

Zadání VI. série



Termín odeslání: 3. června 2002

Úloha VI.1 ... lamborghini

Odhadněte, jak velkou vertikální silou je Lamborghini Diablo¹⁾ nadlehčováno, jede-li rychlostí $320 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Pozor, toto *není* experimentální úloha!



Lamborghini Diablo

Úloha VI.2 ... RC obvod

Mějme sériový RC -obvod, který připojíme na zdroj periodického napětí s tzv. obdélníkovým průběhem, tzn. po čas $T/2$ je napětí U a po čas $T/2$ napětí $-U$. Jak bude vypadat průběh napětí na kondenzátoru?

Úloha VI.3 ... stáří Země

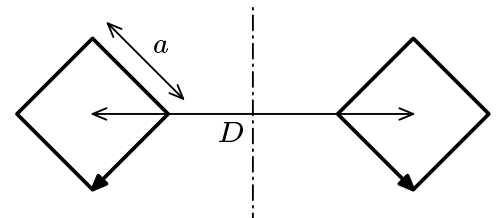
Předpokládejme, že při vzniku Země na ní byly izotopy uranu ^{238}U a ^{235}U , ale ne produkty jejich rozpadu. Izotop ^{238}U resp. ^{235}U se rozpadá s poločasem $T_1 = 4,50 \cdot 10^9$ roků resp. $T_2 = 0,710 \cdot 10^9$ roků. Ve srovnání s těmito časy jsou poločasy rozpadu produktů zanedbatelné, rozpadové řady končí stabilními izotopy ^{206}Pb a ^{207}Pb .

Je-li v uranové rudě poměr počtu atomů uranu $^{238}\text{U} : ^{235}\text{U} = 137 : 1$ a poměr počtu atomů olova $^{206}\text{Pb} : ^{207}\text{Pb} = 28 : 17$, odhadněte stáří Země.

Úloha VI.4 ... toroid

Mějme cívku ve tvaru „hranatého toroidu“. Řez osou rotační symetrie je zakreslen na obr. 1. Vinutí toroidu má celkem N závitů a v naznačeném směru jím protéká proud o velikosti I/N . Spočítejte magnetické pole uvnitř toroidu a zdůvodněte správnost vašeho výpočtu.

Není-li vám cizí slovo integrál, můžete jako bonus spočítat i indukčnost toroidu.



Obr. 1

Úloha VI.P ... chromatická vada

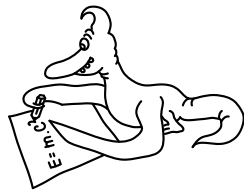
Mějme dvě identické skleněné čočky s ohniskovou vzdáleností f (pro určitou střední vlnovou délku). Do jaké vzdálenosti je třeba dát tyto čočky, aby výsledná optická soustava měla co nejlépe kompenzovanou chromatickou vadu (tzn. že různě barevné světlo se zobrazuje do různých míst). Jak velkou ohniskovou vzdálenost bude výsledná soustava mít?

Úloha VI.Exp ... sprcha

Určitě jste si už při sprchování všimli, že proud opouštějící sprchu má vyšší teplotu než voda dopadající na zem. Na vás je, abyste toto naměřili kvantitativně.

Nalezněte a popište vhodné experimentální uspořádání, na kterém bude měřitelný pokles teploty vody padající vzduchem a proveďte měření. Pokuste se vaše výsledky teoreticky interpretovat.

¹⁾ Hezčí obrázek lze nalézt na <http://fykos.mff.cuni.cz/lamborghini.jpg>.



Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... flák z šošovky (5 bodů, řešilo 39 studentů)

Mějme čočku o průměru D a ohniskové vzdálenosti f zasazenou ve stěně. Ve vzdálenosti r od stěny a y od optické osy máme bodový zdroj světla, který vyzařuje izotropně. Za čočkou máme ve vzdálenosti l stínítko. A nás by zajímalo, kam dopadne světlo ze zdroje, případně i průběh intenzity na stínítku. (Neuvažujte zobrazovací vady čočky a vlnové vlastnosti světla.) Vymyslel Miro Kladiiva.

Všechny paprsky, které dopadnou na čočku, se zlomí do geometrického obrazu zdroje. Polohu obrazu určíme ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f},$$

kde r je vzdálenost předmětu od čočky, a' je vzdálenost obrazu od čočky a f jsme označili ohniskovou vzdálenost čočky. Vzdálenost obrazu od optické osy y' určíme z podobnosti trojúhelníků jako

$$y' = \frac{ya'}{r},$$

kde y je stejně jako v zadání vzdálenost předmětu od optické osy.

Paprsky za čočkou tedy tvoří zkosený kužel, který má vrchol v obrazu zdroje, a čočka samotná tvoří jeho podstavu. Tvar světlého fleku na stínítku bude tedy kruhový stejně jako je kruhová čočka. Střed S tohoto kruhu bude dán průsečíkem stínítka a hlavního paprsku (procházejícího středem čočky). Vzdálenost s bodu S od optické osy tedy bude z podobnosti trojúhelníků

$$s = \frac{ly}{r},$$

kde l je vzdálenost stínítka od čočky. Označme D průměr čočky. Uvažujeme-li obdobně paprsek jdoucí např. dolním okrajem čočky, dostáváme pro vzdálenost b jednoho okraje stínu od optické osy

$$\frac{a'}{\frac{D}{2} - y'} = \frac{l}{\frac{D}{2} - b}.$$

Pro poloměr stínu R tedy po přímočarém výpočtu vychází

$$R = |b - s| = \left| \frac{D}{2fr} (lr - lf - rf) \right|.$$

Tož tedy vše k vyšetřování tvaru stínu.

Nyní se podívejme, jak je to s rozložením intenzity světla. V kruhu na stínítku bude rozložení intenzity stejné jako na čočce, intenzita bude jen $[a'/(l - a')]^2$ krát větší. Zavedeme-li v rovině čočky souřadnou soustavu s osou y mířící nahoru a osou x dopředu a budeme-li odteď vzdálenost zdroje světla od optické osy označovat y_0 , je intenzita světla na čočce

$$I = \frac{Kr}{(r^2 + x^2 + (y - y_0)^2)^{3/2}},$$

K je zde konstanta charakterizující mohutnost zdroje. Maximum intenzity je pro $x = 0$, $y = y_0$, tedy na stínítku v bodě vzdáleném od optické osy

$$y = \frac{(y' + y_0)l}{a'} - y_0,$$

tedy nikoliv ve středu kruhu, jak se mnozí z vás domnívali.

Lenka Zdeborová
lenka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . 2 ... radiátory (3 body, řešilo 39 studentů)

V bytě jsou tři radiátory. Voda tekoucí v prvním má teplotu $75\text{ }^\circ\text{C}$, voda ve třetím $40\text{ }^\circ\text{C}$. Jakou teplotu má prostřední radiátor? Teplota vzduchu v pokoji je $20\text{ }^\circ\text{C}$. Všechny radiátory jsou stejné a ztráty v potrubí jsou zanedbatelné.

Nejprve si musíme uvědomit, jakým způsobem předává topení teplo svému okolí. V úvahu připadají dva mechanismy: záření a vedení (resp. přestup). Povrch typického topení můžeme odhadnout na 2 m^2 a teplotu na $60\text{ }^\circ\text{C}$. Podle Stefan-Boltzmanova zákona

$$P = \sigma ST^4,$$

kde P je výkon záření, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$ je Stefan-Boltzmanova konstanta, S je povrch tělesa a T je termodynamická teplota, je vyzářený výkon přibližně 600 W (musíme uvážit také to, že topení absorbuje tepelné záření z okolí.) Stefan-Boltzmanův zákon navíc platí pouze pro ideálně černé těleso, takže pokud je topení natřeno na bílo, bude vyzářený výkon ještě několikrát nižší. V porovnání s mnohakilowatovým výkonem topení je tato hodnota zanedbatelná.

Rychlost předávání tepla do okolí je tedy limitována takzvaným přestupem tepla (pojem „vedení“ je v tomto případě zavádějící protože teplo „přestupuje“ z topení do vzduchu.) Důležité je, že v takovémto případě je rychlost výměny tepla lineární funkcí rozdílu teploty topení a okolí. Voda se tedy v každém topení ochladí o teplotu, která bude úměrná rozdílu jeho teploty a teploty okolního vzduchu. Rozdíly teplot topení a vzduchu pak budou u několika za sebou zapojených topení tvořit geometrickou posloupnost. Označíme-li tyto rozdíly ΔT_1 , ΔT_2 a ΔT_3 , bude platit

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{\Delta T_2}{\Delta T_3}.$$

Teplota prostředního topení je tedy

$$T_2 = T_{\text{okolí}} + \sqrt{\Delta t_1 \Delta t_2}.$$

Pavel Augustinský
pavel@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . 3 ... světelný motor (4 body, řešilo 24 studentů)

Uvažujte Carnotův cyklus (adiabatický–izotermický–adiabatický–izotermický děj) s tepelným elektromagnetickým zářením. Stavová rovnice pro tepelné záření má tvar $p = \frac{1}{3}u(T)$, kde p je tlak záření a u je jeho hustota energie, která závisí pouze na jeho termodynamické teplotě T . Pro adiabatický děj s tepelným zářením platí $pV^{4/3} = \text{konst}$. Vypočítejte účinnost tohoto cyklu jako funkci $u(T_1)$ a $u(T_2)$, kde T_1 je teplota ohříváče a T_2 teplota chladiče. Pro libovolný Carnotův cyklus je jeho účinnost dána vztahem $1 - T_2/T_1$. Porovnáním těchto vztahů pro účinnost cyklu odvoďte, že hustota energie záření u je přímo úměrná T^4 .
Navrhl Karel Kolář

V následujících úvahách budeme uvažovat Carnotův cyklus začínající v bodě 1 izotermickou expanzí a končící ve stejném bodě adiabatickou kompresí. T_1 je teplota ohříváče, T_2 teplota chladiče, Q_1 je teplo dodané ohříváčem a Q_2 je teplo odevzdané chladiči. Účinnost Carnotova cyklu je definována jako podíl vykonané práce a tepla dodaného stroji, neboli

$$\eta = \frac{W}{Q_1}. \quad (1)$$

Abychom nemuseli počítat práci za celý cyklus, využijeme I. větu termodynamickou, která zní

$$Q = \Delta U + W.$$

Protože studujeme uzavřený cyklus, je ΔU rovno nule. Proto je celková práce stroje rovna celkovému teplu přijatému pracovní látkou, což je teplo dodané teplejší lázni plus teplo odevzdané chladiči (které je ovšem záporné), tedy

$$W = Q_1 + Q_2.$$

Během adiabatického děje k tepelné výměně nedochází. Potom se (1) redukuje na

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (2)$$

V průběhu izotermického děje je teplota konstantní, a proto zůstává konstantní i hustota energie a tlak, který je jí přímo úměrný. Celková vnitřní energie U se však mění, protože se mění objem záření. Podle I. věty termodynamické musí platit

$$Q = \Delta U + W = u(T)\Delta V + p \Delta V = \frac{4}{3}u(T)\Delta V.$$

A tedy $Q_1 = \frac{4}{3}u(T_1)(V_2 - V_1)$ a $Q_2 = \frac{4}{3}u(T_2)(V_4 - V_3)$.

Při adiabatických dějích platí $pV^{4/3} = \text{konst.}$ Speciálně

$$\begin{aligned} p_1 V_2^{4/3} &= p_2 V_3^{4/3} \\ p_2 V_4^{4/3} &= p_1 V_1^{4/3}. \end{aligned}$$

Proto platí

$$(V_4 - V_3) = - \left(\frac{u(T_1)}{u(T_2)} \right)^{3/4} (V_2 - V_1).$$

Po dosazení do (2) získáme

$$\eta = 1 + \frac{u(T_2)}{u(T_1)} \frac{V_4 - V_3}{V_2 - V_1} = 1 - \left(\frac{u(T_2)}{u(T_1)} \right)^{1/4}.$$

Protože účinnost libovolného Carnotova cyklu je $1 - T_2/T_1$, musí pro libovolné dvě teploty T_1 a T_2 platit

$$\frac{T_2^4}{u(T_2)} = \frac{T_1^4}{u(T_1)},$$

což lze splnit pouze, budou-li se oba zlomky rovnat společné konstantě. Z toho už plyne $u(T) \sim T^4$.

Vladimír Fuka
vlada@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 ... zavlažování (4 body, řešilo 37 studentů)

Zahradkář chce udělat zavlažovací zařízení na svůj záhonek a to následujícím způsobem. Vedle řady rostlinek bude hadice s otvory, kterou položí tak, že u každé rostlinky bude dírka.

Poradte zahradkáři, jak velké mají být dírky, aby ke každé rostlince teklo stejné množství vody.

Řešení této úlohy si zjednodušíme několika předpoklady:

- 1) Vodu považujeme za ideální kapalinu bez viskozity, její hustotu označme ρ ,
- 2) hadici uvažujeme jako vodorovnou, na druhém konci uzavřenou, s konstantním průřezem po celé své délce,
- 3) kruhové otvory v hadici nechtě jsou umístěny na boku hadice a jejich vzájemná vzdálenost ať je velká ve srovnání s průměrem každého otvoru,
- 4) průřez hadice nechtě je dost malý na to, abychom mohli zanedbat hydrostatický tlak způsobený sloupcem vody nad otvorem.

Po zjednodušení je zřejmé, že musí platit následující rovnost

$$Q_{k-1} = Q + Q_k,$$

kde Q je objemový průtok vody v k -tém otvoru v hadici, Q_{k-1} je průtok před a Q_k za tímto otvorem. Označíme-li v_{k-1} (respektive v_k) rychlost vody v hadici před k -tým otvorem (respektive za ním), a S konstantní průřez hadice, můžeme výše uvedený vzorec přepsat na tvar

$$Sv_{k-1} = Q + Sv_k.$$

Má-li být každá květina zalévána stejným množstvím vody, musí být Q konstantní pro všechny otvory. Z toho plyne:

$$\text{konst} = Q = Sv_{k-1} - Sv_k = S(v_{k-1} - v_k) = Sc,$$

kde obecný rozdíl rychlostí v_{k-1} a v_k je rovněž konstantní a označili jsme jej c . Vidíme tedy, že rychlosti tvoří členy klesající aritmetické posloupnosti s diferencí c . Pro tuto posloupnost můžeme psát

$$v_k = v_0 - kc.$$

Označme počet otvorů v hadici n . Je-li hadice uzavřená (viz. předpoklady), bude za posledním (n -tým) otvorem rychlost vody nulová, tedy

$$v_n = v_0 - nc = 0,$$

a tedy

$$c = \frac{v_0}{n}.$$

Označme S_k^* průřez k -tého otvoru a v_k^* rychlost vody proudící tímto otvorem. Na základě našich předpokladů můžeme nyní použít Bernoulliho rovnici pro vodu proudící v hadici kolem prvního otvoru.

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_0 - c)^2,$$

obecně pro k -tý otvor

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = p_k + \frac{1}{2}\rho(v_0 - kc)^2,$$

z čehož vyplývá

$$p_k = p_0 + \frac{1}{2}c\rho(2v_0k - k^2c).$$

Obdobně pro vodu proudící ven prvním otvorem platí

$$\frac{1}{2}\rho\left(\frac{Q}{S_k^*}\right)^2 = p_{k-1} + \frac{1}{2}\rho v_{k-1}^2$$

Z toho plyne

$$S_k^* = \frac{Q}{\sqrt{(v_{k-1})^2 + \frac{2p_{k-1}}{\rho}}} = \frac{Sc}{\sqrt{(v_{k-1})^2 + \frac{2p_{k-1}}{\rho}}}$$

Dosadíme-li nyní do vzorce pro S_k^* výše odvozený vztah $p_k = p_0 + c\rho(2v_0k - k^2c)/2$, stejně tak jako za $c = v_0/n$, dostaneme po úpravách výsledek ve tvaru

$$S_k^* = \frac{S \frac{v_0}{n}}{\sqrt{v_0^2 + \frac{2p_0}{\rho}}}$$

Vidíme, že všechny otvory musí mít stejnou velikost, která je určena pouze průřezem S hadice, vstupními parametry vody – její hustotou ρ , počáteční rychlostí v_0 a tlakem p_0 , a dále počtem otvorů v hadici. Zmenšování rychlosti vody v hadici v místech otvorů (mezi dvěma vedle sebe se nacházejícími otvory zůstává rychlost stejně jako tlak konstantní) je kompenzováno zvyšováním tlaku, což jsme mohli v důsledku platnosti Bernoulliho rovnice předpokládat. Ilustračním příkladem mohou být různá otočná zavlažovací zařízení tvořená dvěma řadami trysek, která lze spatřit zejména v létě na travnatých plochách, v parcích, fotbalových hřištích, popřípadě v Brně na strojírenském veletrhu.

Lukáš Schmiedt
krysar@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . P ... proč máme Měsíc? (3 body, řešilo 42 studentů)

Bod, ve kterém má gravitační síla Země a Slunce stejnou velikost, je k Zemi blíže, než obíhá Měsíc. Proč tedy Měsíc neobíhá kolem Slunce?

Přečtěte si ještě jednou zadání a pozorně čtěte: »Proč Měsíc neobíhá kolem Slunce?« Logická odpověď by zněla: Měsíc obíhá kolem Slunce! Podívejte se na něj z velké dálky a zřetelně můžete vidět, že kolem Slunce obíhá.

Do zadání se nám (ostatně jako vždy) vloudila menší nepřesnost formulace otázky. Měli jsme se spíše ptát: „Jak to, že Měsíc obíhá kolem Slunce se stejnou periodou jako Země, když jej Slunce přitahuje gravitačně silněji než Země? Neměl by opustit sféru zemské přitažlivosti a obíhat kolem Slunce nezávisle na Zemi?“ Na tuto otázku se teď pokusíme odpovědět.

Ověřme nejdříve, že skutečně Slunce působí na Měsíc větší gravitační silou než Země. Zavedme číslo φ jako poměr gravitačních sil Slunce a Země:

$$\varphi = F_{\odot} : F_Z = \frac{\varkappa M_{\odot}}{a^2} : \frac{\varkappa M_Z}{r^2} \approx 2,2, \quad (3)$$

kde M_{\odot} , M_Z jsou hmotnosti Slunce a Země, a je vzdálenost Země od Slunce a r vzdálenost Měsíce od Země.

Vzdálenost Měsíce od Země se mění mezi 365 000 km a 405 000 km. Dosazením do rovnice (3) dostaneme, že $\varphi \approx 2,1-2,3$. Vidíme tedy, že na Měsíc působí Slunce pořád větší silou než Země.

Na jednu věc jsme ale zapoměli. Výpočet (3) popisuje situaci, kdy Země a Slunce stojí a Měsíc se nachází někde mezi nimi. To by pak Měsíc spadl na Slunce. Jenže Měsíc, stejně jako Země, obíhá kolem Slunce. Na obě tělesa tedy působí další síla – odstředivá. Zavedme poměr těchto dvou sil jako k . V případě, že Země bude od Slunce stejně daleko jako Měsíc, bude k nulové. Největší bude tehdy, když bude Měsíc mezi Zemí a Sluncem (promyslete si, proč). Tehdy bude pro k platit

$$k = (F_{\odot,gr} - F_{\odot,od}) : F_Z = \left(\frac{\varkappa M_{\odot}}{(a-r)^2} - \omega_M^2(a-r) \right) : \frac{\varkappa M_Z}{r^2}, \quad (4)$$

ω_M můžeme položit rovnou úhlové rychlosti oběhu Země kolem Slunce (Země obíhá kolem Slunce rychlostí asi $30 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, Měsíc kolem Země jenom $1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, $\omega_M = 29-31 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$). Jestliže si teď dosadíme do rovnice (4), dostaneme $\varphi \ll 1$. To znamená, že Země přitahuje Měsíc mnohem více než Slunce. V případě, že si k položíme rovno jedné, nalezneme přibližně hranici, uvnitř které bude obíhat těleso kolem Země, vně už jenom kolem Slunce. Pak

$$\frac{\varkappa M_{\odot}}{(a-R)^2} - \omega^2(a-R) = \frac{\varkappa M_Z}{r^2}$$

Tato rovnice je třetího stupně, nebudeme uvádět její přesné řešení, pouze výsledek. Pro hodnoty $a = 150 \cdot 10^6$ km, $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg a $r = 384\,000$ km vyjde $R \approx 1,5$ mil. km.

Pavol Habuda
bzucino@yahoo.com

Úloha IV .Exp ... led (8 bodů, řešilo 30 studentů)

Dáme-li skleničku naplněnou částečně vodou do mrazáku, budeme ji mít za chvíli plnou ledu. Jeho povrch však nebude rovný, ale vypuklý. Zjistěte, proč tomu tak je a vypočítejte alespoň přibližně úhel, který bude svírat povrch ledu s vodorovnou rovinou. Porovnejte tento výsledek s experimentální hodnotou.

Teorie

Při tuhnutí zvětší voda svůj objem asi o 9%. Nejdříve tuhne po stranách sklenice a na dně, poté na hladině. Tekutá voda je pak uzavřena v ledové dutině a další tuhnutí (pokud je dostatečně pomalé) způsobí vypuklý tvar zmrzlé hladiny.

Popsat přesně tvar vypuknutí je obtížné. Jednak se hladina nezačne zvedat od krajů, ale až v určité vzdálenosti od okraje. Je to způsobeno tím, že v okamžiku, kdy hladina zamrzne a začne se zvedat, je už na stěnách skleničky namrzlá vrstva ledu.

Nejjednodušší představa je taková, že hladina bude mít tvar kulového vrchlíku o poloměru $r = R - d$, kde R je poloměr sklenice a d vzdálenost kraje vrchlíku od okraje sklenice. Označíme-li sklon hladiny na okraji vrchlíku α , platí pro poloměr křivosti vrchlíku $\rho \sin \alpha = r$ a odtud vyjádříme objem vrchlíku

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3\rho - h) = \pi r^3 \cdot \frac{(2 + \cos \alpha) \sin \alpha}{3(1 + \cos \alpha)^2}.$$

Uvědomíme-li si, jaká zjednodušení jsme při tvorbě tohoto modelu prováděli, můžeme bez obav pro malý úhel α psát $\sin \alpha \approx \alpha$ a $\cos \alpha \approx 1$. Dostáváme tak pro maximální sklon hladiny ve sklenici vztah

$$\alpha = \frac{4V}{\pi r^3}. \quad (5)$$

Za V dosazujeme objem vrchlíku, který odpovídá zvětšení objemu vody od okamžiku, kdy začíná vrchlík růst, tedy přibližně $V = (r/R)^2 (\rho_{\text{voda}}/\rho_{\text{led}} - 1) V_0$, kde V_0 je počáteční objem vody.

Realizace experimentu

Pro realizaci měření jsme vybrali sklenici ve tvaru téměř ideálního válce o vnitřním poloměru $R = 2,7$ cm. Použili jsme destilovanou vodu, mražení jsme prováděli ve výparníku lednice Zanussi (součást vybavení pokoje A221 Koleje 17. listopadu). Důležité pro vznik správného povrchu bylo odstranění jakýchkoliv otřesů během mražení. Úspěšnost přípravy povrchu vhodného k měření úhlu byla asi 50%.

Připravený povrch jsme lehce vyleštli a úhel α měřili pomocí laserového ukazovátka tak, že jsme sklenici umístili na vodorovnou podložku pod upevněné ukazovátko svítící kolmo dolů a posouváním sklenice po podložce a pozorováním stopy na stropě jsme stanovili maximální sklon ledu.

Výsledky

Vzhledem k časové náročnosti jsme měření provedli pouze pro 4 různé objemy V_0 . Pro všechny objemy jsme odhadli $d = 4$ mm. Naměřené hodnoty ukazuje následující tabulka.

V_0 [ml]	30	40	60	80
α_{exp} [°]	8,2	12,4	18,1	24,0
α_{teor} [°]	11,8	15,8	23,6	31,5

Vidíme, že teoretické výsledky se od experimentálních poněkud liší, dávají hodnoty asi o čtvrtinu větší. To je s ohledem na jednoduchost naší teorie slušný úspěch.

Chyba měření objemu (použili jsme odměrný válec) a měření úhlu lze zanedbat vzhledem ke statistické chybě, při opakování měření se hodnoty lišily s rozptylem přibližně 20%. Hodnoty v tabulce jsou stanoveny jako průměr ze 3 měření.

Závěr

I přes velmi zjednodušenou teorii jsme dostali přijatelnou shodu s experimentem. Zejména ze souhlasu tvaru závislosti úhlu α na objemu V_0 usuzujeme, že naše vysvětlení vzniku vypukliny je správné.

Honza Houšťek

honza@fykos.mff.cuni.cz

Úloha S.IV ... rovnoměrně zrychlený pohyb (6 bodů, řešilo 27 studentů)

Mějme volný hmotný bod, jehož klidová hmotnost je m_0 a který je v naší vztažné soustavě v klidu. V čase $t = 0$ začne na hmotný bod v našem systému působit konstantní urychlující síla o velikosti F .

a) Vypočtete časovou závislost rychlosti hmotného bodu v naší soustavě. Z této závislosti určete zrychlení hmotného bodu vůči našemu systému. (Řešte pouze pro časy $t > 0$.)

b) V každém okamžiku můžeme s uvažovaným hmotným bodem spojit tzv. klidovou inerciální soustavu. Jak již název napovídá, jedná se o inerciální systém, ve kterém je hmotný bod v daném okamžiku v klidu. S jakým zrychlením se hmotný bod pohybuje ve svých klidových soustavách? Jak velká síla na něj v těchto systémech působí?

a) Pohybovou rovnici hmotného bodu lze v tomto případě vyřešit jednoduše, protože je působící síla konstantní. Časová závislost hybnosti $p(t)$ hmotného bodu je tedy dána vztahem (podle zadání řešíme pouze pro $t > 0$)

$$p(t) = Ft \quad \Rightarrow \quad \frac{m_0 v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} = Ft.$$

Pro rychlost hmotného bodu v naší vztažné soustavě tedy platí vztah

$$v = c \frac{\frac{Ft}{m_0 c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2}}.$$

Z tohoto vztahu vidíme, že ani stále působící síla libovolné velikosti není schopna urychlit částici na světelnou popřípadě nadsvětelnou rychlost.

Zrychlení a hmotného bodu v našem systému získáme derivací jeho rychlosti podle času:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{v^3}{c^2} \frac{2m_0 c}{Ft} \left(-\frac{m_0 c}{Ft^2}\right) = \frac{v}{t} \frac{\left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2}{1 + \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2} = \frac{v}{t} \frac{1}{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}.$$

b) Okamžitá klidová inerciální soustava pohybujícího se hmotného bodu se vůči nám pohybuje rychlostí v ve stejném směru jako uvažovaný hmotný bod. Za čas dt se rychlost hmotného bodu v naší soustavě zvětší o dv . Odpovídající změnu rychlosti du v klidové soustavě hmotného bodu dostaneme užitím vztahu pro skládání rychlostí:

$$du = \frac{(v + dv) - v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma^2 dv.$$

K této změně rychlosti hmotného bodu v jeho klidové soustavě dojde za čas $d\tau$. Vztah mezi časovými intervaly dt a $d\tau$ je dán dilatací času: $dt = \gamma d\tau$, neboť časový rozdíl $d\tau$ odpovídá v klidové soustavě hmotného bodu soumístným událostem (rychlost hmotného bodu je v jeho klidovém systému nulová). Pro zrychlení hmotného bodu a' v jeho klidové inerciální soustavě tedy platí:

$$a' = \frac{du}{d\tau} = \gamma \frac{du}{dt} = \gamma^3 \frac{dv}{dt} = \gamma^3 a.$$

Časovou závislost faktoru γ odpovídajícího pohybu hmotného bodu v naší soustavě získáme dosažením časové závislosti rychlosti hmotného bodu do definičního vztahu faktoru γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2}}{\frac{m_0 c}{Ft}} = \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}.$$

Pro časovou závislost zrychlení hmotného bodu v jeho klidovém systému tudíž dostáváme:

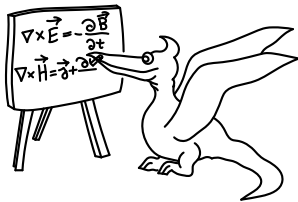
$$a' = \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} \frac{v}{t} = \frac{c}{t} \frac{Ft}{m_0 c} = \frac{F}{m_0}.$$

Vidíme tedy, že zrychlení hmotného bodu je v jeho klidových soustavách konstantní. Proto se tento pohyb nazývá rovnoměrně zrychlený.

V okamžitých klidových systémech působí na hmotný bod síla F' , jejíž velikost obdržíme užitím pohybové rovnice:

$$F' = \frac{dm}{dt} v' + m a' = m_0 a' = F.$$

První člen pohybové rovnice je v okamžité klidové soustavě nulový, protože je hmotný bod v tomto systému v klidu. V tomto případě nám náhodou vyšlo, že působící síla je v okamžitých klidových soustavách stejně velká jako v naší soustavě. Obecně se však při Lorentzově transformaci směr a velikost působících sil mění, což je například vidět z transformačních vztahů pro sílu získaných v rámci pomalé Lorentzovy transformace. (Při Galileiho transformaci se směr a velikost sil zachovává.)



Seriál na pokračování

Kapitola 6: Elektromagnetismus

Elektromagnetismus v STR

V předchozích dílech seriálu již bylo řečeno, že rovnice elektromagnetismu nemění svůj tvar při Lorentzově transformaci. (Při Galileiho transformaci však svůj tvar změní.) To znamená, že ve všech inerciálních vztažných systémech jsou elektromagnetické jevy popsány pomocí Maxwellových rovnic (při zadaných zdrojích umožňují vypočítat elektrickou intenzitu a magnetickou indukci) a vztahu pro Lorentzovu sílu $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (při zadaném elektromagnetickém poli umožňuje určit sílu, kterou toto pole působí na částici pohybující se rychlostí \mathbf{v} , která nese elektrický náboj Q).

Zabývejme se nyní otázkou, jak se transformují elektromagnetické veličiny při přechodu mezi vztažnými (inerciálními) systémy. Ve vztahu pro Lorentzovu sílu umíme transformovat sílu \mathbf{F} a rychlost \mathbf{v} . (Příslušné transformační vztahy lze odvodit z Lorentzovy transformace pro souřadnice.) Experimentálně bylo zjištěno, že elektrický náboj těles (na rozdíl od hmotnosti) nezávisí na jejich pohybu vůči pozorovateli. Z vyjádření Lorentzovy síly tedy můžeme určit transformační vztahy pro elektrickou intenzitu \mathbf{E} a magnetickou indukci \mathbf{B} .

Pokud budeme k popisu fyzikálních jevů v STR užívat tenzorových polí na časoprostoru, potom je elektromagnetické pole popsáno pomocí antisymetrického tenzoru druhého řádu (má celkem šest nezávislých složek). Složkami tohoto tenzoru v daných souřadnicích (v dané vztažné soustavě) jsou složky elektrické intenzity (z rozměrových důvodů dělených rychlostí světla) a magnetické indukce. To znamená, že elektrické a magnetické pole jsou relativní. To, co jeden pozorovatel vidí jako čistě elektrické pole, může jiný pozorovatel vnímat jako kombinaci elektrického a magnetického pole. Elektrické a magnetické pole jsou tedy pouze „různé tváře“ jediného fyzikálního objektu — elektromagnetického pole.

Transformace elektrické intenzity a magnetické indukce

Mějme dvě inerciální soustavy S a S'. Soustava S' se vůči soustavě S pohybuje rychlostí \mathbf{v} , pro jejíž velikost platí $v \ll c$. V tomto případě můžeme v Lorentzově transformaci zanedbat všechny členy vyššího řádu než v/c . Mezi systémy S a S' lze proto užít tzv. pomalou Lorentzovu transformaci:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2}.$$

Tato transformace se od Galileiho liší pouze transformací časové souřadnice. Později uvidíme, že tato skutečnost má významné důsledky.

Postupem naznačeným v předchozí části nyní odvodíme transformaci mezi elektrickými intenzitami \mathbf{E} , \mathbf{E}' a magnetickými indukcemi \mathbf{B} , \mathbf{B}' v případě pomalé Lorentzovy transformace. V této části seriálu budeme užívat rovnítko i mezi výrazy, které se rovnají pouze do prvního řádu ve členech v/c .

Nejprve odvodíme vztah pro transformaci rychlostí. Diferencováním pomalé Lorentzovy transformace dostaneme

$$\Delta \mathbf{r}' = \Delta \mathbf{r} - \mathbf{v} \Delta t, \quad \Delta t' = \Delta t - \frac{\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{r}}{c^2}.$$

Pohybuje-li se těleso v soustavě S rychlostí \mathbf{u} , potom platí $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{u} \Delta t$. Dosazením tohoto vztahu do předchozích obdržíme

$$\Delta \mathbf{r}' = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \Delta t, \quad \Delta t' = \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \Delta t.$$

Pro rychlost tělesa \mathbf{u}' v soustavě S' tedy platí

$$\mathbf{u}' = \frac{\Delta \mathbf{r}'}{\Delta t'} = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}.$$

Ze vztahu pro skládání rychlostí nyní odvodíme transformaci hmotnosti těles. Z předcházející rovnice dostáváme

$$u'^2 = \left(\left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \mathbf{u} - \mathbf{v} \right)^2 = u^2 + 2 \frac{u^2}{c^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^2 - 2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right).$$

Platí tedy

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2} + 2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 + 2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right).$$

Pro transformaci setrvačné hmotnosti tak dostáváme vztah

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}} = m \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right).$$

Ze vzorců pro transformaci hmotnosti a rychlosti snadno odvodíme transformační vztah pro hybnost:

$$\mathbf{p}' = m' \mathbf{u}' = m \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} = \mathbf{p} - m \mathbf{v}.$$

Užitím ekvivalence energie a hmotnosti obdržíme

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \frac{E}{c^2} \mathbf{v}.$$

Nyní již můžeme odvodit transformační vzorec pro sílu. Diferencováním transformačního vztahu pro hybnost získáme

$$\Delta \mathbf{p}' = \Delta \mathbf{p} - \frac{\Delta E}{c^2} \mathbf{v}.$$

Pro transformaci sil tedy platí

$$\mathbf{F}' = \frac{\Delta \mathbf{p}'}{\Delta t'} = \frac{\Delta \mathbf{p} - \frac{\Delta E}{c^2} \mathbf{v}}{\left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right) \Delta t} = \frac{\mathbf{F} - \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}},$$

kde jsme využili toho, že změna energie tělesa je rovna práci vykonané působícími silami: $\Delta E = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \Delta t$.

Dosažením vztahu pro Lorentzovu sílu do transformace sil obdržíme (do prvního řádu ve členech v/c platí rovnost $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= \frac{\mathbf{F}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} - \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \mathbf{v} = Q \left(\frac{\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \mathbf{v} \right) \\ &= Q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}}{c^2} \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}'}{c^2} \mathbf{v} + \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \mathbf{B} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} \right) \\ &= Q \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{u}' \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Elektrická intenzita a magnetická indukce se tedy transformují podle následujících vztahů

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}.$$

Tyto transformační vztahy platí pouze pro vztažné soustavy, jejichž vzájemná rychlost v je mnohem menší než rychlost světla ve vakuu. Obecné transformační vztahy lze z obecné Lorentzovy transformace odvodit zcela obdobným postupem. Jediným rozdílem jsou matematicky složitější vztahy.

Z odvozených vzorců plyne, že se elektrické a magnetické pole transformují mezi „sebou“. Pokud bychom užili Galileiho transformaci a požadovali stejný tvar vztahu pro Lorentzovu sílu ve všech inerciálních vztažných systémech, potom bychom obdrželi transformační vztahy $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ a $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$. V tomto případě je magnetické pole nezávislé. Vzájemná provázanost elektrického a magnetického pole je tedy způsobena tím, že do transformace časové souřadnice vstupují také souřadnice prostorové.

Coulombův zákon a magnetismus

Uvažujme náboj o velikosti Q , který se vůči nám pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí \mathbf{v} . Velikost rychlosti \mathbf{v} je mnohem menší než rychlost světla ve vakuu. K transformaci elektrického a magnetického pole mezi naší soustavou a klidovou soustavou náboje tedy můžeme užít vzorce plynoucí z pomalé Lorentzovy transformace. Ve své klidové soustavě (je to inerciální systém, neboť se náboj v našem inerciálním systému pohybuje rovnoměrně přímočaře) způsobuje náboj elektrostatické pole určené Coulombovým zákonem:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{B}_0 = 0,$$

kde počátek polohového vektoru \mathbf{r} je zvolen v náboji. Užitím transformačních vztahů pro elektrickou intenzitu a magnetickou indukci tak pro pole náboje v naší soustavě dostáváme:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

kde počátek polohového vektoru \mathbf{r} je v každém časovém okamžiku volen v náboji (náboj se v naší soustavě pohybuje). Kromě elektrického pole (již není statické ani stacionární) se v naší soustavě objevuje také magnetické pole, což není nijak překvapivé, neboť pohybující se náboj reprezentuje elektrický proud. Zajímavé je, že jsme magnetické pole tohoto proudu získali z Coulombova zákona.

Protože je $v \ll c$, působí uvažovaný náboj na náboje v našem systému prakticky pouze elektrickým polem. Přesto však existují situace, kdy se magnetické pole, „vzniklé v důsledku relativity“, výrazně projeví. Hmotná prostředí jsou tvořena nabitými částicemi. Celkový náboj v libovolné „větší“ oblasti

je však nulový. Proto jsou látková prostředí celkově neutrální. V některých látkách se vyskytují volné nabitě částice (tyto látky se potom nazývají vodiče). Pokud k takovéto látce přiložíme vnější elektrické pole, potom v ní vznikne makroskopický elektrický proud. Protože je látka celkově neutrální, je její výsledné elektrické pole nulové. To však neplatí pro její magnetické pole. Záporně nabitě částice se totiž v elektrickém poli pohybují opačným směrem než kladně nabitě částice. Příspěvky kladně i záporně nabitých částic k magnetickému poli tak mají stejný směr, a proto se nevyruší jako příspěvky k elektrickému poli. Projevy výsledného magnetického pole jsou pak snadno pozorovatelné. Příkladem může být situace v dnešní seriálové úloze.

Úloha VI.S ... dva dráty

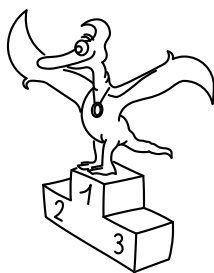
Mějme dva přímé rovnoběžné nekonečně dlouhé kovové vodiče zanedbatelného kruhového průřezu, které jsou od sebe ve vzdálenosti r . Směr jednotkového vektoru \mathbf{e}_3 zvolme tak, aby byl rovnoběžný s vodiči. Jednotkový vektor, který leží v rovině určené vodiči, je kolmý na \mathbf{e}_3 a má směr z prvního vodiče k druhému, označme \mathbf{e}_1 . Jako vektor \mathbf{e}_2 označujme vektorový součin $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$. Vektory \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 a \mathbf{e}_3 pak definují pravotočivý souřadný systém. Vodiči protékají elektrické proudy I_1 a I_2 . Velikost proudů je kladná, pokud mají směr \mathbf{e}_3 . Pomocí transformačních vztahů pro elektrické a magnetické pole ukažte, že první vodič působí na úsek délky l druhého vodiče silou

$$\mathbf{F}_l = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{r} \mathbf{e}_1.$$

K řešení této úlohy užitě následující poznámky. Kovy jsou tvořeny krystalovou mřížkou kladně nabitých iontů, mezi nimiž se pohybují volné elektrony. (Toto je velmi zjednodušený model struktury kovů. Nicméně pro náš problém je postačující.) Pokud ke kovu přiložíme vnější elektrické pole, potom se volné elektrony začnou pohybovat proti směru elektrické intenzity. Tím v kovu vzniká elektrický proud. Rychlost uspořádaného pohybu elektronů je při běžných hodnotách proudu velmi malá, méně než metr za sekundu.

Elektrostatické pole homogenně nabitě přímky s délkovou hustotou náboje λ je ve vzdálenosti r od zdroje popsáno elektrickou intenzitou o velikosti $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$. Vektor elektrické intenzity vždy leží v rovině kolmé na přímkový zdroj a jeho směr udává přímka procházející zdrojem a bodem, ve kterém nás zajímá hodnota elektrického pole. Vektor elektrické intenzity směřuje od zdroje, je-li zdroj nabit kladně. Tento výsledek lze získat sečtením (integrací) příspěvků od jednotlivých elementů přímkového zdroje. Příspěvek elementu zdroje je dán Coulombovým zákonem. Další možností je v tomto případě užití Gaussovy věty, neboť směr elektrické intenzity plyne ze symetrie.

Z Maxwellových rovnic plyne pro rychlost světla ve vakuu vztah $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$. O platnosti tohoto vzorce se lze snadno přesvědčit dosazením tabulkových hodnot příslušných fyzikálních konstant.



Pořadí řešitelů po IV. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

Jméno	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	%	Σ
Student Pilný	UK MFF	5	3	4	4	3	8	6	33	100	132
1. Eva Skopalová	G Poprad	5	3	3	2	3	8	6	30	80	88
2. Pavel Kvasnička	G Chrudim	5	1	–	2	3	0	–	11	70	80
3. Miroslav Šulc	G Ústí n. L. – Stavbařů	2	2	4	–	3	2	–	13	63	60
4. Sergej Maroz	G L. Pika, Plzeň	6	3	4	–	2	5	6	26	77	59
5. Michael Komm	G Praha – Parlérova	4	3	–	2	3	8	–	20	73	52
6. Sebastian Höppner	G Frankfurt	5	3	3	2	2	–	–	15	79	41
7. Ľuboš Bednárik	G Trenčín	–	–	–	3	0	1	–	4	46	40
8. Matej Dubový	G Trenčín	–	–	–	2	0	1	–	3	43	34
9. Jan Novák	G Praha – Nad Alejí	–	–	–	–	–	–	–	0	46	32
10. Jindřich Štáštka	G Sokolov	0	–	–	–	0	6	–	6	47	27
11. Anastázie Jermolájeva		–	–	–	–	–	–	–	0	–	25
12. Tomáš Dzetkulič	G Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	0	–	24
13. Jakub Kratochvíl	G Čáslav	–	–	–	–	–	–	–	0	47	21
14.–16. Pavel Kwiecien	G Dvůr Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	50	20
14.–16. Jakub Galgonek	G Frýdek-Místek – ČSA	–	–	–	–	–	–	–	0	91	20
14.–16. Miroslav Frost	G Brno – Elgartova	–	–	–	–	–	–	–	0	67	20
17.–18. Miroslav Kačena	G Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	–	19
17.–18. Anna Fučíková	G Třebíč	2	–	–	1	0	0	0	3	35	19
19. Pavel Hančar	neznama	2	–	–	–	2	–	–	4	33	17
20. David Šubrt	G Děčín	–	–	–	–	–	–	–	0	–	16
21. Milan Jalový	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	71	15
22. Ondřej Srba	G Příbor	1	–	–	–	2	1	0	4	31	14
23.–24. Vratislav Chudoba	G Ostrava – Poruba	–	–	–	–	–	–	–	0	–	13
23.–24. Zdeněk Čejka	G Praha – U Lib. zámku	–	–	–	–	–	–	–	0	–	13
25. Michal Hajn	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	43	12
26.–28. Tomáš Ježo	G Humenné	–	–	–	–	–	–	–	0	100	11
26.–28. Jiří Hitschfeld	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	–	11
26.–28. Jiří Eliášek	G Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	0	85	11
29.–31. Ondřej Valehrach		–	–	–	–	–	–	–	0	–	9
29.–31. Jiří Kosina	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	–	9
29.–31. Ľudovít Kontšek	G Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	0	36	9
32.–34. Miroslav Krůs	G Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	–	6
32.–34. Iva Kouřilová	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	43	6
32.–34. Lenka Beranová	G Klatovy	–	–	–	1	–	–	–	1	46	6
35. Ondřej Vencálek	G Frýdek-Místek – ČSA	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
36.–37. Michal Kabát	G Púchov	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
36.–37. Tomáš Buchta	G Praha – Zborovská	–	–	–	–	–	–	–	0	–	4

38.–39.	Jiří Palek	G Nové Strašecí	–	–	–	–	–	–	–	0	75	3
38.–39.	Jan Beneš	Biskupské G Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	43	3
40.–41.	Lenka Němcová	SGŠ Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	0	–	2
40.–41.	Tomáš Kovař	G Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	0	–	2

Kategorie třetích ročníků

	Jméno	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	%	Σ
	Student Pilný	UK MFF	5	3	4	4	3	8	6	33	100	132
1.	Miroslav Hejna	G Rychnov n. K.	5	3	4	3	3	7	6	31	87	115
2.	Karel Tůma	G Moravská Ostrava	3	3	4	3	3	4	1	21	62	79
3.	Zdeněk Moravec	G Blansko	4	3	0	1	3	4	–	15	65	77
4.	Jan Prachař	G Rychnov n. K.	4	3	3	2	0	–	2	14	77	75
5.	Tibor Vansa	G Moravská Ostrava	3	3	1	0	3	4	2	16	54	71
6.–7.	Jaroslav Trnka	G Praha – Nad Ohradou	–	3	1	1	1	3	0	9	55	70
6.–7.	Michal Bareš	G Plzeň – Mikuláš. nám.	4	–	–	–	3	–	3	10	88	70
8.	Václav Cviček	G Frýdek-Místek – ČSA	4	1	1	0	4	3	6	19	56	67
9.	Lukáš Chvátal	G Brno – Vejrostova	4	3	0	2	3	–	0	12	67	65
10.	Vít Šípál	G Ústí n. L. – Jateční	4	–	0	–	–	5	–	9	52	41
11.	Michaela Jirků	G Praha – Arabská	3	0	0	1	0	5	0	9	35	33
12.	Miloslav Havelka	G Zastávka	1	0	–	1	0	–	2	4	39	28
13.	Jiří Lipovský	G Bystřice n. Pernštejnem	3	1	0	1	–	–	0	5	47	27
14.	Barbora Galaczková	G Třinec	4	0	–	–	–	3	–	7	41	19
15.	Andrej Pidik	G Nove Mesto nad Váhom	0	0	–	0	3	–	0	3	23	18
16.	Matěj Týč	G Zastávka	–	3	–	–	0	1	2	6	31	16
17.	Josef Matějička	G Žilina	–	–	–	–	–	–	–	0	24	13
18.–19.	Radoslav Šafran	G Košice	–	–	–	–	–	–	–	0	50	12
18.–19.	Luboš Matásek	G Plzeň – Mikuláš. nám.	–	–	–	–	–	–	–	0	–	12
20.	Tomáš Kadlček	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	–	11
21.–22.	Lukáš Vozdecký	G Brno – Vejrostova	–	–	0	–	1	–	0	1	34	10
21.–22.	Pavel Klouda	G Kyjov	–	–	–	2	0	–	0	2	22	10
23.	Lukáš Snášel	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	22	9
24.	Vít Urbánek	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	–	8
25.	Radim Kusák	G Frýdek-Místek	–	–	–	2	–	–	–	2	64	7
26.–29.	Jaroslav Štencel	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	–	6
26.–29.	Nina Sainerová	G Praha – U Lib. zámku	–	–	–	–	–	–	–	0	–	6
26.–29.	Kateřina Jelénková	SZŠ, G a RŠ Staré Město	–	–	–	–	–	–	–	0	–	6
26.–29.	David Bezucha	G Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	33	6
30.–31.	Miroslav Zgažar	SPŠCH Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	0	50	5
30.–31.	Marek Vyšinka	G Brno – Žižkova	–	–	–	–	–	–	–	0	–	5
32.–33.	Milan Mareš		–	0	–	–	–	–	–	0	0	4
32.–33.	Jan Křivka	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	20	4
34.	Štěpán Mančík	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	–	3
35.	Jan Chmelař	G Hranice	–	–	–	–	–	–	–	0	–	2

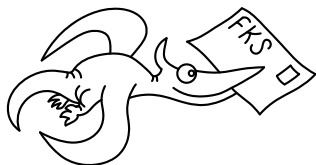
Kategorie druhých ročníků

Jméno		Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	%	Σ
Student Pilný		UK MFF	5	3	4	4	3	8	6	33	100	132
1.	Matouš Ringel	G Broumov	5	3	0	3	3	–	4	18	70	81
2.	Alexandr Kazda	G Praha – Nad Alejí	4	3	4	2	3	0	4	20	61	53
3.	Boris Gažovič	G Humenné	4	3	3	2	3	–	6	21	75	51
4.	Jana Matějová	SPŠ Chrudim	4	1	0	–	–	–	0	5	48	45
5.	Petr Houštěk	G Pelhřimov	3	–	–	3	–	0	–	6	51	44
6.	Martin Rybář	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	–	32
7.	Petr Dostál	G Žamberk	–	1	–	2	2	3	0	8	38	29
8.	Vojtěch Krejčířík	G Kroměříž	–	2	–	–	–	–	–	2	73	27
9.	Zuzana Rozlívková	G B.N. Hradec Králové	–	–	–	–	1	2	–	3	36	25
10.	Ivan Patáčík	G Partizánské	–	0	–	1	3	4	–	8	38	24
11.	Pavel Hála	G Český Krumlov	2	0	–	–	3	–	–	5	39	22
12.	Pavol Lakatoš	G Velké Kapušany	0	0	–	0	–	–	–	0	25	16
13.	Lucie Strmisková	G Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	0	50	14
14.–15.	Vladimír Sommer	G Žďár n. Sázavou	–	–	–	–	–	–	–	0	63	12
14.–15.	Jakub Kopecký	G Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	–	12
16.–20.	Zdeněk Váňa	COP Hronov	–	–	–	1	–	2	0	3	17	11
16.–20.	Martina Smolová	G Písek	0	0	–	2	0	–	–	2	20	11
16.–20.	Libor Kukačka	GOA Vrchlabí	2	0	–	1	–	–	–	3	46	11
16.–20.	Peter Buhaj	G Snina	–	–	–	–	–	–	–	0	–	11
16.–20.	Radek Beneš	COP Hronov	2	–	–	–	–	3	–	5	38	11
21.–24.	Stanislav Plánička	G Klatovy	–	–	–	–	1	–	1	2	43	10
21.–24.	Eva Lovíšková	G Nové M. na Moravě	–	–	–	–	–	–	–	0	36	10
21.–24.	Jakub Kubeček	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	19	10
21.–24.	Michal Havel	COP Hronov	0	2	0	–	–	–	–	2	27	10
25.–26.	Filip Kozel	COP Hronov	0	0	–	1	–	–	–	1	25	9
25.–26.	Jana Babováková	G Most	–	–	–	–	–	–	–	0	38	9
27.	Miroslav Frantes	G Benešov	–	–	–	–	–	–	–	0	58	7
28.	Jan Křivonožka	G Bílovec	–	0	1	0	0	0	–	1	19	6
29.–34.	Ivo Zábojník	G Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	–	4
29.–34.	Lukáš Voleský	COP Hronov	1	0	–	0	–	–	–	1	9	4
29.–34.	Jakub Tichý	G Praha – Arabská	–	–	–	–	–	–	–	0	57	4
29.–34.	Mária Šedivá	G Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	–	4
29.–34.	Hana Suhomelová	G Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	–	4
29.–34.	Jan Křetínský	G Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	133	4
35.–40.	Radoslav Sopoliga	G Svidník	–	0	–	–	–	–	–	0	0	3
35.–40.	Martin Padevět	G Kostelec nad Č. lesy	–	–	–	–	–	–	–	0	–	3
35.–40.	Markéta Novotná	G Hranice	–	–	–	–	–	–	–	0	–	3
35.–40.	Petr Mindžak	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	75	3
35.–40.	Lucie Gráfová	G Ostrava – Hrabůvka	–	–	–	–	–	–	–	0	18	3
35.–40.	Lukáš Bartík	G Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	–	3
41.–44.	Tomáš Ručka	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	–	2
41.–44.	Luboš Račanský	G Benešov	–	–	–	–	–	–	–	0	29	2
41.–44.	Martina Marenčoková	G Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	–	2
41.–44.	Lukáš Burian	G Kladno	–	0	–	–	–	–	–	0	29	2
45.	Jaroslav Bušek	G Rumburk	–	–	–	–	–	–	–	0	33	1

46.-48. Jan Vrba	G Praha – Arabská	-	-	-	0	0	-	-	0	0	0
46.-48. Rudolf Podoba	G Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	0
46.-48. Jakub Černý	G Chrudim	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

Jméno	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	IV	%	Σ
Student Pilný	UK MFF	5	3	4	4	3	8	6	33	100	132
1. Anton Repko	ZŠ a G Prešov	4	3	4	-	1	-	-	12	59	48
2. Ondrej Bogár	ZŠ Trenčín	-	-	-	-	0	1	-	1	36	14
3. Jana Vrábelová	ZŠ Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	43	12
4.-5. Tomáš Uhrin	G Michalovce	-	-	-	-	-	-	-	0	-	8
4.-5. Ján Čuvala	ZŠ Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	8
6. Karel Hofman	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	-	7
7. Zdeněk Lochman	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	-	4



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.