

## Zadání V. série



Termín odeslání: 8. dubna 2002

### Úloha V.1 ... zrcadla

Mějme dvě rovinná zrcadla svírající úhel  $\alpha$ . Jak máme nasměrovat paprsek, aby se od nich co nejvícekrát odrazil?

### Úloha V.2 ... varhany

Představte si cínovou varhaní píšťalu, která byla naladěna při teplotě trojného bodu vody na komorní a. Poté se kostel vytopí (ne vodou) na  $25^\circ\text{C}$ , určete o kolik se píšťala rozladí.

### Úloha V.3 ... žebřík

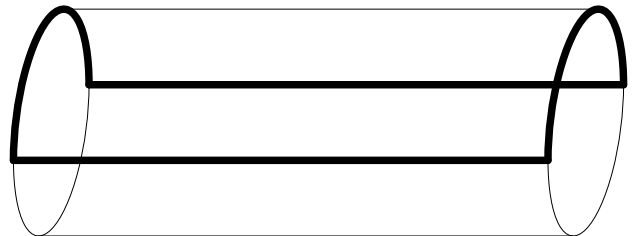
Mějme žebřík opřený o stěnu a podlahu (vše bez tření). Spočtěte, v jaké poloze se žebřík oddělí od svislé stěny (pro obecnou počáteční polohu žebříku). Prémii dostanete, spočtete-li, jak daleko od stěny žebřík dopadne.

### Úloha V.4 ... balón

Spočtěte frekvenci malých radiálních kmitů gumového balónu. V balónu je  $n$  molů plynu s Poissonovou konstantou  $\kappa = \frac{5}{2}$  o teplotě  $T$ . V případě, že rozdíl tlaků uvnitř a vně balónu, je nulový je poloměr balónu  $r_0$ . Plošná hustota gumy je v tomto případě  $\rho_0$ . Potenciální energie gumy je lineárně úměrná rozdílu jejího povrchu a povrchu klidového s konstantou úměrnosti  $\sigma$ . Tlak vně balónu je  $p_0$ . Hmotnost plynu je vůči hmotnosti balónu zanedbatelná.

### Úloha V.P ... samolet

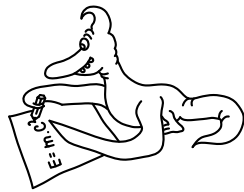
Představte si drátěnou konstrukci ve tvaru hranice válcové plochy rozříznuté napůl rovinou, v níž leží osa rotační symetrie válce (viz obr.1). Na tuto konstrukci napneme mýdlovou bublinu, která zaujme tvar půlválce. Tato bublina se má tendenci smrsknout, tedy působí na půlkružnice opačnými silami, které se vyruší, a na příčky silami směrem nahoru, tedy konstrukce v principu může vzlétnout. Spočtěte, jakou rychlostí vzlétne (nebo myslíte, že se tak stát nemůže; v tomto případě vysvětlete proč).



Obr. 1. Tvar drátu

### Úloha V.Exp ... převíjení kazety

Změřte tloušťku magnetofonového pásku. Proměřte závislost úhlové rychlosti kotouče na době přehrávání kazety v případě, že kazetu přehráváme od začátku. Do řešení nezapomeňte připsat, s jakou kazetou jste měřili (podstatná je značka a délka).



## Řešení III. série

### Úloha III.1 ... obr a trpaslík (4 body, řešilo 35 studentů)

Obr s trpaslíkem se přetahují o lano, které je omotané kolem stromu zakořeněného tak pevně, že ho ani obr nedokáže vytrhnout nebo zlomit. Přetrhnout lano se mu také nepodaří.

Velký zlý obr je přesně 666-krát silnější než trpaslík. Kolikrát musí být lano omotané kolem stromu, aby přetahování nikdo nevyhrál? Koeficient tření mezi lanem a stromem odhadněte.

*Napadlo Pavla Augustinského a Honzu Houšťka.*

Příklad vyžadoval použití diferenciálního počtu (byť v nejzákladnější míře). Nechť na pravé straně ( $F_1$ ) drží lano trpaslík a na levé obr ( $F_2$ ) (viz obr. 2). Jelikož se lano o strom tře (bez tření by musel trpaslík držet lano silou stejnou, jakou jej tahá obr), síla  $F_2$  je o málo větší než síla  $F_1$ . Jejich rozdíl je roven příspěvku třecí síly  $dF_t$

$$dF_t = F_2 - F_1.$$

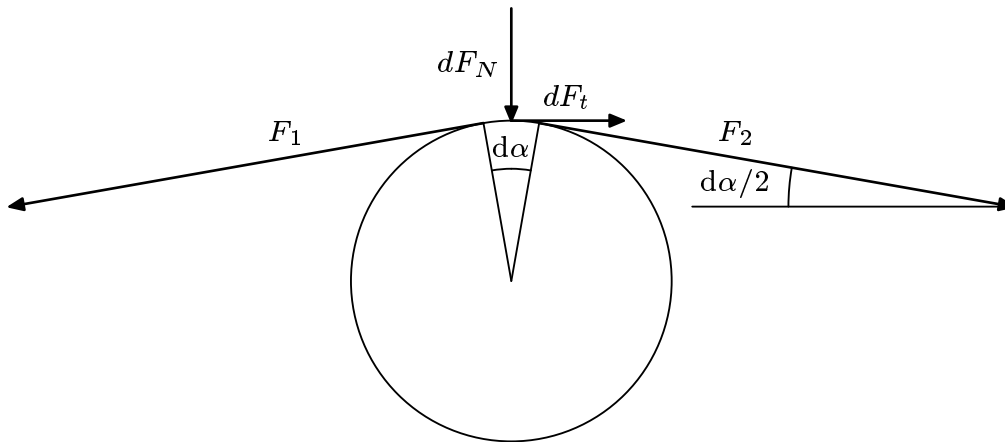
Pro  $dF_N$  platí

$$dF_N = F_2 \sin \frac{d\alpha}{2} + (F_1 + dF) \sin \frac{d\alpha}{2} = 2F \sin \frac{d\alpha}{2} = F d\alpha,$$

kde jsme zanedbali  $dF$  vůči  $F$  (pak  $F_1$  a  $F_2$  jsou téměř stejně velké) a rovněž využili toho, že pro malé úhly je  $\sin \alpha = \alpha$ . Pro třecí sílu pak platí

$$dF_t = f dF_N = dF, \quad (1)$$

jelikož přírůstek třecí síly  $dF_t$  je také přírůstek síly, kterou tahá trpaslík za provaz.



Obr. 2. Síly působící na lano navinuté na strom

Rovnice (1) je diferenciální rovnice, kterou lze řešit přímou integrací

$$\frac{dF}{F} = f d\alpha \quad \Rightarrow \quad \int_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} = f \int_0^\alpha d\alpha. \quad (2)$$

Integrujeme od trpaslíka (u kterého je lano napínáno silou  $F_1$ ) směrem k obrovi, který jej tahá silou  $F_2$  a u kterého je lano obtočené kolem stromu o úhel  $\alpha$ .

Řešením rovnice (2) dostaneme

$$\frac{1}{f} \cdot \ln \frac{F_2}{F_1} = \alpha.$$

A teď přichází kámen úrazu. Většina z vás psala, že koeficient tření mezi lanem a dřevem je kolem 0,5. Nám se to zdá příliš málo, protože tolik má koeficient tření  $f$  dřeva na dřevě. Možná pořádně staré lano (myslíme tím lano používané ke šplhu) na hladké kůře buku by mohlo mít koeficient tření podobný. V případě, že si vezmeme nové lano a nalezneme pro obra statný dub (ať se trápí, když je zlý), koeficient tření bude alespoň 1.

Bohužel, ani my ani vy jsme neprovedli experiment, a tak nemůžeme prohlásit o koeficientu  $f$  více. Navíc,  $f$  se musí měřit při velké přítláčné síle, protože když jenom položíme lano na dřevo, naměříme  $f$  menší. Svou roli sehraje drsná kůra dubu a drsné lano, které se do kůry zařízne.

Pro  $f = 1,04$  vyjde  $\alpha = 360^\circ$ , stačí lano omotat kolem stromu pouze jednou. V případě  $f = 0,52$  musíme omotat lano dvakrát.

**Pavol Habuda**  
bzucino@yahoo.com

### Úloha III.2 ... valčík (3 body, řešilo 53 studentů)

*Odhadněte celkovou kinetickou energii páru tančícího vídeňský valčík.*

*Úlohu objevila Lenka Zdeborová.*

Nejdříve si musíme uvědomit, jak se tančí valčík. Jak jistě všichni dobře víte, je to tanec na tři doby. U standartního valčíku každá doba trvá přibližně  $t_0 = 0,5$  s (záleží na skladbě). V první době udělá tanečník krok vpřed (tanečnice krok vzad). V dalších dvou dobách se pár otočí o  $180^\circ$ . V dalším taktu se vše opakuje s tím rozdílem, že tanečník nyní dělá to, co v minulém taktu tanečnice.

Spočítat kinetickou energii tančícího páru v první době je jednoduché, protože nedochází k rotaci páru. Tato kinetická energie bude:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} (m_m + m_z) \left( \frac{s_k}{t} \right)^2,$$

kde  $m_m$  je hmotnost muže (80 kg),  $m_z$  je hmotnost ženy (60 kg) a  $s_k$  je délka kroku. Délka kroku při tanci bude menší než normální délka kroku a proto budeme uvažovat 0,5 m. Kinetická energie v první době tedy bude 70 J. Tato energie ovšem kvadraticky závisí na rychlosti. Bude se tedy hodně měnit v závislosti na délce kroku a rychlosti skladby.

Mnohem těžší bude vypočítat rotační energii páru v druhé a třetí době. Úhlová rychlost páru bude  $\omega = \pi/2t_0$ . Nejsložitější na tomto výpočtu bude vypočítat moment setrvačnosti tančícího páru. K tomu můžeme použít několik různě přesných cest.

Nejjednodušší je tančící pár nahradit dvěma hmotnými body otáčejícími se kolem společného těžiště. Označíme vzdálenost těžišť jednotlivých tanečníků  $l$ . Pro jednoduchost budeme uvažovat, že se otáčejí kolem středu spojnice jejich těžišť. Celkový moment setrvačnosti tedy bude:

$$J_1 = \frac{1}{4} l^2 (m_z + m_m).$$

Pro vzdálenost  $l = 0,4$  m dostaneme  $J_1 = 5,6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .

Obecně můžeme uvažovat, že tanečník má moment setrvačnosti vůči svému těžišti  $J_m$  a tanečnice  $J_z$ . Celkový moment setrvačnosti pak spočteme pomocí Steinerovi věty.

$$J = J_m + m_m \left( \frac{l}{2} \right)^2 + J_z + m_z \left( \frac{l}{2} \right)^2 = J_m + J_z + J_1.$$

Zde je vidět, že přesnost předchozího modelu závisí na velikosti momentů setrvačnosti jednotlivých tanečníků.

Spočítat momenty setrvačnosti jednotlivých tanečníků je velice složité. Nejjednodušší metoda je nahrazení jednotlivých částí lidského těla geometrickými tvary, jejichž moment setrvačnosti známe.

Toto jsme provedli pomocí rozměrů reprezentativního těla a získali jsme hodnotu pro muže asi  $J_m = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  a pro ženu přibližně  $J_z = 1,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Vypočteme-li nyní kinetickou energii v druhé a třetí době, dostaneme

$$E_{k2} = J\omega^2 = 44 \text{ J} .$$

Vypočteme-li průměrnou kinetickou energii páru na jednu dobu dostaneme

$$E_p = \frac{1}{3} (E_{k1} + 2E_{k2}) = 52 \text{ J} .$$

Musíme si uvědomit, že tato hodnota je velice orientační a jedná se pouze o řádový odhad, který se může značně měnit v závislosti na tanečnicích a skladbě. UVědomíme-li si, že rozdíly hmotnosti tanečníků se mohou pohybovat někde kolem 10 %. Stejně tak přesnost určení všech dalších údajů jako  $l$ ,  $t_0$  a  $s$ . Lze dostávat energie od 40 J až po 200 J.

**Karel Honzl**

kaja@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha III.3 ... rampouch (4 body, řešilo 44 studentů)

Zimní sezóna se blíží, ale než vyrazíte lyžovat, zamyslete se nad tím, jaký tvar mají rampouchy rostoucí na otáčejícím se kole lyžařského vleku. Rovina kola svírá s vodorovnou rovinou úhel  $\alpha$ , kolo se otáčí úhlovou rychlostí  $\omega$  a rampouch roste ve vzdálenosti  $r$  od osy otáčení.

Úlohu vymyslel Pavel Augustinský.

Stěžejní věcí, kterou musíme zjistit, abychom mohli popsat tvar rampouchu, je směr, do kterého v daném okamžiku rampouch roste. Zavedme kartézskou souřadnou soustavu spojenou s rotujícím kotoučem. Rovina koutouče splývá s rovinou  $z = 0$  a střed kotouče leží v počátku, osa  $z$  míří nahoru. Špička rampouchu se nachází v bodě  $[r, 0, z]$ .

Rampouch jistě poroste ve směru síly, která působí na kapičku vody na jeho konci. Na tuto kapičku působí síla tíhová a odstředivá. Napišme obě tyto síly ve složkách v zavedené souřadné soustavě.

$$\begin{aligned} F_{Gz} &= -mg \cos \alpha, & F_{Gy} &= mg \sin \alpha \sin \omega t, & F_{Gx} &= mg \sin \alpha \cos \omega t, \\ F_{Oz} &= 0, & F_{Oy} &= 0, & F_{Ox} &= m\omega^2 r, \end{aligned}$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost otáčení kola. UVědomme si, že rampouch a kolo se otáčí, proto se v soustavě spojené s kolem mění směr síly  $\mathbf{F}_G$ . Ze zkušenosti očekáváme, že se kolo bude otáčet mnohem rychleji, než poroste rampouch, tedy stačí tuto sílu vystředovat v čase. Střední hodnota funkcí  $\sin \omega t$  a  $\cos \omega t$  je ovšem nulová. Směrnice tečny k rampouchu ve vzdálenosti  $r$  do osy  $z$  je tedy

$$\text{tg } \varphi = \frac{dz}{dx} = -\frac{g \cos \alpha}{\omega^2 r}. \quad (3)$$

Ptejme se nyní, jaký tvar tedy bude mít rampouch. Diferenciálního počtu znalí již jistě ve vztahu (3) vidí separovatelnou diferenciální rovnici, kterou snadno vyřeší,

$$z = -\frac{g \cos \alpha}{\omega^2} \ln \frac{r}{r_0},$$

kde  $r_0$  je vzdálenost od středu kotouče, ve které rampouch začal růst. Rampouchy mají tedy tvar logaritmické křivky.

**Lenka Zdeborová**

lenka@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha III.4 ... přesnost GPS** (5 bodů, řešilo 20 studentů)

Tzv. *Global Positioning System (GPS)* pracuje na jednoduchém principu. Družice pohybující se na 12-ti hodinových drahách vysílají přesně synchronizované signály, které přijímač detekuje. Protože na přijímači nejsou absolutně přesné hodiny, dokáže měřit jen rozdíly vzdáleností od různých satelitů. 4 satelity stačí na dopočtení polohy, poloha satelitů se změní ze Země stejným způsobem.

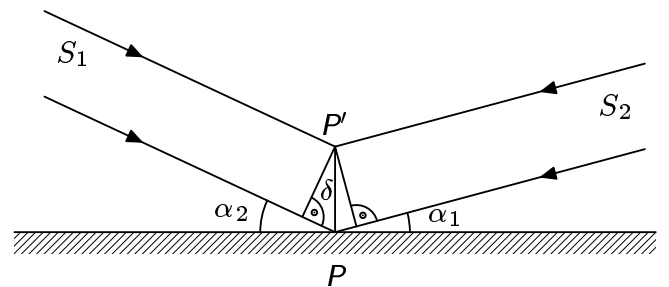
Zdůvodněte, proč je přesnost GPS v horizontálním směru zřetelně vyšší než ve vertikálním směru.

*Při hledání informací o GPS zaujalo Honzu Houšťka.*

Udělejme si jasno, jak systém GPS funguje. Dvanáctihodinové době oběhu družic GPS odpovídá vzdálenost přibližně  $4R_z$  od středu Země. Družice vysílají synchronizované signály s kódovanou pozicí a časem emitace. Tento čas odčítávají ze svých atomových hodin na palubě, jejichž nepřesnost se pohybuje kolem 3 ns.

Přijímač zaznamená signál od satelitu a na svých hodinách odečte čas příjmu, který je vzhledem k menší přesnosti jeho hodin zatížen větší chybou než čas měřený satelity. Lidé našli způsob, jak obejít nedosažitelnost přesnosti srovnatelné s atomovými hodinami na běžném přijímači. Stačí měřit rozdíly časů, čímž se eliminuje systematická chyba hodin přijímače a přesnost stoupne na úroveň atomových hodin. Z těchto rozdílů určí přijímač svou pozici jen když má k dispozici 4 satelity (kdyby měl jen dva, věděl by, že je někde na ploše rotačního hyperboloidu, v případě tří by mu ještě zbývaly nějaké blíže neurčené křivky).

Teď se podívejme na to, jak reaguje přijímačem měřený rozdíl vzdálenosti od dvou satelitů, např.  $S_1$  a  $S_2$ , na posun přijímače v horizontálním resp. vertikálním směru. Zajímá nás poměr vertikální a horizontální změny rozdílů jejich vzdáleností. Pro bod na zemském povrchu je vzdálenost k satelitu minimální v nadhlavníku  $-3R_z$ , a maximální pro satelit nad horizontem  $-3,9R_z$ . Vyšetřeme vertikální posun o  $\delta$ , řádově menší než je vzdálenost od satelitů. Proto jsou dráhy signálů pro původní  $P$  i novou polohu  $P'$  přijímače téměř rovnoběžné (obr. 3). Vzdálenost přijímače od  $S_2$  se zmenší o  $\delta \sin \alpha_2$ , od  $S_1$  podobně o  $\delta \sin \alpha_1$ . Rozdíl vzdáleností se tedy změní o



Obr. 3. Geometrie posunu

$$\Delta x_v = -\delta \sin \alpha_2 + \delta \sin \alpha_1.$$

Podobnou úvahou pro horizontální změnu o  $\delta$  zjistíme změnu rozdílu

$$\Delta x_h = \delta \cos \alpha_2 + \delta \cos \alpha_1.$$

Užitím vztahu pro rozdíl sinů a součet kosinů dvou úhlů dostaneme pro jejich poměr  $p$

$$p = \frac{\Delta x_v}{\Delta x_h} = \tan \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right).$$

Vertikální přesnost je menší než horizontální, je-li  $-1 < p < 1$ , tedy  $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 - \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ . To ale platí pro všechny možné  $\alpha_1, \alpha_2$ , které jsou z intervalu 0 až  $\frac{\pi}{2}$ . Hrubým odhadem je  $p$  někde ve středu, horizontálně je GPS průměrně dvakrát přesnější.

**Peter Čendula**  
peto@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha III . P ... magnetky** (4 body, řešilo 34 studentů)

Sežeňte si někde dva magnetky a železný plíšek. Umístěte magnetky proti sobě na opačné strany plíšku a vyzkoušejte, jakou silou se přitahují. Pak jeden z magnetků otočte a pokus opakujte. Konečně vyzkoušejte, jak se magnetky přitahují a odpuzují bez přítomnosti plíšku.

Při těchto experimentech zřejmě objevíte, že cosi (alespoň na první pohled) není v pořádku. Zamyslete se nad tím a vysvětlete, co se v jednotlivých případech děje.

Vyřešením této úlohy složili Honza a Pavel zkoušku z fyziky ve II. semestru MFF.

Na chování magnetků je zajímavé to, že se v případě, že mezi ně vložíme (dostatečně velký) železný plíšek, přitahují se bez ohledu na jejich vzájemnou orientaci. Příčinou tohoto jevu je chování magnetického pole na rozhraní dvou prostředí s různými relativními permeabilitami. Na takovémto rozhraní se magnetické siločáry lámou podobně jako se na rozhraní dvou prostředí láme světlo. Zákon lomu je v tomto případě

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \mu_r,$$

kde  $\alpha$  a  $\beta$  jsou úhly ke kolmici a  $\mu_r$  je relativní permeabilita plechu. Tento zákon plyne z podmínky zachování normálové složky  $B$  a tečné složky  $H$  na rozhraní dvou prostředí (tato podmínka je důsledkem Maxwellových rovnic.) Na rozdíl od běžných hodnot indexu lomu je ale hodnota  $\mu_r$  řádově  $10^3$ , takže se siločáry magnetického pole zalomí téměř rovnoběžně s rovinou rozhraní, a magnetické pole pronikne jen do velmi tenké vrstvy na povrchu plechu-uvnitř plechu je  $B$  téměř nulové. Magnet na jedné straně plechu tedy téměř neovlivní magnetické pole na straně druhé takže se magnety na obou stranách plechu chovají nezávisle na sobě (magnetické pole je tedy plechem odstíněno.) Dalo by se říct že plech magnety zdánlivě oddaluje. Pokud umístíme magnet na jednu stranu plechu o tloušťce 1 mm a relativní permeabilitě  $\mu_r = 10^3$ , bude magnetická indukce na druhé straně plechu přibližně stejná jako magnetická indukce ve vzdálenosti 1 m (tj.  $1 \text{ mm} \cdot \mu_r$ ) od magnetu ve vzduchu. Důležité je, aby byl plech v porovnání s velikostí magnetu dostatečně velký. V opačném případě totiž mohou magnetické siločáry vystupovat z okraje plechu, takže se mohou magnety částečně ovlivňovat. Tuto skutečnost jsme nezdůraznili v zadání, za což se omlouváme.

**Pavel Augustinský**  
pavel@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha III . Exp ... odrazivost** (8 bodů, řešilo 28 studentů)

Změřte koeficient odrazivosti alobalu ve viditelném světle. Vhodnou metodu navrhnete sami. Nezapomeňte popsat, jakou stranu měříte, případně proměřte obě. Zadal Honza Houštěk.

Uvedeme dvě různé metody na určení odrazivosti alobalu. První metoda je založena na myšlence klesání intenzity s druhou mocninou vzdálenosti při kolmém dopadu pro intenzitu od bodového zdroje  $I \sim r^{-2}$ .

Jako pomůcky jsme použili: dvě identické lampy o výkonu 25 W, zrcátko, alobal a sklíčka na přichycení a vyrovnání alobalu, papír s mastnou skvrnou.

Aparatura na měření intenzity byla složena z lampy, která osvětlovala zrcátko po úhlem  $45^\circ$  a prasátko dopadalo kolmo na papír s mastnou skvrnou. Druhou stranu papíru potom kolmo osvětlovala druhá lampa. Potom jsme nastavili vzdálenost  $r$  druhé lampy od papíru tak, aby nebylo skvrnu vidět. V případě, že nebylo skvrnu vidět, intenzity byly na obou stranách papíru stejné. Přičemž jsme změřili tuto vzdálenost pro lesklou stranu alobalu  $r_L$ , pro matnou stranu  $r_M$  a pro zrcátko  $r_Z$ . Jelikož jsme měnili jenom typ zrcátka (snažili jsme se mít stejné tvary zrcátek), tak intenzita dopadající na papír byla úměrná jenom odrazivosti zrcátka. Z toho, že intenzita od druhé lampy byla  $I \sim r^{-2}$ , dostáváme pro odrazivost  $O = (r^L/r^Z)^2$ , resp.  $O = (r^M/r^Z)^2$  (uvažujeme úplnou odrazivost normálního zrcátka).

Snažili jsme se měřit na velkých vzdálenostech, aby se zdroje jevíli jako bodové. Dále jsme se snažili zmírnit rozptyl upevněním alobalu mezi dvě sklíčka. Měření jsme prováděli pro 6 různých alobalových zrcátek.

Zpracováním naměřených hodnot uvedených v tabulce níže získáme

$$O_L = 0,9 \pm 0,1$$

$$O_M = 0,5 \pm 0,2.$$

$r_L$ [cm]	260	270	270	290	270	280
$O_L$	0,75	0,87	0,81	0,87	0,93	0,93
$r_M$ [cm]	220	210	230	230	210	220
$O_M$	0,54	0,49	0,59	0,59	0,49	0,54

Odrazivost alobalu pro  $r_Z = 300$  cm.

Chybu jsme určili jako chybu měřidla vzdálenosti (5 cm), kterou jsme převedli pomocí vztahů pro součin chyb na chybu výsledku. Tohle měření nebylo provedeno úplně ideálně, protože se dalo použít i lepšího měřidla délky.

V tabulkách je uvedena hodnota odrazivosti hliníku 0,93. Matná strana má však menší odrazivost protože část světla se rozptýlí a tedy odrazivost závisí na vzdálenosti, ve které ji měříme. Při našem měření byla vzdálenost dostatečně velká na to, abychom naměřili odraz bez rozptylu. (Např. pro bílý papír by jsme tímto způsobem nenaměřili žádnou odrazivost.)

Druhý postup jsme provedli z luxmetrem, ale jen pro lesklou stranu, protože rozptyl na matné straně způsoboval obrovskou chybu (měření měřilo odrazivost s rozptylem). Měření jsme provedli pomocí alobalového a normálního zrcátka a výsledky jsme porovnali. Intenzitu jsme měřili těsně za odrazem (byl pod úhlem  $45^\circ$ ). Měření jsme udělali pro různé části alobalu.

$I_Z$	65,6	64,6	53,8	64,4	60,4	65,1	67,6	61,1	67,4	67,9	69,0
-------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Odrazivost normálního zrcátka při měření luxmetrem.

$I_A$	56,0	59,7	60,8	60,6	59,8	59,7	56,0	56,1	62,9	64,2
	67,1	63,4	55,5	64,4	65,3	64,4	58,0	63,2	63,8	

Odrazivost alobalu při měření luxmetrem.

Statistickým zpracováním výše uvedených tabulek získáme

$$\left. \begin{array}{l} I_Z = 65 \pm 4 \\ I_A = 62 \pm 4 \end{array} \right\} \longrightarrow O = I_A/I_Z = 0,95 \pm 0,12 .$$

Vidíme, že chyby obou způsobů měření jsou velké, což je dáno (nejen použitím značně nepřesného měřidla u první metody) hlavně rozptylem na alobalu, jak díky pokrčení, tak drsností povrchu.

Častou chybou například bylo neuvažovat klesání intenzity ze vzdáleností, nebo měření intenzity daleko za zdrojem, čímž došlo značnému rozptýlu světla. Rozptyl nám příliš nevádí, když nemáme bodový zdroj. Takže postup v prvním případě byl aplikovatelný i když jsme intenzity měřili daleko za odrazem. Tam jsme brali totiž odraz jako přibližně bodový a tím pádem rozptyl nehrál u lesklé strany až tak nežádoucí roli. Ale dostali jsme tak trochu nižší výsledek.

*Miro Kladiwa*

miro@fykos.mff.cuni.cz

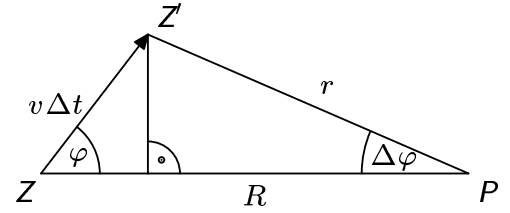
### Úloha S.III ... rychlejší než světlo? (5 bodů, řešilo 17 studentů)

V roce 1994 bylo provedeno měření na rádiových vlnách emitovaných složeným zdrojem z naší Galaxie. Centrum tohoto zdroje je od nás vzdáleno  $R = 3,86 \cdot 10^{20}$  m. V rádiovém spektru byly pozorovány dva objekty vzdalující se od centra v navzájem opačných směrech. Naměřené úhlové rychlosti těchto objektů byly  $\omega_1 = 9,73 \cdot 10^{-13}$  rad·s<sup>-1</sup> a  $\omega_2 = 4,42 \cdot 10^{-13}$  rad·s<sup>-1</sup>. Tomu odpovídají příčné lineární rychlosti  $v_1 = R\omega_1 = 3,76 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup> a  $v_2 = R\omega_2 = 1,71 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup>. První zdroj se tedy musí pohybovat nadsvětelnou rychlostí! Jak je to možné?

Uvažujte zdroj světla, který se pohybuje v soustavě spojené s pozorovatelem rychlostí  $v$ . Rychlost zdroje svírá se spojnicí zdroje a pozorovatele úhel  $\varphi$ . Vzdálenost zdroje a pozorovatele je rovna  $R$ . Vypočítejte, jakou úhlovou rychlost zdroje uvidí pozorovatel. Kdy bude úhlová rychlost zdroje odpovídat nadsvětelné příčné rychlosti?

Užitím předchozího výsledku určete, jakou skutečnou rychlostí se pohybují oba objekty za předpokladu, že rychlosti obou zdrojů jsou stejné.

Bod, ve kterém se nachází zdroj světla, označme písmenem  $Z$ . Podobně označme polohu pozorovatele bodem  $P$ . Vzdálenost bodů  $Z$  a  $P$  je rovna  $R$ . Zdroj se pohybuje rychlostí o velikosti  $v$ . Směr pohybu zdroje svírá s úsečkou  $ZP$  úhel  $\varphi$ . Za malý časový interval  $\Delta t$  se zdroj světla posune do bodu  $Z'$ . Pro vzdálenost  $r$  bodů  $Z'$  a  $P$  dostaneme užitím kosinové věty vztah



$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + (v\Delta t)^2 - 2Rv\Delta t \cos \varphi = \\ &= R^2 \left( 1 + \left( \frac{v\Delta t}{R} \right)^2 - 2 \frac{v\Delta t}{R} \cos \varphi \right). \end{aligned}$$

Protože je  $\Delta t$  velmi malé, lze zanedbat člen obsahující jej v druhé mocnině. Užijeme-li dále přibližný vztah  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$  platný pro  $x \ll 1$ , pak získáme následující rovnost

$$r = R \left( 1 - \frac{v\Delta t}{R} \cos \varphi \right) = R - v\Delta t \cos \varphi.$$

Za čas  $\Delta t$  se změni úhlová poloha zdroje vůči pozorovateli o úhel  $\Delta\varphi$ . Užitím aproximací  $r \approx R$  a  $\sin x \approx x$  platné pro  $x \rightarrow 0$  dostaneme

$$\Delta\varphi \approx \sin \Delta\varphi = \frac{v\Delta t \sin \varphi}{R}.$$

Časový rozdíl  $\Delta t_p$ , který zaznamená pozorovatel mezi světlem přicházejícím z bodů  $Z$  a  $Z'$ , je dán vztahem

$$\Delta t_p = \Delta t + \frac{r - R}{c} = \Delta t \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \varphi \right).$$

Pro úhlovou rychlost  $\omega$  zdroje, kterou uvidí pozorovatel, tak platí:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t_p} = \frac{1}{R} \frac{v \sin \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}.$$

Tomu odpovídá příčná lineární rychlost

$$v_\perp = R\omega = \frac{v \sin \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}.$$

Rozborem předchozího vztahu snadno určíme podmínku, kdy bude pozorovaná příčná rychlost  $v_\perp$  nadsvětelná. Podmínka  $v_\perp > c$  je ekvivalentní nerovnosti

$$v (\sin \varphi + \cos \varphi) > c.$$

Jednoduchou úpravou (sečtením sinu a kosinu) tak dostáváme podmínku nadsvětelnosti pozorované rychlosti zdroje:

$$\cos \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) > \frac{c}{\sqrt{2}v}.$$

Vidíme tedy, že předchozí podmínku lze splnit i pro podsvětelné rychlosti zdroje.

Tento jev je, jak plyne z jeho odvození, způsoben konečnou rychlostí světla. Vidíme tedy, že konečná rychlost šíření světla hraje při posuzování vzhledu objektů velmi významnou roli. Z druhé kapitoly víme, že pohybující se tyč bude ve směru svého pohybu vlivem kontrakce délek kratší. Dá se však ukázat, že za určitých podmínek bude pozorovaná (viděná) délka tyče větší než v případě, kdy je tyč vůči pozorovateli v klidu!



Nyní již můžeme určit skutečnou rychlost  $v$ , kterou se pohybují oba pozorované objekty. Naměřené úhlové rychlosti objektů jsou podle předešlého dány vztahy:

$$\omega_1 = \frac{1}{R} \frac{v \sin \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi},$$

$$\omega_2 = \frac{1}{R} \frac{v \sin \varphi}{1 + \frac{v}{c} \cos \varphi}.$$

Vzájemným podělením předchozích rovnic získáme vztah

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi} \Rightarrow \frac{v}{c} \cos \varphi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Užitím předchozí rovnosti dostáváme

$$1 - \frac{v}{c} \cos \varphi = \frac{2\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

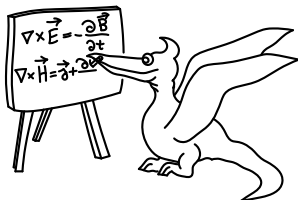
Dosazením tohoto vztahu do rovnice pro  $\omega_1$  pak obdržíme

$$v \sin \varphi = \frac{2R\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Pro rychlost pohybu pozorovaných objektů tak platí:

$$v = \sqrt{v^2 \sin^2 \varphi + v^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{c^2 \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right)^2 + \left( \frac{2R\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right)^2}.$$

Dosazením číselných hodnot do předchozího vztahu dostáváme, že skutečná velikost rychlosti (nejen příčných složek) pozorovaných objektů je rovna  $v = 0,87c = 2,60 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vidíme tedy, že se oba objekty skutečně pohybují podsvětelně.



## Seriál na pokračování

### Kapitola 5: Energie a zákony zachování

#### Ekvivalence energie a hmotnosti

V této podkapitole odvodíme nejznámější fyzikální vzorec. Uvažujme sílu  $\mathbf{F}$  působící na hmotný bod. Při posunutí hmotného bodu o  $d\mathbf{r}$  tato síla vykoná práci  $dW$  danou vztahem

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{F}_{\parallel} \cdot \mathbf{v} dt = m\gamma^2 \mathbf{a}_{\parallel} \cdot \mathbf{v} dt = m\gamma^2 v \frac{dv}{dt} dt = m\gamma^2 v dv,$$

kde jsme využili výsledků z minulé kapitoly. Užitím dalšího vztahu z předcházející kapitoly obdržíme:

$$\frac{dm}{dv} = m\gamma^2 \frac{v}{c^2} \Rightarrow dW = m\gamma^2 v dv = c^2 dm.$$

Získali jsme tedy velmi pozoruhodný vztah

$$\Delta W = c^2 \Delta m.$$

Vykonaná práce je rovna rozdílu kinetických energií:  $W = T_2 - T_1$ . Pro kinetickou energii hmotného bodu tudíž dostáváme vztah (kinetická energie nepohybujícího se tělesa je rovna nule)

$$T = (m - m_0) c^2.$$

Definujeme-li celkovou energii  $E$  tělesa jako součet jeho kinetické a klidové energie  $E_0 = m_0 c^2$ , potom dostaneme velmi překvapivý vztah, který nemá v klasické fyzice obdoby:

$$E = mc^2.$$

Tento vztah vyjadřuje ekvivalenci mezi energií tělesa a jeho setrvačnou hmotností. Takto elegantní vztah jsme však získali díky zavedení tzv. klidové energie. Nicméně experimenty ukazují, že tento krok má své opodstatnění. Při některých srážkách elementárních částic totiž dochází k přeměnám mezi kinetickou a klidovou energií. Na úkor kinetické energie srážejících se částic tak může dojít ke vzniku nových částic. Podobně se v některých případech přeměňuje klidová energie zaniklých částic na kinetickou energii ostatních zúčastněných částic.

V první kapitole tohoto seriálu bylo zmíněno, že elektromagnetické pole nese energii a hybnost. Podobně je tomu i v případě ostatních interakčních polí. Nabízí se nyní otázka, zda této energii odpovídá také setrvačná hmotnost. Odpověď na tuto otázku lze získat například měřením hmotností atomových jader. Atomová jádra se skládají z protonů a neutronů (nukleonů), které mezi sebou působí tzv. silnou interakcí. Tato interakce je na malých (jaderných) vzdálenostech velmi silná (odtud pochází i její název). Vazebná energie jader, což je energie potřebná na rozbití jádra na jednotlivé nukleony (je to rozdíl mezi poklesem energie interakčních polí (poklesem potenciální energie) v důsledku vytvoření atomového jádra a kinetické energie nukleonů vázaných v jádře), je proto velmi velká – na jeden nukleon připadá vazebná energie, která řádově odpovídá jednomu procentu jeho klidové energie. Platí-li ekvivalence mezi energií a hmotností i pro interakční pole, potom musí být klidová hmotnost atomových jader menší než součet klidových energií jeho nukleonů (v opačném případě by byla hmotnost atomového jádra větší, neboť se v něm nukleony pohybují). Atomové jádro by tak mělo být lehčí o hmotnostní ekvivalent jeho vazebné energie. Naměřené hmotnosti atomových jader tuto skutečnost plně potvrzují. K hmotnostem těles tedy přispívají také interakční pole (z hlediska kvantové teorie to není nic divného, neboť interakční pole jsou „tvořeny“ částicemi – v případě elektromagnetismu jsou to fotony).

Na závěr této podkapitoly si ještě ukážeme, že pro rychlosti mnohem menší než rychlost světla dostáváme pro kinetickou energii klasický vztah. Užitím přibližného vztahu  $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ , který platí pro  $x \ll 1$ , obdržíme známý vzorec:

$$T = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

### Transformace energie a hybnosti

Zabývejme se nyní otázkou, jak se mění energie a hybnost částic při přechodu z jedné inerciální vztažné soustavy do druhé. Je možné ukázat, že veličiny  $\frac{E}{c}$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  jsou složkami čtyřvektoru. To znamená, že se při přechodu mezi vztažnými systémy transformují stejně jako souřadnice  $ct$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Při speciální Lorentzově transformaci souřadnic tedy dostáváme vztahy:

$$p'_x = \gamma \left( p_x - \frac{vE}{c^2} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \gamma (E - vp_x).$$

Z předchozího víme, že veličina  $-c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$  je invariantní vůči Lorentzově transformaci. To znamená, že veličina  $-(E/c)^2 + p^2$  je také invariantní. Hodnotu tohoto invariantu můžeme vypočítat v libovolné inerciální vztažné soustavě. Nejlepší volbou je vztažná soustava, ve které se uvažované těleso nepohybuje. V této soustavě je hybnost tělesa nulová a jeho energie je rovna klidové energii. Hodnota

uvažovaného invariantu je tedy  $-m_0c$ , kde  $m_0$  je klidová hmotnost daného tělesa. Obdrželi jsme tak velmi užitečný vztah:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2.$$

Všechny uvedené vztahy lze samozřejmě odvodit užitím definic příslušných veličin a speciální Lorentzovy transformace pro časoprostorové souřadnice.

### Zákony zachování a jejich užití

Při odvození závislosti setrvačné hmotnosti těles na rychlosti jejich pohybu vůči pozorovateli jsme předpokládali platnost zákona zachování hmotnosti a zákona zachování hybnosti. Vzhledem k ekvivalenci energie a setrvačné hmotnosti vyjadřují zákony zachování hmotnosti a energie tutéž věc. (V klasické fyzice jsou oba zákony nezávislé.) Zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie patří mezi nejzákladnější fyzikální zákony. Tyto zákony podstatně omezují možné výsledky srážek částic v mikrosvětě.

Jako příklad na využití zákonů zachování energie a hybnosti nyní vyšetříme rozpad jedné částice na dvě nové. Uvažujme částici o klidové hmotnosti  $M$ , která se rozpadá na dvě nové částice, jejichž klidové hmotnosti jsou  $m_1$  a  $m_2$ . Zákony zachování aplikujeme v klidové inerciální soustavě původní částice. Užitím zákona zachování hybnosti dostáváme, že se vzniklé částice pohybují v navzájem opačných směrech a velikost jejich hybností je rovna stejné hodnotě  $p$ . Pro energie  $E_1$  a  $E_2$  nových částic tedy platí:

$$E_1^2 = m_1^2 c^4 + p^2 c^2, \quad E_2^2 = m_2^2 c^4 + p^2 c^2.$$

Ze zákona zachování energie získáme vztah:

$$E_1 + E_2 = Mc^2 \quad \Rightarrow \quad E_1^2 = M^2 c^4 - 2E_2 M c^2 + E_2^2 \quad \Rightarrow \quad E_2 = \frac{(M^2 + m_2^2 - m_1^2) c^2}{2M}.$$

Umocněním předchozího vztahu a dosazením za  $E_2^2$  obdržíme

$$m_2^2 c^4 + p^2 c^2 = \frac{(M^2 + m_2^2 - m_1^2)^2 c^4}{4M^2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = \frac{(M^2 + m_2^2 - m_1^2)^2 - (2Mm_2)^2}{4M^2} c^2.$$

Užitím vzorců  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  a  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$  dostáváme:

$$\begin{aligned} \frac{4M^2 p^2}{c^2} &= (M^2 - 2Mm_2 + m_2^2 - m_1^2)(M^2 + 2Mm_2 + m_2^2 - m_1^2) = \\ &= \left((M - m_2)^2 - m_1^2\right) \left((M + m_2)^2 - m_1^2\right) = \\ &= (M - m_2 - m_1)(M - m_2 + m_1)(M + m_2 - m_1)(M + m_2 + m_1) = \\ &= \left(M^2 - (m_1 + m_2)^2\right) \left(M^2 - (m_1 - m_2)^2\right). \end{aligned}$$

Velikost hybnosti  $p$  vzniklých částic je tedy dána vztahem

$$p = \frac{\sqrt{M^2 - (m_1 + m_2)^2} \sqrt{M^2 - (m_1 - m_2)^2}}{2M} c.$$

Ze známé hodnoty hybnosti  $p$  vzniklých částic již snadno určíme jejich energie  $E_1$  a  $E_2$ . Pokud by nás zajímalo, jak rozpad částice vypadá v jiné inerciální soustavě, potom stačí užít transformační vztahy pro energii a hybnost.

Z obdrženého výsledku plyne, že v případě rozpadu na dvě částice jsou energie vzniklých částic jednoznačně určeny ze zákonů zachování energie a hybnosti. Energetické spektrum vzniklých částic tedy obsahuje pouze jednu hodnotu. Pokud však dochází k rozpadu na tři a více částic, potom zákony zachování energie a hybnosti kladou pouze omezení na možné výsledky srážek a rozpadů částic. Toto

omezení má většinou podobu maximální možné energie částic. V tomto případě je energetické spektrum vzniklých částic spojitě. Podle tvaru energetického spektra tedy můžeme rozhodnout, zda se jedná o rozpad na dvě částice nebo na více částic. Tento výsledek má i praktické použití.

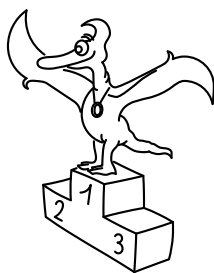
Volný neutron je nestabilní částice, která se rozpadá na proton a elektron. Při měření energetických spekter vzniklých elektronů se zjistilo, že tato spektra jsou spojitá. To znamená, že se volný neutron musí rozpadat alespoň na tři částice. Rozpady volných neutronů tak poprvé ukázaly na existenci nových elementárních částic, které se nazývají neutrina.

### Úloha V.S ... fotony

K vysvětlení fotoelektrického jevu předpokládal Albert Einstein, že energie a hybnost světla je nesena částicemi, které se nazývají fotony. Aby se tyto částice mohly pohybovat rychlostí světla, musí být jejich klidová hmotnost nulová (tento vztah je formální, neboť s fotonem nemůžeme spojit vztažnou soustavu, a proto pojem klidové hmotnosti jakožto hmotnosti v klidovém systému nemá pro foton smysl). Mezi jejich energií a hybností tak platí jednoduchý vztah  $E = pc$ . Energie fotonu závisí na frekvenci světla  $\nu$  vztahem  $E = h\nu$ , jak plyne z Planckovy teorie, která objasnila vlastnosti tepelného záření absolutně černého tělesa. Hodnota Planckovy konstanty  $h$  je rovna  $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ .

a) Předpokládejte, že energie fotonu je závislá pouze na frekvenci příslušné světelné vlny. Pomocí Dopplerova jevu a transformace mezi energií a hybností ukažte, že tato závislost musí být dána vztahem  $E = h\nu$ , kde  $h$  je blíže neurčená konstanta.

b) Uvažujte srážku fotonu s částicí, jejíž klidová hmotnost je  $m_0$ . Tato částice je v naší soustavě před srážkou v klidu. Vlnová délka fotonu před srážkou je v našem systému rovna  $\lambda$ . Při srážce se foton od původního směru vychýlí o úhel  $\varphi$ . Jak závisí změna vlnové délky  $\Delta\lambda$  fotonu na úhlu odchýlení  $\varphi$  ?



## Pořadí řešitelů po III. sérii



### Kategorie čtvrtých ročníků

Jméno	Škola	1	2	3	4	5	6	S3	III	%	Σ
Student Pilný	UK MFF	4	3	4	5	4	8	5	33	100	99
1. Pavel Kvasnička	G Chrudim	4	3	2	1	4	1	5	20	73	67
2. Eva Skopalová	G Poprad	5	3	4	-	-	4	-	16	75	58
3. Miroslav Šulc	G Ústí n. L. – Stavbařů	4	3	3	-	-	3	4	17	64	47
4. Ľuboš Bednárik	G Trenčín	4	2	1	-	0	3	0	10	50	36
5. Jan Novák	G Praha – Nad Alejí	-	2	0	3	0	2	1	8	47	33
6. Michael Komm	G Praha – Parléřova	-	3	2	-	0	6	-	11	66	32
7. Matej Dubový	G Trenčín	-	3	1	-	3	3	0	10	47	31
8. Sebastian Höppner	G Frankfurt	-	-	-	-	-	-	-	0	78	26
9. Anastázie Jermolájeva		-	-	-	-	-	-	-	0	75	25
10.-11. Sergej Maroz	G L. Pika, Plzeň	4	-	2	-	-	-	5	11	50	24
10.-11. Tomáš Dzetkulič	G Michalovce	4	3	2	0	-	-	3	12	66	24
12.-13. Jindřich Štástka	G Sokolov	1	1	-	-	-	3	-	5	50	21
12.-13. Jakub Kratochvíl	G Čáslav	-	2	1	-	-	-	-	3	46	21
14.-15. Pavel Kwiecien	G Dvůr Králové	-	-	-	-	-	-	-	0	50	20
14.-15. Jakub Galgonek	G Frýdek-Místek – ČSA	-	-	-	-	-	-	-	0	90	20
16.-17. Miroslav Kačena	G Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	61	19
16.-17. Miroslav Frost	G Brno – Elgartova	-	-	-	-	-	-	-	0	63	19
18.-19. David Šubrt	G Děčín	-	-	-	-	-	-	-	0	44	16
18.-19. Anna Fučíková	G Třebíč	-	-	-	-	-	-	-	0	55	16
20. Milan Jalový	GOA Blansko	-	1	3	-	-	-	-	4	71	15
21.-23. Vratislav Chudoba	G Ostrava – Poruba	-	-	-	-	-	-	-	0	54	13
21.-23. Pavel Hančar	SPŠ Jičín	-	2	1	1	-	-	-	4	50	13
21.-23. Zdeněk Čejka	G Praha – U Lib. zámku	-	-	-	-	-	-	-	0	86	13
24. Michal Hajn	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	0	75	12
25.-27. Tomáš Ježo	G Humenné	-	-	-	-	-	-	-	0	100	11
25.-27. Jiří Hitschfeld	COP Hronov	-	1	-	-	-	-	-	1	21	11
25.-27. Jiří Eliášek	G Trutnov	-	-	-	-	-	-	-	0	84	11
28. Ondřej Srba	G Příbor	-	-	1	-	-	-	-	1	43	10
29.-31. Ondřej Valehrach		-	-	-	-	-	-	-	0	45	9
29.-31. Jiří Kosina	GOA Blansko	-	2	-	-	-	-	-	2	90	9
29.-31. Ľudovít Kontšek	G Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	0	36	9
32.-33. Miroslav Krůs	G Klatovy	-	-	-	-	-	-	-	0	28	6
32.-33. Iva Kouřilová	GOA Blansko	1	-	-	-	-	-	-	1	42	6
34.-35. Ondřej Vencálek	G Frýdek-Místek – ČSA	-	-	-	-	-	-	-	0	45	5
34.-35. Lenka Beranová	G Klatovy	-	-	-	-	-	-	-	0	55	5
36.-37. Michal Kabát	G Púchov	-	-	-	-	-	-	-	0	50	4
36.-37. Tomáš Buchta	G Praha – Zborovská	-	-	-	-	-	-	-	0	100	4

38.-40.	Chia Huei Tan		-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	33	<b>3</b>
38.-40.	Jiří Palek	G Nové Strašecí	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	75	<b>3</b>
38.-40.	Jan Beneš	Biskupské G Brno	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	42	<b>3</b>
41.-42.	Lenka Němcová	SGŠ Bratislava	-	-	-	1	1	-	-	<b>2</b>	22	<b>2</b>
41.-42.	Tomáš Kovař	G Michalovce	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	18	<b>2</b>

### Kategorie třetích ročníků

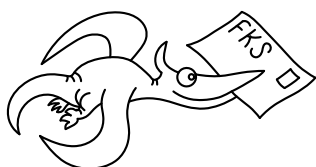
	<b>Jméno</b>	<b>Škola</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>S3</b>	<b>III</b>	<b>%</b>	<b>Σ</b>
	Student	Pilný	UK	MFF								
			4	3	4	5	4	8	5	33	100	99
1.	Miroslav Hejna	G Rychnov n. K.	4	3	2	1	2	7	5	<b>24</b>	84	<b>84</b>
2.	Zdeněk Moravec	G Blansko	4	3	4	5	3	3	0	<b>22</b>	69	<b>63</b>
3.-4.	Jan Prachař	G Rychnov n. K.	4	3	5	-	3	-	5	<b>20</b>	84	<b>61</b>
3.-4.	Michal Bareš	G Plzeň – Mikuláš. nám.	4	3	5	3	5	-	5	<b>25</b>	92	<b>61</b>
5.	Jaroslav Trnka	G Praha – Nad Ohradou	4	1	5	2	4	7	0	<b>23</b>	59	<b>59</b>
6.	Karel Tůma	G Moravská Ostrava	0	3	3	1	4	4	-	<b>15</b>	61	<b>58</b>
7.	Tibor Vansa	G Moravská Ostrava	1	3	2	2	5	4	0	<b>17</b>	55	<b>55</b>
8.	Lukáš Chváta	G Brno – Vejrostova	4	3	1	-	2	-	3	<b>13</b>	73	<b>53</b>
9.	Václav Cviček	G Frýdek-Místek – ČSA	1	3	-	3	1	5	5	<b>18</b>	56	<b>49</b>
10.	Vít Šípál	G Ústí n. L. – Jateční	2	3	3	-	4	1	-	<b>13</b>	51	<b>32</b>
11.-12.	Michaela Jirků	G Praha – Arabská	3	2	3	-	4	1	0	<b>13</b>	39	<b>24</b>
11.-12.	Miloslav Havelka	G Zastávka	4	2	1	-	3	5	-	<b>15</b>	48	<b>24</b>
13.	Jiří Lipovský	G Bystřice n. Pernštejnem	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	62	<b>22</b>
14.	Andrej Pidik	G Nove Mesto nad Váhom	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	28	<b>15</b>
15.	Josef Matějička	G Žilina	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	24	<b>13</b>
16.-18.	Radoslav Šafran	G Košice	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	50	<b>12</b>
16.-18.	Luboš Matásek	G Plzeň – Mikuláš. nám.	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	46	<b>12</b>
16.-18.	Barbora Galaczková	G Třinec	-	3	0	-	-	-	-	<b>3</b>	40	<b>12</b>
19.	Tomáš Kadlček	G Uherský Brod	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	100	<b>11</b>
20.	Matěj Týč	G Zastávka	4	-	1	-	-	2	-	<b>7</b>	32	<b>10</b>
21.-22.	Lukáš Vozdecký	G Brno – Vejrostova	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	56	<b>9</b>
21.-22.	Lukáš Snášel	COP Hronov	-	-	0	-	-	-	-	<b>0</b>	22	<b>9</b>
23.-24.	Vít Urbánek	G Jihlava	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	100	<b>8</b>
23.-24.	Pavel Klouda	G Kyjov	0	2	1	-	1	-	-	<b>4</b>	25	<b>8</b>
25.-29.	Jaroslav Štencel	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	33	<b>6</b>
25.-29.	Nina Sainerová	G Praha – U Lib. zámku	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	30	<b>6</b>
25.-29.	Jaroslav Kudlička	G Hodonín	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	40	<b>6</b>
25.-29.	Kateřina Jelénková	SZŠ, G a RŠ Staré Město	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	54	<b>6</b>
25.-29.	David Bezucha	G Liberec	-	1	1	-	-	-	-	<b>2</b>	33	<b>6</b>
30.-32.	Miroslav Zgažar	SPŠCH Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	50	<b>5</b>
30.-32.	Marek Vyšinka	G Brno – Žižkova	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	41	<b>5</b>
30.-32.	Radim Kusák	G Frýdek-Místek	-	1	-	-	-	-	-	<b>1</b>	71	<b>5</b>
33.-34.	Milan Mareš		-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	17	<b>4</b>
33.-34.	Jan Křivka	COP Hronov	-	-	0	-	0	-	-	<b>0</b>	20	<b>4</b>
35.	Štěpán Mančík	G Uherský Brod	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	100	<b>3</b>
36.	Jan Chmelař	G Hranice	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	66	<b>2</b>
37.-38.	Zuzana Svobodová	G Zlaté Moravce	-	0	-	0	-	-	-	<b>0</b>	0	<b>0</b>

## Kategorie druhých ročníků

	Jméno	Škola	1	2	3	4	5	6	S3	III	%	Σ
	Student Pilný	UK MFF	4	3	4	5	4	8	5	33	100	99
1.	Matouš Ringel	G Broumov	4	3	5	1	2	3	5	23	68	62
2.	Jana Matějová	SPŠ Chrudim	4	3	2	–	5	3	–	17	58	40
3.	Petr Houštěk	G Pelhřimov	0	2	–	–	–	–	–	2	55	38
4.	Alexandr Kazda	G Praha – Nad Alejí	–	–	–	–	–	–	–	0	84	33
5.	Martin Rybář	GOA Blansko	4	3	–	1	2	3	–	13	59	32
6.	Boris Gažovič	G Humenné	–	–	–	–	–	–	–	0	69	30
7.–8.	Zuzana Rozlívková	G B.N. Hradec Králové	–	–	0	–	1	–	–	1	37	22
7.–8.	Vojtěch Krejčířík	G Kroměříž	4	2	3	1	–	4	–	14	64	22
9.	Petr Dostál	G Žamberk	–	1	1	1	1	2	–	6	39	21
10.–11.	Ivan Patáčík	G Partizánské	2	3	–	–	0	–	–	5	34	16
10.–11.	Pavel Hála	G Český Krumlov	–	1	2	1	–	–	–	4	34	16
12.	Pavol Lakatoš	G Velké Kapušany	1	2	0	0	1	–	–	4	31	15
13.	Lucie Strmisková	G Kyjov	–	3	–	–	–	–	–	3	50	14
14.–15.	Vladimír Sommer	G Žďár n. Sázavou	–	2	2	–	2	–	–	6	63	12
14.–15.	Jakub Kopecký	G Trenčín	1	3	1	–	0	3	–	8	37	12
16.	Peter Buhaj	G Snina	2	1	1	1	2	0	–	7	19	11
17.–18.	Eva Lovíšková	G Nové M. na Moravě	3	–	1	–	–	–	–	4	35	10
17.–18.	Jakub Kubeček	COP Hronov	1	0	–	–	1	–	–	2	18	10
19.–21.	Zdeněk Váňa	COP Hronov	1	0	1	–	–	–	–	2	18	9
19.–21.	Martina Smolová	G Písek	–	–	–	–	–	–	–	0	23	9
19.–21.	Jana Babováková	G Most	–	–	–	–	–	–	–	0	37	9
22.–26.	Stanislav Plánička	G Klatovy	–	–	3	–	–	–	–	3	57	8
22.–26.	Libor Kukačka	GOA Vrchlabí	–	–	–	–	–	–	–	0	66	8
22.–26.	Filip Kozel	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	33	8
22.–26.	Michal Havel	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	32	8
22.–26.	Miroslav Frantes	G Benešov	–	–	–	–	–	–	–	0	66	8
27.	Radek Beneš	COP Hronov	–	0	–	–	1	–	–	1	15	6
28.	Jan Křivonožka	G Bílovec	–	1	–	–	–	–	–	1	50	5
29.–33.	Ivo Zábojník	G Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	80	4
29.–33.	Jakub Tichý	G Praha – Arabská	–	–	–	–	–	–	–	0	57	4
29.–33.	Mária Šedivá	G Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	44	4
29.–33.	Hana Suchomelová	G Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	44	4
29.–33.	Jan Křetínský	G Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	133	4
34.–40.	Lukáš Voleský	COP Hronov	–	0	0	–	–	–	–	0	9	3
34.–40.	Radoslav Sopoliga	G Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	15	3
34.–40.	Martin Padevět	G Kostelec nad Č. lesy	–	–	–	–	–	–	–	0	37	3
34.–40.	Markéta Novotná	G Hranice	–	–	–	–	–	–	–	0	37	3
34.–40.	Petr Mindžak	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	75	3
34.–40.	Lucie Gráfová	G Ostrava – Hrabůvka	1	1	–	–	–	–	–	2	17	3
34.–40.	Lukáš Bartík	G Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	37	3
41.–44.	Tomáš Ručka	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	28	2
41.–44.	Luboš Račanský	G Benešov	–	–	–	–	–	–	–	0	28	2
41.–44.	Martina Marenčoková	G Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
41.–44.	Lukáš Burian	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	28	2
45.	Jaroslav Bušek	G Rumburk	–	–	–	–	–	–	–	0	33	1
46.–47.	Rudolf Podoba	G Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
46.–47.	Jakub Černý	G Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

*Kategorie prvních ročníků*

	<b>Jméno</b>	<b>Škola</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>S3</b>	<b>III</b>	<b>%</b>	<b><math>\Sigma</math></b>
	Student Pilný	UK MFF	4	3	4	5	4	8	5	<b>33</b>	100	<b>99</b>
1.	Anton Repko	ZŠ a G Prešov	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	54	<b>36</b>
2.	Ondrej Bogár	ZŠ Trenčín	–	3	–	–	0	3	–	<b>6</b>	46	<b>13</b>
3.	Jana Vrábellová	ZŠ Trenčín	–	1	–	–	1	2	–	<b>4</b>	42	<b>12</b>
4.–5.	Tomáš Uhrin	G Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	88	<b>8</b>
4.–5.	Ján Čuvala	ZŠ Trenčín	–	–	–	–	–	3	–	<b>3</b>	32	<b>8</b>
6.	Karel Hofman	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	100	<b>7</b>
7.	Zdeněk Lochman	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	26	<b>4</b>

**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: [fykos-solutions@mff.cuni.cz](mailto:fykos-solutions@mff.cuni.cz)e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)

Fyzikální korespondenční seminář, který je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF, je organizován studenty UK MFF za podpory Ústavu teoretické fyziky UK MFF a jeho zaměstnanců a Jednoty českých matematiků a fyziků.