

Milí řešitelé,

právě dostáváte do rukou řešení posledních dvou letošních sérií a konečnou výsledkovou listinu. Jsme rádi, že jste vytrvali až do konce, že jste pilně řešili, vymýšleli netradiční postupy a naučili se i ty tradiční. S těmi mladšími se těšíme nasledanou opět v září u XII. ročníku Fykosu a s čerstvými maturanty se možná setkáme u nás na MFF UK a přivítáme je mezi organizátory Fykosu. Hezké prázdniny!

Jan Hradil & Jiří Franta

**Řešení V. série****Úloha V.1 ... dvojpíst (4 body, řešilo 40 studentů)**

Nejprve si vyjádříme tlak p uvnitř dvojpístu. Na dvojpíst působí okolní vzduch silou o velikosti $p_a(S_1 - S_2)$ dolů a plyn uvnitř dvojpístu působí na něj silou o velikosti $p(S_1 - S_2)$ nahoru. Dále na něj působí tíhová síla o velikosti mg . Tedy platí:

$$p(S_1 - S_2) = mg + p_a(S_1 - S_2)$$

$$p = p_a + \frac{mg}{S_1 - S_2}$$

Označme p , V a T tlak, objem a teplotu plynu před začátkem ohřívání a p' , V' a T' po ohřátí plynu. Ze stavové rovnice plyne:

$$nR = \frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'}$$

Jestliže i po ohřátí bude soustava v rovnováze, musí platit $p' = p_a + mg/(S_1 - S_2)$ a tedy i $p = p'$. Objem se posunutím pístu zvětšil o $(S_1 - S_2)x$, tedy platí $V' = V + (S_1 - S_2)x$. Teplota se zvýšila o ΔT , tedy $T' = T + \Delta T$. Dosazením do stavové rovnice získáme:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p(V + (S_1 - S_2)x)}{T + \Delta T}$$

$$V\Delta T = T(S_1 - S_2)x$$

Ze stavové rovnice spočteme T a dosadíme do posledního vztahu:

$$T = \frac{pV}{nR}$$

$$\Delta T = \frac{p}{nR}(S_1 - S_2)x = \left(\frac{p_a}{nR} + \frac{mg}{(S_1 - S_2)nR} \right) (S_1 - S_2)x = \frac{p_a(S_1 - S_2) + mg}{nR}x$$

Daniel Král

Úloha V.2 ... hradní studna (4 body, řešilo 54 studentů)

Nejprve zde ukáží nejjednodušší model popsané situace a pak budu diskutovat jeho vhodnost pro náš problém, možná vylepšení a nakonec i zadáním požadovanou chybu měření.

V prvním přiblížení můžeme brát, že kámen padá do hloubky studny h volným pádem s tíhovým zrychlením g po dobu t_1 a poté za čas t_1 dorazí zvuk ze dna k uchu pozorovatele. Student potom naměří na stopkách čas t , který je roven součtu $t = t_1 + t_2$, při označení rychlosti zvuku jako v můžeme psát

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}.$$

Poslední vztah snadno jednoduchými matematickými úpravami převedeme na kvadratickou rovnici

$$h^2 + h \left(\frac{-2tv - 2v^2}{g} \right) + v^2 t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = tv + \frac{v^2}{g} \pm \frac{1}{g} \sqrt{v^4 + 2v^3 gt}.$$

Ze dvou kořenů této rovnice má fyzikální smysl ten menší (neboť ten větší by dával h větší než délku vt , což není možné), proto řešením naší úlohy je

$$h = tv + \frac{v^2}{g} - \frac{1}{g} \sqrt{v^4 + 2v^3 gt}.$$

Pokud nyní dosadíme číselné hodnoty, dostaneme $h = 98,6$ m (závisí na tom, v jakých tabulkách hledáme příslušné konstanty).

Předcházející model nám ukazuje nejjednodušší způsob, jak se k úloze postavit. Provedli jsme však při něm mnohá zanedbání. Záleží samozřejmě na fyzikálním citu, co zanedbat lze a co naopak může výsledek ovlivnit viditelněji.

- Při výpočtu jsme neuvažovali odpor vzduchu. Pokud se pokusíme tuto skutečnost uvážit, je důležité umět si vybrat, který ze vztahů pro odporovou sílu je vhodné použít. Fyzika nám zde nabízí vzorce Newtonův, Stokesův, Karmánův ..., každopádně každý z nich vyžaduje znát o kameni spoustu parametrů. Pokud se pro náš pád kamene (vzhledem k jeho rychlosti a vlastnostem vzduchu) rozhodneme pro vzorec Newtonův a pokud se pokusíme odhadnout vhodné parametry kamene, může se nám výsledek změnit až o deset metrů (výpočet vede na jednoduchou obyčejnou diferenciální rovnici).

- Při výpočtu jsme též brali rychlost zvuku jako konstantu. To rovněž není tak úplně pravda, neboť rychlost zvuku závisí na teplotě, která zase závisí na hloubce studny. Vzhledem k tomu, že přesněji odhadovat rozložení teploty studny není věc snadná, můžeme se pokusit tento fenomén odhadnout lineárním modelem (tj. závislost rychlosti zvuku na hloubce je lineární funkcí) a po ne příliš komplikovaném výpočtu při vhodných volbách teplot dozná výsledek změny řádově o desítky centimetrů. Takže tento fenomén je vůči ostatním naprosto zanedbatelný.

- Zvídavého řešitele by též mohlo napadnout, zda-li je ve výpočtu vůbec zapotřebí počítat s rychlostí zvuku, tj. jestli nám nepostačí počítat pouze hloubku volného pádu kamene za dobu t . Jednoduchý výpočet by v takovém případě dal hloubku studny přes 110 metrů, takže tento jev se do našeho modelu zahrnout vyplatí.

Nyní se budeme zabývat chybou měření. Uvedený experiment měl několik zásadních chyb. Dle výše uvedených úvah by se nám pro přesnější řešení hodilo zahrnout do výpočtu vliv odporových sil. Pro Newtonův vztah bychom potřebovali znát průřez kamene a něco z jeho geometrie (pro součinitel odporu), bohužel nám je experimentátor nedodal. Další jeho chybou bylo, že prováděl pouze jedno měření.

Pokusíme se odhadnout nyní chybu měření kvantitativně. Nejprve musíme určit chybu při měření času. Ačkoliv jsme dostali naměřený čas s přesností na setiny sekundy ($t = 4,77$ s), není možné brát, že chyba stanovení tohoto údaje byla pět tisícín vteřiny. Ve skutečnosti se na tomto údaji podepsala v nezanedbatelné míře chyba způsobená reakční dobou člověka (tu můžeme u obyčejných lidí odhadnout na $0,1$ s – $0,3$ s, u matfyzáků i na několik hodin). Pokud vezmeme $0,2$ s a budeme-li vycházet z původního bezodporového modelu, snadnými matematickými úpravami (např. spočtením h pro $4,57$ s a $4,97$ s) můžeme dojít k chybě měření až kolem deseti metrů. Výsledek pak můžeme vyjádřit jako $h = (100 \pm 10)$ m.

Radek Erban

Úloha V.3 ... kapacitní krychle (5 bodů, řešilo 25 studentů)

Tato úložka byla spíše odpočinková a rutinní. Za základní „trik“ lze považovat to, že spojíme uzly na stejné hladině potenciálu (tím pádem spojem nepoteče proud, což nám nezmění poměry v obvodu).

Ale od začátku. Při důkladném pohledu na obrázek musíme dojít k závěru, že existují právě tři zapojení krychle do obvodu. Přes hranu, přes stěnovou úhlopříčku nebo přes tělesovou úhlopříčku. To v „klasickém“ obrázku krychle odpovídá zapojení uzlů A–B, A–C či A–G. Nyní již stačí vědět, jakým způsobem se „sčítá“ kapacita kondenzátorů zapojených paralelně

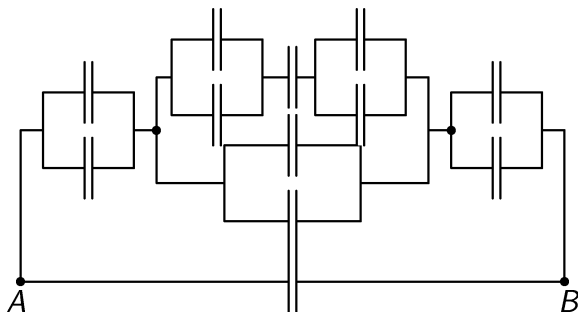
$$C = C_1 + C_2$$

případně sériově

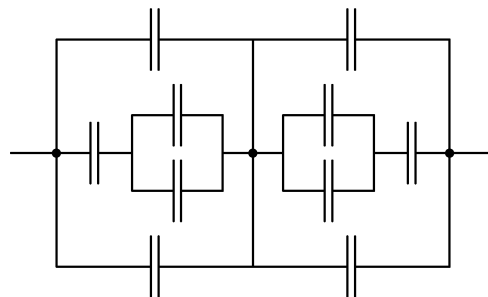
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Proberme nyní jednotlivé možnosti:

A–B Zde se vyplatí spojit vrcholy F–C a E–D. Po chvíli hraní dostaneme zapojení podobné obrázku 1.



Obrázek 1



Obrázek 2

ze kterého s trochou úsilí spočteme celkovou kapacitu krychle.

$$C_{A-B} = \frac{12}{7}C$$

A–C Podobně jako v předchozím případě spojíme vhodné uzly, tj. B–D–F–H. Obdržíme něco jako je na obrázku 2.

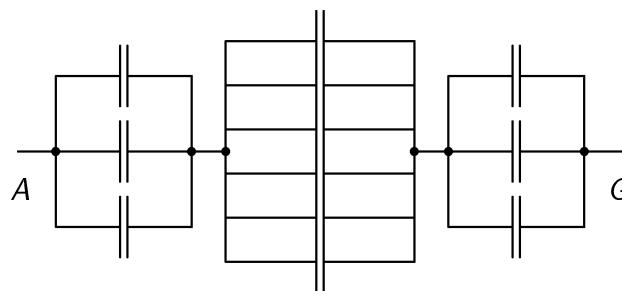
A opět máme řešení raz dva:

$$C_{A-C} = \frac{4}{3}C$$

A–G A do třetice spojíme vrcholy B–D–E a C–F–H. Dostaneme krásné zapojení za obrázku 3.

Z toho máme výsledek:

$$C_{A-G} = \frac{6}{5}C$$



Obrázek 3

Tomáš Drbohlav

Úloha V.4 ... cvičená opice (4 body, řešilo 31 studentů)

Po odstranění banánu začne prkno s míčkem a košíčkem padat dolů. Předpokládáme, že míček je nějakým způsobem na prkénku přichycen a samovolně nespadne. Pokud se bod, na kterém leží míček, bude pohybovat s větším zrychlením než míček, odpojí se míček od prkna. Pokud bude zrychlení míčku větší, začne se kutálet po prkne dolů a bude po atrakci.

Pro náš případ neuvažujeme odpor vzduchu, poloha osy otáčení se nemění (např. prkno je na pantu bez tření), zanedbáme rozměry košíčku a odstranění banánu považujeme za okamžité a předpokládáme, že opice při tom nedá prkénku žádný impuls síly.

Nejprve si tedy spočítáme zrychlení bodu svisele pod míčkem pro každý úhel $\varphi < \Theta$. Začneme pohybovou rovnicí:

$$M = J\varepsilon \quad (1)$$

kde M je moment síly způsobující zrychlení prkna, J je moment setrvačnosti prkna a ε je úhlové zrychlení. Pokud zanedbáme hmotnost košíčku, můžeme podle Steinerovy věty psát:

$$J = J_0 + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}mL^2 \quad (2)$$

kde $J_0 = \frac{1}{12}mr^2$. Pro moment M tíhové síly vůči ose otáčení platí:

$$M = \frac{1}{2}F_G L \cos \varphi \quad (3)$$

kde φ je okamžitý úhel svíraný prknem a podložkou. Dosazením (2) a (3) do (1) dostaneme:

$$\frac{1}{2}g \cos \varphi = \frac{1}{3}L\varepsilon \quad (4)$$

Tečné zrychlení ve vzdálenosti r od osy otáčení lze napsat jako

$$a = r\varepsilon \quad (5)$$

Vzdálenost r se snadno vyjádří jako

$$r = L \frac{\cos \Theta}{\cos \varphi}. \quad (6)$$

Z (6) a (5) tedy plyne:

$$a = L\varepsilon \frac{\cos \Theta}{\cos \varphi} \quad (7)$$

Ze vztahů (4) a (7) potom dostaneme:

$$a = \frac{3}{2}g \cos \Theta \quad (8)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že zrychlení bodu, který se nachází pod míčkem je konstantní v čase a závisí pouze na počátečním úhlu Θ . Podmínku pro úspěšný pád míčku do košíčku můžeme dostat dvěma způsoby.

1. v každém okamžiku pádu musí platit $a \geq g$. Po dosazení za a z (8) dostaneme podmínku.

$$\cos \Theta \geq \frac{2}{3} \quad (9)$$

2. prkénko musí spadnout dříve než míček. Pro dobu pádu prkna (bodů pod míčkem) platí vztah $L \sin \Theta = \frac{1}{2}at_p^2$ a pro dobu pádu míčku platí $L \sin \Theta = \frac{1}{2}gt_m^2$. Po dosazení za a z (8) a předpokladu $t_p \leq t_m$ dostaneme opět podmínku (9).

Pro počáteční úhel tedy musí platit $\Theta \leq 48^\circ 11' 22,87''$.

Vzdálenost košíčku od osy otáčení spočteme velmi jednoduše pomocí goniometrických funkcí pravoúhlého trojúhelníka. Platí tedy:

$$l = L \cos \Theta$$

Jiří Libra

Úloha V.5 ... *samopal* (6 bodů, řešilo 32 studentů)

Nejvýhodnější bude zřejmě střilet na krychli kolmo k úhlopříčce tak, aby ji střely zasáhly v hraně ležící proti hraně, okolo níž se bude krychle natáčet (jelikož krychle po podložce neklouže, můžeme si tam představit třeba pant). Takto letící střely budou mít vůči ose otáčení největší moment hybnosti. Pro jednoduchost uvažujme, že samopalem můžeme v průběhu střelby otáčet tak, aby se moment hybnosti střel neměnil, a že se střely odrážejí, tj. hmotnost krychle je konstantní. Předpokládejme též, že se odrážejí ve směru úhlopříčky, takže jejich výsledný moment hybnosti je nulový. To lze zdůvodnit tím, že rychlost bodu krychle, na nějž střela dopadne, bude malá oproti rychlosti střely, a bude tedy platit zákon dopadu a odrazu.

Při dopadu střely platí zákon zachování momentu hybnosti

$$mv\sqrt{2}a = J\omega_0,$$

kde m je hmotnost střely, v její rychlost, a délka hrany krychle, J moment setrvačnosti krychle vzhledem ke hraně a ω_0 předaná úhlová rychlost. Moment setrvačnosti určíme buď pomocí tabulek a Steinerovy věty, nebo přímou integrací:

$$J = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2) \rho \, dx \, dy \, dz = \rho \left[\left[\left[z \left(\frac{x^3}{3} y + x \frac{y^3}{3} \right) \right]_0^a \right]_0^a \right]_0^a = \rho \frac{2}{3} a^5 = \frac{2}{3} M a^2$$

Krychle tedy na začátku získá úhlovou rychlost ω_0 , po dobu $T = 1/f$, kde f je frekvence střelby (kadence), se pohybuje podle pohybové rovnice pro otáčení v tíhovém poli až do dopadu na podložku, převrácení se nebo přiletu další střely, pak se její rychlost opět skokem změní o ω_0 a tak pořád dokola. Pokud si parametrizujeme polohu krychle úhlem natočení její spodní stěny oproti podložce α , má pohybová rovnice pro ono mezidobí mezi přiletly dvou střel tvar

$$J\ddot{\alpha} = -Mg \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right),$$

kde M je hmotnost krychle. Výraz na pravé straně představuje moment tíhové síly vzhledem k ose otáčení. Tato rovnice je díky přítomnosti goniometrické funkce analyticky neřešitelná, budeme se tedy muset uchýlit k aproximacím. Pokud nahradíme kosinus v prvním přiblížení konstantou $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, redukuje se problém pohybu krychle po přiletu první střely na variaci na téma volný pád. Řešením je

$$\alpha = \omega_0 t - \frac{1}{2} \frac{Mga}{2J} t^2,$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{Mga}{2J} t.$$

Kulminace nastane v čase

$$\tau = \frac{2J\omega_0}{Mga} = \frac{2\sqrt{2}mva}{Mga} = \frac{2\sqrt{2}mv}{Mg}$$

a dopad zpět v čase dvojnásobném. Mezní perioda střelby leží mezi těmito dvěma časy, neboť střela, která přiletí před kulminací krychli určitě převrátí (moment tíhové síly pro

druhou střelu je o trošičku menší než pro první a krychli zbyla ještě nějaká rychlost směrem nahoru), ale střela, která přiletí po dopadu, už bude jenom opakovat to, co dělala ta před ní. Získáváme tak nerovnosti

$$\frac{2\sqrt{2}mv}{Mg} < T < \frac{4\sqrt{2}mv}{Mg},$$

které upravíme na

$$\frac{2\sqrt{2}mv}{Tg} < M < \frac{4\sqrt{2}mv}{Tg}.$$

Číselně $720 \text{ kg} < M < 1440 \text{ kg}$. Zpětným dosazením do výrazu pro α vidíme, že oba dva členy jsou řádu 10^{-3} radiánu, díky čemuž je v tomto oboru hmotností naše aproximace korektní.

Výsledek, který jsme obdrželi, není nijak slavný. Rozmezí je široké a my se můžeme jen dohadovat, zda se skutečná mezní hmotnost bude blížit spíš dolní nebo horní hranici. Pokud prodloužíme naši aproximaci i tam, kde už prokazatelně nemá co dělat, tedy nahradíme skutečný moment tíhové síly konstantou $-Mga/2$ i pro další střely, vidíme, že přírůstek natočení $\Delta\alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$, kde α_n je poloha krychle v okamžiku příletu střely, závisí pouze na počáteční úhlové rychlosti krychle a ta je s rostoucím n menší a menší, přilétají-li střely až za kulminací. V reálném případě bude tedy závislost α_n na n zprvu konkávní a pro hmotnosti blízké 720 kg se krychle dostane tak vysoko, že snížení momentu tíhové síly vlivem natočení tento efekt převáží, závislost se změní na konvexní a krychle přepadne. Numerické řešení (např. v programu Famulus) ukazuje, že skutečná mez leží okolo 740 kg .

Někteří z vás řešili tuto úlohu pomocí zákona zachování energie. To je bohužel špatně. Pokud totiž krychle stačí dopadnout dříve, než ji zasáhne další střela, veškerou získanou energii ztratí a začíná zase od nuly. Při pružné i při nepružné srážce se navíc nepředá krychli celá kinetická energie střely.

Závěrem ještě odpověď dvěma či třem řešitelům, kteří se pozastavili nad parametry zbraně. Ptal jsem se na to, prý existuje letecký kanón GAU 8 s kadencí 70 ran za sekundu nebo protiraketový systém Phalanx s šesti hlavními v jednom svazku a 100 ranami za sekundu.

Dalibor Šmíd

Úloha V.6 ... *pevnost nitě* (8 bodů, řešilo 38 studentů)

Teorie. Pro izotropní materiál je mez pevnosti v tahu definována coby kritické napětí σ_K , při kterém dochází k trvalé deformaci materiálu tahem. Existuje celá složitá teorie, popisující chování látky při působení vnější síly — někteří řešitelé rozvedli na toto téma široké úvahy, což jsem ocenil, zvláště pokud to mělo také co do činění s nitěmi. Nit bohužel není izotropní, ba dokonce ani příliš homogenní (tím míním „stejná“ ve všech bodech měřeného úseku). Mezi pevnosti nitě budeme definovat normálové napětí σ_N , které se v niti nachází v okamžiku, kdy dochází k trvalé deformaci — praskání nitě, porušení vláken. Toto napětí lze určit jako podíl

$$\sigma_N = \frac{F_K}{S}$$

kde F_K je velikost kritické síly, která ve zmíněném okamžiku nit napíná v normálovém směru, S je obsah průřezu nitě v témže okamžiku. σ_N nelze chápat jako mez pevnosti materiálu, z něhož je nit vyrobena. Nit totiž může mít složitou vnitřní strukturu — zpravidla je vyrobena z více paralelních vláken, v lepším případě rovnoběžných a přibližně stejných (v horším případě různých a různě zašmodrchaných — existují i nitě pletené, kde vlákna nejsou rovnocenná a při napínání nitě působí na různá vlákna různé síly).

Metody. K měření σ_N je třeba změřit kritickou sílu F_K a průřez nitě S . Předpokládejme, že nit má na měřeném úseku konstantní průřez. Na nit budeme působit silou, jejíž velikost budeme pomalu zvyšovat. Změříme tak mez pevnosti nejméně odolného úseku měřené nitě.

Nit lze napínat různými silami. Můžeme nit přivázat ke stropu, na její dolní konec upevnit siloměr a za siloměr ručně tahat ve vhodném směru. Špatným nápadem není ani použití nitě coby závěsu matematického kyvadla; při průchodu rovnovážnou polohou působí na nit největší síla (součet tíhové síly závaží a reakční síly na sílu dostředivou). Osobně jsem se přidržel klasičtějšího řešení — na nit jsem zavěsil láhev, do níž jsem velmi pomalu přiléval vodu. Působící síla byla tedy pouze tíhová.

Dále je třeba změřit průřez nitě S . To se dá udělat s poměrně velkou odchylkou pravítkem nebo mikrometrem. Nebo lze užít následující postup: do kapaliny v odměrném válci ponoříme větší množství nitě známé délky. Změříme tak objem nitě a z předpokladu konstantního průřezu máme

$$S = \frac{V}{d}, \quad (10)$$

d je délka nitě, V je objem nitě. Oběma postupy se však měří průřez nitě v nenapjatém stavu. Abychom se vyhnuli problematickému měření napnuté nitě, stanovíme relativní prodloužení ε nitě mezi nenapnutým a napnutým (praskajícím) stavem. Ve vztahu (10) pak použijeme délku $d' = \varepsilon d > d$ místo d .

Vlastní měření. Použil jsem nit, která nebyla pletená. Na nit jsem zavěsil láhev a do lahve jsem pomalu přiléval vodu. Po překročení kritické síly nit praskla. Láhev s vodou jsem následně zvažil na kuchyňské váze. 10 měření je v tabulce 1:

Tabulka 1.

č. m.	m [kg]	F_k [N]	ΔF_k [N]	$(\Delta F_k)^2$ [N ²]
1	1,71	16,8	+2,8	7,84
2	2,08	20,4	-0,8	0,64
3	2,12	20,8	-1,2	1,44
4	2,20	21,6	-2,0	4,00
5	1,84	18,1	+1,5	2,25
6	1,90	18,6	+1,0	1,00
7	2,16	21,2	-1,6	2,56
8	1,78	17,5	+2,1	4,41
9	2,13	20,9	-1,3	1,69
10	2,01	19,7	-0,1	0,01

Systematická chyba měření bude vyžadovat diskusi. Nejprve chyba použitého zařízení — kuchyňské váhy — ta činí 10 g (jeden dílek měřidla je sice 10 g, avšak jistou toleranci vyžaduje též nepřesné vyvažování). Do systematické chyby se započítávají i chyby metody. Metoda má následující chyby: dodávání vody se děje po jistých dávkách, aby byla láhev naplněna v konečném čase. Tyto dávky jsou přibližně 50 g. Měření může ovlivnit setrvačná síla pomalu přilévané vody. Nit si dále „pamatuje,“ pokud byla již jednou na-

máhána, a praská dřív. Celkově tudíž systematickou chybu odhaduji na 0,8 N. Pro výpočet celkové chyby uijeme přibližný vzorec $s_{\text{celk}} = 3s_{\text{stat}} + s_{\text{syst}}$. Odtud $s_{\text{celk}} = 2$ N.

Měření průřezu. Průřez nitě jsem měřil ponořením do vody. Odměrný válec měl 1 dílek 0,5 ml. Naměřené objemy a jim odpovídající délky nití jsou v tabulce. Relativní prodloužení jsem změřil $1/\varepsilon = (0,90 \pm 0,03)$.

Tabulka 2.

č. m.	d [m]	d' [m]	V [cm ³]	S [cm ²]	ΔS [m ²]
1	11,4	12,7	$1,50 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$0,0 \cdot 10^{-7}$
2	9,5	10,5	$1,25 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$0,0 \cdot 10^{-7}$
3	10,4	11,5	$1,50 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$-0,1 \cdot 10^{-7}$
4	9,0	10,0	$1,25 \cdot 10^{-6}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$	$-0,1 \cdot 10^{-7}$
5	10,0	11,1	$1,25 \cdot 10^{-6}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$0,1 \cdot 10^{-7}$

Systematická chyba je značná — je to způsobeno nepatrným objemem nitě i při značné délce. Museli bychom nořit kilometry nití, aby byly výsledky přesnější. Chyba měřidla (válce) je 0,25 ml. Chyba při měření délky nitě byla 5 cm (měřeno metrem). Při měření objemu byl navíc problém zbavit se všech vzduchových bublin, které se v niti vytrvale držely. Odtud plyne systematická chyba cca 20%, tj. $s_{\text{sys}} = 0,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$ a celková chyba $s_{\text{celk}} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$.

Průměr nitě jsem zkusil též měřit přímo — namotáním více nití těsně vedle sebe na pravítko. Dospěl jsem k hodnotě poloměru $r = 0,2 \text{ mm}$, což odpovídá průřezu $S = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$, přičemž statistická chyba činí 5% a systematická chyba není známa (nelze určit, do jaké míry jsou nitě těsně u sebe).

Závěr. Mez pevnosti určíme jako $\sigma_N = F_K/S$, po dosazení naměřených hodnot

$$\sigma_N = (160 \pm 80) \text{ MPa} .$$

Diskuse. Přestože mnoho z vás neměřilo lépe, vycházely vám odchylky optimističtěji. Zpravidla jste si dost věřili, co se týče systematické chyby. Největší chyba vznikla jistě měřením průřezu nitě. Mohli bychom ji snížit např. tak, že vezmeme větší a užší odměrný válec a do něj nacpeme několik kilogramů nitě. Pak ale budeme mít nejspíš problémy s bublinami vzduchu. Při měření se potvrdily obavy z nehomogenity nitě, je tedy otázkou, do jaké míry má smysl počítat statistické odchylky při měření kritické síly. Nit se trhá v různých místech při jiné zátěži, navíc lze pozorovat, že při delším zatížení nit praskne, aniž by bylo dosaženo síly, při které praskla, když jsme přilévali vodu rychleji. Pokus o vysvětlení: nit je složena z více vláken zamotaných okolo sebe. Po zavěšení závaží se některá vlákna napínají, vnitřní struktura se mění (pozorujeme např. rotaci nitě) a mění se i rozložení tíhové síly mezi jednotlivá vlákna. Při těchto změnách se může stát, že nosných nití je málo. Měření vadí i jiné věci, např. vlhkost apod., pokud však nit nepolijeme sami, nepovažuji tyto jevy za majorantní.

Filosofický závěr. Přesností naše měření neoplývá. Zjistili jsme však, že kolem chování nití lze nadělat spoustu teorie, která rozhodně nebude jednoduchá. Nicméně teprve s dobrým fyzikálním modelem budeme znát správnou interpretaci výsledků měření.

Matouš Jiráček

Úloha S.V ... srážky a rozpady částic (6 bodů, řešilo 23 studentů)

Pro zkrácení zápisu nebudeme v celém řešení označovat klidovou hmotnost m_0 , ale m s indexem příslušné částice. V tabulkách nalezneme:

$$\begin{aligned} m_e c^2 &= 0,510999 \text{ MeV} \\ m_{\pi^0} c^2 &= 134,9626 \text{ MeV} \\ m_{\pi^+} c^2 &= 139,5669 \text{ MeV} \\ m_{\mu^+} c^2 &= 105,6595 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Nyní se již podívejme, jak mohly být zadané úlohy vyřešeny.

a) Protože na počátku byl pion v klidu, musí být součet hybností obou fotonů nulový:

$$\mathbf{p}_{\gamma 1} + \mathbf{p}_{\gamma 2} = 0$$

takže ze vztahu pro energii fotonu $E = cp$ vidíme, že oba musí mít energii stejnou. Ze zákona zachování energie pak plyne

$$m_{\pi^0} c^2 = 2E_{\gamma}$$

a energie každého fotonu tedy bude

$$E_{\gamma} = \frac{1}{2} m_{\pi} c^2 = 67,4813 \text{ MeV} .$$

b) Zákony zachování pro tento rozpad mají podobu

$$\mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu = 0 \quad m_{\pi^+}c^2 = E_{\mu^+} + E_\nu .$$

Jestliže teď dvakrát aplikujeme vztah mezi energií a hybností částice

$$E_\nu - cp_\nu = 0, \quad E_{\mu^+} - c^2 p_{\mu^+}^2 = m_{\mu^+}^2 c^4,$$

dostaneme dosazením do druhého z nich

$$(m_{\pi^+}c^2 - E_\nu)^2 - E_\nu^2 = m_{\mu^+}^2 c^4 ,$$

$$E_\nu = \frac{m_{\pi^+}^2 - m_{\mu^+}^2}{2m_{\pi^+}} c^2 = 29,78854 \text{ MeV} .$$

c) Podívejme se na celý systém jako na jedno těleso T. Jeho klidovou hmotnost před srážkou můžeme s pomocí veličin měřených v laboratorní soustavě vyjádřit jako

$$m_T^2 = E_T^2 - c^2 p_T^2 = (E + m_e c^2)^2 - c^2 p_e^2 .$$

V mezním případě, kdy ještě může elektron-pozitronový pár vzniknout, zůstanou po srážce všechny čtyři částice v těžiškové soustavě prakticky stát. To v případě srážkových experimentů znamená, že se budou pohybovat pouze rychlostmi například tisíc kilometrů za sekundu, tj. daleko menšími než je rychlost světla. V každém případě se dostanou od sebe tak daleko, abychom mohli zanedbat jejich vzájemné elektrické působení. Klidová hmotnost tělesa po srážce elektronů pak bude prostě součet hmotností výsledných čtyř částic

$$m_T = 4m_e c^2 .$$

Stejně jako volná částice nemůže změnit svojí klidovou hmotnost, musí se i klidová hmotnost našeho tělesa zachovávat. Jedná se v podstatě pouze o zákon zachování hmotnosti při pohledu z těžiškové soustavy tělesa, protože v ní je celková hmotnost tělesa rovna hmotnosti klidové. Srovnáním posledních dvou rovností získáme vztah

$$(E_e + m_e c^2)^2 - c^2 p_e^2 = 16m_e^2 c^4 ,$$

který můžeme ještě dále upravit

$$E_e^2 - c^2 p_e^2 + 2m_e c^2 E_e + m_e^2 c^4 = 16m_e^2 c^4 ,$$

$$m_e^2 c^4 + 2m_e c^2 E_e + m_e^2 c^4 = 16m_e^2 c^4 .$$

Odtud již jasně vidíme, že v laboratorní soustavě musí být energie nalétávajícího elektronu nejméně

$$E_e = 7m_e c^2 .$$

Z vyjádření celkové hmotnosti elektronu pomocí klidové

$$\frac{E_e}{c^2} = \frac{m_e}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

pak už snadno dopočítáme nejmenší možnou rychlost, jakou tento elektron musí letět

$$v = \frac{4\sqrt{3}}{7} c .$$

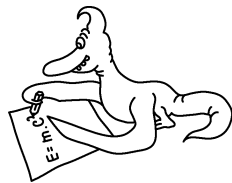
Možná si teď říkáte, jak můžeme používat zachování klidové hmotnosti soustavy částic, když v textu páté kapitoly jasně popíráme, že by se musel zachovávat součet klidových hmotností jednotlivých částí izolovaného systému. Není v tom ale žádný rozpor, klidová hmotnost totiž není aditivní veličina. Na rozdíl od celkové hmotnosti není pravda, že by klidová hmotnost celku byla totéž, co součet klidových hmotností jednotlivých částí. Velice dobře je to vidět z prvního vyjádření m_T , které jsme v tomto odstavci použili.

Ke stejné výsledné energii a rychlosti bychom samozřejmě mohli dospět i prostým roze-psáním zákonů zachování v těžištové soustavě (TS) a následnou transformací těchto veličin do soustavy laboratorní

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{e1}^{TS} + \mathbf{p}_{e2}^{TS} = 0 &\Rightarrow E_{e1}^{TS} = E_{e2}^{TS} \equiv E_e^{TS} \\ 2E_e^{TS} = 4m_e c^2 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - (v^{TS})^2/c^2}} = 2 \Rightarrow v^{TS} = \frac{\sqrt{3}}{2}c \\ v = \frac{2v^{TS}}{1 + (v^{TS})^2/c^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}, & E_e = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 7m_e c^2. \end{aligned}$$

První řešení je ale mnohem elegantnější a poučnější.

Michal Fabinger



Řešení VI. série

Úloha VI.1 ... síť sítí (5 bodů, řešilo 11 studentů)

Označím si A a B dva sousední body mřížky. Bod A spojím s „nekonečnem“ zdrojem proudu tak, aby z bodu A vytékal proud I . Vzhledem k symetrii mřížky, bude mezi body A a B napětí $IR/4$. Nyní naopak spojím bod B s „nekonečnem“ zdrojem proudu tak, aby do bodu B vtékal proud I . Vzhledem k symetrii mřížky, bude mezi body A a B napětí $IR/4$ a to ve stejném směru jako v prvním případě. Jestliže nyní zapojím oba zdroje proudu, bude mezi body A a B napětí $IR/2$, z bodu A bude vytékat proud o velikosti I , do bodu B bude naopak vtékat. Vzhledem k tomu, že „nekonečno“ je v obvodu zapojeno mezi dva zdroje proudu, které jsou stejně připojeny k mřížce, je v něm napětí nulové (je rovno průměru napětí v bodech A a B). Vzhledem k symetrii, mohu nekonečno od obou zdrojů proudu odpojit, aniž bych změnil stav obvodu. Nyní mám zdroj proud o velikosti I připojený mezi body A a B. Mezi těmito body je napětí $IR/2$ a tedy odpor mezi body A a B je $R/2$.

Daniel Král

Úloha VI.2 ... izotop (4 body, řešilo 17 studentů)

Počet rozpadů γ za jednotku času je podle zadání a definice aktivita látky B. Ta je úměrná počtu částic B ve vzorku v daném čase. V čase 11,5 min po vyndání z reaktoru můžeme zanedbat rozpad látky B na látku C a uvažovat pouze rozpad A na B, který se děje podle exponenciálního zákona:

$$N_A = N_{A0} e^{-\lambda t} \quad N_B = N_{A0} (1 - e^{-\lambda t})$$

Poločas rozpadu T je definován vztahem $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$, po 11,5 minutách (polovině poločasu rozpadu A) byl tedy počet částic látky B

$$N_B = N_{A0} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Číslo v závorce je zhruba 0,293, to znamená, že výsledek bude řádově stejný jako poločas rozpadu B na C. Můžeme tedy předpokládat, že A se rozpadlo téměř celé v prakticky nulovém čase a rozpad B tedy probíhá opět exponenciálně:

$$N_B = N_{B0} e^{-\lambda' T'}$$

Protože zaniknutím jedné částice A vznikne jedna částice B, rovnají se N_{A0} a N_{B0} . Chceme, aby počet částic byl stejný jako v čase 11,5 min, což při uvážení definice poločasu rozpadu vede na rovnici

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\tau}{T'}}$$

kterou vyřešíme logaritmováním

$$\tau = -T' \frac{\ln(1 - 1/\sqrt{2})}{\ln 2} \doteq 41 \text{ dní}$$

Dalibor Šmíd

Úloha VI.3 ... *kostka* (3 body, řešilo 27 studentů)

Abychom udrželi kostku v rovnováze, musíme především dosáhnout rovnováhy sil. Ve vodorovném směru spolu soupeří síly F_B a třecí síla v místě A, která může nabýt maximální hodnoty fF_A (f je koeficient smykového tření), tedy

$$fF_A \geq F_B. \quad (11)$$

Ve svislém směru máme tři síly a rovnice rovnováhy je

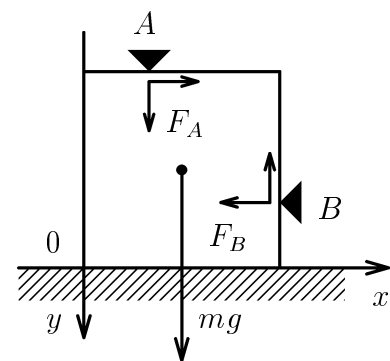
$$fF_B - F_A \geq mg. \quad (12)$$

Dosazením (11) do (12) dostáváme

$$F_A(f^2 - 1) \geq mg. \quad (13)$$

Pokud budeme chtít tuto nerovnici splnit, můžeme volit F_A libovolně velké kladné, ale splnit se nám ji podaří jen v případě (mg je kladné), že i $f^2 - 1$ je kladné. Protože koeficient tření je také kladný, splní to jen $f > 1$. Ačkoliv se některým z vás zdálo podivné, že koeficient tření může být větší než 1, není na tom nic divného. Zkuste si třeba namazat stůl vhodným lepidlem (doporučujeme dovozový Chemopren) a táhněte po stole něco lehkého. Sice to pojede, ale tažná síla bude mnohonásobně větší, než vlastní hmotnost tělesa. A právě ten poměr je koeficient tření.

Aby byla kostka v dokonalé rovnováze, je třeba diskutovat ještě její rotační pohyby. Z těchto rovnic neplyne nic objektivního, co by vyvážilo jejich složitost a proto je zde pro nedostatek místa neuvedeme.



Jan Hradil

Úloha VI.4 ... alternátor (4 body, řešilo 21 studentů)

Uvědomme si nejprve toto: ze symetrie je zcela jasné, že body disku, které jsou stejně daleko od středu, mají stejný potenciál. Nenulové napětí bude tedy pouze mezi body, jejichž vzdálenost od středu je různá.

Na nabitě částice v disku působí magnetická síla

$$F_m = qvB ,$$

kteřá má směr buď od nebo do středu (podle znaménka náboje). Na začátku se budou náboje (hlavně elektrony) v důsledku této síly pohybovat. Náboje se v disku uspořádají tak, aby elektrická síla ($F_e = qE$) byla v rovnováze se silou magnetickou. Mohli bychom ještě uvážit sílu odstředivou, avšak my tak neučiníme, neboť tato je v porovnání s výše uvedenými velmi malá.

Pro rychlost pohybu máme $v = \omega r$. Intenzita tedy splňuje vztah

$$E = \omega r B .$$

Čiže napětí mezi body o vzdálenosti od středu r_1, r_2 je

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dl = \frac{1}{2} \omega B (r_2^2 - r_1^2) .$$

Proud který poteče měřákem je možné rozumně vypočítat za předpokladu, že moc neovlivní magnetické pole a že měrný odpor disku je takřka nulový (jinak je to velmi složité). Pokud přijmeme ony osudné předpoklady a označíme R odpor měřáku, je kýžený výsledek

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\omega B (r_2^2 - r_1^2)}{2R} .$$

Václav Porod & Rudolf Sýkora

Úloha VI.5 ... zastavení v zatáčce (4 body, řešilo 30 studentů)

Nejprve se musím všem řešitelům omluvit za malou chybu. Rozchod kolejí jsem omylem zadal jako 1738 mm místo 1435 mm. Při zachování ostatních hodnot by se vlak při daném klopení převrhl sám.

Nejprve bylo nutno vypočíst klopení oblouku. Každý přišel na to, že

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{rg} \tag{14}$$

kde v je rychlost vlaku, r poloměr oblouku a g gravitační zrychlení.

Předpokládejme, že lidé se vykloní tak, že jejich těžiště bude na dolním okraji otevřeného okna. Situaci rozebereme pouze pro jeden vůz, neboť vozy jsou spojeny pohyblivými spřáhly. Dále nebudeme uvažovat, že vozy působí na sebe navzájem, neboť se mohou volně pohybovat po kolejích. Platí tato momentová věta:

$$am_v = Nbm_l \tag{15}$$

kde m_v je hmotnost jednoho vagónu, m_l průměrná hmotnost člověka, N počet lidí v jednom vagónu, a rameno síly působící na vagón a b rameno síly působící na člověka. Ramena je možno vypočíst různými způsoby, např. vypočíst souřadnice působišť daných sil v soustavě, kde osy jsou spojeny s vozem (osa x rovnoběžně s podlahou) a pak je do transformovat do souřadné soustavy s osou x vodorovnou:

$$a = \frac{l}{2} \cos \alpha - h_t \sin \alpha$$

$$b = h_o \sin \alpha + \frac{s-l}{2} \cos \alpha$$

kde l je rozchod kolejí, h_t výška těžiště, h_o výška okraje okna a s šířka vozové skříně.

Po dosazení do (15) dostaneme výsledný vztah pro počet lidí na jeden vagón:

$$N = \frac{m_v}{m_l} \frac{l \cos \alpha - 2h_t \sin \alpha}{2h_o \sin \alpha + (s - l) \cos \alpha}$$

Počet lidí vychází asi 29,5 osoby na vagón při průměrné hmotnosti člověka 70 kg, čili 295 lidí rovnoměrně ve vlaku.

Nyní k reálnosti úlohy. Především klopení nebude ve skutečnosti asi tak velké. Poloměr bude pro vysoké rychlosti asi větší a úhel klopení bude menší, než vypočtený dle vztahu (14). Otázkou je výška těžiště vagónu, neboť tu jsem musel odhadnout. Takže, v reálu by asi bylo potřeba více lidí.

Jiří Libra

Úloha VI.6 ... *akvárium* (8 bodů, řešilo 20 studentů)

Nejprve se budeme věnovat samotnému měření:

Klíčem k úspěchu byl dostatek vhodných nádob. Jak se později ukázalo, perioda roste s délkou l , a tak se pohodlněji měřily dlouhé nádoby, zatímco měření v nádobách kratších než 10 cm bylo velmi problematické. Pro některé nádoby tak bylo možné měřit kmitání pro dva kolmé směry. Pro malé h byl problém zajistit vhodným počátečním impulsem, aby se hladina kývala skutečně jenom tak, jak potřebujeme. Pokud chceme zjistit závislost frekvence na h i l , musíme provést pokud možno co nejvíce měření pro různé dvojice hodnot h a l , třeba i na úkor přesnosti jednotlivých měření. Je účelnější změřit desetkrát různé dvojice h a l , než desetkrát jednu dvojici a tu pak zprůměrovat.

Čas bylo žádoucí měřit stopkami s přesností alespoň 0,1 s. Měřil jsem vždy dobu dvaceti period — $20T$. Při počítání kmitů bylo možné sledovat přímo pohyb vlny po hladině nebo (což jsem činil já) pozorovat odrazy okolních předmětů (okraje nádoby, sluníčka...) na hladině. Několikanásobným změřením $20T$ pro tutéž kombinaci l a h jsem odhadl chybu určení $20T$ na 0,2 s, což dává průměrně relativní chybu přibližně 1%. Délky l a h jsem měřil skládacím metrem — chyba 2 mm. Naměřené hodnoty l , h a $20T$ jsou v tabulce 3.

Tabulka 3

20T/s	h/cm												
l/cm	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	9,0	9,0	10,0	
14,1	12,29	11,30	10,19	9,90	9,51								
23,5	21,38	18,63	17,59										
27,5		21,75	19,57	18,29	17,61	16,61	15,92						
58,5								31,91	29,13	27,32	26,29	25,07	

V tabulce 4 jsou odpovídající hodnoty frekvence.

Tabulka 4

f/Hz	h/cm												
l/cm	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	9,0	9,0	10,0	
14,1	1,63	1,77	1,96	2,02	2,10								
23,5	0,94	1,07	1,14										
27,5		0,92	1,02	1,09	1,14	1,20	1,26						
58,5								0,627	0,687	0,732	0,761	0,798	

Chyba určení frekvence je opět přibližně 1%.

Z tabulek vidíme, že s rostoucím h a s klesajícím l roste frekvence. Pro změřené dvojice hodnot při konstantním h můžeme usoudit, že f je nepřímo úměrné l a pro konstantní l zjistíme, že f je přímo úměrné \sqrt{h} . Tedy platí: $f \sim \sqrt{h}/l$.

Nyní je naším úkolem vymyslet vhodný fyzikální model popisující daný jev. Podařilo se to například Lukáši Poulovi a Janu Prokleškovi:

Předpokládali, že pro rychlost vlny v kapalině v platí vztah:

$$v = \sqrt{gh}$$

Dokázat platnost tohoto vztahu však není jednoduché. Za dobu jedné periody urazí vlna vzdálenost $2l$, z toho nám vyjde frekvence

$$f = \frac{\sqrt{gh}}{2l} \quad (16)$$

což odpovídá v rámci chyb měření naměřeným hodnotám.

Vymysleli jste i jiné modely: Na vodu v nádobě lze například pohlížet jako na fyzické kyvadlo, které se kývá podél nehybné osy ležící uprostřed nádoby na hladině. Jinak na to šel Karel Kolář, který řešil problém přímo ze zákona zachování energie (součet kinetické a potenciální energie vody zůstává konstantní). Po několika snadných integracích a derivacích vyšlo

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{30gh}{3l^2 + 10h^2}} \quad (17)$$

Porovnání takovýchto vztahů se skutečností je vždy otázkou dostatečného počtu měření. Nikdo z vás (ani já) neprovedl tolik měření, že by jej to opravňovalo rozhodnout, který ze vzorců (16) nebo (17) je výstižnější. Já jsem provedl toto: Všechna měření, která jste zaslali (kromě těch méně důvěryhodných) jsem zanesl do počítače a sečetl jsem kvadráty odchylek naměřených hodnot od hodnot dopočtených podle vztahu (16) (respektive (17)). Příznivější výsledky dává (17), ale rozdíl od jednoduchého vztahu (16) je poměrně malý. Chcete-li, můžete si soubor s naměřenými hodnotami vašich kolegů stáhnout na adrese <http://www.mff.cuni.cz/iso/news/fks/rocnik11/exp.xls> a ještě si s tím pohrát.

Jiří Franta

Úloha S.VI ... hmotnost pionu a zákony zachování (6 bodů, řešilo 20 studentů)

a) Když vyšle neutron virtuální pion π^0 , nezachová se energie $\Delta E = m_{\pi^0}c^2$, proto nemůže tento pion existovat déle než po dobu

$$\Delta t \leq \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{m_{\pi^0}c^2}.$$

Vzhledem k tomu, že se virtuální pion nemůže pohybovat rychleji než světlo ve vakuu, doletí za dobu své existence maximálně do vzdálenosti

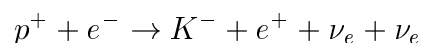
$$R \leq c\Delta t.$$

Z dosahu interakce $R = 10^{-15}$ m můžeme tedy vypočítat horní mez pro hmotnost pionu π^0

$$m_{\pi^0} \leq \frac{\hbar}{Rc} \simeq 3,5 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \simeq 200 \text{ MeV}/c^2.$$

Skutečná hmotnost mezonu π^0 je $135 \text{ MeV}/c^2$, řádový odhad této hmotnosti podle Yukawovy teorie je správný.

b) Ani jeden z procesů uvažovaných v zadání nemůže proběhnout. V prvním případě



je baryonové číslo levé strany $1 + 0 = 1$ a pravé strany $0 + 0 + 0 + 0 = 0$, takže by se nemohlo zachovávat. Druhému procesu

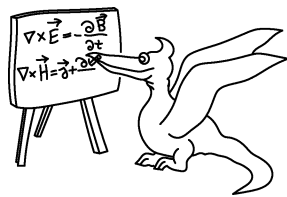
$$\pi^0 + \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_\mu + \nu_e$$

brání zákon zachování mionového leptonového čísla. Levá strana má toto číslo $0 + (-1) = -1$, zatímco na pravé straně je $0 + 1 = 1$. A konečně rozpad

$$\Delta^{++} \rightarrow p^+ + \pi^0$$

nemůže proběhnout prostě proto, že by se nezachoval elektrický náboj, který je na levé straně 2, ale na pravé pouze $1 + 0 = 1$.

Michal Fabinger



Seriál na pokračování

Kapitola 7: Sjednocování interakcí II

Prostředníci interakcí. Elektromagnetická interakce je zprostředkována fotonem, částicí s nulovou klidovou hmotností, nulovým elektrickým nábojem a spinem 1. Toto zprostředkování probíhá stejným mechanismem, jaký jsme viděli v Yukavově teorii jaderných sil. Například odpuzování dvou elektronů je způsobeno tím, že jeden elektron vyše virtuální foton a druhý ho zachytí. Elektromagnetická síla působí pouze na ty částice, které nesou elektrický náboj. Fotony interagují gravitačně a elektromagneticky, v druhém případě však fungují pouze jako prostředník síly, tj. samy virtuální foton vyslat nemohou.

Prostředníkem slabé interakce jsou částice se spinem 1, W^+ , W^- a Z^0 . Jak napovídá jejich název, nesou první dva elektrický náboj, zatímco třetí je neutrální. Protože jsou velice těžké (mají skoro 100 GeV), je málo pravděpodobné, že takový boson bude vyslán, a interakce se projevuje velmi slabě, což dalo také této síle název. Částice W^+ , W^- a Z^0 interagují gravitačně, slabě a kromě Z^0 také elektromagneticky. Od fotonu se liší tím, že samy mohou být zdrojem virtuálních intermediálních bosonů slabé interakce.

Silnou interakci zprostředkovává osm druhů gluonů se spinem 1, které nemají žádnou klidovou hmotnost ani elektrický náboj. Roli, jakou v elektromagnetismu hraje elektrický náboj, zde přebírá barva. Silná interakce je tak intenzivní, že nedovolí samostatnou existenci kvarků. Pokud bychom se, obrazně řečeno, snažili vytrhnout jeden kvark z protonu, museli bychom systému dodat více energie, než je potřeba k vytvoření páru kvark-antikvark. Poblíž vytrhávajícího kvarku by tak vznikl antikvark a na jeho místě v protonu nový kvark. Nakonec bychom tedy měli jeden bezbarvý baryon a jeden bezbarvý mezon. O síle interakce svědčí také to, že pouze polovinu klidové energie nukleonů nesou kvarky a druhou polovinu gluony, které si kvarky vyměňují. Gluony interagují gravitačně a silně, nejsou však pouhým prostředníkem silné interakce, protože mohou samy vysílat virtuální gluony.

Největší potíže dělá teoretikům gravitace, kterou nelze konzistentně formulovat v rámci kvantové teorie pole, a tak nejlepší teorií gravitace stále zůstává Einsteinova nekvantová obecná teorie relativity, přestože pro slabá pole se určité kvantové výpočty provádět dají. V každém případě je jasné, že každá kvantová teorie gravitace musí jako zprostředkující částici obsahovat graviton, nehmotnou částici se spinem 2. Nejdůležitější vlastností této síly je její univerzalita — gravitace působí stejným způsobem na úplně všechny částice.

Sjednocování interakcí. V šedesátých letech zjistili Weinberg, Salam a Glashow, že slabá interakce a elektromagnetismus nejsou oddělené jevy, ale pouze dva různé projevy jedné interakce zvané elektroslabá a že při vysokých energiích, kdy je klidová hmotnost W^+ , W^- a Z^0 zanedbatelná, se chovají tyto částice podobně jako foton. V oblastech vysokých energií jsou také obě interakce stejně silné. Tato symetrie mezi prostředníky slabé a elektromagnetické interakce je však při nízkých energiích spontánně narušena, a proto ji v našem světě nevidíme.

Mechanismus spontánního narušení symetrie můžeme přirovnat k chladnutí feromagnetika. Při vysokých teplotách (tj. při vysokých energiích atomů) není v železe při nulovém vnějším magnetickém poli žádná magnetizace a systém vypadá ve všech směrech stejně. Když se ale dostaneme pod tzv. Curieovu teplotu, železo se daném místě zmagnetuje. Nevíme jakým směrem, víme pouze, že nějakým určitě. Tím vzniknou v železe oblasti (domény), v nichž je zcela určitý směr magnetizace a železo v nich již nemá původní symetrii (nevypadá ve všech směrech stejně).

Mohlo by se zdát, že nulová hmotnost fotonu a nenulová hmotnost prostředníků slabé interakce je pro podobné sjednocení sil velkou překážkou. Není to ale pravda. Intermediální bosony elektroslabé interakce jsou uvažovány nehmotné a hmotnost W^+ , W^- a Z^0 je pouze projevem jejich interakce s tzv. Higgsovým bosonem. Tento boson přes velké experimentální úsilí dosud nebyl samostatně pozorován, zřejmě proto, že má obrovskou hmotnost, nedosažitelnou současnými urychlovači.

O několik let později byla vytvořena i teorie sjednocující silnou a elektroslabou interakci zvaná GUT (Grand Unified Theory), předpověď jedné její verze o poločas rozpadu protonu však nebyla experimentálně potvrzena.

Teorie superstrun. V šedesátých letech, kdy ještě nebyla vytvořena fungující teorie silné interakce (kvantová chromodynamika), se objevily tendence vysvětlovat tuto sílu za předpokladu, že nezákladnější částice nejsou bodové, ale že jsou to ve skutečnosti otevřené nebo uzavřené provázky (struny) utkané z nehmotných vláken. Silné interakce se takto vysvětlit nepodařilo, například proto, že nebylo možné nalézt vhodnou interpretaci nehmotné částice se spinem 2, která se ve spektru nevyhnutelně objevuje. Možná již ale tušíte, že touto částicí je právě graviton, a že taková strunná teorie v sobě kromě jiného obsahuje i gravitaci. Strunné teorie jsou tedy cestou, jak smířit obecnou relativitu a kvantovou teorii, a vkládají se do nich naděje, že by mohly vést k jednotné teorii všech interakcí.

Původně byla vytvořena teorie bosonových strun, což je kvantové a relativistické zobecnění mechaniky běžné struny (třeba kytarové). Ukázalo se, že tato teorie nejlépe funguje v prostoročase s 26 dimenzemi a že předpovídá existenci tachyonů. S tím prvním by nebyly žádné principiální potíže, stačí předpokládat, že 22 prostorových dimenzí je tak krátkých (řádu třeba 10^{-34} m), že v našich podmínkách vnímáme pouze $3 + 1$. Klasickou analogií může být například tenká válcová trubka. Pokud je její poloměr veliký, vnímáme její povrch jako dvourozměrný, když však začneme její poloměr zmenšovat, budeme ji po určité době vnímat spíše jako jednorozměrnou tyč. Daleko větším problémem teorie byla absence fermionů (částic s polocelým spinem) a výskyt tachyonu, nadsvětelné částice, která se v žádné fyzikální teorii nesmí objevit.

Tyto potíže odstranila teorie supersymetrických strun (superstrun). Supersymetrie je zvláštní symetrie, která každému fermionu přiřazuje jeden boson (částici s celočíselným spinem) a naopak. Pokud tedy například nějaká supersymetrická teorie obsahuje graviton (se spinem 2), musí popisovat také tzv. gravitino (se spinem $3/2$) a podobně. Teorie superstrun funguje v 10 rozměrném prostoročase, takže je potřeba svinout pouze šest dimenzí. Není pravda, že by se zde od počátku tachyon nevyskytoval, existuje však jednoduchý způsob, jak se ho zbavit (tzv. GSO projekce).

M-teorie. Teorie superstrun má pět různých verzí a bylo obrovským překvapením, když se v roce 1994 začalo ukazovat, že jsou si vzájemně ekvivalentní. Bylo čím dál více jasné, že se jedná pouze o pět různých limit jedné jedenácti-rozměrné teorie nazvané M-teorie (magická teorie). Další limitou M-teorie je jedenácti-rozměrná supergravitace, o jejímž vztahu k superstrunám se dříve vůbec nic nevědělo. V M-teorii se kromě běžných strun začaly objevovat i vícedimenzionální objekty jako například dvourozměrné membrány, takže se svět superstrun ukázal mnohem bohatším, než se původně zdálo. Dalším velikým průlomem byla neporuchová formulace M-teorie nalezená roku 1996. Ta umožňuje výpočty i v takových oblastech, kde původní poruchové verze superstrunných teorií naprosto selhávaly. O podobném výsledku si běžné kvantové teorie pole mohou nechat jenom zdát. V rámci M-teorie byly vypracovány modely podobné dříve vytvořeným GUT teoriím, takže to vypadá, že je na správné cestě k reprodukování výsledků standardních teorií pole dobře ověřených experimenty. Zajímavé jsou také výsledky z let 1996–1998, kdy se skvěle podařilo nalézt mikroskopický původ entropie černých děr, zavedené již daleko dříve Hawkingem.

M-teorie má všechny vlastnosti, které očekáváme od finální jednotné teorie všech interakcí, lze ji formulovat neporuchově, obsahuje obecnou relativitu a zřejmě bude schopna dojít ke stejným výsledkům jako konvenční teorie pole. Zbývá však nalézt způsob, jakým je narušena supersymetrie, kterou v našem světě nízkých energií vůbec nepozorujeme. Jestli M-teorie skutečně povede k finální teorii, to ukáže teprve budoucnost.

Literatura

ARTHUR BEISER: Úvod do moderní fyziky, *Academia, Praha 1977.*

LUBOŠ MOTL: <http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lumol/RUZE/index2.html>

Určitě si na této webové stránce přečtete články Cesta k superstrunám, Druhá superstrunná revoluce, a Holografický princip.

Naše adresa: FYKOS, KTF MFF UK
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8
<http://www.mff.cuni.cz/iso/news/fks>