyba moje – třeba že bych snad šilhal –, nýbrž chyba metody.) Chybu lze snížit použitím velkého počtu osob.

Porovnáme-li naměřené hodnoty s tabulkovým údajem $n \approx 1,33$, zjistíme, že systematická chyba bude značná – aspoň 0,3.

Závěr: Metodou 2 lze změřit index lomu vody s nevalnou přesností, zvláště má-li experimentátor špatný odhad pro malé vzdálenosti. Měření je hodně subjektivní, a proto může být velmi nepřesné.

Metoda 3 (Odraz úplný, naprostý a totální)

Teorie: Při průchodu světla z prostředí opticky hustšího do prostředí opticky řidšího se paprsek láme od kolmice. Existuje tzv. mezní úhel dopadu γ'_m , pro který je úhel lomu $\delta = 90^\circ$. Pro úhel dopadu $\gamma > \gamma'_m$ se paprsek již neláme, nýbrž úplně odráží od rozhraní.

Postup měření: Do průhledné nádoby s alespoň jednou svislou rovnou stěnou nalijeme vodu do vhodné výšky. Ze strany pak svítíme laserovým ukazovátkem pod úhlem α . Světlo se nejprve láme ze vzduchu do stěny nádoby (bod A), pak ze skla do vody v bodě B, a nakonec z vody do vzduchu (bod C) – viz obr. 9.

Nyní ukážeme, že namísto dvou lomů v bodě A a B stačí uvažovat pouze jeden lom, a to ze vzduchu přímo do vody. Zdůrazněme, že se nejedná o žádné „zanedbání“.

Nechť $n_1 \dots$ index lomu vzduchu, $n_2 \dots$ index lomu skla, $n_3 \dots$ index lomu vody, $\alpha \dots$ úhel dopadu na stěnu nádoby, $\beta \dots$ úhel lomu ze vzduchu do skla a úhel dopadu ze skla na rozhraní sklo-voda, $\gamma \dots$ úhel lomu ze skla do vody.

Ze Snellova zákona platí

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{n_3}{n_2}. \quad (33)$$

Z těchto rovnic plyne

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_3}{n_1}, \quad (34)$$

což je však totéž, jako kdybychom napsali Snellův zákon pro rozhraní vzduch-voda bez uvažování skleněné stěny. Pro výpočet úhlu γ tedy nemusíme existenci stěny uvažovat (to však neplatí, pokud úhly určujeme pomocí měření vzdáleností!)

Na obr. 9 je znázorněna nádoba s vodou – řez je totožný s rovinou, v níž je paprsek.

Podle obr. 9 platí $\gamma'_m = 90^\circ - \gamma$. Ze Snellova zákona v bodě C platí

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \gamma'_m} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ - \gamma)} = \frac{1}{\cos \gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}}. \quad (35)$$

Pro první lom ze vzduchu do vody jsme již zdůvodnili vztah

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_3}{n_1}. \quad (36)$$

Index lomu vzduchu lze nahradit jedničkou, jak řečeno výše. Z rovnic (35), (36) plyne

$$\frac{\sin \alpha}{n_3} = \sin \gamma, \quad \frac{1}{n_3} = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma}, \quad (37)$$

a odtud po úpravách

$$n_3 = \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}. \quad (38)$$

Vidíme, že index lomu vody n_3 ve vztahu (38) závisí pouze na prvním úhlu dopadu α , na ničem jiném. Budeme tedy měřit jen úhel α . Abychom zmírnili osobní chyby, měřili jsme každý úhel postupně oba.

Index lomu vody n_3 ve vztahu (38) závisí pouze na prvním úhlu dopadu α , na ničem jiném. Budeme tedy měřit jen úhel α . Abychom zmírnili osobní chyby, měřili jsme každý úhel postupně oba.

Naměřené hodnoty:

Střední hodnota $\bar{n} = 1,320$.

Chyba standardní $\sigma(n) = 0,004$, k hrubé chybě nedošlo.

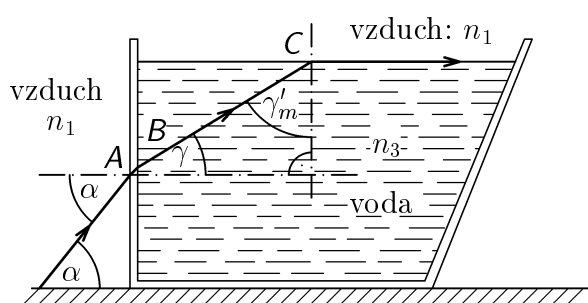
Chyba směrodatná $\sigma(\bar{n}) = 0,001$.

Chyba systematická $\sigma_{SYS} = 0,03$.

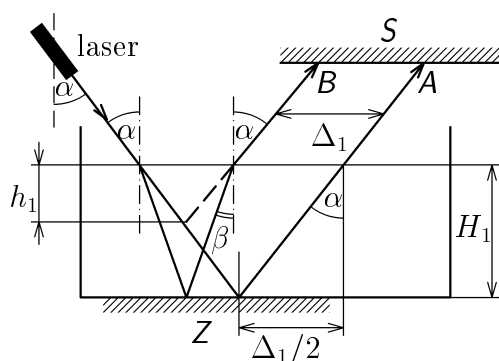
Index lomu $n = 1,32 \pm 0,03$.

Diskuse: Při prvním měření jsme zjistili, že je těžké najít úhel, kdy dochází k úplnému odrazu. Proto jsme zavedli jisté korekce představující úhel lomu φ do vzduchu. Tento úhel jsme určovali měřením vzdálenosti v pravoúhlém trojúhelníku. Vzhledem k tomu, že největší odchylka φ od 90° byla 1° , jsou tyto chyby zanedbatelné ve srovnání s ostatními systematickými chybami. Nebudeme vás proto Krskovou–Jirákovou teorií korekcí zatěžovat. Systematická chyba měření klesá s rostoucími rozměry nádoby, neboť pak lze přesněji určit mezní úhel.

Závěr: V rámci chyby odpovídá změřený index lomu tabulkové hodnotě. Tato metoda je nejpřesnější z námi použitých.



Obr. 9



Obr. 10

Metoda 4 (Odraz v hloubi hrnce)

Teorie: Kromě zákona lomu (viz obecná teorie v úvodu) použijeme ještě zákon odrazu, který říká, že úhel odrazu má stejnou velikost jako úhel dopadu.

Do hrnce hlubokého a širokého (bystrozrakého už nikoliv) umístíme na dno rovinné zrcátko bd Z vodorovně (viz obr. 10). Zrcátko fixujeme dvěma lahvemi od Gambrinusu plnými vody, aby se během pokusu nepohnulo. Do hrnce nalijeme do výšky H_1 vodu tak, aby zrcátko bylo pod vodou, ale nádoba nebyla příliš plná.

Pod úhlem α nasměrujeme do hrnce laserový paprsek, aby po odrazu od zrcátka dopadl na stínítko S tvořené milimetrovým papírem. Když v hrnci nebyla ještě žádná voda, dopadl paprsek odražený od zrcátka do bodu A . V hrnci s vodou však došlo též k lomu a paprsek dopadl až do bodu B . Označme $|AB| = \Delta_1$. Platí (viz obr. 10)

$$\frac{\Delta_1}{2} \frac{1}{H_1 - h_1} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (39)$$

kde H_1 je skutečná hloubka nádoby (od hladiny k zrcadlu) a h_1 je zdánlivá hloubka.

V úvodní teorii jsme však odvodili vztah pro skutečnou a zdánlivou hloubku

$$\frac{H_1}{h_1} = \frac{n_{\text{vody}}}{n_{\text{vzduchu}}} \rightarrow h_1 = \frac{H_1}{n_{\text{vody}}}, \quad (40)$$

jestliže nahradíme n_{vzduchu} jednotkou, což při naší přesnosti smíme. Dosazením (40) do (39) máme:

$$\frac{\Delta_1}{2H_1 \left(1 - \frac{1}{n_{\text{vody}}}\right)} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (41)$$

a odtud

$$\Delta_1 = 2H_1 \left(1 - \frac{1}{n_{\text{vody}}}\right) \operatorname{tg} \alpha. \quad (42)$$

Nyní dolijme do nádoby ještě nějakou vodu a posun paprsku do bodu C na stínítku popíšeme vzdáleností $|AC| = \Delta_2$. Analogicky jako v předchozím případě platí

$$\Delta_2 = 2H_2 \left(1 - \frac{1}{n_{\text{vody}}}\right) \operatorname{tg} \alpha, \quad (43)$$

kde H_2 je vzdálenost nové hladiny od zrcadla.

Měřit budeme vzdálenost bodů B a C , tj. polohu paprsku na milimetrovém papíře pro dvě různé hloubky H_1, H_2 . Platí zřejmě $\Delta = |BC| = \Delta_2 - \Delta_1 = 2(H_2 - H_1) \left(1 - \frac{1}{n_{\text{vody}}}\right) \operatorname{tg} \alpha$,

odkud

$$n_{vody} = \frac{2(H_2 - H_1) \operatorname{tg} \alpha}{2(H_2 - H_1) \operatorname{tg} \alpha - \Delta}. \quad (44)$$

Úhel α jsme měřili úhloměrem (v gradech), délky H_1, H_2 pomocí pravítka, Δ pomocí milimetrového papíru.

Naměřené hodnoty: Pro celkovou časovou složitost pokusu jsme provedli jen 2 měření. Systematickou chybu odhadujeme na $\sigma_{SYS} = 0,1$ (nevodorovné zrcátko, určení středu paprsku, měření úhlu ($\pm 0,5$ grad), měření hloubky (± 1 mm)).

Index lomu vody $n = 1,44 \pm 0,12$.

Diskuse: Systematická chyba měření je poměrně velká; je způsobena zejména nevodorovností zrcátka v naší konkrétní realizaci. Tabulkové hodnotě však výsledek v rámci chyby odpovídá. Chybu lze zmírnit použitím hlubšího a širšího hrnce, neboť Δ je úměrné H_2 a $\operatorname{tg} \alpha$.

Závěr: Výsledek měření odpovídá teorii. Měření nás přivedlo na nápad, jak efektivně zmenšit chyby při měření úhlů asi o 10%: stačí měřit všechny úhly v gradech.

Celkový závěr

Nejpřesněji se nám povedlo realizovat metodu 3. Měli jsme přitom jistou výhodu, že jsme mohli použít (a použili) laser. Metod, jak změřit index lomu, existuje mnoho desítek a nemohli jsme pochopitelně zkoušet všechny. Chtěli bychom však říci, že laser rozhodně k pokusu potřeba nebyl. Vy jste se s problémem zdroje vyrovnali celkem třemi různými způsoby:

- 1) vytvořili jste si dobrý zdroj z nějakého svítidla (pomocí clony jste vyrobili zdroj bodový),
- 2) sehnali jste si laser jako my,
- 3) vymysleli jste pokus tak, aby bodový zdroj nebyl potřeba (pozorovali jste pod nějakým úhlem značku v hrnci apod.).

Většina řešení se nám líbila, co se nám nelíbilo, to jsme někdy až trochu hnidopišsky připsali přímo do vašich řešení. Z autorského řešení metody 1 a obecného úvodu si můžete vzít poučení, co patří do jednotlivých částí vyhodnocení měření, např. jak má vypadat diskuse.

Doufáme, že jste se při experimentování pobavili přinejmenším tak jako my a přejeme vám hodně štěstí při nových epochálních pokusech.

Martin Krsek & Matouš Jiráček

Řešení úlohy S. 3 ... Venuše (4 body, řešilo 27 studentů)

Tato úloha, stejně jako předchozí, nebyla nijak těžká a sloužila k ověření si, do jaké míry jste pochopili látku probíranou v SNP. Postup řešení je popsán právě v 3. kap. SNP, takže se zaměřím na nejčastější chyby a problémy.

Pro mnohé z vás bylo velice tvrdým oříškem určit střední anomálie Země a Venuše pro $t_1 = 24.8.1988$. Podle 2. kap. SNP se střední anomálie M vyjádřená v **radiánech** v čase t rovná

$$M = 2\pi(t - t_p)/T, \quad (45)$$

kde T je oběžná doba dané planety a t_p je okamžik průchodu periheliem. Ze zadané hodnoty M_0 v čase $t_0 = 18.7.1988$ vyjádříme neznámou dobu průchodu periheliem t_p . Nakonec pro M_1 dostaneme

$$M_1 = 2\pi \frac{\Delta t}{T} + M_0, \quad (46)$$

kde $\Delta t = t_1 - t_0$ (v našem případě $\Delta t = 37$ dní). Ještě potřebujeme znát oběžnou dobu T_V Venuše. Tu však hravě získáme z III. Keplerova zákona

$$T_V = T_Z \left(\frac{a_V}{a_Z} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (47)$$

číselně pak $T_V = 224,7002$ dne. Pro střední anomálie Země M_Z a Venuše M_V nakonec dostaneme tyto hodnoty:

$$M_V = 4,282169 \text{ rad}, \quad M_Z = 4,009211 \text{ rad}. \quad (48)$$

Dalším krokem pak bylo spočítat pravouhlé souřadnice (x, y, z) těchto planet v rovině jejich oběhu. Této problematice byla věnována 2. kap. SNP a bylo to i předmětem minulého příkladu. Nejčastější chybou zde bylo, že jste řešili Keplerovu rovnici ve stupních a ne v radiánech. Číselné hodnoty jsou:

$$\begin{aligned} x_V &= -0,3106310 \text{ AU}, & x_Z &= -0,6729527 \text{ AU}, \\ y_V &= -0,6555319 \text{ AU}, & y_Z &= -0,7544617 \text{ AU}, \\ z_V &= 0,0000000 \text{ AU}, & z_Z &= 0,0000000 \text{ AU}. \end{aligned} \quad (49)$$

Potom následuje série otočení daných vztahy (28), (29) a (30) z 3. kap. seriálu. Jejich výsledkem je:

$$\begin{aligned} X_V &= +0,6946958 \text{ AU}, & X_Z &= +0,8859994 \text{ AU}, \\ Y_V &= +0,2055145 \text{ AU}, & Y_Z &= -0,4869115 \text{ AU}, \\ Z_V &= -0,0373047 \text{ AU}, & Z_Z &= -0,0000088 \text{ AU}. \end{aligned} \quad (50)$$

Souřadnice Venuše vzhledem k Zemi pak jsou

$$X_0 = -0,1913032 \text{ AU}, \quad Y_0 = 0,6924260 \text{ AU}, \quad Z_0 = -0,0372959 \text{ AU}. \quad (51)$$

Nyní už můžeme určit vzdálenost Venuše od Země,

$$R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} = 0,71933 \text{ AU}. \quad (52)$$

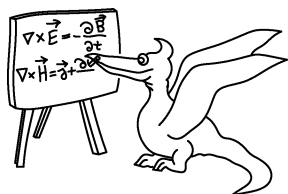
Často jste dělali chyby při výpočtu ekliptikálních (i rovníkových) souřadnic. Spočetli jste si buď $\cos \lambda$ a nebo $\sin \lambda$ a z této jedné hodnoty jste pak určovali ekliptikální délku λ . Rád bych vás upozornil, že rovnice $\sin \lambda = 0,5$ má na intervalu $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$ řešení dvě ($\lambda = 30^\circ$ a $\lambda = 150^\circ$) a ne pouze to jedno, které ukáže vaše kalkulačka. Abychom mohli rozhodnout, které z nich odpovídá správné ekliptikální délce, musíme znát i hodnotu $\cos \lambda$, respektive nám k vyloučení jedné z těchto hodnot stačí znát pouze znaménko $\cos \lambda$. Výsledné hodnoty ekliptikálních souřadnic Venuše jsou: $\lambda = 105^\circ 26' 40''$ a $\beta = -2^\circ 58' 19''$.

Trochu větší problém nastal u rovníkových souřadnic. Základní rovinou tohoto souřadného systému je rovina zemského rovníku (viz 1. kapitola SNP). Proto musíme určit kartézské souřadnice Venuše vzhledem k soustavě, kde X -ová osa leží ve směru k jarnímu bodu a rovina rovníku splývá s rovinou XZ . Tyto souřadnice (X_0^R, Y_0^R, Z_0^R) dostaneme z (X_0, Y_0, Z_0) pootočením kolem osy X o úhel $-\varepsilon$ (viz 3. kapitola SNP):

$$\begin{aligned} X_0^R &= X_0, \\ Y_0^R &= Y_0 \cos \varepsilon - Z_0 \sin \varepsilon, \\ Z_0^R &= Y_0 \sin \varepsilon + Z_0 \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (53)$$

Výsledné rovníkové souřadnice rektasence α a deklinace δ se z těchto souřadnic obdrží naprosto stejným způsobem, jako λ a β z (X_0, Y_0, Z_0) . Číselné hodnoty jsou: $\alpha = 7^h 05^m 37^s$ a $\delta = 19^\circ 39' 03''$. Většinou jste si pak správně zjistili, že souřadnice na hvězdných mapách jsou právě rovníkové, a že se tedy Venuše v tuto dobu nacházela v souhvězdí Blíženců.

Alexander Kupčo



Seriál na pokračování

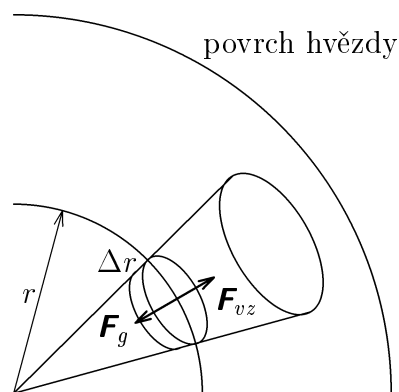
Kapitola 5: Modely hvězd I

V dnešním Seriálu na pokračování si povíme něco o modelech hvězd. Omezíme se jen na ty hvězdy, a těch je většina, které se nacházejí v klidném období svého života, nemají magnetické pole, nerotují rychle a nemění svoje rozměry. Naše úvahy budou s dostatečnou přesností platit i pro hvězdy s pomalými změnami vnitřní stavby.

Při vysokých teplotách, jaké mají hvězdy, není možné jiné skupenství látky než částečně nebo zcela ionizovaný plyn – plazma. Fyzikální podmínky v nitru hvězd, teplota, tlak, hustota apod., budou za vyslovených předpokladů záviset jen na vzdálenosti r od středu hvězdy. Soubor funkcí $T(r)$, $p(r)$, $\rho(r)$ určuje model hvězdy. Řešením soustavy diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami můžeme zjistit tvar těchto funkcí. My se zde omezíme pouze na kvalitativní odhady, pomocí kterých si můžeme vytvořit představu o zákonitostech, které určují vnitřní stavbu hvězd. V praxi to znamená, že budeme zanedbávat faktory řádu jednotek (jako například faktor $4\pi/3$ ve vztahu (57)) a že rovnice, které platí jen pro malé změny vzdálenosti Δr , budeme aplikovat na případy, kdy Δr položíme rovno poloměru Slunce R_{\odot} .

Ve stabilní hvězdě musí být v každém místě jejího nitra rovnováha mezi gravitační a vztlakovou silou. Na vztlakové síle se podílí hlavně tlak plynu, teprve při teplotách uvnitř velmi žhavých hvězd se uplatní tlak záření. Uvažujme malý objem v nitru hvězdy (viz obr. 11), který je vzdálen r od jejího středu, s podstavou o obsahu ΔS a výškou Δr . Plyn v něm obsažený má hustotu $\rho(r)$ a hmotnost $\rho(r)\Delta S\Delta r$. Tento váleček je do středu hvězdy přitahován pouze látkou o hmotnosti $M(r)$ v kouli o poloměru r (viz příklad S . V). Velikost gravitační síly působící na váleček vyjádříme jako

$$F_g = \kappa \frac{M(r)\rho(r)\Delta S\Delta r}{r^2}. \quad (54)$$



Obr. 11

Příčinou vztlakové síly je ta skutečnost, že tlak roste se zmenšující se vzdáleností od středu. Na spodní podstavu válečku pak působí větší tlaková síla než na podstavu horní. Ve stavu rovnováhy gravitační síla zvýší tlak na spodní podstavu o Δp , kde

$$\Delta p = -\kappa \frac{M(r)\rho(r)\Delta r}{r^2}. \quad (55)$$

Znaménko minus vyznačuje opačnou orientaci sil. Vztah (55) se nazývá **rovnice hydrostatické rovnováhy**. Hmotnost koule $M(r)$ obdržíme sečtením hmotností všech kulových slupek (přesněji integrací rovnice (56)). Hmotnost takovéto slupky $\Delta M(r)$ je dána jako

$$\Delta M(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \Delta r. \quad (56)$$

Podle rovnice hydrostatické rovnováhy můžeme odhadnout tlak p_c ve středu Slunce tak, že položíme Δr rovno poloměru Slunce R_{\odot} . Hustotu $\rho(r)$ nahradíme střední hustotou

$$\bar{\rho} \approx \frac{M_{\odot}}{R_{\odot}^3}. \quad (57)$$

Potom $\Delta p = p(R_\odot) - p(0) = -p_c$, protože tlak $p(R_\odot)$ na povrchu Slunce je nulový:

$$p_c \approx \kappa \frac{M_\odot^2}{R_\odot^4} = 1,9 \cdot 10^{15} \text{ Pa} \quad (58)$$

Ve skutečnosti se tlak ve středu Slunce rovná $2,2 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$ (poloměr Slunce $R_\odot = 700 \cdot 10^3 \text{ km}$).

Plazma v námi uvažovaných hvězdách má vlastnosti ideálního plynu. Její stavová rovnice je $p = nkT$, kde k je Boltzmannova konstanta a n je hustota částic, přičemž za částice považujeme volné elektrony a kladné ionty. Předpokládejme, že látka uvnitř hvězdy se skládá jen z ionizovaných atomů vodíku, tj. elektronů a protonů. V této látce na dvě částice připadá hmotnost protonu m_p , tudíž platí

$$n = \frac{2\rho}{m_p}. \quad (59)$$

Po dosazení za průměrnou hustotu látky ze vztahu (57) získáme

$$\bar{n} = M_\odot / (m_p R_\odot^3). \quad (60)$$

Tlak v centru Slunce vyjádřený ze stavové rovnice je pak

$$p_c \approx \frac{M_\odot}{m_p R_\odot^3} k T_c. \quad (61)$$

Z porovnání výrazů (58) a (61) plyne pro teplotu T_c uvnitř Slunce:

$$T_c \approx \frac{\kappa M_\odot}{R_\odot} \frac{m_p}{k} = 23 \cdot 10^6 \text{ K}. \quad (62)$$

Skutečná hodnota je $15 \cdot 10^6 \text{ K}$.

Zatím máme pro tři neznámé funkce $p(r)$, $T(r)$ a $\rho(r)$ pouze dvě rovnice: rovnici hydrostatické rovnováhy (55) a stavovou rovnici plazmy. Ještě tedy nemůžeme počítat modely hvězd. O dalším chybějícím článku si povíme něco příště.

Úloha S. V ... hvězdy

1) Zkuste jednoduše zdůvodnit, proč je gravitační síla působící na těleso o hmotnosti m ve vzdálenosti r od středu izotropní koule o poloměru $R > r$ daná pouze hmotou $M(r)$ obsaženou v kouli o poloměru r a proč je rovna $F_g = \kappa m M(r) / r^2$, tj. jakoby byla celá hmota $M(r)$ soustředěna v centru.

2) Existuje jistá skupina tzv. **polytropních** modelů hvězd, které jsme již schopni počítat. V těchto modelech se předpokládá závislost tlaku p na hustotě ρ ve tvaru $p = C\rho^\gamma$ (tzv. rovnice polytropie). Speciálním případem polytropie je adiabata (pro $\gamma = 4/3$), izoterma (pro $\gamma = 1$) a izobara (pro $\gamma = 0$). Pro funkce $p(r)$ a $\rho(r)$ tak máme, spolu s rovnicí hydrostatické rovnováhy, rovnice dvě a můžeme z našich úvah vyloučit teplotu. Odhadněte, stejným způsobem jako v seriálu, vztah mezi hmotností hvězdy M a jejím poloměrem R . Určete, pro které hodnoty parametru polytropie γ je hvězda stabilní.

**Naše adresa: FKS, KTF MFF UK
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha**