

Zadání III. série



Termín odeslání: 7. leden 2002

Milí řešitelé,

konečně dostáváte do rukou autorská řešení první série Fykosu společně se svými opravenými úlohami. Na konci brožurky najdete výsledkovou listinu. Je možné, že některé vaše údaje ve výsledkové listině nesouhlasí se skutečností nebo jsou neúplné. Pošlete nám tedy doplňující informace s řešením další série. Dejte pozor na to, abyste svá řešení posílali včas a správně ofrankovaná.

U vzorového řešení je u zadání uveden navrhovatel a původ úlohy, u autora řešení je i e-mail pro případné konzultace (nebojte se jej použít). Ve výsledkové listině je sloupeček s vaší procentuální úspěšností. Udává, kolik procent bodů jste získali z úloh, které jste dosud (tzn. během celého ročníku) řešili.

Přejeme vám všem krásné Vánoce a úspěšný nový rok 2002.

Organizátoři Fykosu

Úloha III.1 ... obr a trpaslík

Obr s trpaslíkem se přetahují o lano, které je omotané kolem stromu zakořeněného tak pevně, že ho ani obr nedokáže vytrhnout nebo zlomit. Přetrhnout lano se mu také nepodaří.

Velký zlý obr je přesně 666-krát silnější než trpaslík. Kolikrát musí být lano omotané kolem stromu, aby přetahování nikdo nevyhrál? Koeficient tření mezi lanem a stromem odhadněte.

Úloha III.2 ... valčík

Odhadněte celkovou kinetickou energii páru tančícího vídeňský valčík.

Úloha III.3 ... rampouch

Zimní sezóna se blíží, ale než vyrazíte lyžovat, zamyslete se nad tím, jaký tvar mají rampouchy rostoucí na otáčejícím se kole lyžařského vleku. Rovina kola svírá s vodorovnou rovinou úhel α , kolo se otáčí úhlovou rychlostí ω a rampouch roste ve vzdálenosti r od osy otáčení.

Úloha III.4 ... přesnost GPS

Tzv. Global Positioning System (GPS) pracuje na jednoduchém principu. Družice pohybující se na 12-ti hodinových drahách vysílají přesně synchronizované signály, které přijmač detekuje. Protože na přijmači nejsou absolutně přesné hodiny, dokáže měřit jen rozdíly vzdáleností od různých satelitů. 4 satelity stačí na dopočtení polohy, poloha satelitů se změní ze Země stejným způsobem.

Zdůvodněte, proč je přesnost GPS v horizontálním směru znatelně vyšší než ve vertikálním směru.

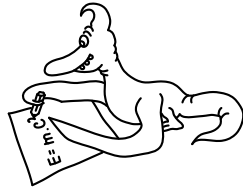
Úloha III.P ... magnetky

Sežeňte si někde dva magnetky a železný plíšek. Umístěte magnetky proti sobě na opačné strany plíšku a vyzkoušejte, jakou silou se přitahují. Pak jeden z magnetků otočte a pokus opakujte. Konečně vyzkoušejte, jak se magnetky přitahují a odpuzují bez přítomnosti plíšku.

Při těchto experimentech zřejmě objevíte, že cosi (alespoň na první pohled) není v pořádku. Zamyslete se nad tím a vysvětlíte, co se v jednotlivých případech děje.

Úloha III . Exp ... odrazivost

Změřte koeficient odrazivosti alobalu ve viditelném světle. Vhodnou metodu navrhněte sami. Nezapomeňte popsat, jakou stranu měříte, případně proměřte obě.



Řešení I. série

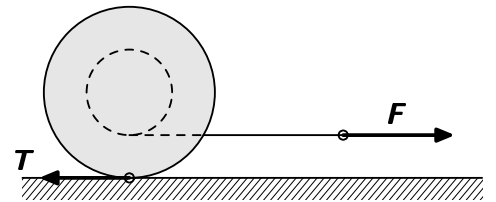
Úloha I. 1 ... špulka (3 body, řešilo 79 studentů)

Na špulce je navinutá nit. Za nit táhneme ve vodorovném směru konstantní silou F . Vnější poloměr je R a poloměr válce, na kterém je navinuta nit je r . Jaké je zrychlení špulky a jaký má směr? Koeficient tření je dost velký na to, aby špulka neprokluzovala. Znáte rozměry, hmotnost a moment setrvačnosti špulky.

Úloha ze soustředění FO podle Lenky a Honzy

Úlohu vyřešíme za těchto předpokladů: Špulka je tuhé těleso, síla F působí vodorovně a kolmo na osu špulky, r se při odvinování nemění a špulka odvinováním neztrácí na hmotnosti. Hmotnost špulky je m , její moment setrvačnosti vůči ose symetrie o je J_o , zrychlení ve vodorovném směru je a a uhlové zrychlení vůči o je ε .

Je třeba rozebrat dvě možnosti odvinování, spodem a vrchem. V prvním případě (obr. 1) ve vodorovném směru podle I. impulsové věty platí (kladný směr volme doprava)



Obr. 1

$$F - T = ma,$$

kde T značí velikost třecí síly. II. impulsová věta má pro osu symetrie špulky tvar

$$TR - Fr = J_o\varepsilon.$$

Špulka neprokluzuje, tedy relativní rychlost pohybu dolního bodu je vzhledem k podložce nulová, $v - \omega R = 0$, z čeho $a = \Delta v / \Delta t = R \Delta \omega / \Delta t = \varepsilon R$. Nakonec

$$a = \frac{FR(R - r)}{J_o + mR^2},$$

zrychlení má směr působící síly.

Nyní s pomocí energií vyšetříme odvíjení vrchem. Protože nit se odvíjí v poměru r/R k posunutí středu špulky, síla F koná práci na dráze $s(1 + r/R)$. Pro jednoduchost uvažme zrychlení špulky z nulové rychlosti na v . Když má tuto rychlost, dosud ujela dráhu $s = v^2 / (2a)$. V každém okamžiku je práce síly F rovna energii posuvného a rotačního pohybu špulky.

$$Fs \left(1 + \frac{r}{R}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_o\omega^2.$$

Po jednoduché úpravě obdržíme výsledek jako předtím až na znaménko v závorce. Pro běžnou špulku platí $R > r$ a zrychlení má směr síly.

Peter Čendula
peto@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I.2 ... válec s vodou (4 body, řešilo 101 studentů)

Mějme válcovou nádobu o poloměru podstavy R naplněnou vodou do výšky H . Do podstavy uděláme malou díрку o poloměru r . Za jak dlouho voda vyteče?

Na soustředění pro mezinárodní FO tuto úlohu uvidíte alespoň 4×.

Nejprve musíme určit podmínky, za jakých budeme úlohu řešit. Abychom byli schopni udělat alespoň nějakou rozumnou předpověď, musíme předpokládat, že dířka je opravdu malá, a proto se proudění v krátkých časových intervalech příliš neliší od ustáleného, takže můžeme použít Bernoulliho rovnici

$$p_0 + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konst.}$$

Z této rovnice si vyjádříme závislost rychlosti poklesu hladiny na její výšce,

$$v_R^2 = v_r^2 - 2gh,$$

kde v_R je rychlost poklesu hladiny a v_r je výtoková rychlost v otvoru. Potřebujeme zjistit jak závisí v_R na v_r . Dle rovnice kontinuity jsou objemové průtoky otvorem a při hladině stejné, neboli

$$\pi r^2 v_r = \pi R^2 v_R.$$

Odtud $v_r = (R^2/r^2) v_R$, a proto

$$v_R = \sqrt{\frac{2gh}{R^4/r^4 - 1}}.$$

Teď už víme, jak závisí rychlost poklesu hladiny na výšce. Závislost výšky hladiny na čase můžeme získat dvěma způsoby. První způsob vychází ze srovnání vztahu pro rychlost rovnoměrně zpomaleného pohybu

$$v = \sqrt{2ah}$$

a předchozí rovnice, z čehož dostaneme

$$a = \frac{g}{R^4/r^4 - 1}.$$

Dále použijeme rovnici $h = \frac{1}{2}at^2$, neboli $t = \sqrt{2h/a}$. Odtud vychází, že

$$t = \sqrt{\frac{R^4}{r^4} - 1} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

První odmocnina pro malá r přechází v R^2/r^2 . Druhý způsob je užití v_R jako derivace výšky hladiny podle času. Čas pak vyjádříme jako

$$t = \int_h^0 \frac{dh}{v_R} = \sqrt{\frac{R^4/r^4 - 1}{2g}} \int_h^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \sqrt{\frac{R^4}{r^4} - 1} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Tento vztah evidentně neplatí pro r blízké R , protože by se čas blížil k 0 místo k času volného pádu $\sqrt{2h/g}$. Je to proto, že Bernoulliho rovnice platí jen ve stacionárním případě. Při výpočtu jsme také zanedbali nerovnoměrné rozložení rychlostí ve výstupním otvoru, které efektivně snižuje plochu otvoru.

Vladimír Fuka
vlada@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I.3 ... žárovka (4 body, řešilo 65 studentů)

Máme žárovku, která svítí na výkonu 100 W. Chceme vyrobit žárovku pro výkon 60 W a použít přitom stejný materiál vlákna. Chceme, aby obě žárovky svítily „stejně“ (měly stejnou spektrální vyzařovací charakteristiku). Jaké rozměry musí mít vlákno v 60 W žárovce vzhledem k tomu ve 100 W?

Úlohu od bývalého šéfa Fykosu Jirky Franty.

Nejdříve ke značení. Všechny veličiny, které se budou vztahovat k 100 W žárovce budeme značit indexem 1 a všechny k 60 W žárovce 2. Aby se nezměnila vyzařovací charakteristika žárovky je nutné, aby se teploty vláken v obou žárovkách byly stejné ($T_1 = T_2$). Rozměry vlákna žárovky budu charakterizovat poloměrem r a délkou l .

Vyzařovací výkon vlákna žárovky lze popsat vztahem $P = S \cdot f(T)$, kde f je pro obě vlákna stejná funkce teploty. Pro poměr vyzářených výkonů dostáváme

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{2\pi r_1 l_1 f(T_1)}{2\pi r_2 l_2 f(T_2)} = \frac{r_1 l_1}{r_2 l_2}. \quad (1)$$

Odpor vlákna žárovky můžeme vyjádřit jako

$$R = \frac{\varrho(T)l}{\pi r^2},$$

kde $\varrho(T)$ je měrná vodivost, která obecně závisí na teplotě, ale protože $T_1 = T_2$, bude v obou žárovkách stejná. Výkon elektrického proudu vyjádříme jako $P = U^2/R$. Opět porovnáme poměry výkonů,

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{U^2 \pi r_1^2}{\varrho l_1}}{\frac{U^2 \pi r_2^2}{\varrho l_2}} = \frac{r_1^2 l_2}{r_2^2 l_1}. \quad (2)$$

Nyní z rovnic (1) a (2) dostaneme

$$\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Žárovky o výkonu 60 W musí mít oproti žárovce o výkonu 100 W vlákno zhruba 0,84 krát kratší a 0,71 krát tenčí.

Karel Honzl

kaja@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... hranol (4 body, řešilo 56 studentů)

Mějme pravidelný trojboký hranol o indexu lomu n . Na jednu jeho stěnu dopadá paprsek světla a vychází druhou stěnou. Spočítejte úhel odchylení paprsku δ paprsku od původního směru v závislosti na natočení hranolu. Kdy bude δ maximální? Úlohu zadali Lenka a Honza.

Uvažujme paprsek dopadající na hranol kolmo na jeho osu symetrie. Všechny úhly budeme měřit od kolmice. Paprsek se po dopadu na stranu AC zlomí podle Snellova zákona a dále může postupovat dvěma způsoby.

- 1) Na straně BC se opět zlomí a vyjde z hranolu ven.
- 2) Na straně BC se totálně odrazí, dopadne na stranu AB a touto stranou vyjde ven. (Pokud se paprsek na straně BC totálně odrazí, pak již nutně musí stranou AB vylétnout ven, protože úhel pod kterým dopadne na AB je stejný jako úhel lomu na AC .)

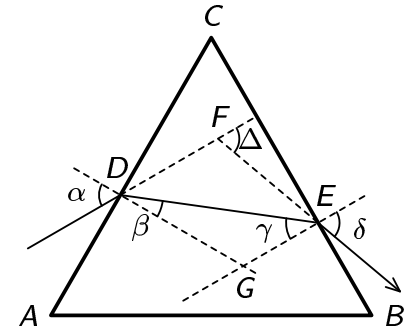
Rozmyslete si, proč není možné, aby paprsek po totálním odrazu od strany BC dopadl zpět na stranu AC . Rozeberme tedy zvlášť oba tyto případy. Vyjdeme ze Snellova zákona

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Index lomu vzduchu je přibližně $n_1 = 1$.

V případě, že nedojde k totálnímu odrazu, bude platit (viz obr. 2)

$$\begin{aligned}\beta &= \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right), \\ \gamma &= 60^\circ - \beta = 60^\circ - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right), \\ \sin \delta &= n \sin \gamma, \\ \delta &= \arcsin\left[n \sin\left(60^\circ - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)\right)\right].\end{aligned}$$



Obr. 2

Paprsek se tedy odchýlí o úhel

$$\Delta = \alpha + \delta - 60^\circ,$$

$$\Delta = \alpha - 60^\circ + \arcsin\left[n \sin\left(60^\circ - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)\right)\right].$$

Rozborem průběhu této funkce se můžete přesvědčit, že nabývá maxima pro $\alpha = 90^\circ$. Maximální možná odchylka paprsku při průchodu hranolem bez totálního odrazu je tedy

$$\Delta = 30^\circ + \arcsin\left[n \sin\left(60^\circ - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right].$$

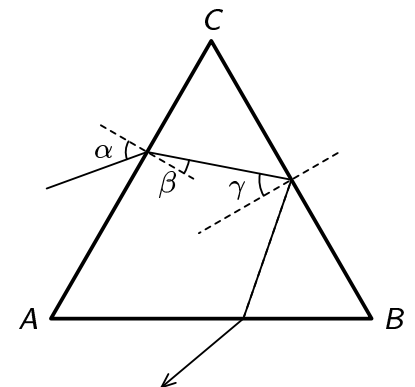
Měli bychom ještě ověřit, že úhel γ je menší než mezní úhel, tj. že skutečně nedojde k totálnímu odrazu. Jak se ale později ukáže, stačí vědět, že se paprsek určitě neodchýlí o více než udává poslední vzorec (omezením velikosti γ by se mohla maximální odchylka pouze snížit).

Nyní rozeberme případ, při kterém dojde k totálnímu odrazu. Z obr. 3 vidíme, že paprsek dopadne a vylétne z hranolu pod stejným úhlem. Odchýlení paprsku je tedy

$$\Delta = 60^\circ + 2\alpha.$$

V optimálním případě by bylo $\alpha = 60^\circ$, takže by se paprsek odchýlil o 180° . To však nejde vždy. Index lomu hranolu totiž musí být dostatečně velký na to, aby v takovémto případě došlo k totálnímu odrazu. Pokud však bude index lomu menší než určitá kritická hodnota, dojde k totálnímu odrazu jen pro určité hodnoty α . Je zřejmé že v tomto případě musíme volit α takové, aby měl úhel γ minimální možnou velikost, tedy $\gamma = \arcsin(1/n)$. Úhel α pak bude mít velikost $\alpha = \arcsin[n \sin(60^\circ - \arcsin(1/n))]$. Paprsek se odchýlí o úhel

$$\Delta = 60^\circ + 2 \arcsin\left[n \sin\left(60^\circ - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right].$$



Obr. 3

Takže v tomto případě se paprsek odchýlí dvakrát více, než při průchodu bez totálního odrazu. Maximální odchylky tedy docílíme, pokud dojde v hranolu k totálnímu odrazu. Poslední vzorec však platí pouze do určité hodnoty n . Pro vyšší hodnoty indexu lomu již můžeme paprsek odrazit o 180° . Tato kritická hodnota indexu lomu je

$$n = \frac{1}{3} \sqrt{21 + 6\sqrt{3}} = 1,868.$$

Pavel Augustinský & Karel Kolář & Lukáš Schmiedt
{ pavel | kolar | krysar } @fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. P ... černá tělesa (6 bodů, řešilo 25 studentů)

Mějme dvě dokonale černá tělesa. První z nich udržujeme na teplotě T . Na jakou nejvyšší teplotu T' lze zahřát druhé z nich pomocí spojky o ohniskové vzdálenosti f ?

Tento problém všem organizátorům již dlouho vrtal hlavou.

Hned na úvod přiznejme, že otázku v zadání nezodpovíme. Výsledná teplota závisí na konkrétní konfiguraci a přesně ji spočítat by bylo velmi komplikované.

S jistotou můžeme tvrdit jen jednu věc – teplota zahřívajícího tělesa nebude větší než teplota původního tělesa. To plyne z II. termodynamického zákona. První těleso představuje to, čemu se v termodynamice říká lázeň, tj. těleso, které nemění svou teplotu při přijímání a odevzdávání tepla. Pokud bychom mohli pomocí čočky nějaké jiné těleso zahřát na vyšší teplotu než má lázeň, mohli bychom potom pomocí nějakého běžného tepelného stroje toto těleso ochladit, část tepla odevzdat původnímu tělesu a část přeměnit na práci. Opakováním tohoto děje bychom získali tepelný stroj, který odebírá teplo lázni a přeměňuje ho na práci, aniž by musel odevzdávat teplo nějaké chladnější lázni. Takový stroj se nazývá *perpetuum mobile* 2. druhu a právě podle II. termodynamického zákona neexistuje.

Hodně z vás ale na základě ne úplně špatných úvah dospěla ke vztahu, že pro nějaké parametry vychází $T' > T$. Skutečně, uvážíme-li, že čočka může být hodně velká a může mít v podstatě libovolné zmenšení, bude v místě skutečného obrazu tělesa energie záření dostatečně velká na to, aby vložené těleso zahřála na teplotu vyšší než T . Problém je v tom, že současné splnění obou podmínek – velké plochy a zmenšení čočky – vede k tomu, že zobrazení je zatíženo zobrazovací vadou a hustota energie v místě obrazu se sníží pod potřebnou úroveň. Vzorce, které jste odvodili proto platí jen pro malé čočky a „rozumná“ zmenšení.

V termodynamice lze nadefinovat teplotu záření v každém bodě jako teplotu testovacího černého tělesa, které je s zářením v rovnováze. Pak lze ukázat, že jakýmkoliv optickým přístrojem nelze teplotu záření vysílaného tělesem zvětšit.

Honza Houšťek

honza@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. Exp ... tání ledu (8 bodů, řešilo 53 studentů)

Připravte si různě velké ale geometricky podobné kusy ledu (kostky, koule, ...) a změřte závislost rychlosti jejich tání ve vodě (pokud možno stálé teploty) na jejich velikosti. Výsledky se pokuste interpretovat.

Úlohu vymyslela Lenka Zdeborová.

Teorie

Mějme ve vodě teploty T kus ledu typického rozměru a – hrana krychle, poloměr koule apod. Předpokládejme, že led je zahřátý na teplotu tání. Nechť za malý čas Δt odtaje objem vody ΔV , tento objem je úměrný množství tepla, které se za jednotku času přivede z okolí. Předpokládáme-li, že voda má (kromě velmi slabé vrstvičky kolem ledu) konstantní teplotu, bude množství tohoto tepla záviset pouze na tepelné vodivosti vody, koeficientu přestupu tepla z vody do ledu a samozřejmě na velikosti povrchu ledu. Dostáváme tedy úměrnost

$$\Delta V \sim a^2 \Delta t. \quad (3)$$

Nyní vyjádříme ΔV pomocí rozměru a (počítejme pro krychli, pro všechny ostatní tvary obdobně): $\Delta V = (a + \Delta)^3 - a^3 = 3a^2 \Delta a + 3a (\Delta a)^2 + (\Delta a)^3 \approx 3a^2 \Delta a$, kde poslední přibližná rovnost plyne z toho, že Δa předpokládáme malé oproti a . Celkově tedy dosazením do vztahu (3) máme po zkrácení a^2

$$\Delta a \sim \Delta t.$$

Jsou-li si úměrné elementární změny nějakých veličin, jsou si úměrné i celkové změny. Z toho plyne, že závislost doby t , za kterou roztaje kus o velikosti a , by měla být tvaru $t = ka$, kde k je konstanta obsahující mj. skupenské teplo tání ledu, koeficient přestupu tepla z vody do ledu, tepelnou vodivost ledu a konstanty charakterizující tvar ledu.

Postup a výsledky měření

Prvním problémem realizace tohoto pokusu je vyrobit ony geometricky podobné, různě veliké, útvary z ledu. Možnosti máme v zásadě dvě.

Buď vyrobíme několik stejně velikých útvarů a menší získáme tak, že ony vyrobené necháme odtát. Při tání se však pokazí geometrická podobnost s původním objektem, z pěkné pravoúhlé krychličky se stane zaoblená krychlička. Jediné těleso, které nezmění tvar, je koule, ta se ale zase obtížně vyrábí.

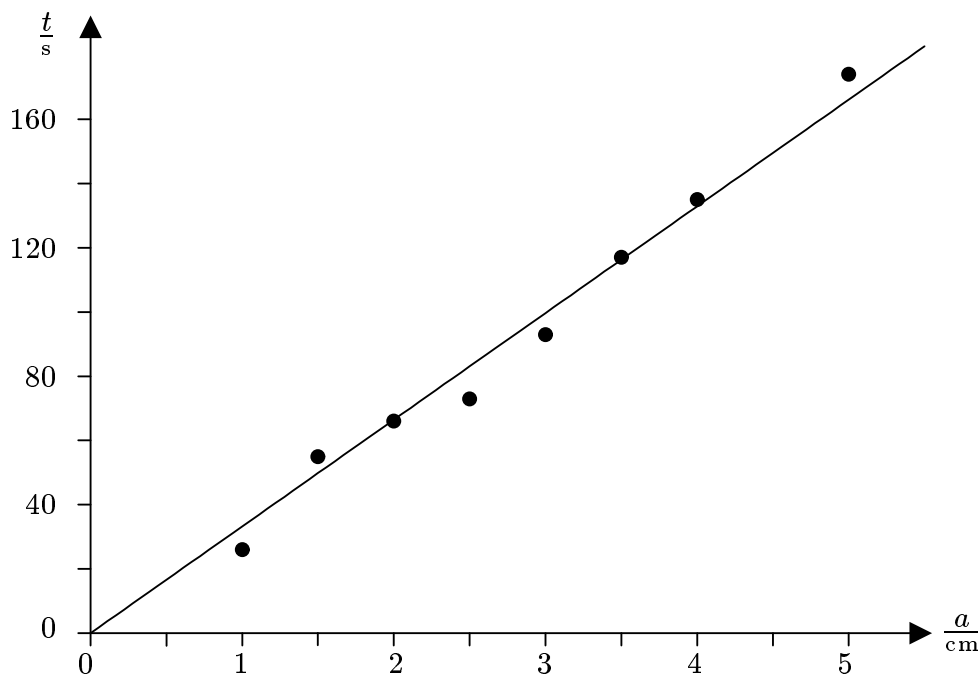
Druhou možností je vyrobit, či jinak sehnat, různě veliké geometricky podobné formičky a v nich nechat vodu zmrznout. My jsme si pro realizaci vybrali tuto možnost a inspirovali jsme se nápadem Honzy Prachaře. Ten si z tvrdého papíru vyrobil formičky, které izoloval igelitem. Krychličky s mrznoucí vodou jsme nechali v mrazáku pro jistotu skoro celý den.

Máme-li tedy v mrazáku vhodné různě veliké geometricky podobné krychličky, můžeme se vrhnout na experimentování. Do velké nádoby jsme napustili vodu pokojové teploty a ponořili do ní teploměr. Teplota vody byla $22\text{ }^{\circ}\text{C}$. Abychom ji mohli během pokusu udržovat konstantní, připravili jsme si zároveň konvici horké vody na dolévání. Pro každou krychličku jsme postupovali následovně: Vyndali jsme kostku z mrazáku a sundali z ní igelit, nechali jsme ji ohřát natolik, aby odtála malá povrchová vrstvička a z kostky se dala sundat papírová formička. Kostku jsme vhodili do kýble, neustále vodu míchali, aby rozdíl teplot mezi povrchem kostky a okolní vodou byl pokud možno stále stejný, a aby jedna stěna kostičky nevyčnívala nad hladinu, a přitom měřili čas, za který kostka roztála. Dostali jsme následující hodnoty.

$a[\text{cm}]$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
$t[\text{s}]$	26	55	66	73	93	117	135	174

Doby tání kostiček.

Rozměr kostky a jsme určovali s přesností $\pm 2\text{ mm}$, formičky byly sice vyrobeny přesně, ale voda se při mrznutí rozpínala a formičky se vyboulily, rovněž hladina vody nebyla přesně ve výšce a , ale o něco níže. Chybu měření času odhadneme na $\pm 3\text{ s}$, ta plyne z faktu, že se nedalo zcela přesně určit, kdy už ve vodě není žádný led.

Závislost t na a .

Hodnoty z tabulky jsme vynesli do grafu. Je vidět, že skutečně tak, jak předpovídá teorie, přibližně leží na přímce jdoucí počátkem. Experimentálními daty v grafu proložíme tzv. regresní přímku, tj. přímku, pro kterou platí, že součet čtverců odchylek experimentálních bodů od ní je minimální. Součet čtverců odchylek v našem případě je $\sum_{i=1}^8 (t_i - ka_i)^2$, kde t_i je doba tání kostičky o poloměru a_i ,

k je směrnice přímky. Nejlepší k , jaké pro naše data můžeme najít, je $k = 32,2 \text{ s} \cdot \text{cm}^{-1}$. Parametry regresní přímky vám spočítá každá rozumná kalkulačka a každý program, který umí nakreslit onen graf. Důležitým parametrem lineární regrese je tzv. korelační koeficient r , který udává, jak moc dobře naměřená závislost odpovídá přímce. V ideálním případě je $r = 1$, v uspokojivých případech je r alespoň 0,98. Pro naše data je $r = 0,993$, což velmi dobře potvrzuje naši domněnku o lineární závislosti času tání na velikosti kostky.

Diskuse a závěr

Měření výborně korespondují s teorií. Odchyšky experimentálních bodů od regresní přímky jsou většinou větší, než by dovolovaly výše uvedené chyby a a t , to může být způsobeno tím, že kostky při tání nezachovávají přesně geometrickou podobnost (zaoblují se), ač v teoretickém výpočtu jsme to předpokládali. Dále jsme neuvvažovali, že uvnitř kostky není nulová teplota, a tedy se část tepla spotřebuje na její ohřátí. Zanedbali jsme též změny teploty okolní kapaliny (snažili jsme se je eliminovat, ale jistě ne dokonale).

Několik slov k bodování. Maximum za experimentální úlohu je 8 bodů, nebodovali jsme ovšem tak, že by platilo, že ten, kdo nemá 8 bodů, má úlohu špatně. Již v úvodu jsme podotkli, že u experimentu je posuzování správnosti a chybnosti jaksi nejednoznačné. Rozhodli jsme se bodovat tak, že každý kdo měřením získal nějaké rozumné výsledky (lineární závislost času tání na velikosti kostky) dostal 4 body. Další body jsme udělovali za správnou interpretaci výsledků a zhodnocení chyb měření.

Poznámka: Řada řešitelů si neuvědomila, co jsme mysleli pod pojmem „geometricky podobné objekty“, jsou to útvary, jež popíšeme jediným parametrem, tzv. charakteristickou velikostí (poloměrem, hranou apod.) a popisem tvaru. Nikoliv kvádry s různými poměry mezi hranami (na jejich popis potřebujeme tři parametry) atd.

Lenka Zdeborová
lenka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha S.I ... éter (4 body, řešilo 40 studentů)

a) Podle klasické fyziky neexistuje omezení na rychlost objektů. Uvažujte světelný zdroj pohybující se rovnoměrným přímočarým pohybem rychlostí v vůči éteru (světlo se vůči éteru pohybuje rychlostí c). Jak závisí prostorový úhel, do kterého zdroj vyzařuje, na jeho rychlosti?

b) Zamyslete se nad „nepříjemnými“ důsledky existence éteru.

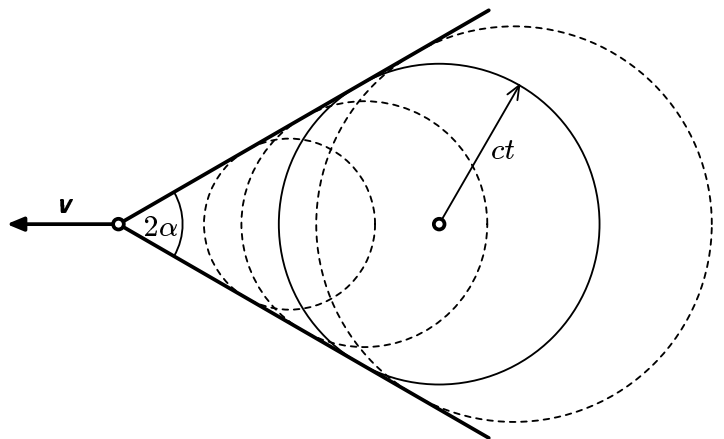
a) Pokud je rychlost zdroje v menší než rychlost světla c , potom zdroj vyzařuje světlo do celého prostoru. Pro $v < c$ tedy zdroj světla vyzařuje do prostorového úhlu 4π .

V opačném případě nemůže zdroj vyzařovat před sebe, neboť se pohybuje příliš rychle. V tomto případě zdroj vyzařuje do kužele (viz obr. 4). Pro úhel α u vrcholu kužele platí

$$\sin \alpha = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v}.$$

Tomuto kuželi odpovídá prostorový úhel

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \alpha) = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}} \right).$$



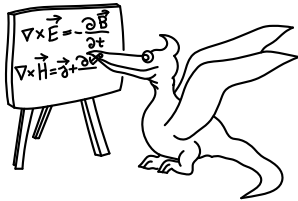
Obr. 4

Tento jev se u světla vyskytuje v látkových prostředích. V hmotných prostředích se světlo šíří menší rychlostí než ve vakuu. Mikročástice se tedy mohou v tomto případě pohybovat větší rychlostí než světlo (tato rychlost však musí být menší než rychlost světla ve vakuu). Vzniklé záření se nazývá Čerenkovovo.

b) Pokud by existoval éter, potom by Maxwellovy rovnice platily pouze v soustavě spojené s éterem. Elektromagnetické jevy v dané vztažné soustavě by tedy závisely na rychlosti této soustavy vůči éteru. To by byl poměrně „nepříjemný“ jev, neboť celý náš okolní svět i my sami je založen na elektromagnetické interakci. Gravitační interakce se totiž projevuje pouze ve velkém měřítku (stovky kilometrů) a ostatní interakce působí prakticky pouze v atomových jádrech. Cestování rychlostí blízkou rychlosti světla by tak nejspíše bylo zdraví nebezpečné. Předměty pohybující se nadsvětelně by v některých směrech nedržely pohromadě, protože vazebné síly jsou elektromagnetické povahy. Mohlo by se nám také stát, že se srazíme s nějakým tělesem ještě dříve, než jej uvidíme. Cestování vesmírem by při existenci éteru bylo mnohem obtížnější, než je za platnosti teorie relativity.

Karel Kolář

kolar@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 3: Lorentzova transformace a její důsledky II

Skládání rychlostí

Mějme dvě inerciální vztažné soustavy S a S' , které se vůči sobě pohybují rychlostí v . Nechť se v soustavě S pohybuje těleso rychlostí u , jejíž složky označme u_x, u_y, u_z . Za čas Δt se souřadnice tělesa v soustavě S změní o hodnoty:

$$\Delta x = u_x \Delta t, \quad \Delta y = u_y \Delta t, \quad \Delta z = u_z \Delta t.$$

Odpovídající změny souřadnic v soustavě S' včetně transformace časového intervalu Δt dostaneme užitím Lorentzovy transformace:

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right).$$

Pro složky rychlosti tělesa u' v soustavě S' tedy platí:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \\ u'_y &= \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)} = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \\ u'_z &= \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)} = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}. \end{aligned}$$

V limitním případě $v \ll c$ přecházejí obdržené transformační vztahy v klasické skládání rychlostí plynoucí z Galileiho transformace.

Časoprostor

Čas a prostor jsou v teorii relativity spojeny do jednoho objektu nazývaného časoprostor, což je čtyřrozměrný prostor všech událostí. Pojem časoprostoru lze zavést i v klasické fyzice. Vzhledem k absolutnosti času se však „klasický“ časoprostor pro všechny pozorovatele jednoznačně rozpadá na čas a prostor. V teorii relativity, jak již víme, absolutní čas neexistuje, a proto rozdělení časoprostoru na čas a prostor závisí na pozorovateli.

K popisu časoprostoru užíváme souřadnic ct, x, y, z . (Z rozměrových důvodů používáme ct místo t .) Volba souřadnic v časoprostoru je ekvivalentní volbě vztažné soustavy. (Přesněji volba časové souřadnice, neboť dvě souřadné soustavy liší se pouze rotací prostorových souřadnic odpovídají stejné vztažné soustavě.) Vztah mezi dvěma souřadnými systémy je dán Lorentzovou (obecnou) transformací, která je vždy lineární. Lorentzova transformace tedy odpovídá „rotaci“ souřadnic v časoprostoru. Námi odvozená Lorentzova transformace v minulé kapitole se obvykle nazývá speciální, neboť předpokládá speciální volbu prostorových souřadnic.

V časoprostoru můžeme definovat, podobně jako v prostoru, vektorová popřípadě tenzorová pole. Transformace složek vektorů je stejná jako transformace odpovídajících souřadnic. Každý vektor v časoprostoru (tzv. čtyřvektor) má tedy čtyři složky – jednu časovou a tři prostorové. Pokud budeme fyzikální zákony formulovat pomocí vektorových (tenzorových) rovnic, potom budou mít tyto rovnice stejný tvar a obsah ve všech souřadnicích a tedy i ve všech vztažných systémech. Princip relativity pak bude splněn automaticky. Teorii relativity lze skutečně zformulovat pomocí „absolutních objektů“ jako je časoprostor a tenzorová pole. Měřitelné veličiny (např. čas, vzdálenost, hmotnost, intenzity silových polí) jsou složkami těchto polí. Složky vektorů a tenzorů jsou však relativní, neboť závisí na volbě souřadnic a tedy i na volbě vztažného systému. Tato skutečnost dala název celé teorii. Formulaci fyzikálních zákonů tímto způsobem se však věnovat nebudeme, neboť pro naše účely není nezbytná.

V časoprostoru lze rovněž definovat „vzdálenost“ dvou událostí. Nechť Δt a Δl je časový a prostorový rozdíl mezi dvěma událostmi v dané vztažné soustavě. Časoprostorovou vzdálenost těchto událostí definujeme vztahem

$$\Delta s^2 = -c^2 (\Delta t)^2 + (\Delta l)^2.$$

Prostorovou vzdálenost Δl lze vyjádřit pomocí rozdílů prostorových souřadnic známým způsobem:

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Z definice časoprostorové vzdálenosti plyne, že její hodnota může být i záporná nebo nulová pro dvě různé události. Význam této definice spočívá v tom, že tento výraz je invariantní vůči Lorentzově transformaci: Uvažujme dvě vztažné soustavy pohybující se vůči sobě rychlostí v . Prostorové souřadnice v obou soustavách zvolme tak, abychom mohli použít speciální Lorentzovu transformaci (volba prostorových souřadnic neovlivní velikosti prostorových vzdáleností). K důkazu vztahu

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2$$

tedy stačí dokázat rovnost $-c^2 (\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = -c^2 (\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$. Užitím Lorentzovy transformace dostaneme:

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t), \quad \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right).$$

Dosažením těchto vztahů do levé strany předchozí rovnice obdržíme:

$$\begin{aligned} -c^2 (\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 &= \gamma^2 \left(-c^2 (\Delta t)^2 + 2v \Delta t \Delta x - \frac{v^2}{c^2} (\Delta x)^2 + (\Delta x)^2 - 2v \Delta t \Delta x + \frac{v^2}{c^2} c^2 (\Delta t)^2 \right) = \\ &= -c^2 (\Delta t)^2 + (\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Při odvození speciální Lorentzovy transformace jsme předpokládali její linearitu. Je možné dokázat, že linearita transformace mezi různými volbami souřadnic na časoprostoru je nutnou podmínkou invariantnosti časoprostorové vzdálenosti. Z principu konstantní rychlosti světla pak plyne invariantnost časoprostorové vzdálenosti pro události, které lze spojit světelným signálem.

Uvažujme objekt, který se v dané vztažné soustavě pohybuje rychlostí v . Za čas Δt tedy urazí vzdálenost $\Delta l = v \Delta t$. Pro časoprostorovou vzdálenost příslušných událostí pak platí vztah

$$\Delta s^2 = -(c^2 - v^2) (\Delta t)^2.$$

Z invariantnosti časoprostorové vzdálenosti tak plyne absolutnost relací $v < c$, $v = c$, $v > c$. Pohybuje-li se tedy objekt v jedné vztažné soustavě například podsvětelnou rychlostí, potom se pohybuje podsvětelnou rychlostí ve všech vztažných soustavách.

STR a nadsvětelné rychlosti

Z tvaru Lorentzovy transformace vidíme, že vzájemná rychlost vztažných soustav musí být podsvětelná, aby byl definován faktor γ a transformace měla tak matematický smysl. Zabývejme se nyní otázkou, zda existuje nějaké omezení na rychlost fyzikálních objektů.

Uvažujme dvě události. Prostorové souřadnice zvolme v dané vztažné soustavě tak, aby se obě události odehrály na ose x . Jejich prostorová vzdálenost je tedy rovna $|\Delta x|$. Časový interval mezi událostmi označme $\Delta t > 0$. Nechť jsou obě události spojeny signálem. Pro rychlost signálu u potom platí $\Delta x = u\Delta t$ (pro záporné u se signál pohybuje v záporném směru osy x). Uvažujme pozorovatele, který se vůči naší vztažné soustavě pohybuje rychlostí v ve směru osy x . Časový interval mezi uvažovanými událostmi, který naměří pohybující se pozorovatel, je dán Lorentzovou transformací:

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \gamma \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right) \Delta t.$$

Tyto události jsou spojeny signálem, a proto spolu mohou příčinně souviset (jedna může být důsledkem druhé). Princip kauzality vyžaduje, aby ve všech vztažných soustavách nastala vždy příčina a potom teprve její následek. Musí tedy platit $\Delta t' > 0$. Z této podmínky tak dostáváme $|u| \leq c$ ($|v| < c$).

Princip kauzality tedy vyžaduje, aby se všechny informace šířily podsvětelně nebo světelně. Pokud se signál šíří v jedné vztažné soustavě podsvětelně resp. světelně, potom se podle předchozí podkapitoly šíří podsvětelně resp. světelně ve všech vztažných systémech. Rychlost světla je tedy maximální rychlostí fyzikálních objektů. Později uvidíme, že těleso s nenulovou klidovou hmotou nelze žádnou silou urychlit na světelnou nebo nadsvětelnou rychlost.

Události, které spolu nemohou příčinně souviset (mají kladnou časoprostorovou vzdálenost), mohou mít pro různé pozorovatele různé časové pořadí.

Objekty, které nenesou informaci, se však mohou pohybovat nadsvětelně. Příkladem může být světelná stopa pohybující se po zdi.

Relativistický Dopplerův jev pro světlo

Mějme zdroj světla, který ve vztažné soustavě s ním spojené vyzařuje světlo o frekvenci f_0 . Jakou frekvenci f naměří pozorovatel, který se ke zdroji světla přibližuje rychlostí v ? (Je-li rychlost v záporná, potom se pozorovatel od zdroje vzdaluje rychlostí $-v$.)

Nejprve problém řešme v soustavě spojené se zdrojem. Vlnová délka světla je v této soustavě dána vztahem $\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$. Pro časový rozdíl T_0 mezi zaznamenáním dvou po sobě jdoucích vrcholů světelné vlny pozorovatelem v soustavě spojené se zdrojem platí:

$$\lambda_0 = (c + v) T_0.$$

Odpovídající časový rozdíl T v soustavě spojené s pozorovatelem je dán dilatací času:

$$T = \frac{T_0}{\gamma} = \lambda_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c + v} = \frac{1}{f_0} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}}.$$

Pozorovatel tedy naměří frekvenci

$$f = \frac{1}{T} = f_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

Nyní stejný problém vyřešme z hlediska soustavy spojené s pozorovatelem. Časový interval T mezi dvěma po sobě jdoucími vrcholy světelné vlny vyzářené zdrojem v soustavě spojené s pozorovatelem určíme užitím dilatace času:

$$T = \frac{\gamma}{f_0}.$$

Pro vlnovou délku světla λ v soustavě pozorovatele pak platí:

$$\lambda = (c - v) T.$$

Tomu odpovídá frekvence

$$f = \frac{c}{\lambda} = f_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = f_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

V obou případech, jak vidíme, dostáváme stejné vztahy. Relativistický Dopplerův jev pro světlo závisí pouze na vzájemné rychlosti pozorovatele a zdroje. V klasickém případě však máme dva různé vztahy pro Dopplerův jev. Závisí zde totiž na tom, zda se pohybuje zdroj nebo pozorovatel vůči hmotnému prostředí, ve kterém se uvažované vlnění šíří. Pro světelné vlny ale takové prostředí (éter) neexistuje.

Právě odvozené vzorce odpovídají tzv. longitudinálnímu (podélnému) Dopplerovu jevu. Kromě tohoto jevu existuje v relativitě také tzv. transverzální (příčný) Dopplerův jev, který nemá v klasické fyzice obdoby. Jeho příčinou je dilatace času.

Uvažujme zdroj světla, který se pohybuje v soustavě spojené s pozorovatelem rychlostí v kolmo na spojnicí s pozorovatelem. V soustavě spojené se zdrojem má vyzařované světlo frekvenci f_0 . Časový rozdíl T mezi dvěma po sobě jdoucími maximy světelné vlny v soustavě pozorovatele je dán dilatací času:

$$T = \frac{\gamma}{f_0}.$$

Pozorovatel tudíž naměří frekvenci

$$f = \frac{1}{T} = f_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Úloha III.S ... rychlejší než světlo?

V roce 1994 bylo provedeno měření na rádiových vlnách emitovaných složeným zdrojem z naší Galaxie. Centrum tohoto zdroje je od nás vzdáleno $R = 3,86 \cdot 10^{20}$ m. V rádiovém spektru byly pozorovány dva objekty vzdalující se od centra v navzájem opačných směrech. Naměřené úhlové rychlosti těchto objektů byly $\omega_1 = 9,73 \cdot 10^{-13}$ rad·s⁻¹ a $\omega_2 = 4,42 \cdot 10^{-13}$ rad·s⁻¹. Tomu odpovídají příčné lineární rychlosti $v_1 = R\omega_1 = 3,76 \cdot 10^8$ m·s⁻¹ a $v_2 = R\omega_2 = 1,71 \cdot 10^8$ m·s⁻¹. První zdroj se tedy musí pohybovat nadsvětelnou rychlostí! Jak je to možné?

Uvažujte zdroj světla, který se pohybuje v soustavě spojené s pozorovatelem rychlostí v . Rychlost zdroje svírá se spojnicí zdroje a pozorovatele úhel φ . Vzdálenost zdroje a pozorovatele je rovna R . Vypočtete, jakou úhlovou rychlost zdroje uvidí pozorovatel. Kdy bude úhlová rychlost zdroje odpovídat nadsvětelné příčné rychlosti?

Užitím předchozího výsledku určete, jakou skutečnou rychlostí se pohybují oba objekty za předpokladu, že rychlosti obou zdrojů jsou stejné.

V minulém ročníku se nám z technických důvodů nepodařilo do série zařadit poslední sedmý díl seriálu a řešení úloh z šestého dílu. Obojí najdete zde a samozřejmě v ročence. Ještě jednou se za tuto nepříjemnost omlouváme.

Honza Houšťek & Lenka Zdeborová

Úloha S.VI ... principy mechaniky (5 bodů, řešilo 20 studentů)

a) Pomocí principu virtuálních prací nalezněte rovnovážnou polohu systému na obr. 5 (tyčka je homogenní a má hmotnost m a délku l).

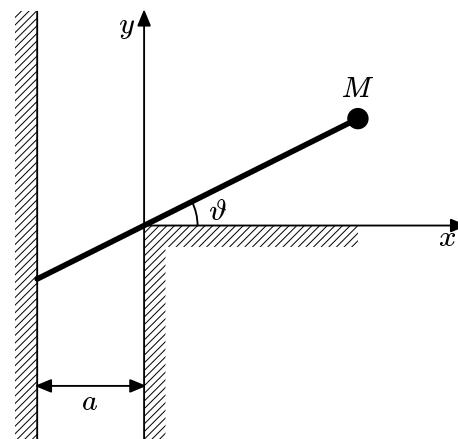
b) Dokažte tvrzení, které jsme při řešení pohybu Huyghensova kyvadla použili pro pohyb po cykloidě, totiž, že velikost rychlosti pohybu vyšetřovaného bodu je rovna $2\dot{z}$.

a) Podobně jako v příkladu v seriálu je $\delta y = 0$. Nyní ovšem platí

$$(M + m)y = m(l \sin \vartheta - a \operatorname{tg} \vartheta) + M(2l \sin \vartheta - a \operatorname{tg} \vartheta)$$

$$m \left(l \cos \vartheta - \frac{a}{\cos^2 \vartheta} \right) + M \left(2l \cos \vartheta - \frac{a}{\cos^2 \vartheta} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \vartheta = \left(\frac{a(M + m)}{l(2M + m)} \right)^{1/3}.$$



Obr. 5

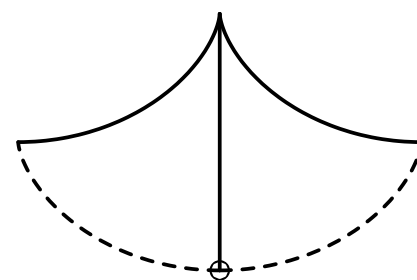
b) Označme a vzdálenost bodu cykloidy a bodu dotyku valící se kružnice s vodorovnou přímkou, po které se odvaluje. Zřejmě platí $v = a\omega$, kde ω je rychlost odvalování kružnice (bod dotyku kružnice je pólem pohybu). Protože se úhel v trojúhelníku proti odvěsně z zvětšuje rychlostí $\omega/2$ (je to obvodový úhel a příslušný středový se zvětšuje rychlostí ω), platí také $\dot{z} = a\omega/2$. Dostáváme tedy $v = 2\dot{z}$.

Kapitola 7: Meze platnosti klasické mechaniky

Seriál zakončíme tím, čím jsme ho začali. Totiž ještě jednou uvedeme předpoklady, které činí klasická mechanika, a podíváme se, jak se o jejich platnosti vyjadřuje moderní fyzika. Než se do toho ale pustíme, dořešíme několik drobností, které zbyly z minulých dílů.

Konstrukce Huyghensova kyvadla

Víme, že těleso pohybující se po cykloidě vzniklé při valení kružnice o poloměru r kývá se stejnou periodou jako matematické kyvadlo délky $4r$. Tato perioda ovšem vůbec nezávisí na výchylce. Zajímavé je, že toto kyvadlo lze poměrně snadno sestavit, stačí k němu podle obrázku přiložit dvě stejné cykloidy příslušející opět poloměru r . Není těžké se přesvědčit, že pak je křivka opsaná koncem kyvadla opravdu cykloida. Pokud se pustíte do výpočtu, poradíme vám, že délka oblouku cykloidy od jejího středu do bodu odpovídajícího odvalení kružnice φ je $l = 4r \sin(\varphi/2)$.



Obr. 6

Počítání momentů setrvačnosti

Dále si povíme několik „fint“, pomocí kterých lze snadno a bez integrálů určit momenty setrvačnosti tuhých těles. Začneme využitím Steinerovy věty. Hledejme moment setrvačnosti homogenní tyčky délky l a hmotnosti m kolem osy na tyčku kolmé a procházející jedním jejím koncem. Ten je zřejmě roven $I = \alpha ml^2$, kde α je bezrozměrná konstanta. Poloviční tyčka má zřejmě osminový moment setrvačnosti a moment setrvačnosti původní tyčky kolem osy jdoucí středem je pak $I_T = (\alpha/4) ml^2$. Aplikujeme-li nyní Steinerovu větu, dostáváme

$$I = I_T + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \Rightarrow \frac{3}{4} \alpha ml^2 = \frac{1}{4} ml^2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}.$$

Podobně lze pro moment setrvačnosti trojúhelníka kolem osy kolmé na jeho rovinu a jdoucí těžištěm odvodit vztah $I = (m/27)(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = (m/36)(a^2 + b^2 + c^2)$. Stačí trojúhelník rozdělit středními příčkami na 4 shodné trojúhelníčky a aplikovat Steinerovu větu.

Nyní hledejme moment setrvačnosti čtverce kolem osy jdoucí jeho středem a rovnoběžné s dvěma jeho stranami. Pokud tento čtverec „spláceme“ ve směru osy, nic se na momentu setrvačnosti nezmění, platí proto $I = ma^2/12$. Dále hledejme moment setrvačnosti tohoto čtverce kolem osy jdoucí středem, která je na jeho rovinu kolmá. Uvažme obecně rovinný útvar ležící v rovině xy a I_x, I_y, I_z momenty setrvačnosti kolem příslušných os. Každý hmotný bod přispívá k I_x hodnotou $m_i y_i^2$, k I_y hodnotou $m_i x_i^2$ a k I_z hodnotou $m_i (x_i^2 + y_i^2)$, platí tedy $I_z = I_x + I_y$. Proto je hledaný moment setrvačnosti čtverce roven $I' = ma^2/6$. Stejný moment setrvačnosti má i krychle, neboť ze čtverce vznikne pouze protažením ve směru osy.

Vzorec $I_z = I_x + I_y$ pro rovinná tělesa lze také použít pro výpočet momentu setrvačnosti kruhu kolem osy ležící v jeho rovině a jdoucí středem. Umístíme-li totiž čtverec do roviny xy , platí $I_x = I_y = mr^2/4$, neboť $I_z = mr^2/2$.

Nakonec povězte pár vět o tenzoru setrvačnosti. Pokud problém velmi zjednodušíme, lze říct, že libovolné těleso lze z hlediska setrvačných vlastností nahradit homogenním elipsoidem. Uvěříme-li tomuto tvrzení, můžeme zjistit mnoho zajímavých věcí o symetrických tělesech. Například předpokládejme, že jsme našli příslušný elipsoid pro krychli. Protože je moment setrvačnosti krychle kolem 3 navzájem kolmých os stejný a elipsoid musí mít stejnou vlastnost, nezbyvá než aby tímto elipsoidem byla koule. Ta má ale stejný moment setrvačnosti kolem libovolné osy jdoucí středem. Stejnou vlastnost bude ale mít i krychle! Můžete toto tvrzení ověřit například výpočtem momentu setrvačnosti kolem tělesové úhlopříčky. Podobné úvahy lze provádět i pro rovinná tělesa, např. pravidelné n -úhelníky musí mít moment setrvačnosti stejný kolem libovolné osy ležící v jejich rovině a jdoucí středem.

Omezení při použití základních pojmů

Nyní se ale už věnujme slíbenému srovnání klasické fyziky s moderními disciplinami. V klasické mechanice mají základní pojmy přibližně charakter.

Prostor. Předpokládáme, že je spojitý, trojrozměrný, homogenní a izotropní a že je popsán eukleidovskou geometrií.

Čas. Předpokládáme, že je také spojitý, jednorozměrný, homogenní a společný pro všechny pozorovatele.

Tělesa. Jsou rozlišitelná. Dají se nahradit soustavou hmotných bodů.

Stav. Je dán hybností a polohou každého hmotného bodu.

Časový vývoj. Určuje časové změny stavu tělesa v závislosti na stavu systému, v němž se těleso nachází. Je popsán pohybovou rovnicí.

Klasická mechanika předpokládá existenci inerciálního systému. Nezájímá ji původ sil, se kterými pracuje, ale klade na ně následující omezení: Platí princip akce a reakce, princip superpozice a síly závisí pouze na okamžitém stavu systému.

Jak je tomu ve skutečnosti (resp. v modernějších teoriích)

Prostor. Zůstává spojitý a trojrozměrný, ale nikoliv eukleidovský. Velké „kusy“ prostoru jsou zakřivené a popisujeme je riemanovskou geometrií (v ní např. neplatí obvyklým způsobem Pythagorova věta). Podle současných představ se dokonce geometrie vesmíru se mění s časem. Pro dostatečně malé oblasti vesmíru (Sluneční soustava), dostatečně vzdálené od těles s velkou hmotností (Slunce má malou hmotnost) a dost dlouho po vzniku vesmíru (nyní) lze ovšem prostor za eukleidovský, homogenní a izotropní a neproměnný v čase považovat.

Čas. Spojitý a jednorozměrný zůstává. Společný pro všechny pozorovatele ale v žádném případě není. Uvažujeme-li nepřilíh rozlehlé systémy neobsahující tělesa velkých hmotností, lze časy jednotlivých pozorovatelů v klidu rozumně synchronizovat. Ovšem pokud se pozorovatelé vůči sobě pohybují, jsou

jejich časy různé. Klasický předpoklad o shodnosti časů pro všechny pozorovatele se dá použít pouze, jsou-li vzájemné rychlosti mnohem menší, než rychlost světla. Poznamenejme, že s modelem časově proměnné riemanovské geometrie prostoru a s lokálním časem pracuje obecná teorie relativity. Matematický aparát této teorie je velmi velmi složitý. Tzv. speciální teorie relativity pracuje s eukleidovskou geometrií prostoru, ale s časem, který je přiřazen jednotlivým inerciálním systémům.

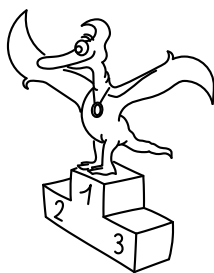
Stav. Není dán hybností a polohou hmotného bodu. Podle kvantové teorie popisuje stav částice vlnová funkce, jež je definována v celém prostoru. Tato vlnová funkce dovoluje určit pouze pravděpodobnost výsledků měření prováděných na částici. Navíc podle jednoho z důsledků kvantové mechaniky Heisenbergových relací neurčitosti nelze zároveň přesně změřit hybnost i polohu jedné částice. Postačujícími podmínkami pro aproximaci vlnové funkce klasickým stavem je dostatečně velká hmota částice (prachové zrnko o hmotnosti několika ng), její dostatečná velikost (mikrometry) a velká teplota systému (pokojová bohatě stačí).

Tělesa. I v případě více částic je systém popsán jedinou vlnovou funkcí. Ne vždy lze pak jednotlivé částice rozlišit.

Časový vývoj. Protože stav v kvantové mechanice je podstatně odlišný od stavu klasického, je i jeho časový vývoj popsán zcela jinou diferenciální rovnicí. Vývoj klasických hodnot pak odpovídá vývoji středních hodnot kvantových veličin.

Dále na rozdíl od předpokladů klasické mechaniky není pravda, že síly závisí pouze na okamžitém stavu soustavy. Důvodem je fakt, že síly se šíří konečnou rychlostí a musí proto záviset na minulosti systému. Tento problém se ovšem dá odstranit zavedením pole popisujícího šíření interakcí, pak síly závisí na okamžitém stavu systému a onoho pole. Nesplněny jsou i další požadavky. Např. gravitační síla nesplňuje princip superpozice.

Jak tedy vidíme, celou dobu jsme se zabývali teorií založenou na předpokladech, které nejsou přesně splněny nikdy, ale prakticky vždy dost přesně na to, aby klasická mechanika šla použít.



Pořadí řešitelů po I. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

Jméno	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	%	Σ
Student Pilný	MFF UK	3	4	4	4	6	8	4	100	33
1. Eva Skopalová	G Poprad	3	4	4	4	2	7	3	82	27
2. Sebastian Höppner	G Frankfurt	3	4	4	4	2	5	4	79	26
3. Anastázie Jermolájeva		3	4	4	3	2	7	2	76	25
4. Pavel Kvasnička	G Chrudim	3	4	4	4	2	5	1	70	23
5. Michael Komm	G Praha – Parlérova	3	4	–	2	2	6	4	72	21
6. Miroslav Šulc	G Ústí n. L. – Stavbařů	3	4	4	3	3	0	3	61	20
7.–8. Zdeněk Čejka	G Praha – U Lib. zámku	3	2	4	4	–	–	–	87	13
7.–8. Jakub Galgonek	G Frýdek-Místek – ČSA	3	4	–	–	–	6	–	87	13
9. Tomáš Dzetkulič	G Michalovce	3	4	3	2	–	–	–	80	12
10.–12. Jan Novák	G Praha – Nad Alejí	–	4	1	–	–	4	2	55	11
10.–12. Tomáš Ježo	G Humenné	3	4	4	–	–	–	–	100	11
10.–12. Michal Hajn	G Jihlava	3	4	–	–	4	–	–	85	11
13. Jakub Kratochvíl	G Čáslav	–	2	0	2	–	4	2	42	10
14.–15. Ľudovít Kontšek	G Bratislava	1	4	1	1	1	–	1	36	9
14.–15. Ľuboš Bednárík	G Trenčín	3	4	1	–	–	1	–	47	9
16.–18. Jindřich Štástka	G Sokolov	2	4	–	2	–	–	0	53	8
16.–18. Miroslav Frost	G Brno – Elgartova	3	4	1	0	–	–	–	53	8
16.–18. Matej Dubový	G Trenčín	3	4	0	–	–	1	–	42	8
19.–23. Pavel Kwiecien	G Dvůr Králové	1	4	1	0	–	–	1	37	7
19.–23. Milan Jalový	GOA Blansko	3	4	–	–	–	–	–	100	7
19.–23. Jiří Kosina	GOA Blansko	3	4	–	–	–	–	–	100	7
19.–23. Anna Fučíková	G Třebíč	3	4	–	–	–	–	0	64	7
19.–23. Miroslav Kačena	G Trenčín	3	–	–	–	–	4	–	64	7
24.–29. Jiří Eliášek	G Trutnov	1	4	–	–	–	–	–	71	5
24.–29. Iva Kouřilová	GOA Blansko	–	3	–	–	2	–	–	50	5
24.–29. Vratislav Chudoba	G Ostrava – Poruba	1	–	–	1	–	–	3	45	5
24.–29. Ondřej Vencálek	G Frýdek-Místek – ČSA	1	2	–	2	–	–	–	45	5
24.–29. Ondřej Srba	G Příbor	–	4	–	1	–	–	–	63	5
24.–29. Jiří Hitschfeld	COP Hronov	0	2	1	1	–	1	–	22	5
30.–31. Tomáš Buchta	G Praha – Zborovská	–	4	–	–	–	–	–	100	4
30.–31. Miroslav Krůs	G Klatovy	–	2	0	2	–	–	–	33	4
32.–34. Jan Beneš	Biskupské G Brno	1	2	–	–	–	–	–	43	3
32.–34. Jiří Palek	G Nové Strašecí	–	–	–	–	–	–	3	75	3
32.–34. Ondřej Valehrach		–	2	–	1	–	–	–	38	3
35.–36. David Šubrt	G Děčín	0	2	–	–	–	–	0	18	2
35.–36. Tomáš Kovař	G Michalovce	1	–	–	–	–	1	–	18	2
37. Pavel Hančar	SPŠ Jičín	1	–	–	–	–	–	–	33	1

Kategorie třetích ročníků

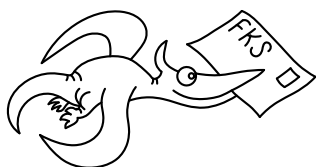
Jméno		Škola	1	2	3	4	5	6	S4	%	Σ
Student Pilný		MFF UK	3	4	4	4	6	8	4	100	33
1.	Miroslav Hejna	G Rychnov n. K.	3	4	4	4	2	7	3	82	27
2.-3.	Michal Bareš	G Plzeň – Mikuláš. nám.	3	4	4	–	5	7	3	90	26
2.-3.	Karel Tůma	G Moravská Ostrava	3	4	4	4	2	6	3	79	26
4.	Zdeněk Moravec	G Blansko	3	4	4	4	2	5	1	70	23
5.-6.	Jan Prachař	G Rychnov n. K.	–	4	4	4	–	6	3	88	21
5.-6.	Lukáš Chvátal	G Brno – Vejrostova	3	4	4	4	–	3	3	78	21
7.	Tibor Vansa	G Moravská Ostrava	0	4	4	3	2	3	3	58	19
8.	Jaroslav Trnka	G Praha – Nad Ohradou	1	4	2	3	2	3	1	48	16
9.	Václav Cviček	G Frýdek-Místek – ČSA	2	4	2	0	2	1	3	42	14
10.	Jiří Lipovský	G Bystřice n. Pernštejnem	3	4	–	2	–	4	–	68	13
11.	Tomáš Kadlček	G Uherský Brod	3	4	4	–	–	–	–	100	11
12.	Vít Šípál	G Ústí n. L. – Jateční	3	3	1	–	–	2	1	43	10
13.	Miloslav Havelka	G Zastávka	1	3	1	2	–	1	1	33	9
14.-15.	Luboš Matásek	G Plzeň – Mikuláš. nám.	–	4	0	3	–	1	–	40	8
14.-15.	Vít Urbánek	G Jihlava	–	4	–	4	–	–	–	100	8
16.-19.	Michaela Jirků	G Praha – Arabská	0	2	1	2	–	–	1	32	6
16.-19.	Jaroslav Kudlička	G Hodonín	1	2	1	2	–	–	–	40	6
16.-19.	Josef Matějička	G Žilina	0	3	–	1	0	1	1	21	6
16.-19.	Lukáš Snášel	COP Hronov	0	2	1	1	–	2	–	26	6
20.-21.	Radoslav Šafran	G Košice	–	–	–	–	–	3	2	42	5
20.-21.	Marek Vyšinka	G Brno – Žižkova	–	4	–	–	–	1	–	42	5
22.-26.	Nina Sainerová	G Praha – U Lib. zámku	–	–	–	–	–	4	0	33	4
22.-26.	Pavel Klouda	G Kyjov	1	2	1	–	0	–	–	24	4
22.-26.	Radim Kusák	G Frýdek-Místek	–	4	–	–	–	–	–	100	4
22.-26.	Jan Křivka	COP Hronov	–	2	2	–	–	–	–	50	4
22.-26.	Milan Mareš		0	1	1	0	–	2	–	17	4
27.-31.	Matěj Týč	G Zastávka	1	–	1	1	–	–	0	20	3
27.-31.	David Bezucha	G Liberec	–	1	–	2	–	–	–	38	3
27.-31.	Štěpán Mančík	G Uherský Brod	3	–	–	–	–	–	–	100	3
27.-31.	Jaroslav Štencl	COP Hronov	0	2	0	1	–	–	–	20	3
27.-31.	Kateřina Jelénková	SZŠ, G a RŠ Staré Město	–	2	1	–	–	–	–	38	3
32.-34.	Miroslav Zgažar	SPŠCH Ostrava	0	2	–	–	–	–	–	29	2
32.-34.	Barbora Galaczová	G Třinec	–	0	–	2	–	–	–	25	2
32.-34.	Jan Chmelař	G Hranice	2	–	–	–	–	–	–	67	2
35.-36.	Zuzana Svobodová	G Zlaté Moravce	–	0	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie druhých ročníků

	Jméno	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	4	4	4	6	8	4	100	33
1.	Alexandr Kazda	G Praha – Nad Alejí	3	3	4	3	–	3	4	74	20
2.	Matouš Ringel	G Broumov	3	4	2	3	2	1	3	55	18
3.	Jana Matějová	SPŠ Chrudim	2	2	2	1	2	4	2	45	15
4.–5.	Petr Houštěk	G Pelhřimov	1	4	4	2	2	1	–	48	14
4.–5.	Martin Rybář	GOA Blansko	1	4	4	–	–	5	–	74	14
6.	Boris Gažovič	G Humenné	3	4	0	–	–	5	–	63	12
7.	Zuzana Rozlívková	G B.N. Hradec Králové	0	–	1	2	3	4	0	34	10
8.	Petr Dostál	G Žamberk	3	2	1	–	–	2	1	39	9
9.	Lucie Strmisková	G Kyjov	1	2	1	–	–	3	–	37	7
10.	Zdeněk Váňa	COP Hronov	0	2	1	1	–	1	–	22	5
11.–17.	Jakub Tichý	G Praha – Arabská	0	4	–	–	–	–	–	57	4
11.–17.	Jan Křivonožka	G Bílovec	2	2	–	–	–	–	–	57	4
11.–17.	Vladimír Sommer	G Žďár n. Sázavou	–	4	–	–	–	–	–	100	4
11.–17.	Ivan Patáčík	G Partizánské	0	2	1	–	–	1	–	21	4
11.–17.	Pavol Lakatoš	G Velké Kapušany	0	4	0	–	–	–	–	36	4
11.–17.	Michal Havel	COP Hronov	0	2	1	1	–	–	–	27	4
11.–17.	Jakub Kubeček	COP Hronov	0	2	0	1	–	1	–	17	4
18.–27.	Libor Kukačka	GOA Vrchlabí	–	3	–	–	–	–	–	75	3
18.–27.	Pavel Hála	G Český Krumlov	1	1	1	0	–	–	–	20	3
18.–27.	Martina Smolová	G Písek	0	2	0	–	–	1	0	13	3
18.–27.	Markéta Novotná	G Hranice	–	–	–	–	–	3	–	38	3
18.–27.	Lukáš Bartík	G Trenčín	–	2	1	–	–	–	–	38	3
18.–27.	Radoslav Sopoliga	G Svidník	–	2	1	–	–	–	–	38	3
18.–27.	Filip Kozel	COP Hronov	–	2	1	–	–	–	–	38	3
18.–27.	Vojtěch Krejčířík	G Kroměříž	3	–	–	–	–	–	–	100	3
18.–27.	Petr Mindžak	GOA Sedlčany	–	3	–	–	–	–	–	75	3
18.–27.	Martin Padevěť	G Kostelec nad Č. lesy	–	–	–	–	–	3	–	38	3
28.–34.	Lukáš Burian	G Kladno	–	2	–	–	–	–	–	50	2
28.–34.	Tomáš Ručka	G Kladno	–	2	–	–	–	–	–	50	2
28.–34.	Peter Buhaj	G Snina	–	0	–	–	–	2	–	17	2
28.–34.	Jana Babováková	G Most	–	–	–	–	–	2	–	25	2
28.–34.	Miroslav Frantes	G Benešov	–	2	–	–	–	–	–	50	2
28.–34.	Martina Marenčoková	G Frýdek-Místek	–	2	–	–	–	–	–	50	2
28.–34.	Luboš Račanský	G Benešov	1	1	–	–	–	–	–	29	2
35.–37.	Stanislav Plánička	G Klatovy	1	–	–	–	–	–	–	33	1
35.–37.	Eva Lovíšková	G Nové M. na Moravě	–	0	1	–	–	–	–	13	1
35.–37.	Lukáš Voleský	COP Hronov	0	0	0	1	–	–	–	7	1
38.–40.	Jakub Černý	G Chrudim	–	0	–	–	–	–	–	0	0
38.–40.	Rudolf Podoba	G Trenčín	–	0	–	–	0	–	–	0	0

Kategorie prvních ročníků

	Jméno	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	4	4	4	6	8	4	100	33
1.	Anton Repko	ZŠ a G Prešov	3	4	4	3	3	1	2	61	20
2.	Andrej Pidik	G Nove Mesto nad Váhom	0	2	1	2	0	1	0	18	6
3.-5.	Tomáš Uhrin	G Michalovce	-	4	-	-	-	-	-	100	4
3.-5.	Karel Hofman	COP Hronov	-	4	-	-	-	-	-	100	4
3.-5.	Zdeněk Lochman	COP Hronov	0	2	1	1	-	-	-	27	4
6.	Radek Beneš	COP Hronov	0	2	1	0	-	-	-	20	3
7.-9.	Lucie Gráfová	G Ostrava – Hrabůvka	0	-	1	-	-	-	-	14	1
7.-9.	Ján Čuvala	ZŠ Trenčín	-	-	-	0	-	1	-	8	1
7.-9.	Jana Vrábelová	ZŠ Trenčín	-	-	-	1	-	-	-	25	1

**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář, který je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF, je organizován studenty UK MFF za podpory Ústavu teoretické fyziky UK MFF a jeho zaměstnanců a Jednoty českých matematiků a fyziků.