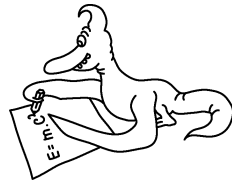


**Drazí řešitelé Fykosu,**

přiblížil se konec školního roku, a tak dostáváte řešení posledních dvou sérií a konečnou výsledkovou listinu. Přejeme vám hezké prázdniny a s čerstvými maturanty se budeme těšit na shledání v září na MFF.

*Jiří Franta*

**Řešení V. série****Úloha V.1 ... jehla na vodě (3 body, řešilo 58 studentů)**

Určete maximální průměr ocelové jehly, která se ještě udrží na vodní hladině. Jehla je pokryta tenkým olejovým filmem, aby ji voda nesmáčela. Znáte hustotu oceli, vody a povrchové napětí vody. Pokud řešení problému závisí na délce jehly, pokládejte ji za známou a diskutujte její vliv.

Jehlu považujeme za váleček o výšce  $l$  a poloměru  $r$ , přičemž platí  $l \gg r$ . Hustotu oceli, z které je jehla vyrobena, označme  $\rho_0$  a hustotu vody  $\rho$ . Povrchová napětí značme: rozhraní voda-vzduch  $\sigma_1 = \sigma$ , voda-jehla  $\sigma_2$  a vzduch-jehla  $\sigma_3$ .

Situace, kdy se jehla drží na vodní hladině, je nakreslena na obr. 1 — řez rovinou kolmou na osu jehly. Tíha jehly  $G$  je kompenzována výslednicí sil  $F$ , kterými na jehlu působí voda a vzduch. Jsou to jednak tlakové síly působící na povrch jehly a jednak povrchové síly působící v bodech A a B. Tlakové síly jsou způsobeny hydrostatickým tlakem a zakřivením rozhraní voda-jehla a vzduch-jehla.

My ukážeme, že výsledek ovlivní podstatně pouze rozhraní voda-vzduch. Z podmínek rovnováhy v bodech A a B lze pro úhel  $\vartheta$  odvodit:

$$F_1 \cos \vartheta + F_3 = F_2 \Rightarrow \cos \vartheta = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1}$$

Příspěvek  $F_p$  povrchových sil k celkové výslednici  $F$  tedy činí:

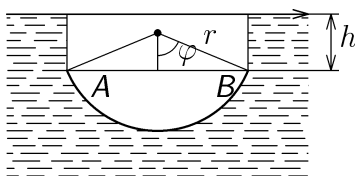
$$F_p = -2F_1 \sin \vartheta \cos \varphi = -2l\sigma_1 \sin \vartheta \cos \varphi$$

Výslednice  $F_{k1}$  tlakových sil způsobených zakřivením rozhraní voda-jehla je dána vztahem:

$$F_{k1} = 2l\sigma_2 \sin \varphi$$

Podobně lze spočítat i výslednici  $F_{k2}$  tlakových sil způsobených zakřivením rozhraní vzduch-jehla:

$$F_{k2} = -2l\sigma_3 \sin \varphi$$



Obr. 2

Výslednici hydrostatických tlakových sil působících na jehlu mezi body A a B označme  $F_h$ . Tuto sílu je možné spočítat následujícím „trikem“: Uvažme těleso, jehož řez rovinou rovnoběžnou s podstavami je zobrazen na obr. 2. Výsledná vztlačová síla působící na toto těleso je rovna výslednici tlakových sil působících na plochu mezi body A a B. Tato výslednice je však rovna  $F_h$ . Pro  $F_h$  tedy platí:

$$F_h = \left[ 2hr \sin \varphi + \left( \frac{2\varphi}{2\pi} \pi r^2 - \frac{1}{2} 2r \sin \varphi r \cos \varphi \right) \right] l \rho g$$

Pro výslednou sílu  $F$  tak dostáváme vztah:

$$F = F_h + F_{k1} + F_{k2} + F_p = 2l [(\sigma_2 - \sigma_3) \sin \varphi - \sigma_1 \sin \vartheta \cos \varphi] + \left[ 2hr \sin \varphi + r^2 \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \right] l \rho g$$

Využijeme-li vztahu pro  $\cos \vartheta$ , lze předchozí rovnici upravit na následující tvar:

$$F = 2l\sigma \sin(\varphi - \vartheta) + \left[ 2hr \sin \varphi + r^2 \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \right] l \rho g$$

Z toho vidíme, že rozhraní voda-jehla a vzduch-jehla rovnováhu ovlivňují prostřednictvím úhlu  $\vartheta$ , v případě, že voda jehlu dokonale nesmáčí ( $\varphi = \frac{\pi}{2}$  a  $\vartheta = 0$ ), rovnováhu neovlivňují vůbec. Síla  $F$  je v případě rovnovážné polohy jehly rovna tíze jehly  $G$ , která je dána vztahem:

$$G = \pi l r^2 \rho_o g$$

Zbývá ještě určit hodnotu  $h$ . Je-li  $R$  poloměr křivosti vodní hladiny, potom zakřivení hladiny způsobí v tomto místě tlak, který je roven  $\frac{\sigma}{R}$ . Tento tlak je kompenzován hydrostatickým tlakem. Funkce  $y(x)$ , která popisuje tvar vodní hladiny, tedy splňuje tuto diferenciální rovnici:

$$\frac{\sigma y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = y \rho g$$

Tato rovnice nezávisí explicitně na  $x$ . Položme tedy  $z = y(x)$  a  $y' = p(z) = p(y(x))$ . Funkce  $p(z)$  musí řešit rovnici:

$$\frac{p'p}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho g}{\sigma} z$$

Separací proměnných získáme rovnost:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} = C - \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\sigma} z^2$$

Konstantu  $C$  určíme z okrajových podmínek. Pro  $y \rightarrow 0$  je i  $y' \rightarrow 0$ . To znamená:  $z \rightarrow 0 \Rightarrow p(z) \rightarrow 0$  a tedy  $C = 1$ . V bodě B platí:  $y' = p(-h) = \operatorname{tg}(\varphi - \vartheta)$ . Dostáváme tak následující vyjádření pro  $h$ :

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g} [1 - \cos(\varphi - \vartheta)]}$$

Z vyjádření  $h$  a  $F$  plyne, že maximální hodnota síly  $F$  nastává pro  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  a  $\vartheta = 0$  (voda jehlu dokonale nesmáčí). Pro maximální poloměr  $r_m$  jehly, při kterém se jehla ještě udrží na hladině, platí:

$$\pi r_m^2 \rho_o g = 2\sigma + 2r_m \sqrt{2\sigma \rho g} + \frac{\pi}{2} r_m^2 \rho g$$

Vyřešením této rovnice získáme výsledný vztah pro maximální průměr jehly:

$$d_m = \frac{4\sqrt{\sigma/g}}{\pi(2\rho_o - \rho)} \left[ \sqrt{2\rho} + \sqrt{2\pi\rho_o - (\pi - 2)\rho} \right]$$

Číselně vychází  $d_m = 2,0$  mm. Pokud bychom neuvažovali hydrostatický tlak, pak by výsledný vzorec vypadal následovně (do předchozího vzorce stačí dosadit  $\rho = 0$ ):

$$d_m = \sqrt{\frac{8\sigma}{\pi\rho_o g}}$$

Číselně potom vychází  $d_m = 1,6$  mm.

Ve skutečnosti však bude  $d_m$  o něco menší, neboť při  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  je jehla v nestabilní poloze (pokud se úhel  $\varphi$  zvětší, potom se jehla definitivně potopí). Pokládáme-li jehlu na vodní hladinu, potom maximální průměr jehly musí být také menší, neboť při úhlech  $\varphi$  blízkých  $\frac{\pi}{2}$  snadno dojde k porušení povrchové vrstvy vody.

Uvedené výsledky platí za předpokladu  $l \gg r$ . Předměty nazývané jehla tento předpoklad obvykle splňují. Pokud by jevy vznikající na koncích jehly nešlo zanedbat, potom bychom tento problém nemohli převést do roviny a řešení by bylo podstatně komplikovanější.

Závěrem ještě několik slov k došlým řešením. Častou chybou bylo opomenutí faktu, že povrchové síly působí po obou stranách jehly (ve vzorcích chyběly dvojky). Některá řešení (hlavně obrázky) nerespektovala, že povrchové síly mají vždy směr tečný k povrchové bláně. Hodnotu  $h$  spočítali pouze dva řešitelé, přičemž jeden z nich chybným postupem dostal kupodivu správný výsledek. Ostatní řešitelé pro vztlakovou sílu (pokud ji uvažovali) většinou používali vyjádření  $\frac{1}{2}\pi r^2 l \rho g$  nebo  $\pi r^2 l \rho g$ . Druhý vztah je však obecně chybný. Neumíme-li určit  $h$ , potom můžeme pouze říci, že v případě  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  je vztlaková síla větší než  $\frac{1}{2}\pi r^2 l \rho g$  ( $h > 0$ ). Z toho lze potom určit minimální hodnotu  $d_m$ .

**Karel Kolář**

### Úloha V.2 ... dvě láhve (3 body, řešilo 66 studentů)

Dvě láhve, jednu plnou vody a jednu prázdnou, necháme kutálet po nakloněné rovině. Která se skutálí rychleji? Pokud ty samé láhve vyšleme se stejnou počáteční rychlostí po nakloněné rovině nahoru, která se dokutálí výše?

K vyřešení úlohy použijeme zákon zachování energie. Označme  $m_0$  hmotnost láhve,  $m$  hmotnost vody v plné láhvi,  $J$  moment setrvačnosti prázdné láhve vůči těžišti a  $r$  její poloměr. Kinetická energie prázdné láhve je rovna součtu kinetické energie translačního a rotačního pohybu. Tedy:

$$E_{kin,1} = \frac{1}{2}m_0v_1^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m_0 + \frac{J}{r^2}\right)v_1^2$$

Kinetická energie plné láhve je rovna kinetické energii prázdné láhve a energii translačního pohybu vody v ní — voda nebude rotovat, pokud vodu považujeme za ideální kapalinu a tedy tření mezi ní a stěnami láhve za nulové. Reálná kapalina sice tyto vlastnosti nemá, ale úhlová rychlost rotace vody bude řádově menší než úhlová rychlost rotace láhve. Tedy:

$$E_{kin,2} = \frac{1}{2}(m_0 + m)v_1^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m_0 + m + \frac{J}{r^2}\right)v_2^2$$

Nyní přistoupíme k samotnému výpočtu - označme výšku nakloněné roviny  $h$ , její délku  $l$ . Čas potřebný k tomu, aby láhev dosáhla paty nakloněné roviny, lze vypočítat ze vztahu pro rovnoměrně zrychlený pohyb  $vt/2 = l$ , kde  $v$  je její konečná rychlost. Tedy  $t$  je nepřímo úměrné konečné rychlosti  $v$ . Užitím vzorce pro potenciální energii ( $E_{p,1} = m_0hg$ ,  $E_{p,2} = (m_0 + m)hg$ ) získáme:

$$v_1^2 = \frac{2m_0r^2}{m_0r^2 + J}hg$$

$$v_2^2 = \frac{2(m_0 + m)r^2}{(m_0 + m)r^2 + J}hg$$

Zřejmě  $v_2 > v_1$  a tedy k patě nakloněné roviny dříve dorazí plná láhev.

Nyní vypočteme, která láhev vystoupí výše. Užitím vztahu pro kinetickou energii a potenciální energii získáme:

$$h_1 = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 + \frac{J}{m_0r^2}\right)$$

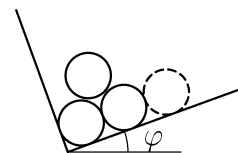
$$h_2 = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 + \frac{J}{(m_0 + m)r^2}\right)$$

Zřejmě  $h_1 > h_2$  a tedy prázdná láhev vystoupí výše.

**Daniel Král**

**Úloha V.3 ... nákladní auto** (4 body, řešilo 51 studentů)

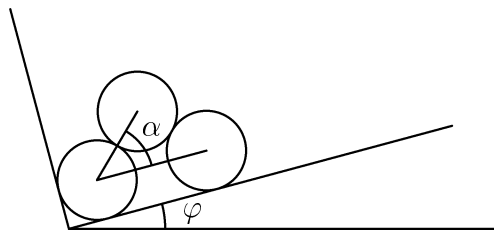
Nákladní auto bylo naloženo stejnými hladkými kládami. Před jejich vykládkou zastavilo tak, že pravými koly stojí o poznaní výše než levými (příslušná přední a zadní kola jsou ovšem ve stejné výšce). Řekněme, že rovina nákladního prostoru svírá s horizontální rovinou úhel  $\varphi$ , viz obrázek 3. Po vykládce zbyly na autě tři klády tak, jak je na obrázku nakresleno plnou čarou. Na jakou hodnotu by se musel snížit úhel  $\varphi$ , aby se klády přeuspořádaly tak, že by ležely vedle sebe? Jakékoli tření zanedbejte.



Obr. 3

Úloha se dala v podstatě řešit buďto analýzou a rozkladem sil (čehož využila naprostá většina z vás), nebo z úvah o energii. Využijme zde druhého přístupu:

Nulovou výšku přiřadíme středu klády v rohu. Průměr klády nechť je  $d$ , hmotnost  $m$ . Potenciální energie prostřední klády je  $mgd \sin(\alpha + \varphi)$ , potenciální energie klády vpravo  $2mgd \cos \alpha \sin \varphi$ . Aby se klády přeuspořádaly, musí být celková potenciální energie pro  $\forall \alpha \in (0; \pi/3)$  menší než pro  $\alpha = \pi/3$ .



Obr. 4

K tomu musí nutně být v  $\alpha = \pi/3$   $E_p$  klesající s klesajícím  $\alpha$ . Spočtíme tedy derivaci  $\partial E_p / \partial \alpha$  a položíme podmínku  $\partial E_p / \partial \alpha > 0$ .

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = mgd[\cos(\alpha + \varphi) - 2 \sin \alpha \sin \varphi] > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \cotg \varphi > 3 \operatorname{tg} \alpha$$

Tuto podmínku musíme splnit pro  $\alpha = \pi/3$ , tím ji ale splníme i pro ostatní  $\alpha$ . Úhel sklonu tedy musí klesnout na  $10^\circ 54'$ .

**Rudolf Sýkora**

**Úloha V.4 ... kulička a nakloněná rovina** (5 bodů, řešilo 60 studentů)

Dokonale pružnou ocelovou kuličku spustíme z výšky  $h$  (měřeno od místa dopadu) na nakloněnou rovinu, svírající s vodorovnou rovinou úhel  $\alpha$ . Ve vzdálenosti  $d$  od místa dopadu kuličky (ve směru klesání roviny) je svislá stěna. Určete jak vysoko (nad místem dopadu) v ní musíme udělat otvor, aby jí kulička proletěla. Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty  $h = 50$  cm,  $d = 15$  cm,  $\alpha = 15^\circ$ . Diskutujte pohyb kuličky v případě, že nakloněná rovina je nekonečná a kulička nic v cestě nestojí.

Nejdříve bychom se chtěli omluvit za menší nejasnost v zadání. Písmenem  $d$  byla označena horizontální vzdálenost místa dopadu a svislé stěny, tj. vzdálenost měřená na kolmici k této stěně. Některí řešitelé pochopili zadání jinak a pod symbolem  $d$  si představovali vzdálenost místa dopadu k nejbližšímu průsečíku svislé stěny a nakloněné roviny. Za toto špatné pochopení jsem samozřejmě body nestrhával.

Teď se podívejme, jak měla být úloha správně vyřešena, pokud pod písmenem  $d$  rozumíme první z výše uvedených možných významů. Kulička dopadne na nakloněnou rovinu svisle, úhel dopadu bude  $\alpha$ . Pod stejným úhlem se i odrazí, takže nyní bude směr rychlosti kuličky svírat s vodorovnou rovinou úhel  $90^\circ - 2\alpha$ . Teď už stačí použít známé vzorce pro šikmý vrh:

$$x = v_0 t \cos(90^\circ - 2\alpha)$$

$$y = v_0 t \sin(90^\circ - 2\alpha) - \frac{1}{2} g t^2.$$

Počátek souřadnic jsme umístili do místa dopadu kuličky. Zde uvedenou rychlost odrazu  $v_0$  snadno vypočteme ze zákona zachování mechanické energie:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgh, v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Ještě než provedeme další výpočty, můžeme si život ulehčit použitím známých vztahů pro goniometrické funkce:

$$\cos(90^\circ - 2\alpha) = \sin(2\alpha)$$

$$\sin(90^\circ - 2\alpha) = \cos(2\alpha).$$

Nyní již můžeme vypočítat přímo neznámou výšku  $l$ , jedná se totiž o souřadnici  $y$  v čase  $t_l$ , kdy se  $x$  rovná  $d$ .

$$t_l = \frac{d}{v_0 \sin(2\alpha)}$$

$$l = \frac{dv_0 \cos(2\alpha)}{v_0 \sin(2\alpha)} - \frac{gd^2}{2v_0^2 \sin^2(2\alpha)}$$

$$l = d \cotg(2\alpha) - \frac{d^2}{4h \sin^2(2\alpha)}.$$

Numericky pak vychází  $l = 21,5$  cm.

Teď uvažujme případ, kdy je nakloněná rovina nekonečná a kulička nic nestojí v cestě. Práci si velice zjednodušíme, pokud si zavedeme novou soustavu souřadnic. Počátek umístíme opět do místa prvního dopadu kuličky, osa  $X$  bude ležet na nakloněné rovině ve směru jejího největšího spádu a osa  $Y$  bude na ni kolmá, přičemž místo, odkud byla kulička původně vypuštěna, bude ležet v rovině  $XY$ . Toto místo pak bude mít zápornou souřadnici  $X$ , zatímco jeho souřadnice  $Y$  bude kladná. Nyní si rozložíme pohyb do směru  $X$  a  $Y$ . Tíhové zrychlení pak bude mít dvě složky

$$g_X = g \sin \alpha$$

$$g_Y = -g \cos \alpha.$$

Pohyb ve směru  $X$  bude po celou dobu rovnoměrně zrychlený

$$X = v_0 t \sin \alpha + \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha.$$

Ve směru  $Y$  bude situace o něco složitější. Pokaždé, když kulička dopadne na nakloněnou rovinu, změní svou rychlost ve směru  $Y$  na opačnou, takže bude skákat s periodou  $T = 2v_0/g = 2\sqrt{2h/g}$ . Vzorcem to můžeme vyjádřit takto:

$$Y = v_0(t \bmod T) \cos \alpha - \frac{1}{2} g(t \bmod T)^2 \cos \alpha.$$

Hodnotu funkce  $t \bmod T$  vypočítáte, pokud budete od  $t$  neustále odečítat  $T$ , a teprve když dostanete číslo menší než  $T$ , tak s odečítáním skončíte. Z diskuze je zřejmé, že vzdálenost kuličky od nakloněné roviny se bude neustále periodicky měnit od nuly do  $h \cos \alpha$  a zpět.

**Michal Fabinger**

### Úloha V. P ... nabitá koule (5 bodů, řešilo 27 studentů)

Mějme rovnoměrně nabitou kovovou kulovou slupku s poloměrem  $R$  a s celkovým nábojem  $Q$ . Rozřízněme ji na dvě části rovinou, která je od středu koule vzdálena  $d < R$ . Úkolem je spočítat sílu, jakou se obě části budou odpuzovat, dokud jsou velmi blízko sebe.

Když jsou obě části velmi blízko sebe, bude náboj na slupce rozložen rovnoměrně, plošná hustota náboje bude

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

Ze symetrie je zřejmé, že síla bude mít směr kolmý k rovině řezu. Určeme nyní sílu  $F_0$ , která působí na velmi malou část slupky o ploše  $S_0$ . Tato síla je jistě kolmá na tuto část slupky a má velikost

$$F_0 = S_0 \sigma E_0,$$

kde  $E_0$  je velikost intenzity pole vytvářeného zbytkem slupky.

Vidíme, že se jedná o analogii s tlakovým působením (síla je kolmá na plošku a její velikost je přímo úměrná velikosti plošky) o tlaku  $p = \sigma E_0$ . Celková síla je tedy úměrná velikosti plochy řezu (to je doufám jasné). Celková odpudivá síla má velikost

$$F_{celk} = S_{řezu} \sigma E_0,$$

kde  $S_{řezu}$  určíme pomocí Pythagorovy věty

$$S_{řezu} = \pi(R^2 - d^2).$$

Nyní zbývá pouze určit velikost elektrické intenzity, kterou vyvolává zbytek slupky v místě plošky  $S_0$ . Intenzita elektrického pole těsně nad povrchem slupky je

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

a uvnitř slupky je nulová. To znamená, že velikost intenzity vyvolané ploškou  $S_0$  a zbytkem slupky je stejná (uvnitř slupky mají opačné znaménko). Intenzita vyvolaná zbytkem slupky je tedy polovina celkové intenzity

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Velikost celkové odpudivé síly je

$$F_{celk} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \pi(R^2 - d^2) = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon R^2} \frac{(R^2 - d^2)}{R^2}.$$

**Václav Porod**

### Úloha V. Exp ... listopad (8 bodů, řešilo 37 studentů)

Když vezmeme list papíru a pustíme jej ve vodorovné poloze, začne pomalu padat. Pokud jej přehneme na polovinu, bude padat rychleji - toť známý fakt. Vaším úkolem je pomocí tohoto jevu zjistit, podle jakého vztahu se mění odporová síla vzduchu působící na papír (závisí na rychlosti lineárně či kvadraticky?). Pokuste se určit potřebné konstanty.

Pustíme-li list papíru tak, aby padal přímo (tj. neotáčel se, nevlnil, ...), zrychluje tak dlouho, než odporová síla vyrovná sílu tíhovou, poté již padá rovnoměrně a můžeme se zabývat měřením jeho rychlosti. Odporová síla závisí na proudění vzduchu kolem padajícího listu.

Pro malé rychlosti, kdy lze toto proudění považovat za laminární je závislost odporové síly na rychlosti lineární. Pro těleso kulového tvaru o poloměru  $r$  ji popisuje Stokesův vzorec

$$F = 6\pi\eta r v,$$

kde  $\eta$  je dynamická viskozita vzduchu.

Při větších rychlostech papíru vzniká turbulentní proudění. Těleso v tekutině tvoří víry, které zvyšují odporovou sílu. Ta pak závisí na druhé mocnině rychlosti podle Newtonova vztahu (který platí pro rychlosti menší, než je rychlost zvuku)

$$F = \frac{1}{2} C S \rho v^2,$$

kde  $S$  je obsah průřezu papíru v rovině kolmé na vektor rychlosti,  $\rho$  je hustota vzduchu a  $C$  je konstanta, která charakterizuje tvar tělesa. V našem případě  $C = 1,12$ . Pro rychlosti blízké rychlosti zvuku závisí odporová síla na vyšších mocninách rychlosti (vytváří se rázová vlna), po překročení rychlosti zvuku se mocnina rychlosti snižuje.

Druh závislosti  $F$  na  $v$  zjistíme nejlépe tak, že ze vztahů

$$mg = kSv \quad \text{a} \quad mg = kSv^2$$

( $k$  je konstanta zahrnující ostatní parametry) si vyjádříme rychlosti a budeme měnit některý z parametrů  $m$ ,  $S$ , nebo  $g$ . Můžeme také předpokládat obecnou mocninu  $v^x$  a postupovat stejně.

A nyní k vlastnímu měření. Předpokládejme, že hledaná síla je úměrná ploše a neznámé mocnině rychlosti, tedy  $F_{od} = kSv^x$ . Pokud vezmeme dva stejné papíry a jeden z nich přehneme, tak po ustálení rychlosti bude platit  $kS_1v_1^x = kS_2v_2^x = mg$ . Využijeme-li toho, že  $S_2 = \frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{2}S$ , tak lze psát  $kSv_1^x = \frac{1}{2}kSv_2^x$ , po vykrácení  $kS$  a zlogaritmování dostaneme  $\ln v_1^x = \ln \frac{1}{2}v_2^x$ , z čehož při využití vztahů pro logaritmy ( $\ln a^b = b \ln a$ ,  $\ln ab = \ln a + \ln b$ ) plyne

$$x = \frac{\ln 2}{\ln v_2 - \ln v_1}.$$

V obecném případě pro poměr obsahů  $n$  ( $n > 1$ ) dostaneme

$$x = \frac{\ln n}{\ln v_2 - \ln v_1}, \quad (1)$$

kde  $v_2$  je ustálená rychlost menšího papíru.

Měřili jsme dobu pádu papírů A4, A4 jednou a dvakrát přehnutý, A3, A3 jednou, dvakrát a třikrát přehnutý. Protože se jednalo o měření krátkých časových úseků zatížených značnou systematickou chybou a náhodnými vlivy prostředí, tak měření byla pro papíry vzniklé přehnutím A4 provedena desetkrát (z A3 25×). Výsledné průměrné hodnoty a jim odpovídající rychlosti a mocniny jsou v tab. 1, kde  $h$  je výška z níž byly papíry puštěny,  $t$  doba jejich pádu ( $\delta_t = \sqrt{(3\delta_{stat})^2 + \delta_{syst}^2}$ ,  $\delta_{syst} = 0,2$  s – zapříčiněna reakční dobou pozorovatele – udává se 0,1–0,3 s),  $v$  je rychlost (relativní odchylka je stejná jako u času).

Tab 1.

plocha	A4	A4 /2	A4 /4	A3	A3 /2	A3 /4	A3 /8
$t$ [s]	$1,36 \pm 0,20$	$1,10 \pm 0,20$	$1,11 \pm 0,25$	$1,47 \pm 0,21$	$1,31 \pm 0,20$	$1,20 \pm 0,20$	$0,39 \pm 0,20$
$v$ [m/s]	$0,59 \pm 0,09$	$0,91 \pm 0,17$	$1,27 \pm 0,28$	$0,54 \pm 0,08$	$0,92 \pm 0,14$	$1,29 \pm 0,22$	$1,57 \pm 0,32$

Hodnoty  $t$  a  $v$  jsou psány na dvě platné cifry, protože vztah (1) je při bližších hodnotách  $v_1$  a  $v_2$  citlivý na jejich sebemenší změny. Hodnoty  $x$  získané po dosazení do vzorce jsou v tabulce 2.

Pro derivování znalé uvedeme, jak určit chybu  $x$ : Pokud je  $y$  funkcí veličin  $x_1, \dots, x_n$  a  $\Delta x_i$  jsou chyby měření jednotlivých veličin, pak výsledná chyba veličiny  $y$  je

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 (\Delta x_i)^2},$$

kde  $\frac{\partial y}{\partial x_i}$  chápeme jako normální derivaci dle  $x_i$ , přičemž ostatní proměnné považujeme za konstanty. V našem případě dostaneme

$$\Delta x = \frac{\ln n}{(\ln v_2 - \ln v_1)^2} \sqrt{\left( \frac{\Delta v_1}{v_1} \right)^2 + \left( \frac{\Delta v_2}{v_2} \right)^2}.$$

Tab 2.

formát plochy	A4	A4	A4	A3	A3	A3	A3	A3	A3
	$1, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$1, \frac{1}{4}$	$1, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$	$1, \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$	$1, \frac{1}{8}$
$x$	$1,6 \pm 0,9$	$2,1 \pm 1,8$	$1,8 \pm 0,6$	$1,3 \pm 0,5$	$2,1 \pm 1,4$	$3,5 \pm 4,8$	$1,6 \pm 0,4$	$2,6 \pm 1,2$	$2,0 \pm 0,5$

Z tabulky je zřejmé, že hodnoty se v rámci chyb hromadí u  $x = 2$ . Výjimkou jsou hodnoty A3( $1, \frac{1}{2}$ ) a A3( $1, \frac{1}{4}$ ), což lze připsat nestabilnímu pádu papíru velkých ploch (toto byl asi největší problém celého měření, protože bylo možno použít asi 1/4 všech pádů, těch "nejstabilnějších").

Vydeme-li z předpokladu, že odporová síla vyrovnána silou tíhovou, můžeme určit konstantu  $C$  přímo pomocí Newtonova vztahu:

$$F_G = mg = \frac{1}{2} C S \rho v^2 = F_o$$

Odtud již snadno určíme

$$C = \frac{2mg}{S \rho v^2}$$

Výsledné hodnoty  $C$  jsou v tabulce 3.

Tab 3.

plocha	A4	A4 /2	A4 /4	A3	A3 /2	A3 /4	A3 /8
$C$	3,8	3,2	3,2	4,5	3,1	3,1	4,2

U hodnot  $C$  neuvádíme chybu (relativní chyba by byla dvakrát větší než u rychlosti – zanedbáme-li chyby ostatních veličin) a to z následujících důvodů: Jde nám hlavně o odhad této konstanty, protože její přesné určení "neumožňuje" ani zadání – máme pracovat s papírem, který nepřilíh dobře drží při pádu tvar a proto hodnota konstanty je proměnná.

Závěr: Předpokládaná kvadratická závislost byla v míře odpovídající způsobu měření potvrzena. Konstanta úměrnosti  $C$  nám vyšla (i přes její značnou chybu) větší než je hodnota očekávaná teorií. Toto je způsobeno předpokladem o vyrovnání síly odporové a tíhové již od začátku pádu a proto nám odporová síla vychází větší.

*Jan Prokleška & Libor Sedláček*

### Úloha S . V ... *synchronizace módů (mode-locking)* (6 bodů, řešilo 24 studentů)

Předpokládejme modově synchronizovaný laser s optickou délkou rezonátoru  $l = 1,8$  m, pracujícího na střední vlnové délce  $\lambda = 800$  nm se středním výkonem 1 W.

- S jakou frekvencí laser produkuje jednotlivé pulsy? Jaká je mezi nimi prostorová vzdálenost?*
- Jak je prostorově dlouhý puls o délce 70 fs?*
- Kolik fotonů je v jednom pulsu?*
- Jaký je špičkový výkon v pulsu?*
- Kolik módů potřebujeme k dosažení pulsů o délce 70 fs? V jaké oblasti vlnových délek musí zesilovat aktivní prostředí? Předpokládejte stejnou amplitudu všech módů, které se účastní tvorby pulsu.*

a) V laseru obíhá jeden velký puls, ze kterého se pokaždé, když přijde k výstupnímu zrcadlu, část odštěpí a vyjde ven. Vzdálenost pulsů odpovídá dvojnásobné délce rezonátoru  $2l$ , jejich frekvence je  $f = \frac{1}{T} = \frac{c}{2l} \doteq 83$  MHz.

b) Puls urazí za dobu 70 fs dráhu  $ct = 21$   $\mu$ m, stejně tak daleko je od sebe čelo a konec pulsu, tj. i puls má tuto délku.

c) Celková energie v jednom pulsu je rovna součtu energií jednotlivých fotonů  $E_{puls} = nh\nu = n \frac{hc}{\lambda}$ , nebo také je to podíl energie vyzářené za 1 s a počtu pulsů za 1 s (frekvence  $f$ )  $E_{puls} = \frac{P}{f} = P \frac{2l}{c}$ . Dosažením dostaneme celkový počet fotonů v jednom pulsu  $n = \frac{2Pl}{hc^2} = 4,9 \cdot 10^9$  fotonů.

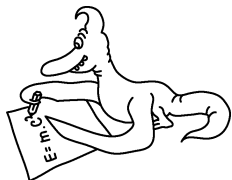
d) Předpokládejme přibližně obdélníkový tvar pulsů. Energie je obsažena v pulsech, které trvají v jedné sekundě dohromady  $f\Delta t = 5,8 \cdot 10^{-6}$  s. Špičkový výkon je poměr energie vyzářené za 1 s a doby, po kterou trvají pulsy,  $P_{\text{špičk.}} = \frac{P}{f\Delta t} = \frac{2Pl}{c\Delta t} = 172$  kW.

e) Z předchozího dílu seriálu víme, že puls je dlouhý  $\Delta t = \frac{2l}{Mc}$ , kde  $M$  je počet módů, které se účastní synchronizace módů. Pro náš puls potřebujeme přibližně  $M = \frac{2l}{\Delta t c} = 171\,000$  módů. Vzdálenost jednotlivých módů od sebe je  $\Delta\nu = \frac{c}{2l}$  a střední frekvence laseru je  $\nu_0 = \frac{c}{\lambda}$ , od níž potřebujeme na obě strany mít zesílení pro  $\frac{M}{2}$  módů, tedy laser musí zesilovat mezi frekvencemi  $\nu_{min,max} = \nu_0 \pm \Delta\nu \frac{M}{2} = \frac{c}{\lambda} \pm \frac{1}{2\Delta t}$ , což ve vlnových délkách znamená zesílení mezi  $\lambda_{min} = 785$  nm a  $\lambda_{max} = 816$  nm.

Všimněme si, že pro dosažení časově krátkého pulsu potřebujeme relativně spektrálně široké zesílení prostředí.

*Jan Hradil*





## Řešení VI. série

### Úloha VI.1 ... plyn v láhvi (3 body, řešilo 38 studentů)

Uzavřená nádoba obsahující ideální plyn se pohybuje rychlostí  $v$ . Nádoba se náhle zastaví a veškerá kinetická energie plynu se změní v teplo. Zanedbejte teplo předané stěnám a spočtěte, o kolik se zvětší druhá mocnina střední kvadratické rychlosti molekul plynu, je-li plyn

- jednoatomový
- dvouatomový.

Zdůvodněte rozdílné výsledky v případech a) a b).

Střední kvadratická rychlost je definována jako odmocnina ze střední hodnoty kvadrátu rychlosti, lze pro ni odvodit následující vztah:

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (2)$$

kde  $k$  je Boltzmannova konstanta ( $k \doteq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ ),  $m_0$  hmotnost molekuly a  $T$  termodynamická teplota.

Jedna molekula plynu má při teplotě  $T$  střední kvadratickou energii

$$U = \frac{i}{2}kT, \quad (3)$$

kde  $i$  je počet stupňů volnosti. Pro jednoatomové molekuly ( $He, Ne, \dots$ ) je  $i = 3$  (k popisu hmotného bodu jsou třeba tři nezávislé souřadnice), pro dvouatomové molekuly ( $H_2, N_2, O_2, \dots$ ) je  $i = 5$  (3 + dvě osy rotace, třetí osa se "nepočítá" — energie rotace kolem osy symetrie je zanedbatelná). Z (3) dostáváme pro  $k\Delta T$  vztah

$$k\Delta T = \frac{2\Delta U}{i}$$

a podobně z (2) dostaneme

$$k\Delta T = \frac{m_0}{3}\Delta(v_k^2).$$

Srovnáním těchto dvou vztahů získáme pro  $\Delta(v_k^2) = v_{k2}^2 - v_{k1}^2$  výsledek

$$\Delta(v_k^2) = \frac{6\Delta U}{im_0}.$$

Změna vnitřní energie  $\Delta U$  (přepočtená na jednu molekulu) je rovna  $\frac{1}{2}m_0v^2$  a tedy

$$\Delta(v_k^2) = \frac{3}{i}v^2.$$

Správná odpověď je, že střední kvadratická rychlost se změní v případě a) o  $v^2$ , v případě b) o  $\frac{3}{5}v^2$ . Rozdílnost výsledku je způsobena tím, že v případě b) se dodaná energie spotřebovává nejen na změnu translační energie molekuly, ale i na změnu rotační energie.

Několik poznámek k došlým řešením:

- Častou chybou byl zápis zákona zachování energie ve tvaru:

$$\frac{1}{2}m_0v_{k1}^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v_{k2}^2,$$

či podobném. Tento vztah je pro více atomů v molekule CHYBNÝ, protože  $v_k$  charakterizuje pouze pohyb posuvný (translaci) a případnou rotaci molekuly nebere v úvahu. Z tohoto vztahu vychází  $\Delta v_k^2 = v^2$  pro libovolně složitou molekulu.

• Pár vztahů které vám příště mohou usnadnit upravování vzorečků: Boltzmannova, molární plynová a Avogadrova konstanta jsou svázány vztahem

$$kN_A = R.$$

Budeme-li uvažovat veličinu  $C_v$ , což je molární tepelná kapacita při stálém objemu ( $[C_v] = \text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ ), která je svázána s měrnou tepelnou kapacitou  $c_v$  ( $[c_v] = \text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) vztahem  $c_v M_m = C_v$ , pak pro ideální plyn platí:

$$C_v = \frac{i}{2}R$$

$$C_p = R + C_v.$$

*Jan Prokleška*

### Úloha VI.2 ... *dipól v magnetickém poli* (5 bodů, řešilo 32 studentů)

Mějme elektrický dipól (představte si ho jako dvě částice se stejnými hmotnostmi  $m$  a náboji  $+q$  a  $-q$  upevněné na koncích nehmotné tyčky délky  $l$ ). Otáčí se v horizontální rovině okolo vertikální osy procházející středem dipólu. Popište pohyb dipólu poté, co zapneme konstantní vertikální magnetické pole  $B$ .

Na úvod je třeba říci, že analytické řešení je velmi složité a velmi pomohou znalosti teoretické mechaniky (počkejte si na MFF). Asi nejlepší je podívat se na chování dipólu vhodným numerickým modelem a provést počítačovou simulaci. Z této simulace můžeme získat představu o pohybu dipólu a posléze fyzikálními úvahami získat konkrétní čísla. My se budeme zabývat pouze speciálním případem, který je snadno řešitelný.

Nejprve se ale zamysleme nad tím, které veličiny se v magnetickém poli zachovávají. Bez pole by to byla energie, hybnost a moment hybnosti.

*Tvrzení první:* V magnetickém poli se zachovává kinetická energie. Pro důkaz tohoto tvrzení si rozložíme pohyb dipólu na translační a rotační (vztaženo k hmotnému středu). Každý náboj na konci tyče se při uvážení pouze rotačního pohybu pohybuje kolmo na směr osy tyče. Magnetické pole ale vyvolá sílu kolmo na pohyb náboje — tedy ve směru osy tyče. Protože náboje jsou opačné a jejich rychlosti jsou opačné, budou se síly sčítat a výsledné zrychlení od interakce rotačního pohybu s magnetickým polem přispívá pouze ke zrychlení translačního pohybu. Naopak translační pohyb má za následek změnu úhlové rychlosti rotace dipólu. Takže je jasné, že kinetická energie se může přelévat pouze mezi translačním a rotačním pohybem — musí se zachovávat (magnetické pole je konzervativní a potenciální energie je konstantní).

*Tvrzení druhé:* Zachovává se celková hybnost. Protože se zachovává kinetická energie,  $E_k = \frac{p^2}{2m}$ , je zřejmé, že se zachovává i velikost hybnosti. Zachování momentu hybnosti není splněno, protože jak uvidíme, dipól se obecně nemusí pohybovat po omezené dráze (prostorově).

Jak bylo popsáno výše, může se energie přelévat mezi rotačním a translačním pohybem. To je pro nás nevýhodné, protože se mění úhlová rychlost rotačního pohybu dipólu. Předpokládejme ale, že existuje taková trajektorie dipólu, kdy bude úhlová rychlost rotace kolem hmotného středu konstantní v čase. To by ale znamenalo, díky faktu, že rotační pohyb působí na translační a naopak, že působení rotace nevede ke změně velikosti hybnosti (neplatí o směru) a podobně naopak. Toho lze dosáhnout právě tehdy, když směr pohybu dipólu je kolmý na jeho osu (tím pádem se, stejně jako při pohybu jedné nabitě částice v magnetickém poli, mění pouze směr a ne velikost rychlosti translačního pohybu). Zároveň síla pocházející od translačního pohybu působí ve směru osy dipólu a nemůže způsobit změnu velikosti úhlové rychlosti rotace. Takže dipól by se teoreticky mohl pohybovat po kružnici, ovšem musíme splnit ještě podmínku, že úhlová rychlost vlastní rotace dipólu je stejná jako úhlová rychlost obíhání po kružnici, aby vektor rychlosti translace byl stále kolmý na osu dipólu. Pokusme se určit, jak velká musí být úhlová rychlost rotace dipólu, aby se

v daném magnetickém poli  $B$  pohyboval po kružnici o daném poloměru  $R$ . Z analogie s pohybem hmotného bodu po kružnici získáme vztah pro dostředivou sílu (hmotnost dipólu je  $2m$ ):

$$F = 2mr\omega^2,$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost rotace dipólu kolem hmotného středu i po kružnici. Pro velikost těžé síly platí (Lorentzova síla v magnetickém poli):

$$F = 2q\omega \frac{d}{2} B = q\omega dB,$$

kde  $q$  je absolutní hodnota velikosti náboje jedné kuličky a  $d$  je délka dipólu. Snadnou úpravou získáme

$$\omega = \frac{qdB}{2mr}.$$

Je ale vidět, že počáteční translační rychlost dipólu  $v_0 = r\omega$  je nenulová. To neodpovídá zadání — výchozí situace je dipól stojící na místě a poté skokově zapneme magnetické pole. Právě vyšetřený případ by odpovídal tzv. adiabatickému zapínání pole, tzn. zapínání pole tak pomalu, že v každém časovém okamžiku je systém v rovnováze, dipól se tedy stále pohybuje po kružnici, která postupně zvětšuje svůj poloměr. Ještě zbývá určit, jak rychle a po jaké kružnici se dipól bude pohybovat, pokud jeho počáteční úhlová rychlost bude  $\omega_0$  a adiabaticky zapneme pole o velikosti  $B$ . Oba vztahy získáme triviálně dosazením do zákona zachování velikosti hybnosti

$$\begin{aligned} p_0 &= p \\ md\omega_0 &= 2mr\omega + md\omega \\ \omega &= \omega_0 - \frac{qB}{m} \\ r &= \frac{1}{2} \frac{qBd}{m\omega_0 - qB}. \end{aligned}$$

Zde je nutno povšimnout si významných situací. Zapínejme pomalu magnetické pole. Poloměr orbity pohybu dipólu bude stále růst, až (pro konečnou velikost pole!  $B = \frac{m\omega_0}{q}$ ) se dipól bude pohybovat po přímce s konečnou hybností  $md\omega_0$ . Při dalším zvětšování magnetického pole se již nebude nic měnit - uvedený vztah má platnost pouze pro pole menší než  $B = \frac{m\omega_0}{q}$ .

Problém skokové změny magnetického pole je analyticky řešitelný, ovšem nejjednodušší je podívat se na celou situaci s pomocí počítačového modelu. Analyticky totiž dostaneme systém diferenciálních rovnic, jejichž řešení je stejně nutno provést numericky. V závislosti na počátečních parametrech dostáváme dráhy, které vykazují jakýsi drift v jednom směru a ve směru kolmém oscilují v omezeném intervalu. Na vás je, abyste se znalostí vzniku a působení sil a momentů sil fyzikálně rozmysleli, jak takové dráhy mohou vypadat.

Kdybychom mohli magnetické pole zapínat libovolně v čase menším než  $t_0$  a poté bychom nechali magnetické pole konstantní, mohli bychom (pro  $t > t_0$ ) dostat trajektorie zajímavých tvarů. Např. byla popsána kružnice, ale obecně by se dipól mohl pohybovat po elipse, v úvahu připadají cykloidy, prodloužené i zkrácené, atd.

**Tomáš Ostatnický**

### Úloha VI.3 ... rezonanční obvody (3 body, řešilo 21 studentů)

Rezonanční obvod se skládá z neideální cívky s indukčností  $L = 1$  H a vnitřním odporem  $R = 1 \Omega$  a neideálního kondenzátoru s kapacitou  $C = 1 \mu\text{F}$  o neznámém svodovém odporu  $R_x$ . Jaká je velikost  $R_x$ , pokud víme, že se  $1/3$  původní energie rezonančního obvodu ztrácí v podobě tepla na odporu cívky?

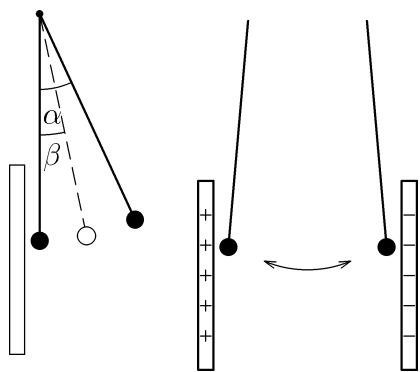
Představme si nejprve obvod bez svodového odporu kondenzátoru. Za jednu periodu oscilací se pak ztratí energie  $\Delta W = I_0^2 RT/2$ , kde  $I_0$  je amplituda proudu v cívce a  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  perioda oscilací. Celková energie obvodu je  $W = LI_0^2/2$ . Pak  $\Delta W/W = 2\pi R\sqrt{C/L}$ , v našem případě

$\Delta W/W \approx 10^{-3} \ll 1$ . Energetická ztráta za jednu periodu je tedy v porovnání s celkovou energií obvodu velmi malá a oscilace můžeme považovat za harmonické. Přidáním svodového odporu se na tomto závěru řádově nic nezmění, neboť ztráty na tomto odporu jsou podle zadání jen dvakrát větší než na cívce.

Pro ztráty v neideální cívce, resp. kondenzátoru, za jednu periodu tedy platí:  $\Delta W_L = I_0^2 RT/2$ ,  $\Delta W_C = U_0^2 T/2R_x$ , kde  $U_0$  je amplituda napětí na kondenzátoru. Uvědomíme-li si, že  $\Delta W_C = 2\Delta W_L$  a  $LI_0^2/2 = CU_0^2/2$ , dostaneme  $R_x = L/2CR = 5 \cdot 10^5 \Omega$ .

**Rudolf Sýkora**

#### Úloha VI.4 ... míček v kondenzátoru (4 body, řešilo 26 studentů)



Obr. 5

Obr. 6

Malá kovová kulička o hmotnosti  $m = 3,0 \text{ g}$  je zavěšena na tenkém hedvábném vlákně délky  $l = 30 \text{ cm}$  tak, aby se dotýkala svislé kovové desky. Kuličku vychýlíme o úhel  $\alpha$  a uvolníme. Po odrazu od desky se kulička vychýlí o úhel  $\beta < \alpha$  (obr. 5).

Při druhém pokusu umístíme do vzdálenosti  $d = 5,0 \text{ cm}$  od první desky druhou stejně velkou. Závěs kuličky prodloužíme, aby byl mnohem delší než vzdálenost desek. Připojíme-li desky ke zdroji vysokého napětí  $U = 2,00 \cdot 10^4 \text{ V}$  a závěs vychýlíme, kulička se rozkmitá a naráží střídavě na levou a pravou desku (obr. 6). Perioda nárazů se brzy ustálí na hodnotě  $T = 0,45 \text{ s}$ . Jak se mění při druhém pokusu rychlost kuličky mezi dvěma nárazy na desky? Jaký náboj nese kulička během letu mezi deskami?

Nejprve určíme tzv. koeficient restituace, to je poměr rychlosti odrazu a dopadu  $K = v_{\text{odr}}/v_{\text{dop}}$ . K tomu využijeme zákona zachování mechanické energie

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl(1 - \cos \alpha).$$

Tuto rovnici napíšeme jak pro  $v_{\text{dop}}$ ,  $\alpha$ , tak pro  $v_{\text{odr}}$ ,  $\beta$ , vydělíme je a dostaneme

$$K = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 - \cos \alpha}}.$$

V kondenzátoru bude homogenní elektrické pole, nabitá kulička se mezi deskami bude pohybovat rovnoměrně zrychleně se zrychlením  $a$ , počáteční rychlostí  $v_p$  a koncovou rychlostí  $v_k$ . Průměrná rychlost je dána jako průměr počáteční a koncové rychlosti

$$\frac{v_k + v_p}{2} = \frac{d}{T}.$$

Při odrazu se změní náboj na kuličce na opačný a rychlosti budou opět v poměru

$$\frac{v_p}{v_k} = K.$$

Řešením posledních dvou rovnic dostaneme

$$v_k = \frac{2d}{T(1+K)}, v_p = \frac{2dK}{T(1+K)}, a = \frac{v_k - v_p}{T} = \frac{2d(1-K)}{T^2(1+K)}.$$

Zrychlení kuličky je

$$a = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m} = \frac{QU}{md}.$$

Dosadíme za zrychlení a vyjádříme absolutní hodnotu náboje

$$Q = \frac{2md^2(1-K)}{UT^2(1+K)}.$$

Omylem nebyly zadány úhly  $\alpha$  a  $\beta$ . Bylo možné je odečíst z obrázku třeba jako  $\alpha = 25^\circ$   $\beta = 12^\circ$ . Po dosazení těchto a zadaných hodnot dostaneme  $v_p = 0,072 \text{ m/s}$ ,  $v_k = 0,150 \text{ m/s}$ ,  $a = 0,172 \text{ m/s}^2$  a  $q = 1,29 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ .

Václav Porod

### Úloha VI. P ... gravitace (5 bodů, řešilo 25 studentů)

Už od pradávna se lidé zabývali pozorováním oblohy a později pohybem planet okolo Slunce. Jak se to historicky odehrálo, asi všichni znáte. Tycho de Brahe sledoval mnoho let pohyby planet a zhotovil rozsáhlé tabulky. Z nich vyšel Kepler a objevil své zákony. Těch využil Newton, lépe pochopil podstatu těchto zákonů a dospěl ke krásnému vztahu:

$$F_G = \kappa \frac{mM}{r^2}.$$

Takto popisujeme pouze pohyb planet okolo Slunce. Můžeme říci, co vyvolává tuto sílu? Tímto se zabýval i Newton a nakonec se uspokojil poznáním toho, co se odehrává, bez znalosti mechanismu. Dodnes jej nikdo neobjevil. Bylo navrženo více mechanismů gravitace. Jeden ze zajímavých je tento:

Představte si, že v prostoru je velké množství částic, které se pohybují velkou rychlostí ve všech směrech a jsou málo absorbované při průchodu hmotou. Když jsou pohlcené Zemí, předávají jí hybnost. Když je těch, které jdou jedním směrem, stejně jako těch z opačného směru, jsou hybnosti vyvážené. Když se k Zemi přiblíží Slunce, jsou částice přicházející na Zemi přes Slunce částečně absorbovány a ve směru od Slunce jich přichází méně než z opačné strany. Země proto získá hybnost směřující k Slunci.

Na vás je, abyste ověřili, jestli je taková gravitační síla nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti (uvažujte dvě koule, kde jedna je mnohem menší než ta druhá — stačí přibližně). Jak asi tušíte, tento mechanismus gravitace není správný. Zkuste přijít na to, kde selhává. Návod: najděte chybné důsledky.

Nejprve spočteme, jak tato síla závisí na vzdálenosti  $r$ . Uvažujme dvě koule, kde první je mnohem menší než ta druhá a vzdálenost obou koulí je mnohem větší než poloměr druhé koule. Jaká síla působí na menší kouli? Do menší koule narážejí částice ze všech stran, kromě prostorového úhlu vyřazeného druhou, větší koulí. Odtamtud sice také přilétávají částice, ale je jich podstatně méně než z jiných směrů, protože větší koule jich hodně absorbuje. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že pro všechny paprsky v prostorovém úhlu pohltí koule stejné množství částic. Ve skutečnosti pohltí více částic u paprsku procházejícího středem koule, než u paprsku jdoucího dál od středu (větší tloušťka materiálu). Síla je tedy přibližně přímo úměrná prostorovému úhlu  $\Omega$  a ten je roven  $\frac{S_2}{r^2}$ . ( $S_2$  je průřez druhé koule). Tímto jsme ukázali, že naše nová gravitační síla je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti. Někdo by mohl namítat, že tato síla nezávisí na hmotnosti. Tak to ale není, protože tělesa s větší hustotou budou pohlcovat více částic.

Nyní se podívejme na některé chybné důsledky této teorie. Co se bude dít s tělesem, které se pohybuje? Do takového tělesa bude narážet víc částic zepředu než zezadu. Je to stejné, jako když běžíte v dešti. Proto by se pohybující tělesa zpomalovala, až by nakonec zastavila. Takto by se musely zpomalovat i planety obíhající okolo Slunce, ale to nepozorujeme. Proto je tato teorie neplatná.

Další chybný důsledek je například tento: Mějme nějakou obdélníkovou desku, kterou umístíme do homogenního pole kolmo na siločáry. Za homogenní můžeme považovat třeba pole u povrchu velké koule. Zvolme tloušťku desky tak, aby absorbovala polovinu částic, které na ni dopadají. Přes desku tedy projde také polovina částic. Co se stane, přehneme-li desku na polovinu? Celková hmota se nezmění. Ale do desky narazí už jen polovina z předchozího množství částic a z nich

polovina projde přes první část dvojité desky a z té poloviny zase jen polovina prolétne ven za desku. Celkem tedy projde jedna polovina plus jedna osmina z původního množství částic. Tedy aniž bychom měnili množství hmoty, změnila se gravitační síla. To je spor.

**Jakub Černý**

### Úloha VI. Exp ... *atmosférický tlak* (8 bodů, řešilo 35 studentů)

Změřte atmosférický tlak v místě vašeho bydliště a to touto metodou: Ponořte do nádoby s vodou prázdnou skleničku dnem vzhůru a z toho, jak vysoko se dostane voda ve skleničce spočítejte atmosférický tlak. Znáte hustotu vody  $\rho$  a tíhové zrychlení  $g$ . Nezapomeňte uvést místo a čas měření.

#### Teorie

V podstatě se vyskytly tři různé metody měření.

#### Izotermická

Ponořování láhve jsme považovali za izotermický děj. Pro ten platí  $p_A V_1 = p V_2$ , kde  $V_1$  je objem prázdné nádoby a  $V_2$  je objem ponořené. Pro ponořenou láhev můžeme spočítat  $p$  pomocí  $p = p_A + h\rho g$  kde  $h$  je rozdíl hladin vně a uvnitř nádoby. Nakonec tedy dostaneme

$$p_A = \frac{h\rho g}{\frac{V_1}{V_2} - 1}$$

Pokud vyjádříme  $V_2 = V_1 - W$ , kde  $W$  je objem vody, který se dostal do sklenice, dostaneme po úpravě vztah

$$p_A = \frac{h\rho g(V_1 - W)}{W}$$

Hlavní problém této metody spočívá v zajištění izotermičnosti děje. Je třeba velmi pomalu ponořovat a čekat na vyrovnání teploty.

Další důležitou roli hrálo i zajištění co největších rozdílů mezi hladinami, čili co největší  $h$  a  $W$ , abychom dosáhli malých relativních chyb.

#### Adiabatická

Pokud zajistíme adiabatičnost děje, můžeme počítat  $(V_2/V_1)^\kappa = p_A/(p_A + h\rho g)$  odtud dostaneme

$$p_A = \frac{h\rho g}{\left(\left(\frac{V_1}{V_1 - W}\right)^\kappa - 1\right)}$$

Zajistit adiabatičnost děje je ovšem ještě obtížnější než zajistit jeho izotermičnost.

#### Elektrolytická

Tuto metodu nám poslal Karel Kouřil. Je založena na elektrolýze vody. Do odměrného válce byl jímán pouze vodík. Jeho látkové množství se dá spočítat dle  $n = \frac{It}{2eA}$ , kde  $I$  je proud měřený ampérmetrem,  $t$  je doba elektrolýzy,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C je elementární náboj a  $A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  je Avogadrova konstanta.

Poté pomocí rovnice ideálního plynu určíme  $p = nRT/V$  kde  $R = 8,31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ .

Navíc musíme počítat, že uvnitř válce jsou nasycené vodní páry o tlaku  $p_p$ . Pro atmosférický tlak tedy platí  $p_A = p + p_p$ .

#### Výsledky měření

Provedli jsme jednu sadu měření, kterou jsme se pokusili interpretovat pomocí izotermického a adiabatického modelu. Nakonec jsme výsledky, které dávají oba modely porovnali.

Použité konstanty

hustota vody  $\rho = 1000 \text{ kgm}^{-3}$

tíhové zrychlení  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

objem láhve  $V_1 = 765 \text{ ml}$

$\kappa = 1,4$  pro vzduch

Izotermický model

Měření	$W$ [ml]	$h$ [cm]	$p_A$ [kPa]	$\Delta^2 p_A$ [kPa <sup>2</sup> ]
1	10,8	13,9	95,0	11,4
2	9,5	14,8	115,2	282,5
3	9,2	11,7	94,1	18,6
4	8,7	12	102,1	13,7
5	8,5	11,3	98,4	0,0
6	10,3	13,1	93,9	19,7
7	10,1	13	95,1	10,8
8	8,6	10,9	93,8	20,8
9	10	13,5	99,7	1,8
10	9,2	12	96,5	3,6

Adiabatický model

Měření	$W$ [ml]	$h$ [cm]	$p_A$ [kPa]	$\Delta^2 p_A$ [kPa <sup>2</sup> ]
1	10,8	13,9	67,7	5,9
2	9,5	14,8	82,1	143,4
3	9,2	11,7	67,0	9,4
4	8,7	12	72,8	7,0
5	8,5	11,3	70,2	0,0
6	10,3	13,1	66,9	10,1
7	10,1	13	67,8	5,5
8	8,6	10,9	66,9	10,4
9	10	13,5	71,1	0,9
10	9,2	12	68,7	1,8

Pro izotermický model tedy dostaneme:

Průměrný atmosférický tlak  $\overline{p_A} = 98$  kPa

Směrodatná odchylka jednoho měření  $\sigma(p_A) = 7$  kPa, k hrubé chybě nedošlo

Směrodatná odchylka aritmetického průměru  $\sigma(\overline{p_A}) = 2$  kPa

Relativní systematická chyba je  $\delta_{SYS} = 7\%$

Tedy  $p_A = (98 \pm 9)$  kPa.

Pro adiabatický model dostaneme:

Průměrný atmosférický tlak  $\overline{p_A} = 70$  kPa

Směrodatná odchylka jednoho měření  $\sigma(p_A) = 5$  kPa, k hrubé chybě nedošlo

Směrodatná odchylka aritmetického průměru  $\sigma(\overline{p_A}) = 1$  kPa

Relativní systematická chyba je  $\delta_{SYS} = 7\%$

Tedy  $p_A = (70 \pm 6)$  kPa.

### Diskuze

Z výsledků vidíme, že našemu měření odpovídá izotermický model mnohem lépe než adiabatický. Teplota v láhvi se ustálila na teplotě okolí, neboť vyměňovala teplo, tedy o adiabatickém ději nemůže být ani řeč. Jelikož jsme zamezili nerovnoměrnému ohřívání láhve našima rukama a zajistili stejnou teplotu vody jako vzduchu, měření je relativně přesné.

*Libor Dener*

**Úloha S. VI ... optická vlákna** (6 bodů, řešilo 29 studentů)

a) Jak velká je vstupní numerická apertura u vlákna se skokovou změnou indexu lomu s indexem lomu  $n = 1,452$  a relativní změnou indexu lomu  $\Delta = 0,01$ .

b) Jak dlouhý signál dostaneme na výstupu z optického vlákna s parametry z části a) o délce 100 km, jestliže dáme na vstup signál dlouhý  $1 \mu\text{s}$ ? K výpočtům použijte nastíněného geometrického modelu.

c) Jakou maximální přenosovou kapacitu (v bytech/s) můžeme na tomto vlákně provozovat? Předpokládejte, že přenesení jednoho bitu znamená přenést jeden impuls.

a) Numerickou aperturu spočítáme podle vztahu uvedeného v seriálu  $NA = n\sqrt{2\Delta} = 0,205$ .

b) Nejprve uvažujme, jak se ve vláknu rozšíří velmi úzký světelný puls. Pro rychlost šíření paprsku je důležitá rychlost ve směru podélné osy vlákna. Nejrychleji se pak šíří paprsky rovnoběžné s osou vlákna a to rychlostí  $v_{max} = c/n$ . Nejpomalejší paprsky, které se ještě vláknem šíří jsou paprsky, které se odráží pod kritickým úhlem a jejich podélná rychlost je zmenšená o sinus kritického úhlu a je tedy  $v_{min} = c \sin \theta_C / n$ .

Víme, že numerická apertura souvisí s kritickým úhlem vztahem  $NA = \sin \theta_a = n \sin(\pi - \theta_C)$  a můžeme vyjádřit  $\sin \theta_C = \sqrt{1 - (NA/n)^2}$ .

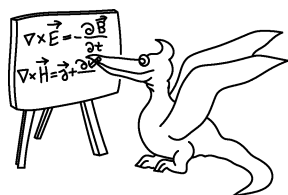
Časový rozdíl mezi nejrychlejším a nejpomalejším paprskem spočteme jako rozdíl jejich časů (nesmíme udělat začátečnickou chybu a odečítat rychlosti!)

$$\Delta t = \frac{L}{v_{min}} - \frac{L}{v_{max}} = \frac{Ln}{c \sin \theta_C} - \frac{Ln}{c} = \frac{Ln}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (NA/n)^2}} - 1 \right) \doteq \frac{Ln\Delta}{c}.$$

Pro naše konkrétní hodnoty dostáváme  $4,9 \mu\text{s}$ . Puls, který trvá konečnou dobu, bude po průchodu vláknem delší o hodnotu  $\Delta t$ . (Zamyslete se nad tím, proč není rozšíření dvojnásobné délky!) Puls původně dlouhý  $1 \mu\text{s}$  se v tomto vlákně prodlouží na  $5,9 \mu\text{s}$

c) Pulsy dlouhé  $1 \mu\text{s}$  odpovídají frekvenci 1 MHz a není obtížné vyrobit pulsy mnohem kratší a pak bude maximální přenosová kapacita determinovaná jen rozšiřováním pulsu ve vlákně. Abychom rozeznali jednotlivé bity, musíme dosáhnout toho, aby se jednotlivé pulsy při výstupu z vlákna nepřekrývaly, tj. můžeme je vysílat maximálně s frekvencí  $1/\Delta t$ . Počet bytů [bajtů] (1 byte = 1B = 8b = 8 bitů [bitů]) přenesených za sekundu pak je  $1/8\Delta t = 25,5 \text{ kB/s}$ .

**Jan Hradil**



## Seriál na pokračování

V předposledním díle seriálu jsme vám dali příležitost položit několik otázek z optiky. Dotazů nepřišlo mnoho, ale pokusíme se na ně odpovědět.

První dotaz se týkal toho, jak detekovat pulsy dlouhé (nebo spíše krátké?) 70 fs. Výhodou takto krátkých pulsů je, že jsou rychlejší než všechny elektronické součástky a díky nim můžeme sledovat děje rychlejší, než může sledovat elektronika. Přímou elektronicky tedy takové signály nemůžeme detekovat (resp. můžeme, ale odezva je omezena nejkratší reakční dobou elektronického systému a nikoliv délkou samotného optického pulsu). Pro určení délky pulsu používáme tzv. autokorelační metody v přístroji zvaném autokorelátor.

Než si objasníme funkci autokorelátoru, musíme nejprve uvést proces, který se nazývá generace druhé harmonické. Není to nic principiálně složitějšího, jde o to, že ve vhodně orientovaném krystalu se ze dvou fotonů o frekvenci  $\omega$  vytvoří jeden foton o dvojnásobné frekvenci  $2\omega$ . Tento efekt je závislý na druhé mocnině intenzity světelného svazku.

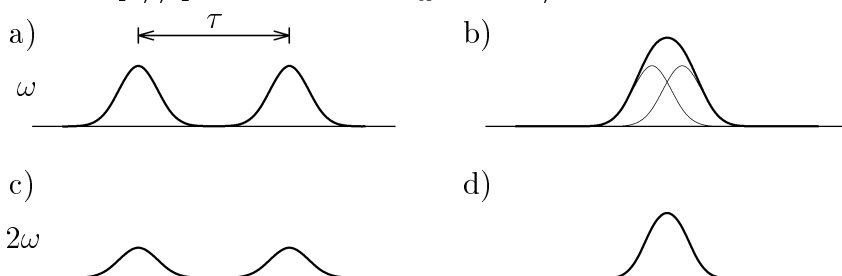
Pokud necháme šířit krystalem jeden puls, bude efektivita generace malá. Jestliže uvnitř krystalu dojde k časovému a prostorovému překryvu dvou stejných pulsů, bude intenzita vygenerované



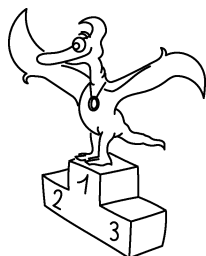
druhé harmonické až čtyřikrát větší než u jednotlivého pulsu. Intenzita signálu odpovídá tzv. autokorelační funkci  $(I(t) + I(t + \tau))^2$ . Jak se mění časový překryv, tj. pulsy se hýbou na časové ose (obr. 7a) a b)), mění se i účinnost generace. V době překryvu obou pulsů je signál největší. Detektor, který sleduje jen signál na frekvenci  $2\omega$  může být pomalý ve srovnání s délkou pulsu. Na osciloskopu pozorujeme závislost velikosti signálu o frekvenci  $2\omega$  na časovém zpoždění mezi pulsy  $\tau$ . Takto získaný graf má tvar závislý na tvaru pulsů a většinou se podobá gausovce. Z její šířky lze spočítat délku pulsu. Tato metoda určení délky pulsu je nepřímá, ale relativně jednoduchá a v praxi často používaná.

Další dotaz se týkal modulace signálu pro optické komunikace. Pokud chceme přenášet vláknem informaci, používáme kontinuálně pracujícího laseru, který modulujeme modulátorem. Modulátory používané v optické komunikaci pracují obvykle na elektrooptickém principu. To znamená, že elektrické pole mění např. index lomu a tak se mění vlastnosti součástky a ta přepíná světelný signál mezi dvěma vlákny jako obyčejný vypínač.

Pokud vás problematika krátkých pulsů zaujala, můžete se něco zajímavého dozvědět také na adrese <http://quantum.karlov.mff.cuni.cz/OOE> v sekci Informace pro studenty.



Obr. 7



## Pořadí řešitelů po VI. sérii

### Kategorie čtvrtých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	P	E	S	V	1	2	3	4	P	E	S	VI	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	3	3	4	5	5	8	6	34	3	5	3	4	5	8	6	34	204
1	Lenka	Zdeborová	4.A	G Plzeň-Mikul. n.	3	4	3	5	5	8	6	34	3	4	3	4	5	8	4	31	158
2	Daniel	Sprinzl	4.	G Dačice	3	2	4	5	1	7	6	28	3	3	1	4	-	5	5	21	147
3	Petr	Klenka	oktáva A	G Praha-Voděrad.	3	3	4	4	1	7	5	27	3	1	1	4	3	8	6	26	137
4	Jiří	Samek	kvinta	G Semily	3	3	4	5	2	5	5	27	2	3	3	3	4	5	3	23	108
5	Filip	Křížek	oktáva A	G Praha-Litoměř.	2	2	4	4	1	2	5	20	-	-	-	-	-	-	-	0	93
6	Tomáš	Pecháček	4.P	MSŠCH	2	1	1	3	-	-	6	13	3	3	-	-	2	-	5	13	92
7	Vít	Marek	4.A	G Holešov	3	2	0	4	1	3	5	18	3	-	-	-	3	8	-	14	80
8	Miroslav	Musil	septima A	G N. Město na M.	3	3	1	-	-	7	-	14	-	-	-	2	0	-	6	8	74
9	Jan	Janský	septima	G Strakonice	2	3	1	4	-	-	-	10	-	-	-	-	-	-	-	0	70
10	Jan	Mysliveček	4.A	G Brno-t.k. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	54
11	Robert	Vácha	4.A	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	51
12	Miroslav	Černý	septima	G Kutná Hora	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	47
13	Michal	Šitina	4.B	G H. Králové-JKT	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	42

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	P	E	S	V	1	2	3	4	P	E	S	VI	Σ	
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>3</i>	<i>5</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>204</i>	
14-15	Michal	Fašina	septima		-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	30
14-15	Libor	Novák			-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	30
16	Jakub	Holovský			3	3	4	5	-	-	-	15	2	0	1	3	3	-	-	-	9	29
17	Karel	Honzl		G Podbořany	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	28
18	Josef	Hala			-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	27
19	Lukáš	Poul	4.A	G Brno-Vídeňská	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	26
20	Lukáš	Uhl	4.A	G Brno-Vídeňská	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	21
21	Jan	Holeček	4.A	G Brno-t.k. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	19
22	Martin	Zámek			2	2	1	4	1	4	4	18	-	-	-	-	-	-	-	-	0	18
23-24	Ondřej	Příbyla	4.A	G Brno-t.k. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	16
23-24	Daniel	Vostřel	septima	G Litomyšl	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	16
25	Ivo	Chvojka			-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	13
26	Karel	Jelínek	E4.B	SPS Ostrov	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	11
27	Rostislav	Štaubr			-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	10
28-29	Petr	Virostko	4.A	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	9
28-29	Petr	Zasche	septima	G Jablonec n. N.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	9
30-34	Jiří	Dvořáček	4.A	G Brno-t.k. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	8
30-34	Ondřej	Kafka	sexta	G Semily	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	8
30-34	Karel	Řezba	septima A	G Beroun	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	8
30-34	Petr	Švec	4.	G Kadaň	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	8
30-34	Radomír	Vaníček			2	-	-	-	-	0	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	0	8
35	Martin	Nečaský		G Semily	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	7
36	Martina	Gřondilová	4.A	G H. Králové-JKT	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	6
37	Vlastimil	Kubíček	septima A	G Beroun	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5
38	Marie	Kuncová	4.A	G Blansko	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4
39-40	Pavel	Kolář			-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	3
39-40	Karel	Müller	6.A	G Rychnov n. K.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	3
41	Jiří	Burda			-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	2
42	Petr	Forgács	sexta B	G Most	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0

### Kategorie třetích ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	P	E	S	V	1	2	3	4	P	E	S	VI	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>3</i>	<i>5</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>204</i>
1	Jan	Houšťek	sexta	G Pelhřimov	3	2	4	5	5	7	6	32	3	5	3	4	5	8	6	34	206
2	Karel	Kouřil	kvinta B	G Blansko	3	3	3	5	2	8	5	29	3	4	3	4	4	10	6	34	153
3	Milan	Berta	III.A	G Veľké Kapušany	3	2	1	5	2	6	5	24	3	3	-	-	4	8	4	22	147
4	Juraj	Suchár	3.	G Dubnica n. Váhom	-	3	1	5	5	7	-	21	3	-	-	-	4	7	-	14	113
5-6	Tomáš	Linhart	sexta	GOA Sedlčany	3	2	4	4	2	2	3	20	-	3	-	4	-	5	6	18	107
5-6	Miroslav	Pišťek	sexta	GOA Sedlčany	3	3	4	3	-	2	-	15	-	3	-	4	-	5	6	18	107
7	Jan	Houfek	sexta	G Uh. Hradiště	2	2	4	3	-	6	6	23	1	-	-	4	2	5	6	18	103
8	Pavel	Augustinský	sexta B	G Havířov	-	2	2	3	-	6	-	13	3	-	-	3	3	-	-	9	89
9	Jakub	Kulaviak	kvinta B	G Blansko	2	2	-	0	-	8	-	12	3	4	0	-	-	-	1	8	81
10-11	Stanislav	Hampl	sexta	GOA Sedlčany	2	2	1	4	-	4	-	13	-	0	-	-	0	6	6	12	75
10-11	Tomáš	Matoušek	VI.C	G Karlovy Vary	3	2	1	4	0	5	-	15	0	1	0	2	-	8	-	11	75
12-13	Lenka	Knopová	5.M	G Pardubice	3	0	0	2	1	0	0	6	0	2	-	-	0	-	-	2	50
12-13	Ondřej	Souček	3.	G Jablonec n. N.	-	4	4	4	3	-	-	15	-	-	-	-	-	-	-	0	50
14	Kateřina	Šetková	sexta B	G Klatovy	2	1	1	2	1	-	-	7	-	-	-	-	-	7	-	7	47
15	Petr	Schimm	VI.C	G Karlovy Vary	3	2	-	-	-	-	-	5	0	-	-	-	-	-	-	0	40
16	Martin	Kozák	sexta A	G Klatovy	-	0	-	3	-	-	-	3	2	2	-	1	-	-	-	5	39
17	Jan	Kulveit	VI.A	G Praha-Ústavní	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	35
18	Klára	Maturová	sexta	G Tanvald	-	-	-	3	-	-	-	3	-	1	-	-	-	-	-	1	33
19-20	Martin	Soška	sexta	G Uh. Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	29
19-20	Zbyněk	Šrubař	sexta A	G Frenštát p. R.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	1	-	-	-	-	-	1	29
21	František	Kolář	kvinta	G Praha-Nad Kaval.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	28
22	Daniel	Fiala	5.B	G Sušice	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	27
23	Miroslav	Bačák	sexta	G Pelhřimov	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	26
24	Petr	Nachtigall	sexta A	G Frenštát p. R.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	0	-	-	-	0	22
25	Jan	Novotný	sexta	G Mělník	2	1	1	3	-	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	0	21
26	Jiří	Vábek	sexta	G Žďár n. Sáz.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	19
27	David	Šumský	3.B	G Třinec	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	18
28	Pavel	Borovička	III.T	G Opatov	-	-	-	4	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	0	15

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	P	E	S	V	1	2	3	4	P	E	S	VI	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>3</i>	<i>5</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>204</i>
29-30	Kristina	Rochová	sexta A	G Frenštát p. R.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	13
29-30	Jiří	Svoboda	7.A	G Praha-Českolipská	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	13
31	Jana	Váchová	6.	G Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	12
32	Petr	Veselý	5.F	G Č. Budějovice-JVJ	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	11
33	Miroslav	Vyčítal	3.A	G Rychnov n. K.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	10
34-35	Jiří	Bočan	sexta		-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	8
34-35	Marek	Libra	sexta	G Žďár n. Sáz.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	8
36	Lubor	Kleveta	sexta	G Uh. Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	7
37	Václav	Lederer	sexta	G Vítkov	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	6
38-39	Martin	Macásek	3.	G Dačice	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	5
38-39	Slavomír	Miškovec	3.A	G Poprad	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	5
40	Tomáš	Kratochvíl	6.A	G Brno-Křenová	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	3
41	Andrej	Pavlík	3.D	G Trenčín	-	0	1	-	-	-	-	1	-	-	0	-	-	-	-	0	1
42	Lukáš	Rychnovský	kvinta B	G Blansko	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	0

## Kategorie druhých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	P	E	S	V	1	2	3	4	P	E	S	VI	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>3</i>	<i>5</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>204</i>
1	Petr	Nečesal	IV.C	G M. Budějovice	3	2	4	4	1	10	6	30	3	4	3	-	3	8	6	27	166
2	Peter	Čendula	2.B	G Liptovský Mik.	3	4	4	5	2	7	5	30	3	3	2	2	3	9	6	28	162
3	Martin	Beránek	V.	G Praha-Ohradní	-	4	4	3	1	-	4	16	3	0	1	4	3	5	4	20	124
4	David	Kolovratník	2.E	SPŠS Chrudim	3	3	4	4	2	-	3	19	2	1	3	2	-	5	1	14	105
5	Jaromír	Chalupský	kvinta A	G Sušice	3	3	4	4	1	5	-	20	3	0	-	2	3	5	-	13	102
6	Jan	Pšíkal	2.F	SPŠE Pardubice	3	0	1	4	1	7	5	21	-	1	-	2	-	8	6	17	86
7	Ondřej	Plašil	2.B	G Praha-Chodov.	3	0	1	1	-	5	4	14	-	-	-	-	-	-	-	0	73
8	Michal	Škoda	kvinta B	G Turnov	3	-	-	-	-	-	-	3	3	-	-	-	-	-	6	9	63
9	Pavel	Janda	kvinta	G Telč	3	2	4	1	1	-	-	11	3	2	-	-	-	-	4	9	62
10	Jakub	Levic	kvinta B	G Louny	3	2	2	4	-	-	4	15	3	2	-	-	-	8	-	13	61
11	Hedvika	Kadlecová	2.C	G Praha-Botičská	1	2	-	1	-	2	-	6	2	1	-	1	2	9	2	17	60
12	Jaroslav	Tykal	2.C	G Jihlava	3	3	3	0	-	-	-	9	-	-	-	-	-	-	-	0	48
13	Pavel	Řezanka	2.C	G Praha-Zborov.	3	0	0	-	1	-	0	4	3	-	-	-	0	-	5	8	44
14	Jan	Alster	sexta A	G Holešov	2	0	4	3	1	-	-	10	-	-	-	-	-	-	-	0	41
15-17	Antonín	Karásek	2.	G Blansko	2	0	2	3	-	-	-	7	1	-	-	-	4	5	-	10	40
15-17	Martin	Šimek	kvinta	G Telč	3	-	4	4	0	-	-	11	-	-	-	-	-	-	-	0	40
15-17	Libor	Tomšík	2.F	SPŠE Plzeň	3	1	1	0	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	0	40
18-19	Jakub	Chaloupka	5.A	G Brno-Křenová	3	-	4	-	-	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	0	38
18-19	Radim	Krupička	2.B	G Žďár n. Sáz.	3	0	-	0	-	1	-	4	-	-	-	-	-	-	-	0	38
20	Dáša	Eisenmannová	2.A	G Praha-Mezi šk.	2	1	-	3	-	-	-	6	1	1	1	4	-	-	-	7	35
21	Martin	Jakl	4.D	G Pardubice	2	0	0	0	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	1	1	33
22	Jiří	Plachý	kvinta	G Uh. Hradiště	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	29
23	Michal	Tarana	2.B	G Žilina	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	28
24	Břetislav	Šopík	2.B	G Žďár n. Sáz.	2	0	-	-	-	1	-	3	-	-	-	-	-	-	-	0	27
25	Pavol	Mikčo	2.B	G Stropkov	1	0	1	0	-	2	0	4	2	1	0	0	-	8	1	12	26
26-27	Petra	Adamová	2.A	G Benešov	-	0	-	-	-	1	0	1	-	-	-	-	-	8	2	10	23
26-27	Marcel	Václavík	2.A	COP Hronov	3	0	-	0	-	-	-	3	1	0	0	1	1	-	-	3	23
28	Milan	Křápek	2.D	G Brno-Křenová	-	-	4	4	-	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	0	18
29	Jan	Kratochvíl	2.K	SPŠ Praha-Pans.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	17
30-32	Adela	Grohořová	2.D	G Bardejov	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	16
30-32	Petr	Hřebačka	5.A	G Brno-Křenová	-	-	-	-	-	-	-	0	3	-	-	-	-	-	-	3	16
30-32	Jan	Pacák	kvinta	G Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	16
33-35	Lukáš	Brázda	2.C	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	15
33-35	Martina	Štyrková	5.A	G Kutná Hora	-	-	-	-	-	-	-	0	2	-	-	-	-	-	-	2	15
33-35	Pavel	Veselý	2.A	G Kolín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	15
36-37	Pavel	Braška	2.D	G Bílovec	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	14
36-37	Vojtěch	Štěpán	kvinta A	G Ústí n. L.-Stav.	-	2	1	3	-	-	-	6	-	-	-	-	-	-	-	0	14
38-40	Jiří	Doubek	2.G	G Praha Arabská	3	2	-	3	-	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	0	13
38-40	Radek	Machán	2.B	G Liberec	3	0	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	0	13
38-40	Pavel	Vraspír	kvinta	G Polička	2	0	-	3	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	0	13
41	Jaroslav	Vácha	kvinta	G Příbram	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	12

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	P	E	S	V	1	2	3	4	P	E	S	VI	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>3</i>	<i>5</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>204</i>
42-43	Martin	Hejna	S2.A	SPŠE Dobruška	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	11
42-43	Vladimíra	Satrapová	2.	G Havl. Brod	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	0	-	-	-	0	11
44	Vladimír	Fuka	kvinta A	G Rakovník	-	-	1	4	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	0	10
45-47	Vít	Gottwald	2.A	G Jičín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	9
45-47	Lada	Plenerová	2.B	G Liberec	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	9
45-47	Norbert	Požár	6.A	G Bruntál	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	9
48-49	Tomáš	Brezula	2.B	G Přerov	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	8
48-49	Jan	Zikán	2.E	G Praha Arabská	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	8
50	Lukáš	Schmiedt	2.D	G Olomouc	1	0	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	0	7
51	Hana	Besedová	2.B	G Frenštát p. R.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	6
52-53	Petr	Novotný	2.B	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	5
52-53	Michaela	Volná	2.A	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	5
54-56	Petra	Hovorková	kvinta A	G Aš	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	4
54-56	Pavel	Václavek	2.	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	4
54-56	Peter	Valachovič	2.B	SPŠ Trenčín	1	0	-	3	-	0	-	4	-	0	0	-	-	-	-	0	4
57-59	Ondřej	Pánek	2.C	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	3
57-59	František	Polanka	2.A	G Domažlice	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	3
57-59	Ján	Uhrin	2.E	G Michalovce	-	-	-	3	-	-	-	3	0	-	-	-	-	-	-	0	3
60	Jan	Kodovský	sexta A	G Zlín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	2
61	Martin	Marec	6.B	G Bruntál	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	1

### Kategorie prvních ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	P	E	S	V	1	2	3	4	P	E	S	VI	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>3</i>	<i>5</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>8</i>	<i>6</i>	<i>34</i>	<i>204</i>
1	Michal	Bareš	kvarta A	G Plzeň-Mikul. n.	-	1	0	4	-	-	-	5	3	2	-	4	-	5	6	20	62
2	Ľuboš	Bednárik	1.F	G Trenčín	0	0	-	2	-	1	-	3	-	-	0	-	-	8	-	8	39
3	Matej	Dubový	1.B	G Trenčín	0	0	-	-	-	1	-	1	-	-	0	-	-	8	-	8	38
4	Zdeněk	Moravec	IX.C	ZŠ Blansko	-	-	-	-	-	-	-	0	2	-	-	-	4	8	1	15	31
5	Jiří	Vlach	kvarta	GOA Sedlčany	2	0	-	0	-	3	-	5	-	-	-	-	-	5	6	11	25
6-7	Peter	Biras	1.F	G Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	7	-	7	22
6-7	Miroslav	Šulc	kvarta B	G Ústí n. L.-Stav.	3	0	1	4	1	0	-	9	-	-	-	-	-	-	-	0	22
8	Roman	Mendel	IX.A	ZŠ Trenčín	0	0	-	-	-	-	-	0	-	-	0	-	-	6	-	6	17
9	Lenka	Beranová	kvinta C	G Klatovy	-	-	2	-	-	-	-	2	1	-	-	-	-	-	-	1	14
10	Petr	Křístek	1.C	G Frýdek-Místek	-	0	-	-	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	0	13
11	Vít	Šípál	V4.B	G Ústí n. L.-Jateční	-	0	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	6	-	6	11
12	Martin	Šturma	1.A	G Praha-Nad Alejí	-	-	-	4	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	0	10
13	Jindřich	Štáštka	1.E	G Sokolov	-	0	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	1	4	-	5	9
14	Rudolf	Kopřiva	1.C	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	7
15-16	Alena	Julínková	1.C	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	4
15-16	Jan	Kačmařík	1.A	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	4
17-18	Libor	Kocián	1.F	G Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	3
17-18	Karol	Martinka	1.G	G Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	3
19	Lenka	Burešová	1.C	G Praha-Zborov.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	2
20-21	Michal	Fárka	1.C	G Praha-Zborov.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	1
20-21	Martin	Žák	tercie M	G Praha-Zborov.	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	1
22	Miroslav	Krůs	1.A	G Klatovy	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	0

Naše adresa:

**FYKOS**

**Matematicko-fyzikální fakulta UK — KTF**

**V Holešovičkách 2**

**180 00 Praha 8**

<http://www.mff.cuni.cz/news/fks>