

Drazí řešitelé Fykosu,

Prázdniny jsou přede dveřmi a tak dostáváte řešení posledních dvou sérií a konečnou výsledkovou listinu spolu s vyhodnocením „6. smyslu“. Přejeme vám hezké prázdniny a s čerstvými maturanty se budeme těšit na shledání v září na MFF.

Jan Prokleška & Pavel Augustinský

**Řešení V. série****Úloha V.1 ... zrcadla** (4 body, řešilo 42 studentů)

Mějme dvě rovinná zrcadla svírající úhel α . Jak máme nasměrovat paprsek, aby se od nich co nejvícekrát odrazil?
Ze starých sbírek vyhrabala Lenka

Nejdříve budeme předpokládat, že zrcadla jsou dostatečně velká a tedy dojde ke všem odrazům, ke kterým může dojít. Dále budeme předpokládat, že se paprsek pohybuje v rovině kolmé na průsečnici zrcadel. Pokud by se v této rovině nepohyboval, stačí si jeho pohyb do této roviny promítnout. Tímto promítnutím se zákon odrazu nezmění a řešení se takto zachová.

Nejdříve pošleme paprsek tak, že bude svírat se zrcadlem, na které dopadne jako na první, úhel φ_1 (nepoužívám úhel dopadu). Úhel φ_1 , pod kterým paprsek dopadne na druhé zrcadlo, získáme velmi lehce geometrickou úvahou $\varphi_1 = \varphi_0 + \alpha$.

Dále můžeme pokračovat matematickou indukcí, pomocí které jednoduše zjistíme, že po n dopadech bude paprsek svírat se zrcadlem úhel $\varphi_n = \varphi_0 + (n - 1)\alpha$. Pokud bude úhel φ_n větší než $\pi/2$ znamená to, že se paprsek již vrací. Paprsek se naposledy odrazí bude-li $\varphi_n > \pi - \alpha$ (přitom $\varphi_{n-1} < \pi - \alpha$), dále se již paprsek se zrcadlem neprotne. Pro počet odrazů tedy dostáváme

$$n = 1 + \left\lceil \frac{\pi - \alpha - \varphi_1}{\alpha} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi - \varphi_1}{\alpha} \right\rceil .$$

Značka $\lceil x \rceil$ značí horní celou část čísla x - tedy nejbližší vyšší celé číslo.

Je tedy vidět, že pro menší φ_1 je počet odrazů větší. Maximální počet odrazů tedy bude pro $\varphi_1 = 0$

$$N = \left\lceil \frac{\pi}{\alpha} \right\rceil .$$

Přičemž ale φ_1 nemůže být rovno 0, protože by se paprsek ani jednou neodrazil. Musíme tedy najít maximální φ_1 , pro které se paprsek odrazí N krát. Musí platit

$$N = \left\lceil \frac{\pi - \varphi_1}{\alpha} \right\rceil .$$

To bude splněno pro $\varphi_1 < \pi - (N - 1)\alpha$. Aby došlo k co nejvíce odrazům musí být φ_1 v intervalu $(0, \pi - (N - 1)\alpha)$.

Karel Honzl
fykos@mff.cuni.cz

Úloha V.2 ... varhany (4 body, řešilo 48 studentů)

Představte si cínovou varhaní píšťalu, která byla naladěna při teplotě trojného bodu vody na korní a. Poté se kostel vytopí (ne vodou) na 25°C , určete o kolik se píšťala rozladí.

Podle svých hudebních zkušeností navrhl Slavo Nemšák

Pro rychlost zvuku c_z v závislosti na změně tlaku a hustoty prostředí platí vztah

$$c_z^2 = \frac{dp}{d\rho} .$$

Zvuková vlna je rychlý děj a nestačí tedy docházet k výměně tepla, což odpovídá adiabatické změně, pro niž platí $pV^\kappa = \text{konst}$, kde V je objem. Mění-li se hustota ρ nepřímo úměrně objemu V , má adiabatický vztah mezi p a ρ tvar

$$p = \text{konst} \cdot \rho^\kappa,$$

z čehož vyplývá, že $\frac{dp}{d\rho} = \frac{\kappa p}{\rho}$. Pro rychlost zvuku pak máme vztah

$$c_z^2 = \frac{\kappa p}{\rho}.$$

Rozšíříme-li tento vztah na $c_z^2 = \frac{\kappa pV}{\rho V}$ a uvědomíme-li si, že $pV = NkT$, ρV je hmotnost plynu, můžeme psát

$$c_z^2 = \frac{\kappa kT}{m} = \frac{\kappa RT}{\mu},$$

kde m je hmotnost molekuly a μ je molekulová hmotnost. Vidíme, že rychlost zvuku je tedy přímo úměrná odmocnině z termodynamické teploty.

Nyní trochu podrobněji rozeberme varhanní píšťalu. Pro jednoduchost předpokládejme, že je to dutá trubka konstantního průřezu, jejíž průměr je ve srovnání s její délkou zanedbatelně malý. Oba dva konce trubky jsou otevřené, proto se na koncích nachází kmitny zvukového vlnění.

Pro vlnovou délku λ platí

$$\lambda = \frac{4 \frac{l}{2}}{k} = \frac{2l}{k}.$$

Zároveň však také $\lambda = \frac{c_z}{f}$, z čehož plyne $f = \frac{c_z}{\lambda}$. Pro poměr frekvencí pak platí

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\frac{c_{z2}}{\lambda_2}}{\frac{c_{z1}}{\lambda_1}} = \frac{c_{z2} \lambda_1}{c_{z1} \lambda_2} = \frac{c_{z2} \frac{2l_1}{k}}{c_{z1} \frac{2l_2}{k}} = \frac{c_{z2} l_1}{c_{z1} l_2}.$$

Uvážíme-li podélnou teplotní roztažnost trubice (příčnou zanedbáme), platí $l_2 = l_1(1 + \alpha \Delta T)$, kde $\alpha = 0,027 \cdot 10^{-3} K^{-1}$ je součinitel teplotní délkové roztažnosti cínu a ΔT je rozdíl teplot $\Delta T = T_2 - T_1$. Po dosazení za rychlosti zvuku při daných teplotách dostáváme

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{\frac{\kappa RT_2}{\mu}} l_1}{\sqrt{\frac{\kappa RT_1}{\mu}} l_1 (1 + \alpha \Delta T)} = \frac{1}{(1 + \alpha(T_2 - T_1))} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}},$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{f_2}{f_1} &\approx 1,04, \\ f_2 &\doteq 459 \text{ Hz}, \\ \Delta f &= f_2 - f_1 \doteq 19 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Píšťala se tedy rozladí o 19 Hz. Poměr $\frac{f_2}{f_1} = 1,04$ se přibližně shoduje s $\sqrt[3]{2} = 1,06$, což odpovídá půltónu, píšťala tedy bude hrát o půltón výš.

Řešení úlohy jsme si mohli zjednodušit, pokud jsme velikosti rychlostí zvuku pro dané teploty vyhledali v tabulkách a pokud jsme teplotní roztažnost píšťaly zcela zanedbali (snadno se přesvědčíme, že její vliv na změnu frekvence je ve srovnání s vlivem změny rychlosti zvuku při vyšší teplotě minimální). Úlohu jsme pak mohli řešit snadno z hlavy.

Lukáš Schmiedt
fykos@mff.cuni.cz

Úloha V.3 ... žebřík (4 body, řešilo 25 studentů)

Mějme žebřík opřený o stěnu a podlahu (vše bez tření). Spočtete, v jaké poloze se žebřík oddělí od svislé stěny (pro obecnou počáteční polohu žebříku). Prémii dostanete, spočtete-li, jak daleko od stěny žebřík dopadne. *Úloha napadla Rudu Sýkoru*

Nejprve si zavedeme značení. Máme žebřík o délce $2l$ a hmotnosti m . Úhel který svírá žebřík se svislicí si označíme φ . Na těžiště žebříku působí síla $m\mathbf{g}$. V místě dotyku se stěnou proto působí žebřík na stěnu silou \mathbf{F}_2 a stěna na žebřík reakcí $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{F}_2$. Podobně v místě dotyku s podlahou na ni působí žebřík silou \mathbf{F}_1 a podlaha na žebřík reakcí $\mathbf{R}_1 = -\mathbf{F}_1$. Síly \mathbf{F}_2 a \mathbf{R}_2 působí ve vodorovném směru a síly \mathbf{F}_1 a \mathbf{R}_1 ve svislém směru. Pro souřadnice těžiště platí

$$x = l \sin \varphi, \quad (1)$$

$$y = l \cos \varphi. \quad (2)$$

To znamená, že se těžiště pohybuje po kružnici s poloměrem r . Derivací rovnic (1) a (2) zjistíme, jaké jsou podmínky pro rychlosti a zrychlení

$$\dot{x} = l\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad (3)$$

$$\dot{y} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$\ddot{x} = l(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi), \quad (4)$$

$$\ddot{y} = -l(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi). \quad (5)$$

Podle první a druhé věty impulzové platí

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2, \quad (6)$$

$$J\ddot{\varphi} = l(R_1 \sin \varphi - R_2 \cos \varphi). \quad (7)$$

Pro složky \mathbf{a} z rovnice (6) proto platí

$$m\ddot{x} = R_2,$$

$$m\ddot{y} = R_1 - mg.$$

Po dosazení z (4) a (5) dostáváme

$$R_1 = mg - ml(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi),$$

$$R_2 = ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi). \quad (8)$$

Tyto rovnice dosadíme do (7) a získáme

$$J\ddot{\varphi} = ml(g \sin \varphi - \ddot{\varphi}l),$$

neboli

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgl \sin \varphi}{\frac{4}{3}ml^2}. \quad (9)$$

kde jsme využili, že $J = 1/3ml^2$. Integrací této rovnice podle času dostaneme

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = -\frac{mgl \cos \varphi + C}{\frac{4}{3}ml^2}.$$

Integrační konstantu určíme pomocí nulové úhlové rychlosti na počátku jako $C = -mgl \cos \varphi_0$, a tedy

$$\dot{\varphi}^2 = 2\frac{mgl(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{\frac{4}{3}ml^2}. \quad (10)$$

Žebřík se neoddělí od stěny, dokud $R_2 > 0$. Proto podle (8) řešíme rovnici

$$\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0.$$

Dosadíme z (9), (10) a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{mgl \sin \varphi_1}{\frac{4}{3}ml^2} \cos \varphi_1 - 2 \frac{mgl(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1)}{\frac{4}{3}ml^2} \sin \varphi_1 &= 0, \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 - 2(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) \sin \varphi_1 &= 0, \\ \cos \varphi_1 &= \frac{2}{3} \cos \varphi_0. \end{aligned}$$

To znamená, že se žebřík oddělí v okamžiku kdy těžiště bude ve $2/3$ počáteční výšky. Úhlovou rychlost při oddělení získáme z rovnice (10) jako

$$\dot{\varphi}_1 = \sqrt{2 \frac{mgl(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1)}{\frac{4}{3}ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{2l}}. \quad (11)$$

Po oddělení žebříku přestane působit síla R_2 a pohybové rovnice se změni na tvar:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} &= R_1 - mg, \\ J\ddot{\varphi} &= R_1 l \cos \varphi. \end{aligned}$$

Protože se těžiště ve vodorovném směru pohybuje rovnoměrně, stačí spočítat čas pádu žebříku. Tento problém můžeme řešit v soustavě pohybující se ve vodorovném směru stejnou rychlostí jako těžiště žebříku. K výpočtu využijeme zákon zachování mechanické energie ve znění $E_{p0} + E_{k0} = E_p + E_k$. Potenciální energii můžeme napsat jako

$$E_p = mgy = mgl \cos \varphi.$$

Kinetická energie je

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{6}ml^2\ddot{\varphi}.$$

Protože je $\dot{y} = \dot{\varphi} l \sin^2 \varphi$, můžeme kinetickou energii napsat ve tvaru

$$E_k = \frac{1}{6}ml^2(3 \sin^2 \varphi + 1).$$

Počáteční kinetická energie je v této soustavě

$$E_{k0} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2.$$

Po dosazení z (3) a (11) dostáváme

$$E_{k0} = \frac{1}{9}mgl \cos^2 \varphi_0.$$

Celkově je proto

$$mgl \left(\frac{1}{9} \cos^2 \varphi_0 + \cos \varphi_0 - \cos \varphi \right) = \frac{1}{6}ml^2 \dot{\varphi} (3 \sin^2 \varphi + 1).$$

Odtud

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{6g(\frac{1}{9} \cos^2 \varphi_0 + \cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{l(3 \sin^2 \varphi + 1)}}.$$

Dobu pádu můžeme tedy vypočítat jako

$$t = \sqrt{\frac{l}{6g}} \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{3 \sin^2 \varphi + 1}{\frac{1}{9} \cos^2 \varphi_0 + \cos \varphi_0 - \cos \varphi}} d\varphi. \quad (12)$$

Vzdálenost těžiště od stěny tedy bude

$$x_d = x_1 + t\dot{x}_1.$$

Do této rovnice dosadíme z rovnic (1), (3) a (12) dostáváme

$$x_d = l \sin \left(\arccos \left(\frac{2}{3} \cos \varphi_0 \right) \right) + t \sqrt{\frac{lg}{2}} \frac{2}{3} \cos \varphi_0.$$

Vladimír Fuka
fykos@mff.cuni.cz

Úloha V.4 ... balón (5 bodů, řešilo 18 studentů)

Spočítejte frekvenci malých radiálních kmitů gumového balónu. V balónu je n molů plynu s Poissonovou konstantou $\kappa = \frac{5}{2}$ o teplotě T . V případě, že rozdíl tlaků uvnitř a vně balónu, je nulový je poloměr balónu r_0 . Plošná hustota gumy je v tomto případě ϱ_0 . Potenciální energie gumy je lineárně úměrná rozdílu jejího povrchu a povrchu klidového s konstantou úměrnosti σ . Tlak vně balónu je p_0 . Hmotnost plynu je vůči hmotnosti balónu zanedbatelná. Úlohu si vymyslel Pavel Augustinský

Nejprve spočítejme poloměr balónu v rovnovážné poloze (jeho velikost není shodná se zadaným r_0). V rovnováze bude výslednice všech sil působících na stěnu balónu nulová. Těmito silami jsou tlak plynu uvnitř balónu, tlak okolního vzduchu a elastická síla v gumě. Tlak okolního vzduchu má stále stejnou hodnotu. Tlak plynu uvnitř balónu můžeme spočítat ze stavové rovnice jako

$$p_1 = \frac{nRT}{V} = \frac{3nRT}{4\pi r_1^3}, \quad (13)$$

kde r_1 je rovnovážný poloměr. Tlak způsobený pnutím v gumě můžeme spočítat z analogie s kapilárním tlakem pod zakřivenou hladinou kapaliny jako

$$p_2 = \frac{2\sigma}{r_1}. \quad (14)$$

Zde je důležité si uvědomit že tento vzorec platí pouze pro $r_1 > r_0$, protože v opačném případě balón nezaujme kulový tvar, „zkrabatí se“. Po uvážení orientace těchto sil dostáváme podmínku rovnováhy

$$\frac{3nRT}{4\pi r_1^3} - p_0 - \frac{2\sigma}{r_1} = 0,$$

což je kubická rovnice, jejíž řešení je poměrně složité, takže jej zde neuvádíme. Rovnovážený tlak plynu pak ze známé hodnoty r_1 dopočítáme z (13).

Nyní můžeme vypočítat frekvenci malých radiálních kmitů. Vyjdeme z předpokladu, že bude dostatečně vysoká, takže nebude docházet k tepelné výměně mezi balónem a okolím, tj. děj s plynem uvnitř balónu bude adiabatický.

Spočítejme sílu, která bude na balón působit při změně poloměru o Δ . Tlak plynu uvnitř balónu p můžeme spočítat z rovnice adiabaty

$$\begin{aligned} PV^\kappa &= \text{konst}, \\ p_1 r_1^{3\kappa} &= p(r_1 + \Delta)^{3\kappa}, \\ p &= \frac{p_1 r_1^{3\kappa}}{(r_1 + \Delta)^{3\kappa}}. \end{aligned}$$

Vidíme, že p není na hodnotě Δ závislý lineárně, ale pro malé hodnoty Δ bude velmi dobře platit vztah

$$p(r_1 + \Delta) = p(r_1) + \frac{dp}{d\Delta} \Delta$$

tedy rozvoj do Taylorova polynomu 1. stupně. Po zjednodušení tedy dostáváme

$$p(r_1 + \Delta) = p_1 + \frac{-3\kappa p_1 r_1^{3\kappa}}{r_1^{3\kappa+1}} \Delta .$$

Pro zjednodušení zápisu označme

$$K = \frac{-3\kappa p_1 r_1^{3\kappa}}{r_1^{3\kappa+1}} .$$

Pro tlak gumy bude stále platit (14), který můžeme zjednodušit stejně jako v předchozím případě. Pro malé Δ tedy bude platit

$$p_2 = \frac{2\sigma}{r_1} \left(1 - \frac{\Delta}{r_1}\right) .$$

Tlak okolního vzduchu se nezmění. Síla která bude působit na stěnu balónu při výchylce o Δ z rovnovážné polohy tedy bude (pokud uvažíme že $p_1 - p_0 - p_2 = 0$)

$$F = 4\pi r_1^2 \left(K - \frac{2\sigma}{r_1}\right) \Delta .$$

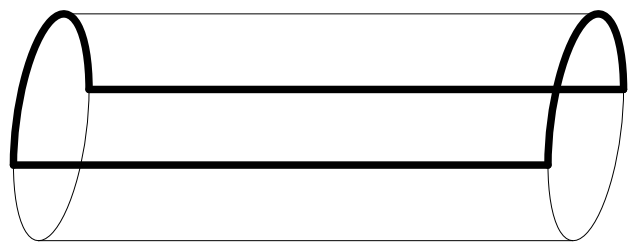
Úhlová frekvence malých radiálních kmitů tedy bude

$$\omega^2 = \frac{r_1^2}{\rho_0 r_0^2} \left(\frac{3\kappa p_1 r_1^{3\kappa}}{r_1^{3\kappa+1}} + \frac{2\sigma}{r_1}\right) .$$

Pavel Augustinský
fykos@mff.cuni.cz

Úloha V . P ... *samolet* (3 body, řešilo 28 studentů)

Představte si drátěnou konstrukci ve tvaru hranice válcové plochy rozříznuté napůl rovinou, v níž leží osa rotační symetrie válce (viz obr.1). Na tuto konstrukci napneme mýdlovou bublinu, která zaujme tvar půlválce. Tato bublina se má tendenci smrsknout, tedy působí na půlkružnice opačnými silami, které se vyruší, a na příčky silami směrem nahoru, tedy konstrukce v principu může vzlétnout. Spočítejte, jakou rychlostí vzlétne (nebo myslíte, že se tak stát nemůže; v tomto případě vysvětlete proč).



Obr. 1. . Tvar drátu

Ze starých sbírek vyhrabala Lenka Zdeborová

Velká část z vás se domnívala, že na vysvětlení paradoxu se samoletem stačí zákon akce a reakce, neboli jemu ekvivalentní zákon zachování hybnosti. Ale uvědomme si, že pomocí těchto principů vysvětlíme jen, proč nezvedneme desku, na které stojíme (spolu s tahovou silou na desku přibude větší tlak nohou), ale nevysvětlíme nesprávnost silové bilance na drát. Jaká další síla kromě tíhy a oné v zadání popisované na něj bude působit?

Naši situaci je lépe přirovnat ke stlačené pružině, kterou přestaneme náhle stlačovat. Vzápětí bude jasné proč. Mýdlová blána se snaží zaujmout takový tvar, aby měla co nejmenší povrch. Pro naši konstrukci ovšem tímto tvarem není půlválec. Matematicky se to dá ukázat pomocí variačního počtu, okovidně si může každý ověřit tak, že si danou konstrukci vyrobí. Zkrátka ve stabilní poloze bude

blána napnuta tak, že se prohne směrem k ose válce, čímž vertikální složka síly působící na půlkružnici nebude nulová, nýbrž přesně vyruší sílu působící na rovné části konstrukce.

Pokud tedy na začátku napneme blánu do tvaru půlválce, může celá konstrukce při návratu do stabilní polohy maximálně poskočit, stejně jako ona stlačená pružina. Pokud již je blána od začátku ve stabilní poloze, je chyba úvahy v zadání v tom, že blána nezaujímá tvar půlválce.

Lenka Zdeborová
fykos@mff.cuni.cz

Úloha V . Exp ... převíjení kazety (8 bodů, řešilo 38 studentů)

Změřte tloušťku magnetofonového pásku. Proměřte závislost úhlové rychlosti kotouče na době přehrávání kazety v případě, že kazetu přehráváme od začátku. Do řešení nezapomeňte připsat, s jakou kazetou jste měřili (podstatná je značka a délka). *Napadlo Mida Pištěka*

Na první pohled se zdá být zřejmé, že pohyb pásky v kazetě závisí pouze na otáčení nosných kotoučků. To by odpovídalo stálosti jejich úhlové rychlosti při přehrávání. Účelem zadání páté experimentální úlohy bylo zbourat tento rozšířený mýtus. Konstantní rychlost posuvu pásku lze určit experimentálně, jednodušší a přesnější je použít údaj výrobce $v = 47,6 \text{ mms}^{-1}$

Teoretické odvození vyplývá z náčrtku kotouče s páskou v obecném čase t , kterému odpovídá poloměr $r(t)$, poloměr plně navinutého kotouče je R , prázdného kotouče r_0 a d tloušťka pásku. Vzhledem k tomu, že d je mnohem menší než $R - r_0$, můžeme množství pásku namotané na kotouči vyjádřit pomocí vzorce pro obsah mezikruží, zřejmě platí $dvt = \pi r(t)^2 - \pi r_0^2$.

Vzorec pro výpočet tloušťky pásku získáme jednoduše dosazením celkové doby přehrávání pásky T_{celk} a odpovídajícího poloměru R

$$d = \frac{\pi}{v T_{\text{celk}} (R^2 - r_0^2)}.$$

Podobně jednoduše získáme i vzorec pro časovou závislost úhlové rychlosti

$$\omega(t) = \frac{v}{r(t)} = \frac{v}{\sqrt{r_0^2 + \frac{v \cdot t \cdot d}{\pi}}},$$

který lze dosazením za d upravit na tvar

$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \alpha \cdot \frac{t}{T_{\text{celk}}}}},$$

kde jsme použili $\alpha = R^2/r_0^2 - 1$ a $\omega_0 = v/r_0$. Tento vzorec se podařilo odvodit jen poměrně malé části řešitelů.

Tloušťku pásku lze určit mnoha způsoby. První metoda je založena na výše odvozeném vzorci. Dobu přehrávání celé strany je nutné přeměřit, bývá o 2–3 minuty delší, než by odpovídalo typu kazety. Několik řešitelů zapomnělo na oboustrannost kazety a dosadilo celkovou dobu přehrávání.

Druhá metoda spočívala v přímém měření tloušťky několika vrstev pásku. Byla méně přesná, kvůli relativně malému počtu vrstev. Častou chybou bylo opomenutí vydělení systematické chyby počtem najednou měřených vrstev. Tak vyšla nereálná chyba kolem 50%.

Závislost úhlové rychlosti na čase přehrávání šlo díky její pomalé změně měřit jako sled průměrných úhlových rychlostí. Zajímavé je, že ti řešitelé, kteří chybně předpokládali stálost úhlové rychlosti, ji většinou i naměřili.

Na závěr zbývá jen dodat, že průměrná tloušťka magnetofonových pásek prodávaných v našich obchodech je $12,3 \mu\text{m}$.

Miroslav Pištěk
fykos@mff.cuni.cz

Úloha S.V ... fotony (6 bodů, řešilo 16 studentů)

K vysvětlení fotoelektrického jevu předpokládal Albert Einstein, že energie a hybnost světla je nesená částicemi, které se nazývají fotony. Aby se tyto částice mohly pohybovat rychlostí světla, musí být jejich klidová hmotnost nulová (tento vztah je formální, neboť s fotonem nemůžeme spojit vztažnou soustavu, a proto pojem klidové hmotnosti jakožto hmotnosti v klidovém systému nemá pro foton smysl). Mezi jejich energií a hybností tak platí jednoduchý vztah $E = pc$. Energie fotonu závisí na frekvenci světla ν vztahem $E = h\nu$, jak plyne z Planckovy teorie, která objasnila vlastnosti tepelného záření absolutně černého tělesa. Hodnota Planckovy konstanty h je rovna $6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

a) Předpokládejte, že energie fotonu je závislá pouze na frekvenci příslušné světelné vlny. Pomocí Dopplerova jevu a transformace mezi energií a hybností ukažte, že tato závislost musí být dána vztahem $E = h\nu$, kde h je blíže neurčená konstanta.

b) Uvažujte srážku fotonu s částicí, jejíž klidová hmotnost je m_0 . Tato částice je v naší soustavě před srážkou v klidu. Vlnová délka fotonu před srážkou je v našem systému rovna λ . Při srážce se foton od původního směru vychýlí o úhel φ . Jak závisí změna vlnové délky $\Delta\lambda$ fotonu na úhlu odchýlení φ ?

a) Mějme vztažnou soustavu, ve které se ve směru osy $x+$ šíří světelná vlna o frekvenci ν_0 . Energie fotonů, které jí odpovídají, je pak rovna $E(\nu_0)$. Uvažujme nyní soustavu, která se vůči naší soustavě pohybuje rychlostí v , která je rovnoběžná se směrem šíření světelné vlny. Rychlost v je kladná, pokud se soustava pohybuje ve stejném směru jako světelná vlna. V pohybující se soustavě je frekvence ν uvažované světelné vlny dána vztahem pro Dopplerův jev

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Energii E fotonu v pohybující se soustavě získáme užitím transformačních vztahů pro energii a hybnost

$$E = \gamma \left(E(\nu_0) - v \frac{E(\nu_0)}{c} \right) = E(\nu_0) \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Platí tedy

$$E = \frac{E(\nu_0)}{\nu_0} \nu = h\nu,$$

kde $h = \frac{E(\nu_0)}{\nu_0}$. Všechny inerciální soustavy jsou pro popis fyzikálních jevů rovnocenné. To znamená, že vztah mezi energií fotonu a frekvencí příslušné světelné vlny musí být ve všech soustavách stejný. Závislost energie E fotonu na frekvenci ν tedy musí být $E(\nu) = h\nu$.

b) Vlnovou délku fotonu po srážce označme λ' . Směr pohybu částice po srážce s fotonem nechť svírá s původním směrem pohybu fotonu úhel ϑ . Částice při srážce získá hybnost o velikosti p . Ze zákona zachování hybnosti dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} p \cos \vartheta &= \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos \varphi, \\ p \sin \vartheta &= \frac{h}{\lambda'} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Umocněním těchto rovnic a jejich sečtením získáme rovnost

$$p^2 = h^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2 \cos \varphi}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2} \right).$$

Užitím zákona zachování energie obdržíme rovnici

$$\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} + \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} + m_0 c^2.$$

V této rovnici nejdříve osamostatníme odmocninu a pak obě strany umocníme, čímž dostaneme rovnost

$$m_0^2 c^2 + p^2 = h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right)^2 + 2hm_0c \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) + m_0^2 c^2.$$

Dosazením za p^2 obdržíme

$$\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2 \cos \varphi}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda \lambda'} + \frac{1}{\lambda'^2} + \frac{2m_0c}{h} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right).$$

Odtud dostáváme vztah

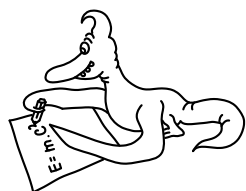
$$\frac{1 - \cos \varphi}{\lambda \lambda'} = \frac{m_0c}{h} \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda \lambda'}.$$

Pro změnu vlnové délky fotonu tedy platí

$$\Delta \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \varphi).$$

Uvažovaný proces srážky fotonu s částicí se nazývá Comptonův rozptyl. Z odvozeného vztahu plyne, že se tento proces uplatňuje zejména při srážce elektronů (malá hmotnost m_0) s fotony rentgenového a γ záření (velká relativní změna vlnové délky). Comptonův rozptyl je jedním z důkazů částicového chování světla.

Karel Kolář
fykos@mff.cuni.cz



Řešení VI. série

Úloha VI.1 ... lamborghini (3 body, řešilo 19 studentů)

Odhadněte, jak velkou vertikální silou je Lamborghini Diablo¹⁾ nadlehčováno, jede-li rychlostí $320 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Pozor, toto není experimentální úloha!



Lamborghini Diablo

Podívejme se nejprve na původ vztlakové síly, která Lamborginy nadlehčuje (a díky níž při vhodné konstrukci létají letadla). Při jízdě vzduch proudí nad i pod autem. Díky profilu auta je dráha s_1 , kterou musí obtékající vzduch urazit nad autem, delší než dráha pod autem s_2 , tedy tam musí proudit rychleji. Víme, že rychlost v tekutiny souvisí s jejím tlakem p . Pro nevířivé proudění tuto souvislost popisuje Bernoulliho rovnice. Neboť popis pro turbulentní proudění je o mnoho složitější, musíme udělat podstatné zanedbání a považovat proudění kolem auta za nevířivé. Bernoulliho rovnici pak napíšeme ve tvaru:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2,$$

kde indexy 1 značí velikosti veličin nad autem a 2 po autem. ρ je hustota vzduchu. Z nerovnosti $v_1 > v_2$ plyne $p_1 < p_2$, auto je tedy nadlehčováno.

Nyní se pokusme odhadnout velikost vztlakové síly. Tlaková síla nad autem nepůsobí díky šikmosti kapoty kolmo dolů, ale na druhou stranu působí na větší plochu. Rozmyslete si, že ona plocha je právě tolikrát větší než plocha podvozku, kolikrát je větší tlaková síla kolmá ke kapotě než její svislá složka. Tudíž můžeme pro vztlakovou sílu psát:

$$F = \frac{1}{2} \rho S (v_1^2 - v_2^2),$$

kde S je plocha podvozku. Zbývá odhadnout rozdíl velikosti v_1 a v_2 . Platí $v_1/v_2 = s_1/s_2 = \alpha$. Vy jste často profil auta nahradili trojúhelníkem či obloukem kružnice a z toho spočetli poměr α . Takové odhady byly ale příliš nadsazené a dávaly vztlakovou sílu mnohdy větší, než je tíha auta. My jsme se poměr α pokusili změřit přímo z profilového obrázku auta. Vyšlo nám $1/24 < \alpha - 1 < 1/14$. Zkusme tedy spočítat sílu pro $\alpha = 21/20$. Podvozek auta má plochu $S = 4,47 \cdot 2,04 \text{ m}^2$. Rychlost $v_2 = 320 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a tedy

$$F = \frac{1}{2} \rho S (\alpha^2 - 1) v_2^2 \approx 5 \text{ kN}.$$

Relativní chybu tohoto výsledku odhadujeme na 100%. Neboť se velmi těžko určuje koeficient α , a také nesmíme zapomenout, že jsme zanedbali turbulentnost proudění kolem auta. Tíha auta je asi 17 kN, odhad vztlakové síly vyšel asi třikrát menší, vidíme, že výrobci si musí dávat velký pozor na to, aby se z Lamborginy Diablo nestalo letadlo. K Formulím 1 se například ze stejného důvodu montují přítlačná křídla.

Lenka Zdeborová
fykos@mff.cuni.cz

¹⁾ Hezčí obrázek lze nalézt na <http://fykos.mff.cuni.cz/lamborghini.jpg>.

Úloha VI.2 ... RC obvod (4 body, řešilo 20 studentů)

Mějme sériový RC-obvod, který připojíme na zdroj periodického napětí s tzv. obdélníkovým průběhem, tzn. po čas $T/2$ je napětí U a po čas $T/2$ napětí $-U$. Jak bude vypadat průběh napětí na kondenzátoru?
Vymysleli Pavel a Honza

Označme U vstupní napětí, U_R napětí na rezistoru, R jeho odpor, U_C napětí na kondenzátoru a C jeho kapacitu. Z druhého Kirchhoffova zákona plyne

$$U = U_R + U_C = RI + U_C,$$

$$U = R \frac{dQ}{dt} + U_C,$$

$$U = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C.$$

Odtud separací proměnných získáváme

$$\int dt = RC \int \frac{dU_C}{U - U_C}.$$

$$t + K_1 = -RC \ln(U - U_C) + K_2,$$

kde K_1 a K_2 jsou integrační konstanty. Po jejich sloučení a úpravě

$$U_C = U + K e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Z počátečních podmínek získáme $K = -U$ a můžeme tak pro první půlperiodu psát

$$U_C = U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + U_0(0),$$

respektive pro druhou půlperiodu

$$U_C = -U \left(1 - e^{-\frac{t-\frac{T}{2}}{RC}}\right) + U_0(T/2) = U \left(e^{-\frac{t-\frac{T}{2}}{RC}} - 1\right) + U_0(T/2).$$

$U_0(t)$ je zůstatkové napětí na kondenzátoru; během každé půlperiody se kondenzátor nabije na určitou hodnotu napětí, se kterou vstupuje do další půlperiody. $U_0(t)$ je tedy rovno napětí na kondenzátoru na konci předchozí půlperiody (na začátku je $U_0 = 0$).

Je zřejmé, že $U_0(t)$ závisí na vstupních podmínkách, kterými jsou perioda T , kapacita C a odpor R . Pro jednoduchost předpokládejme, že $T = 2RC$. Amplituda napětí na kondenzátoru $U_{C(A)}$ má pak konstantní velikost

$$U_{C(A)} = U \left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0,6U.$$

Nalezení obecného řešení je poněkud obtížnější, sčítáme geometrickou řadu s kvocientem $e^{-\frac{t}{RC}}$ a převádíme na hyperbolický tangens. Výsledek má tvar

$$U_C = U \left[1 - \left(1 + \operatorname{tgh}\left(\frac{T}{4RC}\right)\right) e^{-\frac{t}{RC}}\right], t \in \langle 0; T/2 \rangle,$$

respektive

$$U_C = -U \left[1 - \left(1 + \operatorname{tgh}\left(\frac{T}{4RC}\right)\right) e^{-\frac{t-\frac{T}{2}}{RC}}\right], t \in \langle T/2; T \rangle.$$

V závislosti na vstupních podmínkách lze odvodit, že pro $T \gg 2RC$ bude U_C konvergovat k U , ale s pomalejším nástupem změny. Naopak, pro $T \ll 2RC$ bude U_C konvergovat k 0, závislost bude přímková.

Lukáš Schmiedt
 fykos@mff.cuni.cz

Úloha VI.3 ... stáří Země (3 body, řešilo 28 studentů)

Předpokládejme, že při vzniku Země na ní byly izotopy uranu ^{238}U a ^{235}U , ale ne produkty jejich rozpadu. Izotop ^{238}U resp. ^{235}U se rozpadá s poločasem $T_1 = 4,50 \cdot 10^9$ roků resp. $T_2 = 0,710 \cdot 10^9$ roků. Ve srovnání s těmito časy jsou poločasy rozpadu produktů zanedbatelné, rozpadové řady končí stabilními izotopy ^{206}Pb a ^{207}Pb .

Je-li v uranové rudě poměr počtu atomů uranu $^{238}\text{U} : ^{235}\text{U} = 137 : 1$ a poměr počtu atomů olova $^{206}\text{Pb} : ^{207}\text{Pb} = 28 : 17$, odhadněte stáří Země.

Podle rozpadového zákona platí pro počet jader v čase t vztah

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 2^{-t/T},$$

kde T je poločas rozpadu daného jádra. Počet jader produktu rozpadu bude

$$N_2 = N_0 - N_1 = N_0 \left(1 - 2^{-t/T}\right).$$

Pokud podělíme tuto rovnici pro ^{238}U rovnicí pro ^{235}U dostáváme

$$\frac{N_{238}}{N_{235}} = \frac{N_{206}}{N_{207}} \frac{1 - 2^{-t/T_1}}{1 - 2^{-t/T_2}}.$$

V této rovnici již všechny veličiny kromě t známe. Bohužel však neumíme jednoduše vyjádřit t a proto musíme využít nějakou numerickou metodu. Musíme najít pro jaké t v miliardách let je funkce

$$y = \frac{17.137}{28} \frac{1 - e^{-0,154t}}{1 - e^{-0,976t}}$$

rovna jedné. To zjistíme nejjednodušeji pokud si graf této funkce zobrazíme na počítači. Výsledkem je stáří Země

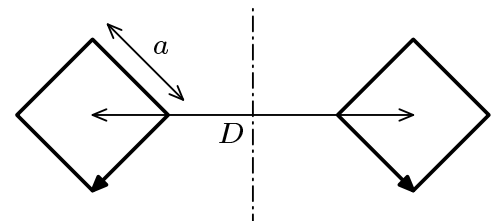
$$t \doteq 4,56 \cdot 10^9 \text{ r.}$$

Vladimír Fuka
fykos@mff.cuni.cz

Úloha VI.4 ... toroid (5 bodů, řešilo 17 studentů)

Mějme cívku ve tvaru „hrnatého toroidu“. Řez osou rotační symetrie je zakreslen na obr. 2. Vinutí toroidu má celkem N závitů a v naznačeném směru jím protéká proud o velikosti I/N . Spočtete magnetické pole uvnitř toroidu a zdůvodněte správnost vašeho výpočtu.

Není-li vám cizí slovo integrál, můžete jako bonus spočítat i indukčnost toroidu.



Obr. 2

Úlohu můžeme snadno vyřešit pouze v případě, že počet závitů N je dostatečně velký. Za těchto okolností jsou siločáry magnetického pole kruhové. K řešení tedy můžeme použít Ampérův zákon. Jeho znění je

$$\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = I,$$

tj. integrál skalárního součinu $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ po uzavřené křivce S (\mathbf{H} je vektor intenzity magnetického pole $\mu\mathbf{H} = \mathbf{B}$) je roven celkovému proudu protékajícímu přes plochu „napnutou“ na tuto křivku (je zajímavé, že tato hodnota nezávisí na konkrétní volbě tvaru plochy.) Pokud tedy za křivku S zvolíme kružnici

se středem na ose toroidu, budeme integrovat konstantní funkci a to $|\mathbf{H}|$. V případě, že naše kružnice bude ležet uvnitř toroidu, bude proud tekoucí jejím vnitřkem I . Dostáváme tedy

$$2\pi \varrho \mathbf{H} = I,$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \frac{\mu I}{2\pi \varrho},$$

kde ϱ je poloměr kružnice. Pokud bude kružnice ležet mimo toroid, bude proud tekoucí jejím vnitřkem nulový a tedy bude nulové i magnetické pole na této kružnici. Magnetické pole toroidu tedy vypadá tak, že v jeho vnitřku je stejné jako magnetické pole nekonečně dlouhého drátu ležícího na ose toroidu jímž protéká proud I . Vně toroidu pak bude pole nulové. Všimněte si, že pro výpočet jsme vůbec nepotřebovali znát tvar průřezu toroidu. Na tvaru průřezu tedy tento výsledek nezávisí. Indukčnost L můžeme spočítat pomocí vztahu pro energii cívky

$$E = \frac{1}{2} L I^2 .$$

Stačí tedy spočítat závislost energie magnetického pole toroidu na proudu a porovnat ji s tímto vztahem. Hustota energie magnetického pole je

$$m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 .$$

Celkovou energii pak určíme jako objemový integrál její hustoty. Využijeme-li poznatku, že m závisí pouze na vzdálenosti od osy ϱ , můžeme snadno převést objemový (tj. trojný) integrál na obyčejný. Celý toroid si nejprve rozdělíme na dvě části, a to na část pro kterou je $\varrho < D/2$ a na část pro kterou je $\varrho > D/2$. Energie magnetického pole v první části pak bude (pro zjednodušení označme $A = \frac{a\sqrt{2}}{2}$)

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^A \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 2\pi \left(\frac{D}{2D - A + x} \right) 2x \, dx = \\ &= \frac{\mu I^2}{2\pi} \int_0^A \frac{x D}{2D - A + x} \, dx = \\ &= \frac{\mu I^2}{2\pi} \left(A - \left(\frac{A - D}{2} \right) \ln \left(\frac{D}{D - 2A} \right) \right) . \end{aligned}$$

Energii magnetického pole v druhé části toroidu pak můžeme spočítat analogicky. Dostáváme

$$E_2 = \frac{\mu I^2}{2\pi} \left(\left(\frac{A + D}{2} \right) \ln \left(\frac{D + 2A}{D} \right) - A \right)$$

Uvážíme-li že celková energie mag. pole je součtem obou energií, dostáváme pro indukčnost toroidu

$$L = \frac{\mu N^2}{\pi} \left(A \ln \left(\frac{D + 2A}{D - 2A} \right) + \frac{D}{2} \ln \left(\frac{D^2 - 4A^2}{D^2} \right) \right)$$

Pavel Augustinský
fykos@mff.cuni.cz

Úloha VI. P ... chromatická vada (5 bodů, řešilo 15 studentů)

Mějme dvě identické skleněné čočky s ohniskovou vzdáleností f (pro určitou střední vlnovou délku). Do jaké vzdálenosti je třeba dát tyto čočky, aby výsledná optická soustava měla co nejlépe kompenzovanou chromatickou vadu (tzn. že různě barevné světlo se zobrazuje do různých míst). Jak velkou ohniskovou vzdálenost bude výsledná soustava mít? *Úlohu z paměti vylovil Honza Houšťek.*

Pro ohniskovou vzdálenost soustavy dvou tenkých čoček platí

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}, \quad (15)$$

kde f_1, f_2 jsou ohniskové vzdálenosti čoček a d jejich vzdálenost. V našem případě platí $f_1 = f_2 = f$. Přitom f je funkcí vlnové délky, proto nejlepší kompenzaci chromatické vady dosáhneme v případě, že f_0 bude co nejméně záviset na f . Dosaďme tedy $f_1 = f_2 = f$ do vztahu (15) a upravme

$$f_0 = \frac{f^2}{2f - d} \quad (16)$$

a hledejme, pro jaké d je derivace f_0 podle f v bodě f nulová

$$\frac{df_0}{df} = \frac{2f(f-d)}{(2f-d)^2} \Rightarrow d = f.$$

Druhou čočku tedy musíme umístit do ohniska první. Po dosazení do (16) dostáváme pro výslednou ohniskovou vzdálenost $f_0 = f$.

Mirek Hejna si všiml a jako jediný také správně zdůvodnil, proč různě barevné obrazy bodového zdroje přesto nejsou v jednom bodě. Přestože splněním naší podmínky zaručíme, že výsledná ohnisková vzdálenost je (alespoň přibližně) neměnná, mění se s vlnovou délkou poloha hlavních rovin výsledné soustavy. Potřebovali bychom tedy znát, k čemu se bude soustava využívat, abychom případně mohli řešení ještě vylepšit.

Honza Houšťek

honza@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. Exp ... sprcha (8 bodů, řešilo 17 studentů)

Určitě jste si už při sprchování všimli, že proud opouštějící sprchu má vyšší teplotu než voda dopadající na zem. Na vás je, abyste toto naměřili kvantitativně.

Nalezněte a popište vhodné experimentální uspořádání, na kterém bude měřitelný pokles teploty vody padající vzduchem a proveďte měření. Pokuste se vaše výsledky teoreticky interpretovat.

Teorie

Voda vytékající ze sprchy se rozstříkuje na jednotlivé kapky a ty odevzdávají teplo okolí. Protože vzduch je velmi špatný vodič tepla, tak nejvíce tepla ztratí kapky odpařováním.

Nyní si musíme rozmyslet jaká je závislost tepla, které kapky ztratí vypařováním na teplotě kapky. Odpařování je vlastně děj, kdy molekuly kapaliny, které jsou blízko povrchu získají dostatečnou rychlost, aby se odpoutaly od přitažlivých sil ostatních molekul. Odvodit přesný vztah této závislosti je velmi složité, nám bude stačit přiblížení, že toto předané teplo bude úměrné rozdílu teploty kapky a okolí. Toto teplo také bude záviset na velikosti povrchu kapky, protože se však povrch kapky odpařováním nezmění, budeme povrch kapky považovat za stále stejný.

Za velmi malý čas dt tedy změni teplo kapky Q o dQ , pro toto teplo tedy bude platit rovnice:

$$dQ = -k(T - T_o) dt,$$

kde T je teplota kapky, T_o teplota okolí a k je konstanta úměrnosti. Změní-li se teplo, změni se i teplota a pro změnu teploty dT platí $dQ = c_v dT$, kde c_v je tepelná kapacita vody. Dostáváme tedy rovnici

$$c_v dT = -k(T - T_o) dt.$$

Řešením této rovnice je

$$T = T_o + (T_0 - T_o) \exp\left(-\frac{kt}{c_v}\right),$$

kde T_0 je počáteční teplota vody. Dále pro jednoduchost k/c_v označíme K .

Kapky padají v gravitačním poli (odpor vzduchu zanedbáme) po dobu, za kterou kapka urazí vzdálenost d a tedy bude platit:

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gd}}{g},$$

kde v_0 je rychlost výtoku kapaliny ze sprchy. Tedy závislost teploty vody na výšce bude:

$$T = T_o + (T_0 - T_o) \exp\left(-K \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gd}}{g}\right).$$

Měření

K měření jsme použili teploměr do 100°C , který jsme umístili do speciálně upravené nádoby. Tato nádoba fungovala tak, že jsme mohli regulovat jaké množství vody z ní poteče. Když jsme měřili výše, tak do nádoby teklo větší množství vody, abychom měli teploměr vždy stejně ponořený, tak jsme podle průtoku vody otevřeli otvor na dně nádoby. Dále bylo velmi důležité, aby voda v nádobce moc nechladla a tedy rychle se obměňovala. Aby ovšem teploměr přesně měřil je nutné, aby byl dostatečně ponořen. Je velmi složité se s těmito protichůdnými požadavky vypořádat.

Další problém je, jak přesně určit výšku, ve které teplotu měříme. My jsme za tuto výšku vzali střed banky teploměru.

Teplotu vody jsme měřili pro dvě různé rychlosti výtoku vody ze sprchy. Určení rychlosti vody je velmi složité, změřili jsme za jak dlouho byla naplněna nádoba o objemu $0,7\text{l}$, získali jsme časy:

$$t_1 = 8\text{ s} \quad t_2 = 5\text{ s}$$

Měření ovšem bylo velice nepřesné, protože určit přesně, kdy byla naplněna nádoba, do které prudce vtéká voda bylo složité. Chybu tohoto času jsme určili jako 15% . K výpočtu skutečné rychlosti vody je ovšem potřeba znát plochu, ze které voda vytéká. Velikost této plochy jsme odhadli tak, že jsme zjistili počet dírek na sprše a vynásobili je plochou jedné dírky. Určení plochy této dírky bylo ovšem velmi nepřesné, protože mnoho dírek bylo značně zaneseno vodním kamenem. Plochu všech dírek jsme odhadli na:

$$S_d = 20 \pm 10\text{ mm}^2.$$

Nakonec jsme získali hodnoty rychlosti:

$$v_{01} = 4 \pm 2\text{ ms}^{-1} \quad v_{02} = 6 \pm 3\text{ ms}^{-1}.$$

Nyní uvedeme teploty naměřené v jednotlivých výškách pro tyto rychlosti:

$d[\text{cm}]$	25	35	65	105	140
$T_1[^\circ\text{C}]$	50	49	48	46	45
$T_2[^\circ\text{C}]$	51	50	49	48	46

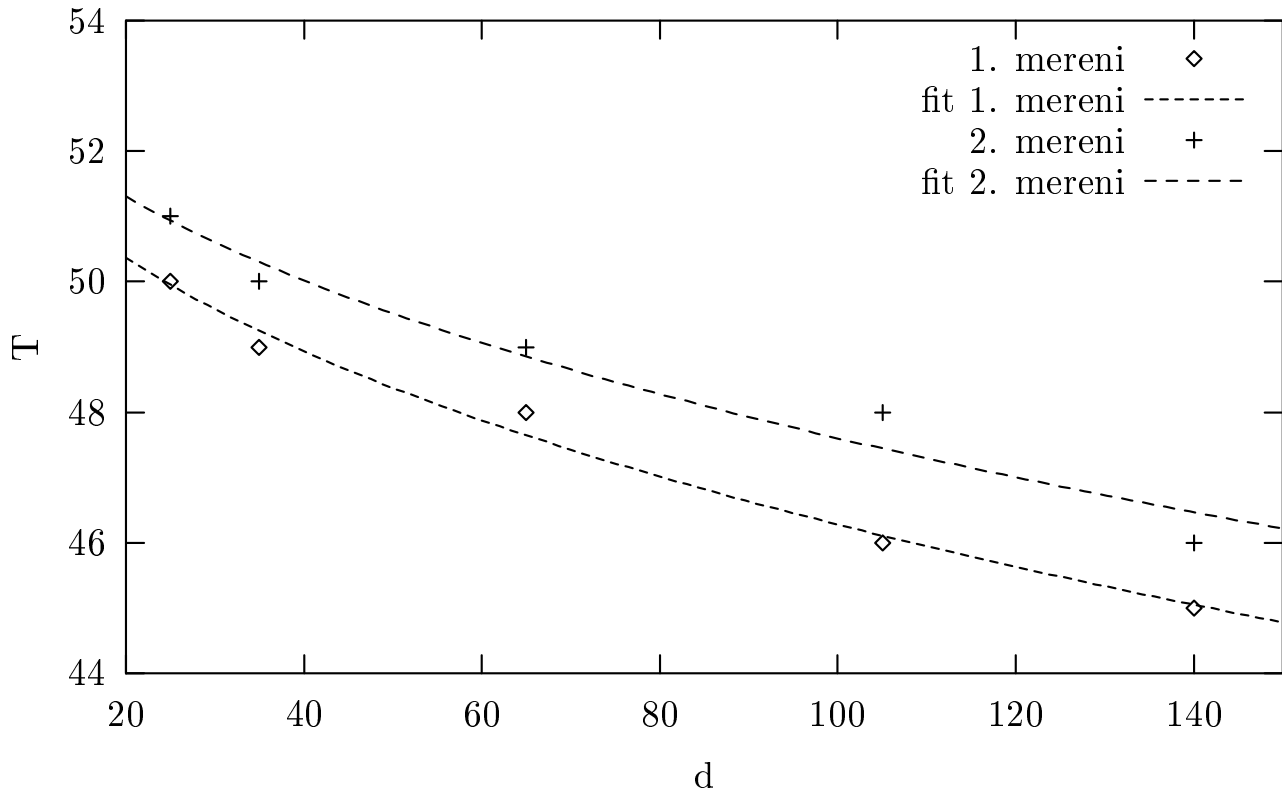
Teploty pro různé výtokové rychlosti.

Tyto hodnoty jsou vyneseny v níže uvedeném grafu, body je proložena křivka získaná teoreticky. Dostali jsme hodnoty koeficientů:

$$K_1 = 0,6\text{ s}^{-1} \quad K_2 = 0,5\text{ s}^{-1}$$

$$T_{0_1} = 53,4\text{ s}^{-1} \quad T_{0_2} = 53,8\text{ s}^{-1}$$

Diskuze



Jak je vidět, hodnoty, které jsme získali měřením, odpovídají teoretické křivce. Pro větší průtok vody jsou naměřené hodnoty trochu vyšší, než bychom očekávali z teorie, to může být způsobeno tím, že při větším průtoku vody byl více ponořen teploměr a tím se mohla naměřit vyšší teplota. Protože chyby naměřených veličin jsou velké, prakticky si odpovídají.

Karel Honzl
fykos@mff.cuni.cz

Úloha S.VI ... dva dráty (6 bodů, řešilo 5 studentů)

Mějme dva přímé rovnoběžné nekonečně dlouhé kovové vodiče zanedbatelného kruhového průřezu, které jsou od sebe ve vzdálenosti r . Směr jednotkového vektoru \mathbf{e}_3 zvolme tak, aby byl rovnoběžný s vodiči. Jednotkový vektor, který leží v rovině určené vodiči, je kolmý na \mathbf{e}_3 a má směr z prvního vodiče k druhému, označme \mathbf{e}_1 . Jako vektor \mathbf{e}_2 označujme vektorový součin $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$. Vektory \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 a \mathbf{e}_3 pak definují pravotočivý souřadný systém. Vodiči protékají elektrické proudy I_1 a I_2 . Velikost proudů je kladná, pokud mají směr \mathbf{e}_3 . Pomocí transformačních vztahů pro elektrické a magnetické pole ukažte, že první vodič působí na úsek délky l druhého vodiče silou

$$\mathbf{F}_l = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{r} \mathbf{e}_1.$$

K řešení této úlohy užití následující poznámky. Kovy jsou tvořeny krystalovou mřížkou kladně nabitých iontů, mezi nimiž se pohybují volné elektrony. (Toto je velmi zjednodušený model struktury kovů. Nicméně pro náš problém je postačující.) Pokud ke kovu přiložíme vnější elektrické pole, potom se volné elektrony začnou pohybovat proti směru elektrické intenzity. Tím v kovu vzniká elektrický proud. Rychlost uspořádaného pohybu elektronů je při běžných hodnotách proudu velmi malá, méně než metr za sekundu.

Elektrostatické pole homogenně nabitě přímky s délkovou hustotou náboje λ je ve vzdálenosti r od zdroje popsáno elektrickou intenzitou o velikosti $E = \lambda / (2\pi\epsilon_0 r)$. Vektor elektrické intenzity vždy leží v rovině kolmé na přímkový zdroj a jeho směr udává přímka procházející zdrojem a bodem, ve kterém nás zajímá hodnota elektrického pole. Vektor elektrické intenzity směřuje od zdroje, je-li zdroj nabit

kladně. Tento výsledek lze získat sečtením (integrací) příspěvků od jednotlivých elementů přímkového zdroje. Příspěvek elementu zdroje je dán Coulombovým zákonem. Další možností je v tomto případě užití Gaussovy věty, neboť směr elektrické intenzity plyne ze symetrie.

Z Maxwellových rovnic plyne pro rychlost světla ve vakuu vztah $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$. O platnosti tohoto vzorce se lze snadno přesvědčit dosazením tabulkových hodnot příslušných fyzikálních konstant.

Celkový náboj kladných iontů v prvním vodiči na jednotkové délce označme λ_1 . Protože je vodič neutrální, je celkový náboj volných elektronů na jednotce délky vodiče roven $-\lambda_1$. Délková nábojová hustota kladných iontů ve druhém vodiči nechť je λ_2 . Rychlosti uspořádaného pohybu volných elektronů v prvním a druhém vodiči označme v_1 a v_2 . Tyto rychlosti jsou kladné, pokud mají směr vektoru \mathbf{e}_3 . Pro proudy ve vodičích tedy platí vztahy

$$I_1 = -\lambda_1 v_1, \quad I_2 = -\lambda_2 v_2.$$

Kladné ionty prvního vodiče vytvářejí v místě druhého vodiče pouze elektrické pole:

$$\mathbf{E}_i = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{B}_i = 0.$$

Podobné pole vytvářejí ve své klidové soustavě i pohybující se volné elektrony prvního vodiče:

$$\mathbf{E}'_e = -\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{B}'_e = 0.$$

Pole, které vytvářejí pohybující se elektrony prvního vodiče v místě druhého vodiče, je v naší soustavě (soustava spojená s vodiči — s jejich krystalovou mřížkou) dáno transformací elektrického a magnetického pole z klidové soustavy elektronů do naší soustavy:

$$\mathbf{E}_e = -\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{B}_e = \frac{v_1 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}'_e}{c^2} = -\frac{\lambda_1 v_1}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_2.$$

Výsledné pole v místě druhého vodiče získáme sečtením příspěvků od kladných iontů a od volných elektronů:

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{B} = \frac{I_1}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_2.$$

První vodič tedy působí na druhý pouze magnetickým polem. To znamená, že působí pouze na volné elektrony v druhém vodiči. Pro výslednou sílu působící na úsek délky l druhého vodiče tak platí

$$\mathbf{F}_l = -\lambda_2 l v_2 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{B} = \frac{I_1 I_2 l}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{r} \mathbf{e}_1.$$

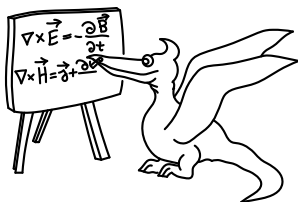
Zcela obdobným postupem bychom dostali, že druhý vodič působí na úsek délky l prvního vodiče silou

$$\mathbf{F}_l = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{r} \mathbf{e}_1.$$

Vidíme tedy, že je splněn zákon akce a reakce. To nás ale nepřekvapuje, neboť se jedná o stacionární situaci.

Pomocí právě odvozeného vztahu je definována základní elektromagnetická jednotka — jeden ampér. Ampér je stálý elektrický proud, který při průchodu dvěma přímými rovnoběžnými nekonečně dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu umístěnými ve vakuu ve vzájemné vzdálenosti jeden metr vyvolá mezi nimi stálou sílu $2 \cdot 10^{-7}$ newtonu na jeden metr délky vodiče.

Karel Kolář
fykos@mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 7: Obecná teorie relativity

V předchozích dílech seriálu jsme se zabývali speciální teorií relativity. Fyzikální jevy jsme popisovali výhradně v inerciálních systémech, ve kterých jsme k popisu prostoru užívali kartézské souřadnice. Jako časovou souřadnici t jsme volili vlastní čas příslušného inerciálního pozorovatele. V posledním díle si něco povíme o obecné teorii relativity (OTR) – o jejích základních principech, matematickém aparátu a výsledcích.

Obecná teorie relativity vyžaduje oproti speciální teorii relativity mnohem složitější matematický aparát. Z tohoto důvodu nelze provést výklad obecné teorie relativity v rozsahu umožňujícím provést fyzikální předpovědi přímo z rovnic OTR. Ze stejného důvodu jsou některé části následujícího textu zjednodušeny.

Co je nového oproti speciální teorii relativity

Rozdíl mezi STR a OTR spočívá ve vlastnostech prostoročasu (prostor všech událostí – „jeviště fyzikálních dějů“). V STR je topologie a geometrie prostoročasu předem zadána (stejně jako v ostatních fyzikálních teoriích). V OTR je však geometrie prostoročasu součástí dynamiky (pohybových rovnic).

Pohyb hmoty je vždy ovlivněn geometrickými vlastnostmi prostoročasu. V STR je geometrie zadáná. To znamená, že zpětný vliv hmoty na prostoročas není možný. Fyzikální interakce jsou však vzájemné (například elektromagnetické pole buzené elektrickými náboji zpětně ovlivňuje jejich pohyb). Tento „nedostatek“ je tedy v OTR odstraněn.

OTR je zároveň teorií gravitace. Gravitační působení je totiž univerzální, a proto jej lze geometrizovat. Gravitační interakce je tak „zprostředkována“ geometrickými vlastnostmi prostoročasu – hmota ovlivňuje geometrii prostoročasu a vlastnosti prostoročasu pak zpětně ovlivňují pohyb hmoty (podobně jako elektrické náboje a elektromagnetické pole).

Protože geometrie prostoročasu v OTR nemusí být eukleidovská, může existovat prostoročas, který je konečný a nemá žádnou hranici!

Nové předpovědi OTR úzce souvisí s geometrickými vlastnostmi prostoročasu. Mezi nejvýznamnější předpovědi patří dynamický vesmír, gravitační vlny a černé díry.

OTR je třeba použít v případě velmi kompaktních objektů (černé díry, neutronové hvězdy, bílí trpaslíci) a při studiu vlastností celého vesmíru.

Výchozí principy obecné teorie relativity

Všechny fyzikální interakce můžeme rozdělit do dvou skupin: na diferenciální a univerzální vlivy. Pod diferenciálními vlivy rozumíme interakce, které na různé objekty působí obecně různě. Mezi diferenciální vlivy patří všechny negravitační interakce. Příkladem univerzálních vlivů je gravitace – působí na všechny objekty stejně. Diferenciální vlivy lze narozdíl od univerzálních odstínit. (Pokud například obklopíme elektrický náboj uzemněným vodičem, potom se jeho elektrické pole vně vodiče vyruší.)

Vzhledem k nevyrušitelnosti univerzálních vlivů musíme předefinovat některé základní fyzikální pojmy. Pod volným hmotným bodem rozumíme hmotný bod, který není pod vlivem diferenciálních interakcí. Ideální hodiny jsou hodiny, na které nepůsobí diferenciální vlivy. Sada ideálních hodin umístěných vedle sebe se chová stejně – všechny hodiny jdou stejně rychle. Podobně definujeme ideální tuhé tyče jako tyče, které nejsou pod vlivem diferenciálních sil.

Stejně jako v STR nazýváme inerciálními vztahnými systémy soustavu, ve kterých se každý volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře nebo je v klidu. Mezi principy OTR patří oba principy STR: princip speciální relativity (rovnocennost všech inerciálních soustav) a princip konstantní rychlosti světla.

Základním principem OTR je princip ekvivalence. Tento princip vychází z experimentálního poznatku, že setrvačná hmotnost těles (hmotnost vystupující v druhém Newtonově pohybovém zákoně a ve vztazích pro setrvačné zdánlivé síly v neinerciálních systémech) je rovna jejich gravitační hmotnosti (hmotnost vystupující v Newtonově gravitačním zákonu). Přesněji se jedná o přímou úměrnost – rovnost se získá vhodnou volbou hodnoty gravitační konstanty G . Setrvačná a gravitační hmotnost těles se tedy v důsledku vzájemné ekvivalence vykrátí v pohybové rovnici. To znamená, že gravitační pole působí na všechny objekty stejně – je to univerzální vliv.

Jedním z prvních pokusů potvrzujících ekvivalenci gravitační a setrvačné hmotnosti byl známý Galileiův pokus s volným pádem těles ze šikmé věže v Pize. Galilei tehdy zjistil, že všechna volná tělesa padají v gravitačním poli Země se stejným zrychlením. Od té doby bylo provedeno mnoho dalších pokusů testujících princip ekvivalence. V současné době je ekvivalence mezi setrvačnou a gravitační hmotností potvrzena s relativní přesností 10^{-17} (odchylka jejich poměru od jedné). V páté kapitole tohoto seriálu jsme zjistili, že hmotnosti těles jsou ovlivňovány interakcemi. Experimenty plně prokazují, že princip ekvivalence platí také pro interakční příspěvky ke hmotnostem těles.

Uvažujme homogenní gravitační pole s intenzitou \mathbf{g} . V tomto poli mějme zavěšenou zdviž. Volné hmotné body se v důsledku působení gravitačního pole pohybují vůči zdviži se zrychlením \mathbf{g} . Pokud však odstraníme závěs zdviže a necháme ji volně padat, potom bude zrychlení volných hmotných bodů nulové a hmotné body se vůči soustavě spojené se zdviží budou pohybovat rovnoměrně přímočaře nebo budou v klidu. Zdviž se v tomto případě chová jako inerciální soustava.

Mějme nyní obdobnou zdviž ve volném prostoru bez gravitačního pole. Nechť se zdviž vůči inerciálním systémům pohybuje rovnoměrně přímočaře nebo je v klidu. Potom je zdviž sama inerciální soustavou a nepůsobí v ní žádné zdánlivé setrvačné síly. Volné hmotné body se vůči ní tedy pohybují s nulovým zrychlením. Pokud nyní začneme zdviž urychlovat s konstantním zrychlením $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$, potom se volné hmotné body začnou vůči zdviži pohybovat se zrychlením \mathbf{g} .

Uvažujme nyní pozorovatele umístěného ve zdviži, který může provádět pouze lokální pokusy (nemůže se dívat ven ze zdviže). Takovýto pozorovatel pak nemůže rozeznat zavěšenou zdviž v gravitačním poli od urychlované zdviže a volně padající zdviž od zdviže umístěné ve volném prostoru pohybující se s nulovým zrychlením vůči inerciálním systémům. Vidíme tedy, že ekvivalence setrvačné a gravitační hmotnosti způsobuje také ekvivalenci setrvačných a gravitačních sil. Vhodnou volbou vztažného systému lze vliv setrvačných sil vyrušit (nepůsobí v inerciálních soustavách). Podobně je tomu i s gravitací. Viděli jsme, že volně padající soustava se chová jako inerciální systém. Ve volně padající soustavě by tedy měla platit STR!

Doposud se naše úvahy týkaly pouze homogenního pole. Co se stane, pokud budeme uvažovat nehomogenní gravitační pole? Mějme volné hmotné body padající v gravitačním poli Země. S bodem O nyní spojíme volně padající systém. Vlivem nehomogenity gravitačního pole Země se ve volně padající soustavě objevují slapové síly, které se snaží natáhnout tělesa v radiálním směru a smrštít je ve směru kolmém na radiální. Velikost slapových sil je tím větší, čím dále jsme od bodu O . Volně padající soustava tedy vykazuje inerciální vlastnosti pouze v okolí bodu O .

Princip ekvivalence se obvykle vyjadřuje následovně: V každém bodě libovolného prostoročasu lze zavést lokálně inerciální systém (LIS), v němž v dostatečně malém okolí uvažovaného bodu mají přírodní zákony stejný tvar jako v STR. Výhodou této formulace je možnost jejího praktického využití, které později uvidíme.

Gravitační pole lze tedy alespoň lokálně „odtransformovat“ přechodem do volně padajícího systému. Tento krok je možný díky univerzálnímu charakteru gravitačního působení.

Dalším principem OTR je princip obecné kovariance (relativity). Jedná se o zobecnění principu speciální relativity. Podle principu obecné kovariance lze fyzikální zákony popsat rovnicemi, které mají ve všech souřadných systémech (tedy i ve všech vztažných soustavách, neboť již z STR víme, že s volbou souřadnic na prostoročase je spjata také volba vztažné soustavy) stejný tvar (rovnice jsou kovariantní). Princip obecné kovariance je v OTR splněn automaticky, neboť fyzikální zákony jsou v OTR formulovány pomocí tenzorových rovnic.

K přepisu fyzikálních rovnic z STR do OTR se užívá následující formulace principu obecné kovariance: Pokud fyzikální zákon platí v nepřítomnosti gravitace (v STR) a rovnice jsou kovariantní (nemění svůj tvar při libovolné transformaci souřadnic), potom rovnice platí v libovolných souřadnicích a v libovolném gravitačním poli. Tato formulace úzce souvisí s principem ekvivalence. Podle principu ekvivalence platí v lokálním inerciálním systému STR. Pokud tedy převedeme fyzikální zákony vyjádřené v souřadnicích lokálního inerciálního systému do souřadnic obecných, potom získáme obecně platné zákony.

Uvedené principy nelze chápat jako jednoznačné axiomy. Jedná se spíše o heuristické návody, jak získat rovnice popisující dané jevy v přítomnosti gravitačního pole. Konečné slovo o platnosti rovnic má pak experiment. Například přepis rovnic z STR do OTR není jednoznačný. Do rovnic platných v STR lze totiž přidat členy obsahující křivost prostoročasu, neboť tyto členy jsou v STR (plochý prostoročas) identicky nulové. Při přepisu rovnic se proto užívá další princip – princip minimální vazby: pokud to není nezbytně nutné, potom do fyzikálních rovnic nevkládáme výrazy obsahující křivost prostoročasu.

Obecná teorie relativity a gravitační rudý posuv

V této podkapitole odvodíme některé výsledky OTR, které lze získat přímo z jejích principů a zákonů klasické fyziky. Odvozené výsledky tedy budou mít charakter relativistických korekcí ke klasickým předpovědím.

Gravitační interakce je univerzální interakcí. Měla by tedy působit i na světlo. Z předchozího již víme, že fotonu, který odpovídá světelné vlně o frekvenci ν , by měla při platnosti ekvivalence energie a setrvačné hmotnosti odpovídat setrvačná hmotnost $h\nu/c^2$. Podle principu ekvivalence by fotonu měla odpovídat také gravitační hmotnost stejné velikosti jako setrvačná.

Mějme stojícího pozorovatele (v dané vztažné soustavě), který vyšle foton o frekvenci ν_1 . Uvažovaný pozorovatel se nachází na místě, na kterém je hodnota Newtonovského gravitačního potenciálu rovna φ_1 . Na jiném místě s gravitačním potenciálem φ_2 nechť se nachází jiný stojící pozorovatel, který vyslaný foton zachytí jako foton o frekvenci ν_2 . Podle zákona zachování energie by mělo platit

$$h\nu_1 + \frac{h\nu_1}{c^2}\varphi_1 = h\nu_2 + \frac{h\nu_2}{c^2}\varphi_2.$$

Abychom mohli užít klasickou fyziku, musí být obě frekvence blízké²⁾ – $\nu_1 \approx \nu_2 \approx \nu$. To znamená, že rozdíl gravitačních potenciálů $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ musí být mnohem menší než c^2 . V případě gravitačního pole Slunce je tomu tak mezi libovolnými dvěma body. Pro slabá gravitační pole tedy dostáváme

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \frac{\nu(\varphi_1 - \varphi_2)}{c^2} \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta\varphi}{c^2}.$$

Pokud se foton pohybuje z místa s nižším gravitačním potenciálem do místa s vyšším potenciálem, potom se jeho frekvence snižuje – foton ztrácí energii a „rudne“. Tento efekt se nazývá gravitačním rudým posuvem a byl skutečně pozorován ve spektru hvězd (poměrně dobře je pozorovatelný u bílých trpaslíků). V šedesátých letech minulého století (20. století) byla experimentálně změřena změna frekvence fotonu při jeho „pádu“ v gravitačním poli Země. Uvažujme pád fotonu z výšky l . Pro relativní změnu jeho frekvence potom platí

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{gl}{c^2},$$

kde g je tíhové zrychlení. Při experimentu foton padal z výšky $l \approx 20$ m. Tomu odpovídá relativní změna frekvence $2 \cdot 10^{-15}$. Tuto hodnotu se skutečně podařilo naměřit!

Předchozí odvození vztahu pro změnu frekvence fotonu v gravitačním poli bylo hodně intuitivní. „Lepší“ odvození vychází ze skutečnosti, že gravitační pole můžeme simulovat setrvačnými silami. Uvažujme rovnoměrně zrychlenou zdviž se zrychlením g . V okamžiku, kdy se zdviž nepohybuje, vyšle pozorovatel A foton o frekvenci ν_1 . Za čas Δt tento foton zachytí pozorovatel B, jehož vzdálenost od

²⁾ Podle klasické fyziky jsou obě frekvence shodné.

pozorovatele A je rovna l . Pro čas Δt přibližně platí, že $\Delta t = l/c$. Za čas Δt se bude pozorovatel B pohybovat rychlostí $v = g\Delta t$. Vlivem Dopplerova efektu tak pozorovatel B naměří frekvenci fotonu ν_2 , pro kterou platí

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu_1 \left(1 - \frac{gl}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gl}{c^2} = -\frac{\Delta\varphi}{c^2},$$

kde rozdíl gravitačních potenciálů $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = gl$. Předchozí vztah platí obecně pouze pro blízké pozorovatele. Obecný vztah získáme sečtením jednotlivých změn frekvence podél celé dráhy fotonu. Vzhledem k linearitě vztahu pro změnu frekvence na malých vzdálenostech obdržíme formálně shodný vztah, jenž je identický se vztahem, který jsme již dříve obdrželi ze zákona zachování energie.

S frekvencemi ν_1 a ν_2 souvisejí periody světelné vlny T_1 a T_2 , pro které platí $T_1 = c/\nu_1$ a $T_2 = c/\nu_2$. Pro jejich relativní rozdíl dostáváme vztah

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T_2 - T_1}{T} = \frac{c(\nu_1 - \nu_2)}{\nu^2} \frac{\nu}{c} = -\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\varphi}{c^2}.$$

Vidíme tedy, že rychlost plynutí času v gravitačním poli závisí na poloze pozorovatele – pokud například bude nějaký pozorovatel každou sekundu vysílat signál do oblasti s vyšším gravitačním potenciálem, potom pozorovatelé v této oblasti naměří mezi jednotlivými signály časové intervaly, které budou delší než jedna sekunda. Tito pozorovatelé budou tudíž stárnout rychleji než pozorovatel vysílající signály. V OTR nelze tedy obecně synchronizovat hodiny stojící na různých místech!

O rychlosti plynutí času rozhoduje hodnota gravitačního potenciálu. Nejpomaleji plyne čas v místě, kde je minimum gravitačního potenciálu. V tomto místě je nulová intenzita gravitačního pole, neboť intenzita je derivací potenciálu. Není tedy obecně pravda, že čas plyne pomaleji v silných gravitačních polích.

Pokud provedeme výpočet předchozích situací pomocí OTR za předpokladu slabých gravitačních polí a stojících pozorovatelů, potom se ukáže, že předchozí vztahy skutečně platí.

Světlo se v inerciálních systémech pohybuje po přímkách. Pokud se však na pohyb světla budeme dívat z urychlené zdviže (viz obrázek 5), potom bude dráha světelného paprsku zakřivená. Užitím principu ekvivalence tedy docházíme k závěru, že se světlo v gravitačním poli ohýbá. Tento jev byl skutečně pozorován.

Matematická formulace obecné teorie relativity

OTR užívá poměrně složitý matematický aparát. Není tedy možné, abychom se matematickou formulací OTR zabývali podrobně. V této podkapitole se proto omezíme pouze na několik poznámek, kterých později využijeme k diskusi některých výsledků OTR.

Prostoročas je v OTR z matematického hlediska čtyřrozměrnou pseudo-Riemannovou varietou. Variety jsou obecnějšími případy Eukleidovských prostorů. Můžeme si je představovat jako plochy (obecně zakřivené) vnořené do nějakého Eukleidovského prostoru. Příkladem dvojrozměrné variety je povrch koule. Okolí libovolného bodu variety lze vždy popsat pomocí souřadného systému. V případě prostoročasu potřebujeme celkem čtyři souřadnice. Označme je jako x^0, x^1, x^2 a x^3 . Protože je prostoročas varietou pseudo-Riemannovou, je na něm definována také metrika. Uvažujme dvě „blízké“ události (hodnoty jejich souřadnic jsou blízké) se souřadnicemi x^μ a $x^\mu + dx^\mu$, kde řecký index μ probíhá hodnoty od nuly do tří. Prostoročasný interval („vzdálenost“) mezi těmito událostmi je pak dán vztahem

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\alpha)dx^\mu dx^\nu,$$

kde je užitá Einsteinova sumační konvence – přes dvojici stejných indexů, kdy jeden z nich je dolní a druhý horní, se sčítá. Následující vztahy, pokud nebude řečeno jinak, již budou zapsány pomocí této konvence. V případě vztahu pro prostoročasný interval tedy sčítáme přes indexy μ a ν od nuly do tří. Funkce $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ jsou kovariantní složky metrického tenzoru. Hodnota prostoročasového intervalu ds^2 může být nulová nebo záporná i pro dvě různé události (stejně jako v STR) – vzdálenost dvou různých bodů variety je vždy kladná pouze v případě Riemannových variet. Prostoročasný interval ds^2 je skalární veličinou. To znamená, že jeho hodnota je nezávislá na zvoleném souřadném systému.

Geometrie prostoročasu je plně popsána znalostí prostoročasových intervalů ds^2 (funkcí $g_{\mu\nu}$) pro libovolné dvě blízké události. Známe-li totiž metriku (složky metrického tenzoru $g_{\mu\nu}$), potom je již jednoznačným způsobem definováno derivování tenzorových polí v daném směru a paralelní přenos tenzorů podél dané křivky. V obecném případě totiž nelze na varietě definovat, co jsou to paralelní vektory ve dvou různých bodech, neboť paralelní přenos vektorů mezi těmito body obecně závisí na křivce, po které přenos provádíme. Tuto vlastnost vykazují zakřivené prostory. Pojem paralelnosti dvou vektorů ve dvou různých bodech má smysl pouze v případě plochých prostorů, kdy paralelní přenos vektorů mezi dvěma body nezávisí na zvolené křivce, po které přenos provádíme.

Jak je tomu v STR? V STR, jak již bylo řečeno, je geometrie i topologie prostoročasu předem zadaná. Celý prostoročas lze popsat pomocí jediné globální sady souřadnic (souřadnice některého inerciálního systému): $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Výraz pro prostoročasový interval již známe:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

To můžeme zapsat v jednodušším tvaru

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

kde $\eta_{\mu\nu} = -1$ pro $\mu = \nu = 0$, $\eta_{\mu\nu} = 1$ pro $\mu = \nu = 1, 2, 3$ a $\eta_{\mu\nu} = 0$ jinak. V této geometrii nezávisí paralelní přenos vektorů mezi dvěma body na zvolené křivce (vektory se přenášejí stejně jako v Eukleidovském prostoru popsaném pomocí kartézských souřadnic – nemění se hodnoty jejich složek). Speciálně relativistický prostoročas je tedy plochý. Speciálně relativistická geometrie odpovídá nulovému gravitačnímu poli. STR lze proto užít pouze jako aproximaci pro případ slabých gravitačních polí.

Celý prostoročas v STR lze popsat pomocí souřadnic odpovídajících některému inerciálnímu pozorovateli³⁾. Pomocí inerciálních soustav jsme tedy schopni popsat všechny fyzikální jevy. V rámci STR lze tedy řešit i otázky týkající se urychlených pozorovatelů⁴⁾, což jsme viděli v druhé úloze tohoto seriálu, kde jsme paradox dvojčat vysvětlili pouze užitím inerciálních soustav v rámci STR.

Z principů OTR víme, jak gravitační pole působí na fyzikální objekty (v LIS platí STR). Například z podmínky, že v okamžité lokální inerciální soustavě se volný hmotný bod pohybuje s nulovým zrychlením, vyplývá, že volně padající objekty se v prostoročase „pohybují“ po geodetikách (jejich světočáry⁵⁾ jsou geodetikami). Geodetiky jsou křivky, jejichž tečný vektor se podél nich přenáší paralelně – v případě Eukleidovského prostoru jsou geodetikami přímkami (geodetiky jsou tedy zobecněním přímků do zakřivených prostorů). Z principů OTR však nelze určit zpětný vliv fyzikálních objektů na gravitační pole – nelze získat gravitační zákon.

Einsteinovy rovnice (gravitační zákon) se v OTR „odvozuji“ z podmínky, aby v případě slabého gravitačního pole přecházely v Newtonův gravitační zákon a aby byly splněny lokální zákony zachování energie a hybnosti. Výsledné rovnice mají tvar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Levá strana těchto rovnic⁶⁾ je nelineárním diferenciálním výrazem druhého řádu pro metriku $g_{\mu\nu}$ ⁷⁾, která zcela popisuje gravitační pole. Výraz $T_{\mu\nu}$ stojící na pravé straně Einsteinových rovnic je tenzor

3) Toto však neplatí v OTR, kde obecně neexistuje globální inerciální systém.

4) Souřadnice jim odpovídající obecně nepokrývají celý prostoročas. Inerciální pozorovatelé jsou tedy v STR význační.

5) Jsou to historie daných objektů – křivky v prostoročase, které procházejí všemi událostmi (světobody), které se odehrají v místě daného objektu.

6) Jedná se o 10 rovnic – obě strany jsou symetrické v indexech $\mu\nu$ a oba indexy nabývají hodnot od nuly do tří.

7) Výrazy $R_{\mu\nu}$ a R popisující křivost prostoročasu jsou jednoznačně určeny z metriky.

energie a hybnosti, který popisuje zdroje gravitačního pole. G je Newtonovská gravitační konstanta (bývá rovněž označována jako κ) a c je rychlost světla. Na levé straně rovnic vystupuje tzv. kosmologická konstanta Λ . Hodnota této konstanty je velmi malá; je třeba ji uvažovat pouze v případě, že se zabýváme celým vesmírem.

Je velmi zajímavé, že z Einsteinových rovnic plynou i rovnice pro pohyb hmoty! Tato skutečnost se někdy vyjadřuje slovy: hmota „říká“ prostoročasu, jak se má zakřivovat, a prostoročas „říká“ hmotě, jak se má pohybovat. V případě, že uvažujeme pouze gravitační interakci, je v Einsteinových rovnicích obsažena celá fyzika. V ostatních případech je třeba přidat rovnice popisující zbývající negravitační interakce. Například pro elektromagnetismus jsou to Maxwellovy rovnice nebo v případě tlaku se jedná o stavovou rovnici.

Gravitační interakce je univerzální interakcí. To se projevuje také v tenzoru energie a hybnosti, kde se vyskytují příspěvky od všech negravitačních fyzikálních objektů. To znamená, že zdrojem gravitace je v OTR například také elektromagnetické pole nebo tlak! S univerzalitou gravitace rovněž souvisí složitost Einsteinových rovnic – metrika $g_{\mu\nu}$ totiž nevystupuje pouze na levé straně, která je již dost složitá, ale rovněž také v tenzoru energie a hybnosti a v rovnicích pro negravitační interakce (např. Maxwellovy rovnice).

OTR je lokální teorií. Einsteinův gravitační zákon totiž určuje geometrii prostoročasu pouze lokálně. Podobně i ostatní rovnice popisující fyzikální jevy jsou lokální – např. Maxwellovy rovnice. Lokálnost teorie se také projevuje tím, že v OTR není jednoznačně zadána topologie prostoročasu (souvisí se souřadnicovými sadami, s jejichž pomocí pokrýváme prostoročas). Globální veličiny (např. celková energie nelokálního systému) nemají v OTR obecně smysl – lze je zavést pouze v případě, že prostoročas (jeho geometrie) vykazuje nějakou symetrii. Například zákony zachování celkové energie a hybnosti (včetně příspěvků od interakčních polí) fyzikálních systémů v STR úzce souvisejí s vysokou symetrií speciálně relativistického prostoročasu.

Vlastní čas pozorovatelů

Uvažujme dvě blízké události na světočáře nějakého pozorovatele, které mají souřadnice ξ^μ a $\xi^\mu + d\xi^\mu$. Pro jejich prostoročasový interval pak platí

$$ds^2 = g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu.$$

Podle principu ekvivalence lze zvolit v libovolném bodě prostoročasu LIS, ve kterém platí STR. V události popsané souřadnicemi ξ^μ tedy zvolme počátek tohoto systému. Souřadnice události $\xi^\mu + d\xi^\mu$ jsou potom v lokálně inerciálním systému rovny dx^μ . Prostoročasový interval (nezávisí na volbě souřadnic) lze pak vyjádřit následovně:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = (v^2 - c^2) dt^2,$$

kde v je velikost rychlosti pozorovatele v dané lokální inerciální soustavě.

Ze speciální teorie relativity již víme, že se žádný pozorovatel nemůže vůči žádnému inerciálnímu systému pohybovat světelně nebo nadsvětelně. To znamená, že světočáry odpovídající fyzikálním pozorovatelům (hmotným objektům) nejsou libovolné – pro libovolné dva blízké světobody na světočáře uvažovaného pozorovatele musí platit, že $ds^2 < 0$.

Pokud LIS zvolíme tak, že je okamžitým klidovým inerciálním systémem daného pozorovatele, potom je rychlost pozorovatele v nulová a vlastní čas pozorovatele τ odpovídá časové souřadnici lokálně inerciálního systému. Mezi uvažovanými událostmi tak pozorovatel naměří vlastní čas

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu}.$$

Vlastní čas τ mezi libovolnými událostmi na světočáře pozorovatele získáme integrací (sečtením) jednotlivých příspěvků $d\tau$.

Mějme pozorovatele, který se v daném globálním inerciálním systému (uvažujeme plochý prostor-čas – STR) pohybuje rychlostí $v(t)$. Pro jeho vlastní čas τ mezi událostmi mající v daném inerciálním systému časové souřadnice t_1 a t_2 pak platí

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt = \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - v^2(t)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt.$$

Z tohoto vztahu vidíme, že pohybující se pozorovatel vždy stárne pomaleji než pozorovatel spojený s danou inerciální soustavou, neboť $\tau \leq t_2 - t_1$. Pokud by byl druhý pozorovatel také inerciálním, potom by se zdálo, že docházíme k paradoxu. Není to však pravda. Pokud by totiž byli oba pozorovatelé inerciálními, potom by se mohli potkat pouze jednou. Aby pozorovatelé mohli posoudit, který z nich stárne rychleji, musí se potkat alespoň dvakrát. Ale v takovém případě je alespoň jeden z pozorovatelů neinerciálním.

Předchozí vztah jsme mohli získat i trochu jiným způsobem. V STR lze totiž s každým pozorovatelem spojit okamžitý klidový *globální* inerciální systém. Vztah mezi časovým intervalem v okamžitém klidovém systému pozorovatele a odpovídajícím časovým intervalem v inerciálním systému, ve kterém máme zadán pohyb pozorovatele, je pak dán dilatací času.

Světlo se v každém inerciálním systému šíří rovnoměrně přímočaře konstantní rychlostí c . To znamená, že jemu odpovídající světočáry jsou geodetiky, pro jejichž libovolné dva blízké světobody platí $ds^2 = 0$.

Schwarzschildovo řešení Einsteinových rovnic

Schwarzschildovo řešení je přesné sféricky symetrické řešení Einsteinových rovnic ve vakuu (tenzor energie a hybnosti je nulový). Je to jedno z nejjednodušších řešení. Popisuje gravitační pole sféricky symetrického centrálního objektu o hmotnosti M , kolem kterého je vakuum (není tam ani elektromagnetické pole). Prostor-časový interval je v případě Schwarzschildova řešení dán vztahem

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Tyto souřadnice odpovídají soustavě spojené s pozorovatelem, kteří vzhledem k centrálnímu objektu stojí. Světočáry těchto pozorovatelů jsou v těchto souřadnicích dány vztahy: $r = \text{konst.}$, $\vartheta = \text{konst.}$, $\varphi = \text{konst.}$ a t libovolné. Gravitační pole je v tomto případě stacionární, neboť metrika nezávisí na časové souřadnici t .

Pro $r \gg 2GM/c^2$ je geometrie prostoročasu popsána metrikou

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

To je však speciálně relativistická geometrie vyjádřená pomocí sférických souřadnic. Provedeme-li totiž transformaci souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \vartheta, \end{aligned}$$

potom pro dx , dy a dz platí

$$\begin{aligned} dx &= \sin \vartheta \cos \varphi dr + r (\cos \vartheta \cos \varphi d\vartheta - \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi), \\ dy &= \sin \vartheta \sin \varphi dr + r (\cos \vartheta \sin \varphi d\vartheta + \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi), \\ dz &= \cos \vartheta dr - r \sin \vartheta d\vartheta, \end{aligned}$$

z čehož dostáváme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Ve velké vzdálenosti od centrálního objektu tedy platí STR. To znamená, že prostoročas je asymptoticky plochý. Z předchozího rovněž plyne geometrický význam souřadnice t . Je to vlastní čas pozorovatele stojícího v nekonečnu⁸⁾.

Geometrie prostoročasového řezu $t = \text{konst.}$ a $r = \text{konst.}$ je dána vztahem

$$ds^2 = r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

To je geometrie povrchu třírozměrné koule o poloměru r . Plocha této sféry je dána známým vztahem $4\pi r^2$. Tím je dán geometrický význam souřadnice r . Vzhledem k zakřivenosti prostoročasu však neplatí, že r je rovno vzdálenosti od centra sférické symetrie! Se souřadnicí r lze zacházet jako se vzdáleností od centra pouze v asymptoticky ploché oblasti ($r \gg 2GM/c^2$).

Ze vztahu pro Schwarzschildovu metriku vidíme, že pro $r = 0$ a $r = 2GM/c^2$ je tato metrika singulární (dělíme v ní nulou). Pokud však má tato metrika popisovat gravitační pole nějakého nebodového objektu (například hvězdy), potom ji lze užít pouze k popisu gravitačního pole vně tohoto objektu (pro $r > r_0$), neboť Schwarzschildovo řešení je vakuové (uvnitř tělesa je tenzor energie a hybnosti nenulový). Potom ale k žádným singularitám nedochází, protože souřadnice r_0 povrchu centrálního objektu⁹⁾ je vždy větší než hodnota $2GM/c^2$. Později uvidíme, že je to způsobeno tím, že pod touto hodnotou nelze stát na konstantním r . Pokud tedy povrch centrálního objektu nenalezneme do hodnoty $r = 2GM/c^2$, potom jej již nenalezneme nikde. Celý prostoročas je pak vakuový a odpovídá Schwarzschildově černé díře.

Nyní si odvodíme vztah pro gravitační rudý posuv v případě Schwarzschildovy metriky. Uvažujme dva stojící pozorovatele A a B. Pozorovatel A nechť vysílá světelné signály, mezi nimiž jsou v souřadnicovém čase t časové rozestupy Δt_A . Tyto signály přijímá pozorovatel B. Jaké časové rozestupy Δt_B mezi signály naměří pozorovatel B? Pro světočáru světelných signálů platí $ds^2 = 0$. Odtud dostáváme, že

$$dt = \frac{1}{c} \frac{\sqrt{dr^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}.$$

Vidíme tedy, že dt nezávisí na souřadnicovém čase t , což je dáno stacionaritou Schwarzschildova řešení. Uvážíme-li ještě, že oba pozorovatelé jsou stojící, potom docházíme k závěru, že se světočáry světelných signálů liší pouze o konstantu v souřadnicovém čase t . To znamená, že celkový souřadnicový čas (získá se sečtením příspěvků dt) potřebný k překonání vzdálenosti mezi pozorovateli je pro všechny světelné signály stejný. Platí tedy $\Delta t_B = \Delta t_A$.

Pro frekvenci ν_A signálů, kterou naměří pozorovatel A, platí $\nu_A = 1/\Delta\tau_A$, kde $\Delta\tau_A$ je vlastní čas pozorovatele A odpovídající souřadnicovému intervalu Δt_A . Obdobný vztah lze nalézt i pro frekvenci ν_B signálů, kterou naměří pozorovatel B. Dostáváme tedy

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \frac{\sqrt{-\Delta s_A^2}}{\sqrt{-\Delta s_B^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_A}}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_B}}} \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_A}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_B}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

8) Toto však neplatí pro pozorovatele stojící na konečné hodnotě souřadnice r ! Je to způsobeno tím, že v gravitačním poli závisí rychlost chodu hodin na jejich poloze, a proto nelze časovou souřadnici zvolit tak, aby byla vlastním časem všech stojících pozorovatelů.

9) Centrální těleso, jak již bylo řečeno v úvodu této podkapitoly, musí být sféricky symetrické, abychom měli zaručeno, že i jeho gravitační pole bude sféricky symetrické a vně objektu bude tedy popsitelné Schwarzschildovou metriku.

Pokud za jednotlivé signály budeme považovat vrcholy světelné vlny, potom dostáváme vztah pro gravitační rudý posuv¹⁰⁾. V případě slabého pole, kdy platí $r \gg 2GM/c^2$, obdržíme

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = 1 - \frac{GM}{c^2 r_A} + \frac{GM}{c^2 r_B} = 1 + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{c^2},$$

což je vztah, který jsme již získali užitím Newtonovy teorie gravitace a principů OTR.

Co se stane, pokud se jeden z pozorovatelů začne pohybovat? Gravitační pole Země lze z hlediska relativistických efektů poměrně přesně popsat pomocí Schwarzschildovy geometrie (Země je s velkou přesností sféricky symetrická). Mějme pozorovatele (označme jej písmenem Z), který stojí na zemském povrchu. Poloměr Země označme R . Ve vzdálenosti r od středu Země necht' se pohybuje po kruhové dráze pozorovatel S. Uvažujme, že pozorovatel S volně padá – kromě gravitace na něj nepůsobí žádné další síly. Pozorovatel S se tedy pohybuje rychlostí $\sqrt{GM/r}$, kde M je hmotnost Země. Sférické souřadnice zvolme tak, aby kruhová dráha pozorovatele ležela v rovině $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Pro pohyb pozorovatele S tedy platí

$$\left(r \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right)^2 = \frac{GM}{r}.$$

Pokud bude vzdálenost obou pozorovatelů maximální nebo minimální, potom bude platit $\Delta t_Z = \Delta t_S$, neboť v tomto případě dvě po sobě jdoucí maxima potřebují stejný čas k proběhnutí dráhy mezi oběma pozorovateli. Pro frekvence, které pozorovatelé naměří, tedy platí (pole je slabé)

$$\frac{\nu_Z}{\nu_S} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \Delta t_S^2 - r^2 \Delta\varphi^2}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} c \Delta t_Z} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{1}{c^2} \left(r \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right)^2}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}} = 1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{3}{2r} \right).$$

Pro $r = \frac{3}{2}R$ dostáváme, že $\nu_Z = \nu_S$. To je způsobeno tím, že kromě gravitačního pole má v tomto případě vliv na změnu frekvence světla také pohyb jeho zdrojů.

Již v roce 1859 dokázal Leverrier, že stáčení perihelia Merkuru nelze zcela vysvětlit poruchami od ostatních těles sluneční soustavy. Pozorované stáčení perihelia bylo o $43''$ /století větší než vypočtené¹¹⁾. Pokud budeme vyšetřovat dráhy volných těles ve Schwarzschildově poli, potom v oblasti, kde je pole slabé, dostáváme Keplerovské orbity, které však již nejsou uzavřené narozdíl od Newtonovského případu. Dochází totiž ke stáčení jejich pericenter. Při jednom oběhu se pericentrum posune o úhel

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 a (1 - e^2)},$$

kde a je hlavní poloosa eliptické dráhy a e je její excentricita. V případě planety Merkur dostáváme přesně hodnotu, která je rozdílem mezi pozorovanou hodnotou a hodnotou plynoucí z Newtonovské teorie.

Z principu ekvivalence plyne, že by v gravitačním poli mělo docházet k ohybu světla. V případě Schwarzschildovy geometrie lze za předpokladu slabého pole ($r \gg 2GM/c^2$) odvodit pro úhel φ ohybu světelného paprsku vztah

$$\varphi = \frac{4GM}{c^2 R},$$

kde R je minimální vzdálenost světelného paprsku od centrálního objektu. Je zajímavé, že pokud bychom ohyb světelného paprsku počítali pomocí nahrazení gravitačního pole setrvačnými silami urychlené zdviže, potom bychom dostali pouze poloviční hodnotu pro úhel ohybu. Je to způsobeno tím, že

¹⁰⁾ Skutečný posuv může být i modrý. Termín gravitační rudý posuv zde používáme pro změnu frekvence světelné vlny vlivem gravitačního pole. Tedy i pro případ modrého posuvu.

¹¹⁾ Stáčení perihelia způsobené poruchami od ostatních těles je více než desetinásobné.

v případě urychlené zdviže je prostoročas plochý (existují v něm globální inerciální systémy), zatímco v případě gravitačního pole centrálního objektu je prostoročas zakřivený. V roce 1919 provedl Eddington experiment s měřením ohybu světelných paprsků gravitačním polem Slunce¹²⁾. Výsledky tohoto experimentu prokázaly platnost předchozího vztahu¹³⁾. Po tomto experimentu začala být OTR přijímaná¹⁴⁾.

Při vyšetřování pohybů volných částic v okolí černé díry (popřípadě velmi stlačené hvězdy, aby vakuum bylo až k hodnotám r blízkým $2GM/c^2$) se objevují zcela nečekané výsledky. Například pod $6GM/c^2$ již neexistují stabilní kruhové orbity. Na hodnotě $r = 3GM/c^2$ je kruhová dráha pro fotony a pod ní již neexistuje žádná kruhová orbita. Schwarzschildovské pole je dokonce tak silné, že existují energeticky nevázané kruhové dráhy. To znamená, že částice na těchto orbitách má dostatek energie k tomu, aby se mohla dostat až do nekonečna. Tyto dráhy jsou tedy nestabilní. Při jejich poruše částice buď odlétne do nekonečna anebo skončí v černé díře (popřípadě v centrálním objektu).

Černé díry

Nejjednodušší černou dírou je Schwarzschildova černá díra, která je popsána Schwarzschildovou metrikou v celém prostoročase. V tomto případě zde nemáme žádné centrální těleso a celý prostoročas je tedy vakuový. Černou dírou nazýváme oblast prostoročasu, jejíž radiální souřadnice r je menší než $2GM/c^2$. Oblast s $r = 2GM/c^2$ se nazývá horizontem černé díry.

Proč je černá díra černá? Uvažujme pozorovatele, jehož světočára má konstantní radiální souřadnici r , která je menší nebo rovna hodnotě $2GM/c^2$. Na této světočáře potom platí

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

To znamená, že uvnitř černé díry je vždy $ds^2 > 0$ a na jejím horizontu je $ds^2 \geq 0$, přičemž rovnost nastává pouze v případě, že jsou konstantní i ostatní prostorové souřadnice. Uvnitř černé díry a na jejím horizontu nelze tedy stát na konstantní radiální souřadnici¹⁵⁾! Všechny fyzikální objekty se tedy uvnitř černé díry musí pohybovat po světočarách, na kterých klesá radiální souřadnice r . To je způsobeno tím, že pod horizontem hraje úlohu časové souřadnice radiální souřadnice r a nikoliv souřadnice t (záporný člen v metrice stojí před dr^2 a nikoliv před dt^2). Z černé díry tedy nemůže uniknout do vnější oblasti za horizontem žádný fyzikální objekt – ani záření. Proto je černá díra černá.

Z předchozí diskuse vidíme, proč musí být hodnota radiální souřadnice povrchu centrálního tělesa větší než $2GM/c^2$. V opačném případě by se totiž radiální souřadnice povrchu tělesa musela zmenšovat a těleso by se tak zhroutilo do $r = 0$.

Uvažujme nyní pozorovatele, který se pohybuje (ne nutně volně – mohou na něj působit i negravitační síly) směrem do černé díry (jeho radiální souřadnice klesá). Z podmínky $ds^2 < 0$ dostáváme nerovnost

$$dt > \frac{1}{c} \frac{\sqrt{dr^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \geq -\frac{1}{c} \frac{dr}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}},$$

¹²⁾ Při experimentu se měřila vzájemná poloha hvězd v blízkosti slunečního kotouče během jeho zatmění Měsícem. Naměřené hodnoty se porovnály s hodnotami naměřenými v době, kdy byl sluneční kotouč dostatečně daleko (například na druhé straně oblohy). Úhel ohybu světelných paprsků se potom určil z naměřených rozdílů relativních poloh hvězd. Pro světelný paprsek jdoucí těsně při povrchu Slunce obecná teorie relativity předpovídá hodnotu $1,75''$.

¹³⁾ Výsledky měření nebyly příliš přesné, nicméně vylučovaly možnost, že by skutečný úhel ohybu byl poloviční oproti předpovědi OTR.

¹⁴⁾ Nicméně astronomové ji přijmuli až v 60. letech, kdy byly objeveny kvasary a rentgenové zdroje, jejichž zářivé výkony se daly přirozeně vysvětlit pouze pomocí OTR.

¹⁵⁾ Fyzikální pozorovatel se může „pohybovat“ pouze po světočáře, na níž pro libovolné dvě blízké události platí $ds^2 < 0$. Stát na horizontu může pouze foton, který se nepohybuje ani v úhlových souřadnicích.

kde předpokládáme, že jsme stále mimo černou díru ($r > 2GM/c^2$). Záporné znaménko v posledním výrazu je způsobeno tím, že dr je záporné, protože radiální souřadnice klesá. Nechť v čase $t = 0$ je hodnota radiální souřadnice uvažovaného pozorovatele rovna r_0 . Integrací (sečtením) předchozí nerovnosti dostáváme vztah

$$t > \frac{r_0 - r}{c} + \frac{2GM}{c^3} \ln \frac{r_0 - \frac{2GM}{c^2}}{r - \frac{2GM}{c^2}}.$$

Vidíme tedy, že horizontu černé díry dosáhne pozorovatel až v nekonečné hodnotě času t ! Tento výsledek nás příliš nepřekvapí, pokud si uvědomíme, že se v blízkosti horizontu „zastavuje“ čas, což plyne z toho, že pokud přibližujeme zdroj světla k horizontu černé díry, potom jeho gravitační rudý posuv roste do nekonečna (frekvence světla klesá k nule). Mohlo by se tedy zdát, že pozorovatel horizontu a černé díry nikdy nedosáhne. K tomuto závěru skutečně dochází pozorovatel, který se nachází ve vnější oblasti, neboť pro něj má souřadnice t skutečně význam časové souřadnice. Pokud bude pozorovatel letící do černé díry během svého pohybu vysílat signály, potom je vnější pozorovatel bude registrovat po celou dobu existence vesmíru. Nicméně frekvence těchto signálů velmi rychle poklesne k nule.

Zcela k jinému závěru dochází pozorovatel letící do černé díry. Dá se ukázat, že tento pozorovatel dosáhne horizontu v konečné hodnotě vlastního času. Po průletu horizontem mu pak nezbyvá nic jiného než se pohybovat po světočáře, na které se zmenšuje radiální souřadnice. Za konečný vlastní čas potom pozorovatel skončí svou historii v $r = 0$, kde je singularita. V případě volného pádu do černé díry je celý proces z hlediska padajícího pozorovatele velmi rychlý.

Již jsme se zmínili o tom, že na horizontu černé díry a pro $r = 0$ je Schwarzschildova metrika singulární. Pokud se nám někde vyskytne singularita, potom je vždy třeba (zejména v OTR) zkoumat, zda je tato singularita fyzikální nebo je způsobena volbou souřadnic. Pokud v tomto případě spočítáme některé skalární veličiny (nezávislé na volbě souřadnic) charakterizující křivost prostoročasu, potom zjistíme, že divergují pouze pro $r = 0$, zatímco na horizontu jsou konečné. Dá se ukázat, že fyzikální singularita je pouze v $r = 0$, kde je singulární geometrie prostoročasu (tím pádem jsou singulární i ostatní fyzikální veličiny). O tom, co se děje v singularitě, zatím nic nevíme, neboť v singularitě nelze užít Einsteinovy rovnice.

Schwarzschildovy souřadnice t, r, ϑ a φ nejsou vhodné pro popis prostoročasu v černé díře a na jejím horizontu. Viděli jsme, že horizontem černé díry lze v těchto souřadnicích projít pouze přes nekonečnou hodnotu t . Ukazuje se totiž, že oblast $r = 2GM/c^2$, t konečné, ϑ a φ libovolné je ve skutečnosti pouze dvojrozměrnou oblastí. Pro popis Schwarzschildovské černé díry jsou vhodnější souřadnice nazývané Kruskalovy, v nichž má metrika následující tvar¹⁶⁾

$$ds^2 = \frac{32G^3 M^3}{c^6 r} \exp\left(-\frac{c^2 r}{2GM}\right) (-dV^2 + dU^2) + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2).$$

Z vyjádření Schwarzschildovy metriky v Kruskalových souřadnicích vidíme, že na horizontu černé díry skutečně žádná singularita není.

Kruskalovy souřadnice (pokud budeme uvažovat jejich maximální možný rozsah) ve skutečnosti popisují dvakrát „větší“ prostoročas. K jeho pokrytí bychom potřebovali dvě sady Schwarzschildovských souřadnic. Toto rozšíření Schwarzschildovské variety je dokonce žádoucí, protože původní prostoročas (pouze s jednou sadou Schwarzschildovských souřadnic) nebyl geodeticky úplný – některé geodetiky končily mimo singularitu při konečné délce. V rozšířeném prostoročase potom máme dvě vnější asymptoticky ploché oblasti (dva vesmíry), jednu černou díru a jednu tzv. bílou díru. Při diskusi pohybů pozorovatelů uvnitř černé díry jsme dospěli k závěru, že se pozorovatelé mohou pohybovat pouze tak, aby se jejich radiální souřadnice zmenšovala. Druhou možností by však bylo, že se pozorovatelé pohybují tak, že se jejich radiální souřadnice neustále zvětšuje. Tato možnost se realizuje v bílé díře. To znamená, že z bílé díry musí všechny objekty vylétnout. Objekty, které vylétí z bílé díry, se ve vnější

¹⁶⁾ Je to „smíšený“ tvar, neboť zde také vystupuje Schwarzschildovská radiální souřadnice r . Ta je však jednoznačnou funkcí Kruskalových souřadnic V, U, ϑ a φ .

oblasti objeví v čase $t = -\infty$. Pro vnějšího pozorovatele tyto objekty tedy existují „od počátku“ vesmíru.

Dá se ukázat, že není možné, aby se nějaký fyzikální objekt dostal z jednoho vesmíru (vnější asymptotická oblast) do druhého, neboť k tomu je nutné pohybovat se nadsvětelnou rychlostí ($ds^2 > 0$), což není možné. Pokud černá díra vznikne kolapsem nějakého tělesa, potom se dva vesmíry neobjeví. Je to způsobeno tím, že celý prostoročas není Schwarzschildovský (černá díra zde není od začátku).

Vraťme se nyní k pádu pozorovatele do černé díry. Předchozí závěry platily pouze pro bodového pozorovatele. Pokud je pozorovatel nebodový, potom je potřeba uvažovat také nehomogenity gravitačního pole, které způsobují slapové síly. Slapové síly rostou směrem k $r = 0$, kde jsou nekonečné. To znamená, že nebodový pozorovatel do singularity nikdy nedospěje, neboť ještě předtím jej roztrhají slapové síly. Jestliže máme příliš velkého pozorovatele a málo hmotnou černou díru (má malý rozměr horizontu), potom se takový pozorovatel nemusí dostat ani do černé díry, neboť slapové síly jej zničí ještě dříve, než dosáhne jejího horizontu. Pokud však máme velmi hmotnou černou díru (například ty, které se nacházejí v centrech galaxií), potom je gravitační pole na jejím horizontu poměrně homogenní (vzhledem k lidským rozměrům). V takovém případě z lokálních experimentů vůbec nepoznáme, že jsme se dostali do černé díry (pod její horizont). To zjistíme až za chvíli, když začne neodvratně „přituhovat“.

Zatím jsme se zabývali pouze Schwarzschildovou černou dírou, která je zcela charakterizována jediným parametrem – svojí hmotností M . Je možné ukázat, že každá *stacionární* černá díra je jednoznačně určena zadáním tří parametrů, kterými jsou hmotnost, elektrický náboj a moment hybnosti¹⁷⁾. Prostoročas obecné stacionární černé díry nemusí být vakuový, neboť v něm může být elektromagnetické pole (černá díra může být nabitá).

Černé díry mohou vzniknout při gravitačním kolapsu hmotného objektu (například velmi hmotné hvězdy na konci jejího života). Takovéto černé díry jistě nebudou stacionární, neboť neexistují od začátku vesmíru. Ukazuje se však, že po vzniku černé díry lze její gravitační pole v jejím okolí popsat pomocí gravitačního pole, které odpovídá nějaké stacionární černé díře. Výsledný objekt je tedy velmi jednoduchý, neboť jej lze popsat pouze pomocí tří parametrů (v praxi stačí dva, protože celkový náboj makroskopických těles je nulový). Při gravitačním kolapsu se tedy „zvyšuje“ symetrie. Případné nesymetrie původního objektu jsou „vyzářeny“ gravitačními vlnami při vzniku černé díry.

Rotující černá díra vykazuje zajímavé efekty. Lze z ní například získávat energii na úkor její rotace. Zajímavým efektem je také tzv. „vlečení“ inerciálních systémů. Rotující černá díra totiž ve svém okolí „strhává“ geometrii prostoročasu a nutí ji ke korotaci. Pokud bychom nechali z nekonečna volně padat těleso s nulovou počáteční rychlostí, potom toto těleso nepadne do černé díry radiálně – kromě radiálního pohybu vyvolá gravitační pole také pohyb orbitální ve směru rotace černé díry. Tento jev se obecně vyskytuje u všech rotujících zdrojů¹⁸⁾. V OTR je tedy rozdíl mezi gravitačním polem rotujícího a nerotujícího objektu. Naproti tomu v klasické Newtonově teorii je rotace zdroje irelevantní.

Geometrie vesmíru

Na závěr si stručně povíme něco o geometrii vesmíru. Ke studiu vesmíru jako celku je potřeba užít OTR, protože dominantní silou ve vesmíru je gravitace¹⁹⁾.

Ze současných pozorování vyplývá, že vesmír je na dostatečně velkých měřítkách homogenní (ve všech místech stejný) a izotropní (ve všech směrech stejný). To znamená, že by měly existovat třírozměrné prostoročasové řezy, které by měly mít ve všech bodech stejné geometrické vlastnosti. Existují tři základní typy prostorů s konstantní křivostí, k jejichž rozlišení můžeme použít tzv. index křivosti k

¹⁷⁾ Z matematického hlediska jsou ve skutečnosti potřebné čtyři parametry. Čtvrtý parametr ale nemá dobrou fyzikální interpretaci, neboť odpovídá magnetickému náboji černé díry.

¹⁸⁾ V případě Země je však tento efekt velmi malý, a proto se jej doposud nepodařilo změřit.

¹⁹⁾ Slabé a silné interakce mají krátký dosah. Elektromagnetická interakce je ve vesmírných měřítkách odstíněna, protože na těchto rozměrech je vesmír elektricky neutrální.

nabývající hodnot $-1, 0$ a $+1$. Geometrie těchto prostorů je v souřadnicích χ, ϑ a φ popsána metrikou

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \Sigma_k^2(\chi) (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)],$$

kde a je konstanta charakterizující rozměr prostoru. Rozsah proměnné χ a funkce $\Sigma_k(\chi)$ závisí na typu prostoru:

$$\Sigma_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & \chi \in \langle 0, \pi \rangle & \text{pro } k = 1 \\ \chi, & \chi \in \langle 0, \infty \rangle & \text{pro } k = 0 \\ \sinh \chi, & \chi \in \langle 0, \infty \rangle & \text{pro } k = -1 \end{cases}.$$

Při konstantní souřadnici χ dostáváme geometrii dvojrozměrné sféry, jejíž poloměr je roven $a\Sigma_k(\chi)$.

Ze vztahu pro funkci Σ vidíme, že pro $k = 0$ dostáváme třírozměrný Eukleidovský prostor, jehož geometrie je vyjádřena ve sférických souřadnicích (radiální souřadnice je rovna $a\chi$). Prostor s $k = -1$ odpovídá třírozměrné sedlové ploše (při konstantní souřadnici φ má výsledná dvojrozměrná plocha tvar sedla). Prostory s indexem křivosti $k = -1, 0$ jsou tedy nekonečné. V případě $k = 1$ dostáváme prostor, jehož geometrie odpovídá geometrii třírozměrné sféry (povrchu čtyřrozměrné koule). To znamená, že pro $k = 1$ je prostor konečný (nemá ale hranici).

Prostoročasová geometrie je tedy popsána metrikou

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + \Sigma_k^2(\chi) (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)].$$

Časovou závislost parametru a , který charakterizuje prostorové rozměry, je třeba určit z Einsteinových rovnic. Výraz pro prostoročasovou geometrii je poměrně jednoduchý. To je způsobené tím, že použité souřadnice vyjadřují vysokou symetrii prostoročasu. Vzhledem k vysoké symetrii prostoročasové geometrie existuje význačný čas – je to ten čas t , vůči kterému je každý třírozměrný prostoročasový řez $t = \text{konst.}$ prostorem konstantní křivosti. Díky této vlastnosti má smysl mluvit o stáří vesmíru (udává se v této význačné časové souřadnici).

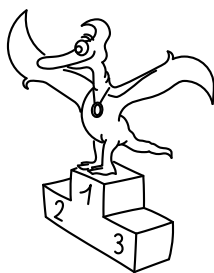
Pokud hmotu ve vesmíru budeme považovat za jakousi ideální tekutinu s hustotou ρ a se zanedbatelným tlakem p , potom z Einsteinových rovnic (při nulové kosmologické konstantě) dostáváme, že geometrie vesmíru nemůže být statická! (Parametr a se musí vyvíjet s časem.) Z dynamických rovnic vyplývá, že existuje nějaké t , pro které $a(t) = 0$. Tento okamžik odpovídá singulárnímu počátku vesmíru (vzdálenost libovolných dvou bodů je při počátku vesmíru nulová). Další vývoj geometrie vesmíru závisí na jeho indexu křivosti k . Při $k = -1, 0$ se bude vesmír neomezeně rozpínat ($a(t)$ bude rostoucí funkcí času t). V případě $k = 1$ bude vesmír expandovat až po dosažení nějaké maximální hodnoty a_{\max} . Potom expanzi vystřídá kontrakce, která povede k dalšímu singulárnímu stavu. Vesmír je tedy pro $k = 1$ konečný nejen v prostoru ale i v čase²⁰⁾.

Z pozorování vesmíru víme, že se vzdálené galaxie od nás vzdalují. To znamená, že funkce $a(t)$ je v současnosti rostoucí funkcí času t . (Pozorované vzdalování galaxií je totiž způsobeno časovým vývojem parametru a , neboť hmota vesmíru v souřadnicích χ, ϑ a φ stojí²¹⁾.) O tom, jaká je hodnota indexu křivosti vesmíru (jaký je typ geometrie vesmíru), rozhoduje hustota jeho hmoty. Přesnost, s jakou v současnosti známe hustotu vesmírné hmoty, nedovoluje stanovení typu geometrie vesmíru. Skutečná hustota hmoty vesmíru je totiž velmi blízká tzv. kritické hustotě²²⁾, která odpovídá vesmíru s plochým prostorem ($k = 0$). Pokud je hustota hmoty větší než kritická, potom je vesmír konečný ($k = 1$). Ve zbývajících případech je index křivosti k roven mínus jedné.

²⁰⁾ Současná pozorování ukazují, že kosmologická konstanta je nenulová. Při nenulové kosmologické konstantě může být i vesmír s $k = 1$ nekonečný v čase (bude stále expandovat).

²¹⁾ Časová souřadnice t tedy odpovídá vlastnímu času pozorovatele spojeného s hmotou vesmíru.

²²⁾ Hodnotu kritické hustoty lze získat z údajů popisujících rozpínání vesmíru (lze je naměřit). V případě nenulové kosmologické konstanty potřebujeme k určení kritické hustoty změřit dvě veličiny („rychlost“ a „zrychlení“ rozpínání vesmíru).



Pořadí řešitelů po VI. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

	Jméno	Příjmení	Škola	1	2	3	4	P	E	S5	V	1	2	3	4	P	E	S6	VI	%	Σ
	Student	Pilný	MFF UK	4	4	4	5	3	8	6	34	3	4	3	5	5	8	6	34	100	200
1.	Sergej	Maroz	G Plzeň	4	–	4	–	3	8	6	25	5	4	3	5	3	4	–	24	83	108
2.	Eva	Skopalová	G Poprad	3	4	–	–	0	–	6	13	–	–	–	–	–	–	–	0	80	101
3.	Pavel	Kvasnička	G Chrudim	2	4	–	2	3	6	–	17	–	–	–	–	–	–	–	0	70	97
4.	Jan	Novák	G Praha	3	1	1	3	1	5	1	15	4	1	3	1	1	5	6	21	49	68
5.	Michael	Komm	G Praha	4	4	–	2	1	3	–	14	–	–	–	–	–	–	–	0	69	66
6.	Miroslav	Šulc	G Ústí n. L.	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	63	60
7.	Ľuboš	Bednárik	G Trenčín	–	4	–	–	–	7	–	11	–	–	–	–	–	–	–	0	51	50
8.	Matej	Dubový	G Trenčín	0	4	–	–	–	6	–	10	–	–	–	–	–	–	–	0	46	44
9.	Sebastian	Höppner	G Frankfurt	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	79	41
10.	Jindřich	Šťástka	G Sokolov	–	1	–	–	–	–	3	4	4	–	1	–	–	–	–	5	49	36
11.	Jakub	Kratochvíl	G Čáslav	3	2	–	–	3	3	–	11	–	–	–	–	–	–	–	0	50	32
12.	Miroslav	Frost	G Brno	1	4	–	–	2	–	1	8	–	–	–	–	–	–	–	0	60	28
13.	Anastázie	Jermolájeva		–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	76	25
14.	Tomáš	Dzetkulič	G Michalovce	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	67	24
15.–16.	Jakub	Galgonek	G FM	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	91	20
15.–16.	Pavel	Kwicien	G Dvůr Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	50	20
17.–18.	Anna	Fučíková	G Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	35	19
17.–18.	Miroslav	Kačena	G Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	61	19
19.	Pavel	Hančar		–	–	–	–	–	–	–	0	–	1	–	–	–	–	–	1	43	18
20.	David	Šubrt	G Děčín	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	44	16
21.–22.	Milan	Jalový	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	71	15
21.–22.	Ondřej	Srba	G Příbor	1	–	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	0	31	15
23.–24.	Zdeněk	Čejka	G Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	87	13
23.–24.	Vratislav	Chudoba	G Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	54	13
25.	Michal	Hajn	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	75	12
26.–28.	Jiří	Eliášek	G Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	85	11
26.–28.	Jiří	Hitschfeld	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	22	11
26.–28.	Tomáš	Ježo	G Humenné	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	100	11
29.–31.	Ľudovít	Kontšek	G Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	36	9
29.–31.	Jiří	Kosina	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	90	9
29.–31.	Ondřej	Valehrach		–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	45	9
32.–34.	Lenka	Beranová	G Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	46	6
32.–34.	Iva	Kouřilová	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	43	6
32.–34.	Miroslav	Krůs	G Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	29	6
35.	Ondřej	Vencálek	G FM	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
36.–37.	Tomáš	Buchta	G Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
36.–37.	Michal	Kabát	G Púchov	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4

38.–39. Jan	Beneš	G Brno	– – – – –	0	– – – – –	0	43	3
38.–39. Jiří	Palek	G Nové Strašecí	– – – – –	0	– – – – –	0	75	3
40.–41. Tomáš	Kovař	G Michalovce	– – – – –	0	– – – – –	0	18	2
40.–41. Lenka	Němcová	SGŠ Bratislava	– – – – –	0	– – – – –	0	22	2

Kategorie třetích ročníků

	Jméno	Příjmení	Škola	1	2	3	4	P	E	S5	V	1	2	3	4	P	E	S6	VI	%	Σ
	Student	Pilný	MFF UK	4	4	4	5	3	8	6	34	3	4	3	5	5	8	6	34	100	200
1.	Miroslav	Hejna	G Rychnov n. K.	4	4	5	7	3	8	6	37	1	4	3	6	6	6	6	32	92	184
2.	Jan	Prachař	G Rychnov n. K.	5	4	1	5	2	8	6	31	3	5	3	5	6	8	6	36	86	142
3.	Jaroslav	Trnka	G Praha	4	4	–	1	0	8	6	23	4	4	3	5	5	7	6	34	66	127
4.	Tibor	Vansa	G Ostrava	2	3	0	3	1	2	–	11	4	3	3	4	5	6	6	31	58	113
5.	Karel	Tůma	G Ostrava	3	4	0	2	1	7	–	17	0	1	3	2	2	6	–	14	60	110
6.	Lukáš	Chvátal	G Brno	3	4	4	–	–	3	4	18	2	4	3	1	5	7	3	25	69	108
7.	Václav	Cviček	G FM	1	4	–	4	3	8	6	26	–	–	–	–	–	–	–	0	62	93
8.	Zdeněk	Moravec	G Blansko	2	4	–	–	3	3	–	12	–	–	–	–	–	–	–	0	65	89
9.	Michal	Bareš	G Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	3	4	5	–	–	12	88	82
10.	Vít	Šípál	G Ústí n. L.	–	4	0	1	2	8	–	15	4	3	3	1	5	7	–	23	60	79
11.	Jiří	Lipovský	G Bystřice n. P.	3	4	–	2	1	8	2	20	–	–	–	–	–	–	–	0	54	47
12.	Michaela	Jirků	G Praha	1	–	–	–	–	2	–	3	–	0	3	1	–	4	–	8	35	44
13.	Andrej	Pidik	G Nove M. n. V.	2	0	0	3	1	7	–	13	3	0	3	0	0	6	–	12	33	43
14.–15.	Barbora	Galaczková	G Třinec	0	4	–	–	–	3	–	7	1	–	–	–	–	4	–	5	42	31
14.–15.	Miloslav	Havelka	G Zastávka	1	2	–	–	–	–	–	3	–	–	–	–	–	–	–	0	39	31
16.	Lukáš	Vozdecký	G Brno	3	2	0	–	–	4	3	12	3	–	3	–	–	–	–	6	46	28
17.	Matěj	Týč	G Zastávka	–	–	0	0	1	–	–	1	2	–	–	–	–	6	–	8	34	25
18.	Lukáš	Snášel	COP Hronov	3	4	–	–	–	–	–	7	–	1	0	3	–	–	–	4	33	20
19.	Jaroslav	Kudlička	G Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	45	15
20.	Josef	Matějíčka	G Žilina	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	24	13
21.–22.	Luboš	Matásek	G Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	46	12
21.–22.	Radoslav	Šafran	G Košice	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	50	12
23.–24.	Tomáš	Kadlček	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	100	11
23.–24.	Radim	Kusák	G Frýdek-Místek	–	4	–	–	–	–	–	4	–	–	–	–	–	–	–	0	73	11
25.	Pavel	Klouda	G Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	22	10
26.–27.	Jan	Křivka	COP Hronov	–	4	–	–	–	–	–	4	–	–	0	–	–	–	–	0	30	8
26.–27.	Vít	Urbánek	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	100	8
28.	David	Vrba	ZŠ a G Konice	2	1	0	–	1	–	–	4	–	–	3	–	–	–	–	3	39	7
29.–32.	David	Bezucha	G Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	33	6
29.–32.	Kateřina	Jelénková	SZŠ Staré Město	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	55	6
29.–32.	Nina	Sainerová	G Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	30	6
29.–32.	Jaroslav	Štencl	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	33	6
33.–34.	Marek	Vyšinka	G Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	42	5
33.–34.	Miroslav	Zgažar	SPŠCH Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	50	5
35.	Milan	Mareš		–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	15	4
36.	Štěpán	Mančík	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
37.	Jan	Chmelař	G Hranice	–	–	–	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	0	67	2

Kategorie druhých ročníků

	Jméno	Příjmení	Škola	1	2	3	4	P	E	S	5	V	1	2	3	4	P	E	S	6	VI	%	Σ
	Student	Pilný	MFF UK	4	4	4	5	3	8	6	6	34	3	4	3	5	5	8	6	34	100	200	
1.	Matouš	Ringel	G Broumov	4	4	5	6	3	8	5	35	2	4	3	5	5	-	6	25	80	141		
2.	Alexandr	Kazda	G Praha	3	4	4	5	3	6	4	29	-	5	3	4	5	-	6	23	81	105		
3.	Boris	Gažovič	G Humenné	-	4	1	5	-	7	6	23	3	3	2	5	-	7	-	20	80	94		
4.	Petr	Houštěk	G Pelhřimov	0	2	-	-	-	8	-	10	-	3	3	3	5	-	-	14	57	68		
5.	Jana	Matějová	SPŠ Chrudim	-	4	4	3	2	7	-	20	-	-	-	-	-	-	-	0	55	65		
6.	Vojtěch	Krejčířík	G Kroměříž	-	4	1	-	-	8	-	13	4	4	3	-	-	4	-	15	77	55		
7.	Petr	Dostál	G Žamberk	1	0	0	-	2	5	-	8	0	-	-	-	-	3	-	3	36	40		
8.	Pavel	Hála	G Český Krumlov	3	1	-	0	2	-	-	6	2	0	3	-	-	4	-	9	41	37		
9.	Zuzana	Rozlívková	G Hradec Král.	-	-	-	-	-	5	-	5	-	-	3	-	-	-	-	3	41	33		
10.	Martin	Rybář	GOA Blansko	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	59	32		
11.	Ivan	Patáčík	G Partizánské	3	1	0	-	-	-	-	4	-	-	0	-	-	2	-	2	34	30		
12.	Zdeněk	Váňa	COP Hronov	3	4	0	-	-	5	-	12	-	-	-	-	-	-	-	0	28	23		
13.-15.	Libor	Kukačka	GOA Vrchlabí	-	2	-	-	1	7	-	10	-	-	-	-	-	-	-	0	54	21		
13.-15.	Eva	Lovišková	G Nové M. na M.	-	-	-	-	-	2	-	2	-	2	1	-	-	6	-	9	41	21		
13.-15.	Lucie	Strmisková	G Kyjov	1	4	-	-	-	-	-	5	-	-	-	-	-	2	-	2	48	21		
16.	Pavol	Lakatoš	G Velké Kapušany	-	2	0	-	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	0	23	18		
17.-18.	Michal	Havel	COP Hronov	1	4	0	-	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	0	31	15		
17.-18.	Martina	Smolová	G Písek	0	2	-	-	-	1	-	3	-	-	0	-	0	1	-	1	17	15		
19.-20.	Jakub	Kubeček	COP Hronov	-	4	0	-	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	0	23	14		
19.-20.	Vladimír	Sommer	G Žďár n. S.	-	-	-	-	-	2	-	2	-	-	-	-	-	-	-	0	52	14		
21.	Stanislav	Plánička	G Klatovy	-	3	-	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	0	48	13		
22.-24.	Jakub	Kopecký	G Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	38	12		
22.-24.	Filip	Kozel	COP Hronov	0	3	0	-	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	0	25	12		
22.-24.	Jan	Křetínský	G Brno	3	2	-	-	-	-	-	5	-	-	3	-	-	-	-	3	109	12		
25.-26.	Radek	Beneš	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	22	11		
25.-26.	Peter	Buhaj	G Snina	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	20	11		
27.-28.	Jana	Babováková	G Most	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	38	9		
27.-28.	Jan	Křivonožka	G Bílovec	-	-	-	-	-	3	-	3	-	-	-	-	-	-	-	0	23	9		
29.-30.	Jakub	Tichý	G Praha - Arabská	2	1	-	-	1	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	0	44	8		
29.-30.	Lukáš	Volesský	COP Hronov	-	4	0	-	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	0	15	8		
31.	Miroslav	Frantes	G Benešov	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	58	7		
32.-34.	Hana	Suchomelová	G Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	44	4		
32.-34.	Mária	Šedivá	G Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	44	4		
32.-34.	Ivo	Zábojník	G Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	80	4		
35.-40.	Lukáš	Bartík	G Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	38	3		
35.-40.	Lucie	Gráfová	G Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	18	3		
35.-40.	Petr	Mindžak	GOA Sedlčany	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	75	3		
35.-40.	Markéta	Novotná	G Hranice	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	38	3		
35.-40.	Martin	Padevět	G Kostelec	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	38	3		
35.-40.	Radoslav	Sopoliga	G Svidník	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	14	3		
41.-44.	Lukáš	Burian	G Kladno	-	-	-	-	0	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	20	2		
41.-44.	Martina	Marenčoková	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	50	2		
41.-44.	Luboš	Račanský	G Benešov	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	29	2		
41.-44.	Tomáš	Ručka	G Kladno	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	29	2		
45.	Jaroslav	Bušek	G Rumburk	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	0	33	1		

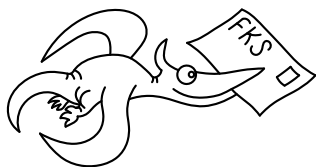
Kategorie prvních ročníků

Jméno Příjmení Škola			1	2	3	4	P	E	S5	V	1	2	3	4	P	E	S6	VI	%	Σ
Student	Pilný	MFF UK	4	4	4	5	3	8	6	34	3	4	3	5	5	8	6	34	100	200
1.	Anton	Repko	ZŠ a G Prešov	3	-	-	-	3	2	6	14	-	-	-	-	-	-	0	61	62
2.	Jana	Vrábelová	ZŠ Trenčín	1	-	-	-	-	6	-	7	-	-	-	-	6	-	6	52	25
3.	Ondrej	Bogár	ZŠ Trenčín	0	-	-	-	-	2	-	2	-	-	-	-	3	-	3	32	19
4.-5.	Ján	Čuvala	ZŠ Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	0	32	8
4.-5.	Tomáš	Uhrin	G Michalovce	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	0	89	8
6.	Karel	Hofman	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	0	100	7
7.	Zdeněk	Lochman	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	-	0	27	4

Šestý smysl

Soutěž šestý smysl dopadla následovně: Z 29 účastníků se do 11 nejčastějších odpovědí trefili Eva Skopalová a Karel Tůma, do deseti pak Tibor Vansa, Vašek Cviček se trefil devětkrát a následující osmkrát: Lenka Beranová, Miloslav Havelka, Jiří Lipovský a Matouš Ringel. A zde je přehled nejčastějších odpovědí.

- 1) korespondenční seminář: FKS (nečekaně)
- 2) organizátor FYKOSu: Lenka Zdeborová
- 3) řešitel FYKOSu: Mirek Hejna
- 4) letošní úloha ve FYKOSu: I.1 — Špulka
- 5) fyzikální vzorec či zákon: $E = mc^2$
- 6) fyzikální konstanta: gravitační konstanta κ
- 7) fyzikální jednotka: metr
- 8) fyzikální přístroj: ampérmetr
- 9) elementární částice: elektron
- 10) český fyzik: Křižík
- 11) zahraniční fyzik: Einstein
- 12) kniha o fyzice: Feynmanovy přednášky
- 13) hvězda: Slunce
- 14) známka ve škole: 1
- 15) telefonní číslo: 158

**FYKOS****UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8**www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.