

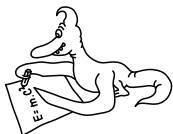
**Milí řešitelé!**

XVI. ročník FYKOSu je u konce. V tomto letáku najdete řešení 5. a 6. série, konečnou výsledkovou listinu a poslední díl seriálu (tentokrát už bez úloh).

Doufáme, že se vám seminář líbil, že jste si zasoutěžili, ale hlavně se také něco nového naučili. S maturanty se těšíme na shledání v řadách organizátorů, s ostatními pak v příštím ročníku a s těmi úspěšnějšími také na podzimním soustředění.

Přejeme vám pěkné prázdniny.

*vaši organizátoři*

**Řešení V. série****Úloha V. 1 ... prší, prší (4 body; průměr 1,85; řešilo 13 studentů)**

V deštovém mraku je množství malých kapiček vody, jejichž hustotu (tj. celkovou hmotnost kapiček v nějakém objemu lomeno tímto objemem) označme  $\rho_1$ , hustotu vody  $\rho_0$ . Spojením několika kapiček vznikne větší kapka, která začne padat a postupně na sebe nabaluje další a další kapičky. Spočítejte, jak se bude měnit poloměr padající kapky, a s jakým zrychlením se bude pohybovat.

Pro jednoduchost neuvažujte odpor vzduchu působící na kapku a malé kapičky považujte za nehybné.

Spočítejme nejdříve, jak vypadá nabalování kapičky. Pohybuje-li se kapička o poloměru  $r$  rychlostí  $v$ , tak za interval<sup>1</sup> času  $dt$  projde objemem  $dV = \pi r^2 v dt$  a zvýší tedy svou hmotnost o  $dm = \pi r^2 v \rho_1 dt$ .

Tento přírůstek hmotnosti má za následek zvětšení poloměru kapky o  $dr$ , pro které platí  $dm = 4\pi r^2 \rho_0 dr$ , tedy po dosazení za  $dm$

$$dr = \frac{\rho_1}{4\rho_0} \cdot v dt = \frac{\rho_1}{4\rho_0} \cdot ds \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\rho_1}{4\rho_0} \cdot s.$$

Implikace platí proto, že na počátku, kdy je uražená dráha  $s$  nulová, je podle zadání i poloměr kapky nulový (kapka vznikne spojením několika mikroskopických kapiček).

Velikost kapky je tedy přímo úměrná dráze, kterou ve vzduchu urazila. Přístupme k odvození jejího pohybu. Předpokládejme, že se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb<sup>2</sup> se zrychlením  $a$  a vyjádřeme časovou závislost rychlosti, dráhy a poloměru:

$$\begin{aligned} v &= at, \\ s &= \frac{1}{2}at^2, \\ r &= \frac{\rho_1 s}{4\rho_0} = \frac{\rho_1 at^2}{8\rho_0}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> velmi krátký, viz 2. díl letošního seriálu

<sup>2)</sup> Pro rejpyaly znalé diferenciálního počtu – toto je zcela legitimní způsob řešení diferenciální pohybové rovnice, říká se tomu *ansatz*.

Napišme nyní II. Newtonův zákon ve tvaru se změnou hybnosti (tvar  $F = ma$  nelze použít kvůli proměnlivé hmotnosti)

$$mg = F = \frac{dp}{dt} = \frac{dmv}{dt} = ma + v \cdot \frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{v}{m} \cdot \frac{dm}{dt} = g - a.$$

Dosaďme za  $m$  a  $dm$

$$g - a = \frac{v}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0} \cdot \pi r^2 v \rho_1 = \frac{3\rho_1 v^2}{4\rho_0 r}$$

a nyní ještě za  $v$  a  $r$

$$g - a = \frac{3\rho_1 a^2 t^2}{4\rho_0} \cdot \frac{8\rho_0}{\rho_1 a t^2} = 6a \Rightarrow a = \frac{1}{7}g.$$

Vidíme, že předpoklad o rovnoměrně zrychleném pohybu byl správný. Na první pohled zarazující fakt, že zrychlení nezávisí na  $\rho_1$ , je kupodivu v pořádku, rozmyslete si proč!

*Honza Houštek*

honza@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha V.2 ... Apollo (4 body; průměr 2,92; řešilo 13 studentů)

Odhadněte, za jak dlouho se Apollo dostane na orbitu Měsíce, neplytvá-li zbytečně palivem. Nezapomeňte uvést, jaké zjednodušující předpoklady jste při výpočtu provedli.

Když zanedbáme přitažlivou sílu Měsíce, tak se raketa bude pohybovat po orbitě. Teď ještě musíme uvážit, jakou orbitu vybereme, aby raketa přiletěla na Měsíc s co nejmenší rychlostí vůči němu. To znamená, že směr rychlosti bude ve vzdálenosti Měsíce  $R_M$  kolmý ke svému průvodiči, tedy orbita tam bude mít apogeum. Perigeum orbity bude určitě u Země. Z poloosy orbity už jsme schopni lehce určit čas podle třetího Keplerova zákona

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{R_M^3}{T_M^2},$$

kde  $a$  je poloosa orbity rakety,  $T$  je doba obletu rakety (dvojnásobek doby doletu),  $R_M$  je vzdálenost Země od Měsíce a  $T_M$  doba je obletu. Když uvažujeme  $a = R_M/2$  (rozměry Země a Měsíce v našem přiblížení můžeme zanedbat) dostaneme pro dobu oběhu

$$T = T_M \frac{a}{R_M}^{\frac{3}{2}} = T_M \frac{1}{2}^{3/2}.$$

Po dosazení  $T_M = 27$  dní dostaneme pro dobu oběhu

$$\frac{T}{2} = 4,8 \text{ dne.}$$

Kdybychom chtěli spočítat přesnější čas, tak bychom mohli uvažovat bod, ve kterém se vyrovnají síly tzv. Lagrangeův bod a uvažovali zemskou orbitu do tohoto bodu a měsíční orbitu z tohoto bodu. Toto řešení je trochu komplikovanější, ale zlepšit náš výsledek ve druhém řádu. Největší obtíž je spočítání polohy toho bodu, což se dá jedinečně numericky.

*Miro Kladiva*

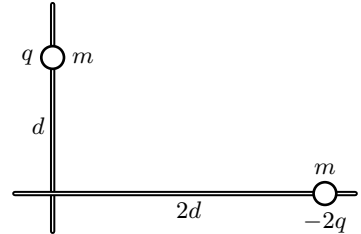
miro@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha V.3 ... elektrický minigolf** (3 body; průměr 2,20; řešilo 20 studentů)

Mějme dvě na sebe kolmé nevodivé tyče a na nich nabitě kuličky (viz obr. 1), které se po nich mohou po tyčích volně pohybovat. Kuličky mají stejnou hmotnost  $m$  a náboje  $q$  a  $-2q$ . Na počátku jsou v klidu a jejich vzdálenost od průsečíku tyčí je  $d$  a  $2d$ . Určete, kde se bude nacházet druhá kulička v okamžiku, kdy první dosáhne průsečíku tyčí.

Uvedeme zde dva způsoby řešení. V prvním odvodíme, že v soustavě spojené s jedním z nábojů výsledná síla působí ve směru jejich spojnice. V druhém odvodíme, že poměr vzdálenosti nábojů od středu se nemění. Z obou těchto faktů ihned plyne, že náboje se srazí uprostřed.

- a) V klidové soustavě na oba náboje působí elektrostatická síla  $F_e$  ve směru ke druhému náboji (o velikosti dané Coulombovým zákonem) a reakce tyčky ve směru kolmém na tyčku (o velikosti takové, aby výslednice síly na jeden náboj působila ve směru tyčky). Reakci na náboj  $q$  označme  $F_1$ , na druhý  $F_2$ . Důležité si je uvědomit, že celková síla působící na druhý náboj je stejná jako  $F_1$ , je to díky kolmosti tyček a toho, že elektrostatické síly jsou velikostí stejné a směrem opačné. Když se nyní přesuneme do soustavy spojené s druhým nábojem, musíme zavést setrvačnou síly rovnou  $-F_1$ , tedy v této soustavě bude na první náboj působit pouze  $F_e$  ve směru na druhý náboj. Což jsme chtěli ukázat. Pokud se ztrácíte v tom, která síla, je která, nakreslete si obrázek.
- b) Z podobnosti trojúhelníků víme, že na začátku pro velikosti sil platí  $2F_2 = F_1$ , kde  $F_1$  je reakce na první náboj a také velikost výsledné síly působící na druhý náboj a vice versa. Tedy na první náboj na začátku působí poloviční celková síla než na druhý. Jelikož náboje mají stejnou hmotu, je i zrychlení prvního poloviční než druhého. Díky nulové počáteční rychlosti a tomu, že dráha je druhá derivace zrychlení, je i dráha prvního náboje za elementárně malý čas poloviční. Stejně tak by tvrzení o drahách platilo, pokud by počáteční rychlost prvního náboje byla poloviční než u druhého. Tedy za elementárně malý čas se systém dostane do stavu, ve kterém je poměr vzdáleností nábojů od středu stejný jako na začátku. Tedy se poměr nezmění během celého pohybu. Což jsme chtěli ukázat.



Obr. 1. Náboje na tyčích

**Miro Kladiva & Lenka Zdeborová**

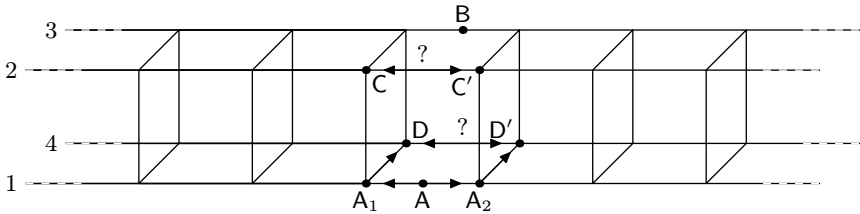
miro@fykos.mff.cuni.cz, lenka@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha V.4 ... síť** (4 body; průměr 3,09; řešilo 11 studentů)

Spočtete odpor mezi body A, B na nekonečné síti na obrázku 2. Všechny hrany sítě mají stejnou délku a odpor.

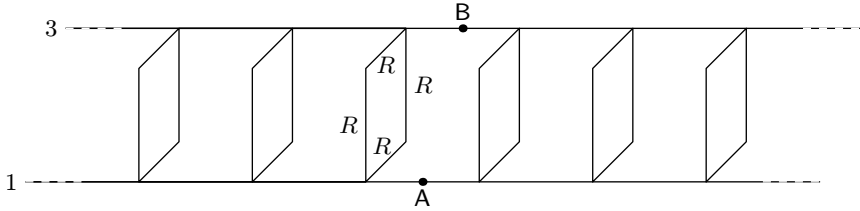
Nech BÚNO<sup>3</sup> prúd vteká do uzlu A a vyteká z uzlu B. V uzle A sa rozdeľuje a pokračuje do uzlov A<sub>1</sub> a A<sub>2</sub>. Odtiaľ tečie časť do uzlov D a D'. Medzi bodmi D, D' netečie žiaden prúd. Rovina kolmá na priamky 1–4 a prechádzajúca uzlami A, B rozdeľuje sieť na dve symetrické časti. Ak by tiekol prúd z uzlu D do uzlu D', potom by musel tiecť rovnako veľký prúd aj opačným smerom. Rovnako nebude tiecť žiaden prúd ani medzi uzlami C, C', ani medzi ľubovoľnými susednými uzlami ležiacimi na drôte 2 a 4.

<sup>3)</sup> bez újmy na obecnosti, pozn. red.



Obr. 2

Prekreslime si schému vynechaním odporov, ktorými netečie prúd.

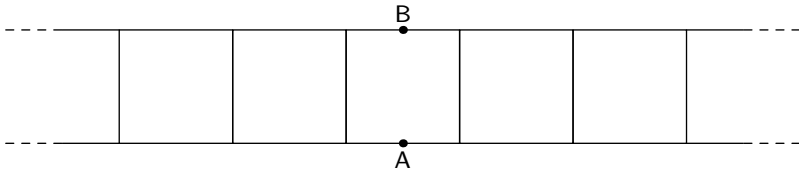


Obr. 3

Podľa obrázku 3 vidíme, že pričky medzi drátmi 1 a 3 tvoria dva a dva odpory zapojené voči sebe paralelne. Pre celkový odpor jednej tejto pričky platí

$$R_p = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R.$$

Prekreslime si sieť na jednoduchšiu schému.



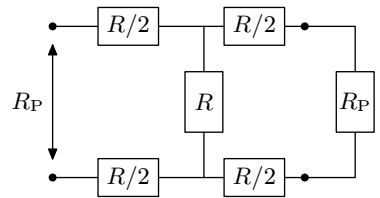
Obr. 4

Toto je nekonečná sieť, ktorá sa dá rozdeliť na dve časti (vpravo a vľavo od uzlov A, B), zapojené voči sebe paralelne. Zoberme si pravú polovicu nekonečnej siete. Jej odpor nech je  $R_p$ . Po vložení ďalšej jednotky sa odpor nezmení (viď obr. 5).

Celkový odpor polovice nekonečnej siete je

$$R_p = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} + r, \text{ kde}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{R}{2} + \frac{R}{2} + R_p}.$$



Obr. 5

Po vyjadrení

$$R_p = R + \frac{R(R + R_p)}{2R + R_p},$$

$$R_P = R\sqrt{3}.$$

Zložením pravej a ľavej strany siete ( $R_P = R_L$ ) dostaneme

$$R_{\text{celk}} = \frac{R_P R_L}{R_P + R_L} = \frac{R_P}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

*Pavol Habuda*

bzucco@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha V.P ... **pramínek vody** (4 body; průměr 2,30; řešilo 10 studentů)

*Jaký je geometrický tvar (průřez) kapaliny vytékající z kohoutku v závislosti na vzdálenosti od hrdla? Pokuste se také odhadnout, v jaké vzdálenosti se proud vody začne trhat.*

Předpokládejme, že tvar potrubí a tlak v něm jsou takové, že voda z kohoutku o kruhovém průřezu vytéká laminárně počáteční rychlostí  $v_0$ . Jen v takovém případě bude mít vytékající pramínek kruhový, zužující se, průřez. Předpokládejme, že rychlost v dané výšce je v celém průřezu konstantní. Pak bude platit rovnice kontinuity v nejjednodušším tvaru, tj. průřez krát rychlost v dané výšce bude konstanta.

Dále předpokládejme, že voda je dokonalá tekutina a její proudění je nevířivé, což obojí bude platit dostatečně přesně. Pak můžeme napsat Bernoulliho rovnici, tj. pro vzdálenost  $h$  od kohoutku,  $\rho$  hustotu vody,  $v$  rychlost proudění,  $p$  tlak v daném místě a  $g$  tíhové zrychlení

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p = \frac{1}{2}\rho v_0^2 + p_0.$$

Posledním předpokladem nutným pro vyřešení bude položení  $p = p_0$ , neboli že tlak uvnitř pramínku je všude stejný.

Nyní je výpočet průměru proudu ve vzdálenosti  $h$  od kohoutku otázkou pouhého dosazení a vyjádření.

$$v = \frac{S_0 v_0}{S} = \sqrt{v_0^2 - hg},$$

$$d = d_0 \sqrt{\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 - hg}}}.$$

Ač na první pohled jsme provedli mnoho přiblížení, ve skutečnosti všechny jsou dobře splněny a tento výsledek souhlasí se skutečností. Naproti tomu druhá část úlohy, tj. odhad vzdálenosti, ve které se pramínek začne trhat je značně komplikovaný. Vysvětleme tedy pouze kvalitativně, proč se pramínek vůbec trhat začne.

Užší pramínek má větší povrchové zakřivení a tudíž je v něm větší kapilární tlak. Tedy má kapalina tendenci z místa o užším průměru vytékat. Při zužování pramínku v důsledku pádu se to samozřejmě neprojeví, kapalina nepoteče nahoru. Nesmíme ovšem zapomenout na všudypřítomné povrchové fluktuační, které budou pro dostatečně úzký pramínek natolik významné, že zúžení v jejich důsledku se díky kapilárnímu tlaku zvětší, až se pramínek zcela roztrhne. Popsat tento jev kvantitativně dá ovšem mnoho práce, pokud byste se o něm chtěli něco dozvědět, hledejte v literatuře pojem Rayleighova-Taylorova nestabilita. Závěrem pochvala pro Matouše Ringela, který se jako jediný nezalekl a vymyslel, byť velmi zjednodušený, model dávající rozumné výsledky.

*Lenka Zdeborová*

lenka@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha V. E ... paradox zmrzlináře** (8 bodů; průměr 4,50; řešilo 18 studentů)

Traduje se historka, že jeden zmrzlinář, když potřeboval rychle vyrobit led, dával do mrazáku ohřátou vodu místo studené. Ověřte, zda je skutečně možné, aby na počátku teplejší voda zmrzla rychleji než stejné množství vody studené. Specifikujte při jakých podmínkách se to může stát.

**Teorie**

Je známo, že popsáný efekt skutečně existuje. V literatuře ho můžete najít pod heslem Mpembův jev. Důvod, proč by studená voda měla zmrznout dříve než teplá, je jasný na první pohled, o důvody, proč by tomu mělo být naopak, se fyzici přou dodnes. Shrňme zde ty nejčastěji uváděné.

**• Vypařování**

Teplá voda se bude zjevně vypařovat intenzivněji. Tím ztratí něco ze své hmotnosti, ale hlavně přijde o ty nejenergetičtější molekuly. Tím se může poměrně intenzivně ochladit (na tomto principu pracují například vývěvové zkapalňovače helia). Bohužel fyzikální popis vypařování je neobvykle složitý, takže odhadnout, jak velký dopad bude mít na mrznutí vody, je značně netriviální.

**• Složení vody**

Běžně dostupná voda obsahuje kromě molekul  $\text{H}_2\text{O}$  spoustu dalších iontů, molekul plynů apod. Tyto příměsi hrají významnou roli jako krystalizační jádra při vzniku ledu. Dá se předpokládat, že v převařené vodě bude těchto příměsí méně, což by mohlo ovlivnit proces zamrznutí. Není ovšem zdaleka jasné, zda by voda bez příměsí měla zamrznat rychleji než voda „špinavá“.

**• Vznik teplotního gradientu**

Hustota vody se mění s teplotou a tak voda v nádobce bude mít tendence se horizontálně vrstvit. Podle některých názorů bude toto vrstvení vypadat jinak u studené vody a u vody původně teplé ochlazené na stejnou teplotu. Podle našeho názoru zde hraje spíše roli to, za jak dlouho se takové rozvrstvení vytvoří. Dá se předpokládat, že u teplé vody se utvoří rychleji. Potom bude nejteplejší voda u hladiny, což urychlí vypařování. U studené vody se bude rozvrstvení vytvářet pomaleji, což zpomalí i vypařování. Kvantitativní vyjádření tohoto jevu je opět netriviální a jen proměření teplotního gradientu bez nějakého infra-snímače prakticky neproveditelné.

**• Odvod tepla podložkou**

Nádobka s teplou vodou by mohla rozmrazit led pod sebou v mrazáku a tím zlepšit odvod tepla.

**Experiment**

Naše vybavení se sestávalo ze 2 kelímků od pomazánkového másla (průměr  $d = 7,88$  cm), a ledničky s teplotou mrazáku  $-8^\circ\text{C}$  a objemem 30 l. Teplá voda měla přibližně  $65^\circ\text{C}$ .

Výše uvedené důvody naznačují, že při chladnutí hrají podstatnou roli i jiné faktory než jen počáteční teploty. Abychom mohli proměřit jejich kvantitativní vliv, měli bychom uspořádat sérii experimentů a v každém se zaměřit právě na jeden z vlivů. Pro začátek jsme měřili mrznutí vody ve dvou nádobkách o stejné počáteční teplotě.

**• Pokus 1**

Do první nádobky jsme nalili obyčejnou vodu z vodovodu, do druhé, pečlivě vyčištěné, stejné množství destilované vody (která by měla obsahovat méně příměsí). Obě vody začaly

mrznout v prakticky stejný okamžik (po 68 minutách), ale struktura ledového obalu bylo rozdílná. U destilované vody šlo o hladkou vrstvičku okolo dna, stěn a hladiny. Obyčejná voda vytvářela zajímavější krystaly a vrstva nebyla souvislá. K efektu podchlazení nedošlo, pravděpodobně vlivem mechanických vibrací vyvolaných motorem ledničky.

### • Pokus 2

Tentokrát jsme použili stejnou vodu, ale jednu nádobku jsme uzavřeli, čímž jsme znemožnili unikát vodním parám. Voda v otevřené nádobce zmrzla po 60 minutách zatímco v uzavřené po 83, což potvrzuje, že vypařování je významným jevem při procesu ochlazování.

### • Pokus 3

Opět jsme použili stejné vody a stejné počáteční teploty, ale jednu nádobku jsme zespoda odizolovali. Voda v izolované nádobce zmrzla o trochu později, ale rozdíl (3 minuty) byl na hranici měřitelnosti.

Tyto pokusy ukázaly, že jediným opravdu významným faktorem při ochlazování je vypařování. Budeme předpokládat, že intenzita vypařování souvisí s plochou hladiny. Další k experimenty provedeme s rozdílnými počátečními teplotami a postupně budeme měnit poměr plochy hladiny a objemu.

Jak je patrné z tabulky, teplá voda sice vždy zmrzla později, ale čím byl poměr větší, tím těsnější byl rozdíl. Za určitých okolností (např. s mrazákem o nižší teplotě) by pravděpodobně bylo možné Mpembův jev pozorovat.

$S/V$ [cm <sup>-1</sup> ]	$t_{\text{hot}}$ [min]	$t_{\text{cold}}$ [min]	$t_{\text{hot}}/t_{\text{cold}}$
2,3	85	60	1,42
3,8	70	55	1,30
7,7	27	23	1,17

### Závěr

Mpembův jev jsme sice přímo nepozorovali, ale potvrdili jsme, že počáteční teploty nejsou jediný důležitý faktor ovlivňující dobu ochlazování. Pokud bychom měli zhodnotit příspěvek výše zmíněných procesů, pak se nám jako hlavní jeví vypařování. Vliv teplotního rozvrstvení jsme samostatně neproměřovali a zahrnuli ho do efektu vypařování. Naopak jsme nezjistili zásadní vliv způsobený složením vody ani únikem tepla podstavou nádobky. To ale může být způsobené našim uspořádáním experimentu a za jiných podmínek se jejich vliv nedá vyloučit.

### Literatura

[1] *Vesmír*, 11/2002, str. 615

[2] <http://library.thinkquest.org/C008537/cool/freeze/freeze.html>,  
mirror na <http://fykos.mff.cuni.cz/cz/rocnik16/freeze/>

**Michael Komm**

michael@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha V. S ... algebra (5 bodů; průměr 4,31; řešilo 13 studentů)

a) Dokažte, že vektory  $v_1 = (1, 2, 3)$ ,  $v_2 = (-1, 0, 1)$ ,  $v_3 = (1, 1, 1)$  jsou lineárně závislé.

b) Vyřešte následující soustavu diferenciálních rovnic pomocí výpočtu exponenciály matice

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diskutujte tvar trajektorie řešení v rovině  $x, y$  v závislosti na znaménku parametrů  $a, b$ .

- c) Napište matice  $R_1, R_2, R_3$  popisující prostorové rotace o úhel  $\pi/2$  okolo os  $x, y$  a  $z$  a spočítejte komutátory  $[R_1, R_2]$ ,  $[R_1, R_3]$  a  $[R_2, R_3]$ . Jako bonus se můžete pokusit své výsledky zapsat v jednotném tvaru pomocí takzvaného Levi-Civittova  $\varepsilon$ .
- a) Lineární závislost vektorů  $v_1, v_2, v_3$ , ověříme tak, že nalezneme tři čísla  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , z nichž je alespoň jedno nenulové, a platí  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$  (symbol „0“ na pravé straně této rovnosti představuje nulový vektor a nikoliv číslo 0!). Nulový vektor má nulové všechny složky. Odtud dostáváme pro koeficienty  $\alpha$  podmínky

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0, \quad 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Tuto soustavu rovnic můžeme vyřešit metodou Gaussovy eliminace. Dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Vidíme, že poslední řádek této matice se vynuloval, což znamená, že  $\alpha_3$  musí splňovat podmínku  $0 \cdot \alpha_3 = 0$  a můžeme ho tedy volit libovolně (např. 2). Lineární závislost je tímto dokázána. Pro úplnost můžeme ještě dopočítat zbylé koeficienty  $\alpha_1, \alpha_2$ . Pohledem na poslední matici v (1) snadno zjistíme, že  $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = -1$  (zvolili jsme  $\alpha_3 = 2$ ). Jinou metodou, jak dokázat lineární závislost zadaných vektorů je koeficienty  $\alpha$  uhádnout.

- b) Pomocí matice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (2)$$

můžeme reprezentovat komplexní číslo  $a + bi$ . Skutečně, nechť  $x = a + bi$  a  $y = c + di$  jsou dvě komplexní čísla. Součet a součin těchto čísel je  $x + y = (a + b) + (c + d)i$  a  $xy = (ab - cd) + (ad + bc)i$ . Pokud těmto číslům přiřadíme matice podle (2) (označme je  $X, Y$ ), bude součet a součin těchto matic (ověřte)

$$X + Y = \begin{pmatrix} a + c & -b - d \\ b + d & a + c \end{pmatrix}, \quad XY = YX = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}.$$

Diagonální a nediagonální prvky výsledných matic tedy odpovídají reálné a imaginární části součtu (součinu) čísel  $x, y$ , tak jako v (2). Dále uvažujme takto. Exponenciála matice je definována pomocí Taylorovy řady  $e^X = \sum_{n=0}^{\infty} X^n/n!$ . V této definici vystupují pouze operace sčítání a násobení, které (jak jsme ověřili výše) jsou zachovány při zobrazení mezi komplexními čísly a maticemi typu (2) (obraz součtu je součet obrazů a obraz součinu je součin obrazů). Exponenciálu matice  $M$  typu (2) tedy můžeme spočítat tak, že ji přiřadíme komplexní číslo  $m$ , spočítáme jeho exponenciálu (s využitím vzorce  $e^{(a+bi)} = e^a (\cos b + i \sin b)$ ) z prvního dílu seriálu) a výsledku přiřadíme zpět matici, kterou prohlásíme za exponenciálu  $M$ .

Stačí si již jen vzpomenout na čtvrtý díl seriálu, ve kterém bylo uvedeno, že řešení soustavy diferenciálních rovnic  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = A\mathbf{v}$  kde  $\mathbf{v}$  je vektor, jehož složky jsou neznámé funkce a  $A$  je matice soustavy lze zapsat jako  $\mathbf{v}(t) = e^{At} \mathbf{v}_0$  kde  $\mathbf{v}_0$  je vektor počáteční podmínky (všimněte si, že tato formule vypadá formálně úplně stejně jako v jednodimenzionálním případě).



Řešením zadané soustavy je tedy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

V tomto výsledku poznáváme nám známou matici pro rotaci o úhel  $bt$  okolo počátku (vynásobenou faktorem  $e^{at}$ ). Vektor  $(x, y)$  se tedy s časem vyvíjí tak, že se otáčí okolo počátku s úhlovou rychlostí  $\omega = b$  a zároveň se mění jeho délka úměrně faktoru  $e^{at}$ . Trajektorie řešení tedy tvoří spirály. Smysl rotace je dán znaménkem parametru  $b$  a znaménko parametru  $a$  rozhoduje o tom, zda se spirála zavíjí nebo rozvíjí. Ve speciálním případě  $a = 0$  pak trajektorie tvoří kružnice.

Pokuste se na základě těchto výsledků rozhodnout, za jakých podmínek bude poloha  $(0,0)$  stabilní, tj. kdy se řešení s počáteční podmínkou danou vektorem  $(0,0)$  vrátí zpět do blízkosti tohoto bodu v případě, že ho malinko postrčíme mimo počátek souřadné soustavy.

- c) Matici  $R_3$  popisující rotaci o úhel  $\pi/2$  okolo osy  $z$  snadno nalezneme, známe-li matici popisující rotaci o obecný úhel  $\varphi$  okolo této osy (ta byla uvedena v pátém díle) pouhým dosazením  $\varphi = \pi/2$  dostáváme

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

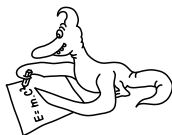
Zbylé dvě matice  $R_1, R_2$  získáme buď tak, že si uvědomíme jak si vymění role osy  $x, y, z$  při ostatních rotacích a přehodíme příslušné řádky a sloupce v (3). Jinou možností je si přímo rozmyslet, jak se při těchto rotacích mění bázové vektory  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Například při rotaci okolo osy  $x$  se  $\mathbf{e}_1$  nezmění,  $\mathbf{e}_2$  přejde na  $\mathbf{e}_3$  a  $\mathbf{e}_3$  přejde na  $-\mathbf{e}_2$  (pro  $R_2$  můžeme postupovat analogicky). Dostáváme

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Komutátory těchto matic jsou

$$[R_1, R_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [R_2, R_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [R_3, R_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Pavel Augustinský**  
pavel@fykos.mff.cuni.cz



## Řešení VI. série

**Úloha VI.1 ... záhadný obvod** (3 body; průměr 2,92; řešilo 13 studentů)

Ke kondenzátoru o neznámé kapacitě připojíme do série cívku o indukčnosti  $L$ , obvod připojíme ke zdroji napětí o frekvenci  $\omega$  a naměříme na nekalibrovaném ampérmetru nějaký proud. Poté do série připojíme ještě jednu cívku, stejnou jako ta první, a proud v obvodu se nezmění. Jaká je kapacita kondenzátoru?

Nezkalibrovaný ampérmetr zapojený v obvodu bude ukazovat efektivní hodnotu proudu, která po zapojení druhé indukce má být stejná

$$\frac{U_{\text{ef}}}{Z_1} = \frac{U_{\text{ef}}}{Z_2},$$

a tedy si musí být rovny i velikosti impedancí před a po zapojení druhé indukčnosti. V prvním případě pro velikost impedance obvodu platí

$$Z_1 = \sqrt{(X_L - X_C)^2} = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

a po zapojení druhé cívky

$$Z_2 = \sqrt{\left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Musí tedy platit

$$\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = \left|2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|,$$

což lze splnit pro

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = -\left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

případ

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \left(2\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

nevede k řešení. Pro hledanou kapacitu kondenzátoru tedy platí

$$C = \frac{2}{3\omega^2 L}.$$

V výše uvedeném řešení jsme uvažovali ideální prvky obvodu (nulový vnitřní odpor ampérmetru, nulový odpor cívky, zanedbali jejich vzájemnou indukčnost, ...).

**Jan Prokleška**  
nikola@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha VI.2 ... moucha a netopýr** (4 body; průměr 2,82; řešilo 22 studentů)

Netopýr na lovu letí proti mouše rychlostí  $3,14 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , moucha letí desetkrát pomaleji. Netopýr vysílá ultrazvukový signál o frekvenci  $f_0$ , který se odráží od mouchy a vrací k lovcvi. Netopýrova sluchadla jsou nejcitlivější na frekvence blízko  $61,3 \text{ kHz}$ . Určete  $f_0$ . Zvuk jaké frekvenci by moucha slyšela, kdyby slyšela?

Klíčem k řešení této úlohy je Dopplerův jev. Každý si jistě někdy všimnul, že když se k nám zdroj zvuku přibližuje, slyšíme zvuk o vyšší frekvenci než když zdroj stojí. Stejně tak přibližuje-li se posluchač ke zdroji. Musíme si ovšem uvědomit, že tyto dvě situace nejsou totožné, nezávisí na vzájemné rychlosti zdroje a posluchače, nýbrž na rychlosti zdroje vůči prostředí, ve kterém se šíří zvuk, a na rychlosti posluchače vůči tomuto prostředí. Odvodíme nyní vztahy pro změnu frekvence v obou těchto případech.

- a) Posluchač vůči vzduchu stojí a zdroj se pohybuje k němu rychlostí  $v$ . Rychlost zvuku ve vzduchu označme  $c$ . Vzdálenost dvou maxim zvukové vlny ve vzduchu je  $\lambda' = \lambda - vT$ , kde  $\lambda$  resp.  $T$  jsou vlnová délka resp. perioda vysílané vlny. První maximum za čas  $T$  urazí dráhu  $\lambda$ , druhé je vysláno o  $vT$  dále. Přepsáno do frekvencí a upraveno

$$f' = f \frac{c}{c - v}.$$

- b) Zdroj vůči vzduchu stojí, posluchač se k němu přibližuje rychlostí  $v$ . Čas, který uběhne, než posluchač mine dvě následující maxima vlny, je  $T' = \frac{\lambda}{v+c}$ , přepsáno do frekvencí

$$f' = f \frac{v + c}{c}.$$

Uvědomte si rozdíl mezi těmito dvěma případy. Pokud by například bylo  $v = c$ , tak v prvním případě posluchač nic neuslyší, neboť zvuk zdroj vůbec nepředběhne. Až v okamžiku, kdy bude zdroj míjet, uslyší rázovou vlnu. Kdežto v druhém případě uslyší jednoduše dvojnásobnou frekvenci. Ač vzájemná rychlost je v obou případech  $v$ .

Nás zajímá případ, kdy se pohybuje zdroj  $v_1$  i posluchač  $v_2$ , pak

$$f = f_0 \frac{v_2 + c}{c - v_1},$$

kde  $f_0$  je frekvence, kterou vysílá zdroj, a  $f$ , kterou slyší pozorovatel.

Konečně se vrhneme na řešení samotné úlohy. Označme  $v_n$  rychlost netopýra,  $v_m$  rychlost mouchy,  $f$  frekvenci, kterou nejlépe slyší netopýr,  $f_m$  frekvenci, kterou slyší moucha,  $f_n$  frekvenci, kterou vysílá netopýr. Odraz zvuku od mouchy funguje tak, jakoby moucha byla zdrojem zvuku o frekvenci, kterou slyší. Tedy

$$f = f_m \frac{c + v_n}{c - v_m}, \quad f_m = f \frac{c - v_m}{c + v_n}.$$

Moucha slyší zvuk o frekvenci

$$f_m = f_n \frac{c + v_m}{c - v_n}, \quad f_n = f \frac{c - v_m}{c + v_n} \frac{c - v_n}{c + v_m}.$$

Číselně vychází  $f_n = 60,1 \text{ kHz}$ ,  $f_m = 60,7 \text{ kHz}$ .

Závěrem podotkněme, že někteří řešitelé úlohu pochopili tak, že moucha letí směrem od netopýra. Jejich výsledky pak vypadaly stejně, jako když za  $v_m$  dosadíme  $-v_m$ . Číselně samozřejmě trochu jinak.

**Lenka Zdeborová**

lenka@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha VI.3 ... tekoucí sklo (4 body; průměr 3,14; řešilo 7 studentů)

Na starých zámcích bývají originální tabulky skla v oknech u spodního okraje širší než u horního díky tečení. Za sto let se tabulka o rozměru  $0,5\text{ m} \times 0,5\text{ m}$  tlustá  $5\text{ mm}$  rozšíří o  $0,1\text{ mm}$ . Odhadněte z těchto údajů viskozitu skla a určete, kolikrát těžší by musela být Země, aby toto tečení probíhalo turbulentně.

Předně vyvraťme onen celosvětově rozšířený mýtus. I v Encyklopedia Britannica se můžete dočíst o tom, že skleněné tabulky v chrámech z 12. století jsou naspodu širší díky tomu, že sklo je vlastně kapalina a za onen velmi dlouhý čas sklo dolů. E. D. Zanotto v článku „Do cathedral glasses flow?“ publikovaném v roce 1998 v American Journal of Physics ukázal, že kdyby tečení skla za pokojové teploty mělo být příčinou rozšíření tabulek, trvalo by mu to dobu srovnatelnou se stářím Země, nikoliv několik stovek let. Skutečnou příčinou rozšíření tabulek je údajně proces jejich výroby.

Řekněme si na rovinu, přecenili jsme vás i sebe, pokud jsme si mysleli, že lze nějak jednoduše a správně odhadnout rozšíření "padající" kapaliny s volnými povrchy. Vydejme se cestou analogií a rozměrové analýzy. Tečné napětí (síla na plochu) v pohybující se skle jde vyjádřit jako

$$\tau = \eta \frac{dv}{dx},$$

kde  $v$  je rychlost toku a  $x$  vzdálenost dvou blízkých plošek, které na sebe působí onou silou. Bude-li tok v nějakém smyslu slova ustálený, bude tato vnitřní třecí síla v rovnováze se silou  $F$ , která tok způsobuje.  $F$  by mohla být úměrná (minimálně řádově) rozdílu mezi tlakem v místě, odkud sklo teče, a tlakem v místě, kam sklo teče  $F \approx h\eta g$ . Konstanta úměrnosti bude mít rozměr povrchu. Tedy řádově můžeme položit do rovnosti

$$\eta \frac{v}{h} = h\eta g.$$

Rychlost je také přibližně  $v = T/d$ , kde  $T$  je sto let a  $d$  rozšíření. Tedy pro viskozitu

$$\eta = \frac{h^2 \eta g T}{d} \approx 10^{15}.$$

Jelikož náš postup je dost pochybný, odhadujeme chybu v řádu na  $\pm 5$ . Na internetu se dá najít, že viskozita běžného skla za pokojové teploty je  $10^{18} \div 10^{21}$  Pa.s. Takže vlastně ani nemůžeme říct, zda tečení skla za stovky let je nebo není možné.

Jednomu z organizátorů se po značném usilí nakonec podařilo za jistých podmínek kvantitativně vyřešit tečení skla lépe než jen rozměrovou analýzou. Bohužel už mu nezbyly síly na publikování tohoto výsledku do brožury, kterou právě čtete, nicméně se zavazuje, že se pokusí zmíněné řešení v co nejvíce pochopitelné formě otisknout do ročenky.

A jak těžká by měla být Země, aby proudění bylo turbulentní? Pokud dosadíte do vztahu pro Reynoldsovo číslo  $Re = \frac{\rho v d}{\eta}$  pro proudění Newtonovské kapaliny o viskozitě skla bylo nadkritické, musela by kapalina proudit rychleji než letí světlo ve vakuu, což je nesmysl. Důvodem

může ale být to, že při tak velkých viskozitách vztah pro Reynoldsovo číslo vůbec nemusí platit nebo jeho kritické hodnoty budou úplně jiné, než je obvyklé pro běžné kapaliny. Ale i tak pokud by tíha měla být taková, aby sklo pod jejím vlivem za pokojové teploty skutečně teklo, hmotnost Země by musela být tak velká, že by se zhroutila do černé díry atd.

*kolektiv organizátorů FYKOSu*  
fykos@mff.cuni.cz

#### Úloha VI.4 ... pevnost nosníku (4 body; průměr 3,71; řešilo 7 studentů)

Uvažujte pružný nosník délky  $l$ . Energie potřebná k prohnutí jednotky délky tohoto nosníku na poloměr křivosti  $R$  je  $E = \alpha/R^2$ , kde  $\alpha$  je známá konstanta. Jakou maximální silou můžeme tlačit na tento nosník, aby se neprohnul do strany?

Nejprve spočítejme do jakého tvaru se nosník prohne, budeme-li na jeho konce tlačit dostatečnou silou. Zavedme si souřadný systém tak, že nosník splývá s osou  $x$  a jeho střed leží v počátku. Uvažujme element délky nosníku vychýlený o  $y$  od osy  $x$ . Síla, kterou na nosník tlačíme, ohýbá uvažovaný element momentem síly úměrným jeho výchylce  $y$  (nakreslete si obrázek). Tomuto momentu bude úměrná křivost nosníku v daném bodě, kterou můžeme v případě, že vychýlení je malé aproximovat výrazem

$$1/R = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \simeq y''$$

Tvar nosníku tedy bude řešením diferenciální rovnice

$$y'' = -cy,$$

kde  $c$  je nějaká kladná konstanta. V této rovnici poznáváme diferenciální rovnici harmonických kmitů, jejím obecným řešením je funkce  $A \sin \sqrt{c}x + B \cos \sqrt{c}x$ . Vychýlení nosníku v bodech  $x = -l/2$ ,  $x = l/2$  musí být nulové, takže nosník zaujme tvar

$$y = p \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (4)$$

kde  $p$  je parametr udávající vychýlení středu nosníku. (Požadované okrajové podmínice odpovídají i siny a kosiny s menší periodou, ale jim odpovídající tvar není stabilní rovnovážnou polohou)

Dále uvažujme takto: Přímá poloha nosníku je vždy rovnovážná, její stabilita však závisí na působící síle. Stabilitu nosníku vyšetříme tak, že budeme předpokládat, že v důsledku nějakého náhodného vlivu (například otřesu a podobně) bude nosník nepatrně vychýlen z přímé polohy. Při tomto vychýlení se přiblíží konce nosníku o  $\Delta l$ , takže působící síla vykoná práci  $F\Delta l$ . Dále se nosník nějakým způsobem zakříví, takže podle vzorce ze zadání vzroste jeho potenciální energie. Pokud bude vykonaná práce větší než přírůstek potenciální energie, bude vychýlování „energeticky výhodné“ a proto bude pokračovat až do ustálení nové stabilní rovnovážné polohy.

Tvar nosníku může být při náhodném malém vychýlení libovolný. Uvažujme všechna možná vychýlení, při kterých se nosník zkrátí o nějaké  $\Delta l$ . Ze všech těchto vychýlení bude nárůst potenciální energie nosníku nejmenší pro vychýlení, při kterém nosník zaujme tvar stejný jako by byl v rovnovážné poloze při dané vzdálenosti jeho konců  $l - \Delta l$ . Takový tvar nosník zaujme, pokud ho upneme do „dokonalého svěráku“ a přiblížíme čelisti o  $\delta l$ . Čelisti svěráku však budou

v tomto případě na nosník působit jinou silou než  $F$ , takže nosník v této poloze rozhodně stabilní nebude.

Podle předcházejících výpočtů je tedy ze všech možných náhodných prohnutí energeticky nejméně náročné prohnutí do tvaru oblouku kosinu a právě při něm proto nejsnáze dojde k vychýlení do strany. Stačí tedy spočítat energetickou bilanci právě v tomto případě.

Zkrácení nosníku  $\delta l$  spočítáme pomocí vzorce pro výpočet délky křivky. Velikost výchylky popíšeme parametrem  $p$  (viz. (4)) a můžeme psát

$$\int_{-l/2+\Delta l/2}^{l/2-\Delta l/2} \sqrt{1+(y')^2} = l,$$

$$\int_{-l/2+\Delta l/2}^{l/2-\Delta l/2} 1 + \frac{p^2\pi^2}{2l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} \simeq l,$$

$$\Delta l \simeq \frac{p^2\pi^2}{4l},$$

kde jsme využili přibližného vztahu  $\sqrt{1+a} \simeq 1+a/2$ , který platí pro malá  $a$ . Změnu potenciální energie pak spočítáme jako

$$\Delta E_p = \int_{-l/2}^{l/2} \alpha(y'')^2 dx = \frac{\alpha p^2 \pi^4}{2l^3}$$

Porovnáním těchto výsledků dostáváme pro kritickou sílu, při které se stane nosník nestabilním

$$F = \frac{4\pi^2\alpha}{l^2}.$$

*Pavel Augustinský*  
pavel@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha VI. P ... elektromagnetický paradox (4 body; průměr 2,71; řešilo 7 studentů)

Na dielektrický disk volně se otáčející kolem své osy přilepíme závit supravodivého drátu v němž teče proud  $I_0$ . Dále kolem tohoto závitu symetricky přilepíme elektricky nabitě kuličky o náboji  $q$ . Celý disk poté začneme pomalu zahřívat. V jistém okamžiku přestane být drát supravodivý, takže v něm přestane téct proud a změní se magnetický tok přes závit. V důsledku toho vznikne podle Faradayova zákona okolo tohoto závitu elektrické pole, které bude působit na přilepené náboje, takže se celý disk začne otáčet. Na druhou stranu musí zůstat podle zákona zachování hybnosti v klidu. Tak kde je v předcházejících úvahách chyba?

Na záchranu zákona zachování momentu hybnosti můžeme zkusit použít nenulovou hmotu elektronů. Tím získáme počáteční moment hybnosti. Tento moment hybnosti ale nebude záviset na náboji připevněném na disku (na rozdíl od elektrické síly). Takže tímto paradox nevysvětlíme.

Další pokus na záchranu momentu hybnosti můžeme provést přes vlastní indukci. Když si uvědomíme, že náhlé zmizení magnetického pole by vyvolalo elektrické pole působící nejen na krajní náboje ale také na náš obvod a naindukovalo by proud opačného směru. To nás ale taky nezachrání, protože tento proud závisí na odporu, na kterém elektrická síla uvádějící kotouč do

pohybu opět nezávisí. Ve skutečnosti vlastní indukce způsobí exponenciální pokles magnetické indukce, místo okamžitého.

Tím vidíme, že problém nezachovávajícího se momentu hybnosti zůstává. Řešení je mnohem fundamentálnější, chceme-li, aby v elektromagnetickém poli platily zákony zachování, nezbývá nám než zavést (hustotu) moment hybnosti elektromagnetického pole, který je úměrný  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Kroužek se pak vlastně odrazí od elektromagnetického pole kolem něj.

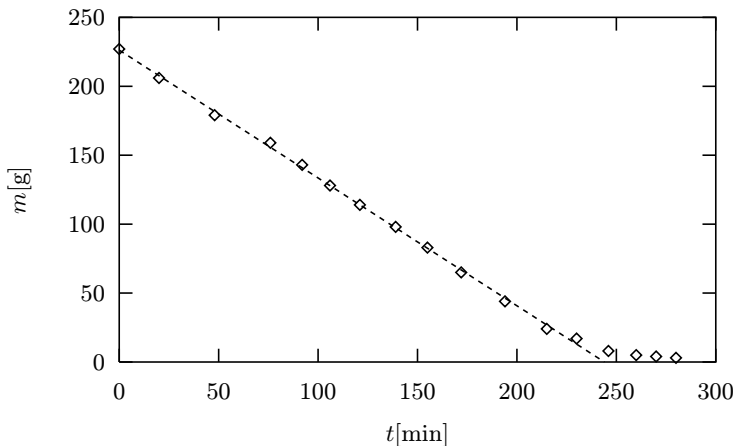
*Miro Kladiva*

miro@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha VI. E ... sušení prádla (8 bodů; průměr 4,45; řešilo 20 studentů)

Změřte časovou závislost množství vody v prádle při sušení. Nezapomeňte podrobně popsat všechny důležité podmínky, za kterých jste prováděli měření.

Měření se provádělo na prádle vyždímaném, aby z něho neteklo, a naměřila se jen závislost vypařování, přičemž se měřila závislost množství vody na čase. Množství vody se stanovovalo z rozdílu hmotností mokrého a suchého prádla. Někteří jste dělali měření venku, takže se tam musela objevit nějaká závislost na vnějších povětrnostních podmínkách, ale jinak téměř všem, co něco naměřili, vyšla aspoň částečně lineární závislost. Ta ale nemůže být po celou dobu, protože v jistém momentě se vysušování zastaví. Nutně tedy nastane i nějaké zpomalení vysušování, což se projeví přechodem lineární závislosti do závislosti blížící se nule. Jelikož my jsme měření neprováděli, dovolili jsme si použít řešení Jardy Trnky. Naměřené hodnoty jsou vyneseny do grafu na obr. 6.



Obr. 6. Závislost hmotnosti na čase

Z grafu by se dalo usoudit, že závislost je zpočátku dobře aproximovaná přímkou. Což by se dalo vysvětlit tím, že plocha, na které je vlhkost, je pořád stejná a proto se i rychlost vypařování nemění. Tím ale předpokládáme, že množství vody, která se drží na povrchu je neměnné. Kdybychom uvažovali, že množství vody na povrchu je úměrné celkovému množství vody, což se dá vyjádřit diferenciální rovnicí

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N,$$

kde  $\alpha$  je nějaká konstanta úměrnosti. Řešení této diferenciální rovnice vede na exponenciální závislost. Tato pravděpodobně určuje chování v závěru usychání. Musíme dát ale pozor na to, že exponenciála se dá na jistém intervalu velmi dobře vyjádřit lineární závislostí, takže rozdíl je v rámci chyb měření nerozlišitelný. Na rozlišení se musí provést pečlivě a podrobné měření.

Na určení lineární závislosti jsme použili metodu nejmenších čtverců. Která hledá takové koeficienty  $a$ ,  $b$ , které minimalizují součet čtverců odchylek

$$\sum (ax_i + b - y_i)^2.$$

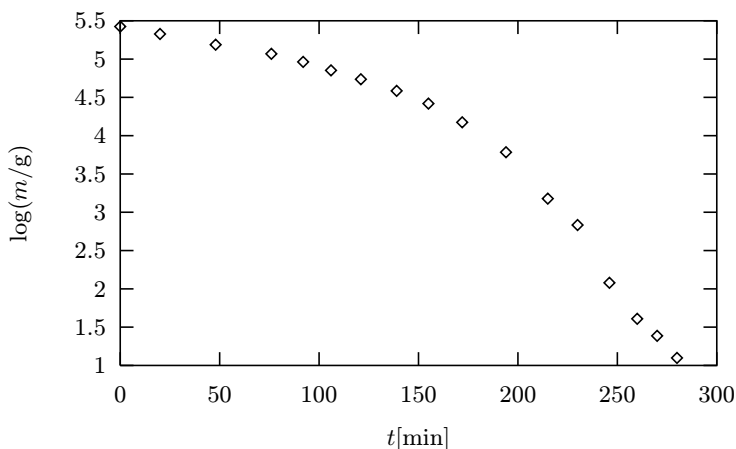
Z tohoto předpokladu dostáváme výrazy pro koeficienty lineární závislosti ve tvaru

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2},$$

$$b = \frac{\overline{yx^2} - \bar{y}\bar{x}\bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2},$$

kde  $\bar{x}$  udává střední hodnotu  $x$ . Daty jsme proložili tuto přímkou proto, abychom získali konkrétní hodnoty. Pro naše účely ale stačí potvrzení, že daná závislost je lineární (tady by stačila i mnohem jednodušší metoda proložení přímkou rukou, ale proč nevyužít možností dnešní techniky, která tento výpočet udělá za nás). Abychom ověřili, že závislost není jenom exponenciální, tak jsou na obr. 7 vyneseny i logaritmy naměřených veličin, kde jasně vidíme, že získaná závislost není na celém oboru lineární, jak by exponenciální závislosti odpovídalo.

$$\log m = \log (m_0 e^{-\alpha t}) = \log m_0 - \alpha t.$$



Obr. 7. Závislost zjevně není exponenciální

Na závěr můžeme říct, že daný proces se dá téměř v celém průběhu aproximovat lineární závislostí. Poznamenejme, že mnoho z vás proložilo křivku jenom lineární lomenou čarou, což není příliš vhodné, lepší je ponechat spíš body a pokusit se nanést jednu přímkou, aby co nejlépe vystihovala alespoň část měření.

*Miro Kladiva*

miro@fykos.mff.cuni.cz



## Úloha VI. S ... vícerozměrné integrály (5 bodů; průměr 3,73; řešilo 11 studentů)

- a) Spočítejte průměrnou vzdálenost cestovatele náhodně se pohybujícího po severní polokouli od severního pólu a od rovníku (předpokládejte že cestovatel se pohybuje rovnoměrně po celém povrchu polokoule, za vzdálenost berte délku cesty po povrchu Země).
- b) Uvažujte nekonečně vysokou rotačně symetrickou věž, jejíž poloměr ve výšce  $h$  nad zemí je  $r = a/(1 + (h/a))$ , kde  $a = 1$  m. K dispozici máme barvu, jejíž krycí schopnost je  $10 \text{ m}^2$  na litr. Rozhodněte, zda potřebujeme více barvy na natření nebo naplnění této věže barvou.
- c) Trpaslíci se rozhodli, že pomohou Sněhurce při vaření. Sněhurka tedy rozkrájela jeden (dokonale kulatý) brambor na sedm stejně tlustých plátků a rozdala je trpaslíkům k oškrábání. Rozhodněte, který z trpaslíků bude mít nejvíce práce (trpaslíkem vynaložené usílí je úměrné povrchu oškrábané šlupky).

- a) Průměrnou vzdálenost cestovatele od pólu (rovníku) spočteme takto: Pravděpodobnost nalezení cestovatele v oblasti o ploše  $S$  je  $\frac{S}{2\pi R^2}$ , kde  $R$  je poloměr Země. Jeho průměrná vzdálenost od pólu pak bude rovna součtu vzdáleností všech elementárních plošek  $dS$  ležících na severní polokouli (míst, kde se může cestovatel nacházet) od rovníku vážených pravděpodobnostmi nalezení cestovatele na dané plošce. Tedy

$$\langle d_P \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R \vartheta \frac{1}{2\pi R^2} R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = R \int_0^{\pi/2} \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = R.$$

Analogicky nalezneme střední vzdálenost od rovníku jako

$$\langle d_R \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R(\pi/2 - \vartheta) \frac{1}{2\pi R^2} R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = R \frac{\pi}{2} - d_P = R \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

- b) Objem (povrch) věže spočítáme pomocí vzorce pro výpočet objemu (povrchu) rotačního tělesa. Dostáváme

$$V = \int_0^\infty \pi \left( \frac{a}{1+h/a} \right)^2 dh = \pi a^2 \left[ \frac{-a}{1+h/a} \right]_0^\infty = \pi a^3$$

a pro povrch

$$S = \int_0^\infty 2\pi \frac{a}{1+h/a} \sqrt{1 + \left( \frac{dr}{dh} \right)^2} dh.$$

Výraz pod odmocninou v tomto integrálu má vždy hodnotu alespoň jedna a proto můžeme povrch zdola odhadnout tak, že jej nahradíme jedničkou (zmenšíme-li hodnotu integrované funkce, zmenší se i celý integrál), tedy

$$S > \int_0^\infty 2\pi \frac{a}{1+h/a} dh = [2\pi a^2 \ln(1+h/a)]_0^\infty = \infty.$$

Povrch věže je tedy narozdíl od objemu nekonečný a proto ji můžeme barvou naplnit, ale nikoliv natřít.

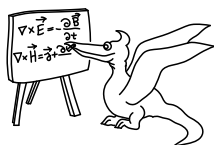
- c) Spočítejme povrch šlupky velmi tenkého „chipsu“ tloušťky  $dx$  ukrojeného ze sférického bramboru, jehož střed leží ve vzdálenosti  $d$  od středu bramboru. Obvod takového chipsu je

$2\pi\sqrt{R^2 - d^2}$ , kde  $R$  je poloměr bramboru. Jeho slupka však svírá s osou rotační symetrie chipsu úhel  $\cos \varphi = \sqrt{1 - d^2/R^2}$ . Povrch slupky chipsu je tedy

$$dS = \frac{2\pi\sqrt{R^2 - d^2}}{\sqrt{1 - d^2/R^2}} dx = 2\pi R dx.$$

Vidíme, výsledek je nezávislý na vzdálenosti chipsu od středu bramboru, tedy povrch libovolného plátku bramboru (ten si můžeme představit jako složený z chipsů) závisí pouze na jeho tloušťce, a nikoliv na místě, ze kterého byl ukrojen. Všichni trpaslíci tedy budou mít stejně práce.

*Pavel Augustinský*  
pavel@fykos.mff.cuni.cz



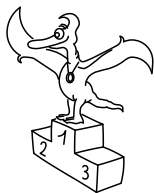
## Seriál na pokračování

### Kapitola 7: Dovětek

Na závěr letošního seriálu bych rád poznamenal, že text rozhodně nebyl určen k tomu, aby jej celý pochopil čtenář, který se s problematikou setkává poprvé. Naopak, ne zcela vydařeným, záměrem autora bylo, aby si z každého dílu něco odnesli jak začínající tak pokročilejší, neboť věk a znalosti řešitelů se zákonitě liší. Proto je naprosto normální, jestli jste něco nepochopili (pro zajímavost uvedme, že se vzorcem (32) ze čtvrtého dílu seriálu, se nesetká ani student MFF během prvních sedmi semestrů základního kurzu matematiky a většina z nich ani po zbytek studia . . .).

Doufám tedy, že jsme vás neodradil od dalšího bádání v oblasti matematiky, či snad dokonce přírodních věd vůbec, a že vaše touha po poznání nebude podlomena několika případnými neúspěchy.

*Pavel Augustinský*  
pavel@fykos.mff.cuni.cz



## Pořadí řešitelů po VI. sérii



### Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	4	8	5	32	100	194
1. Jaroslav Trnka	G Na Pražačce	3	3	4	4	4	7	4	29	88	164
2. Lukáš Chvátal		-	-	-	-	-	-	-	0	81	118
3. Jan Prachař	G F. M. Pelcla	2	4	5	4	-	-	5	20	84	81
4. Tibor Vansa	G Matiční	-	-	-	-	-	-	-	0	63	66
5. Miroslav Hejna	G F. M. Pelcla	-	-	-	-	-	-	-	0	97	63
6. Karel Tůma	G Matiční	-	-	-	-	-	-	-	0	61	54
7. Jiří Lipovský	G Bystřice n. Pern.	-	-	-	-	-	-	-	0	86	32
8. Lukáš Vozdecký	G Vejrostova, Brno	-	-	-	-	-	-	-	0	52	29
9. Václav Cviček	G Petra Bezruče	-	-	-	-	-	-	-	0	90	26
10.–11. Marek Pavlů	SOU Litovel	3	2	-	-	-	-	-	5	92	23
Jan Perný	G Nová Paka	-	-	-	-	-	-	-	0	30	23
12.–13. Michal Bareš	G Mikulášské náměstí	-	-	-	-	-	-	-	0	80	20
Bryan Chen		-	-	-	-	-	-	-	0	61	20
14. Marek Vyšínka	G Matyáše Lercha	-	-	-	-	-	-	-	0	89	17
15. Lukáš Snášel	COP Hronov	-	-	-	-	-	-	-	0	80	16
16. Matěj Týč	G Zastávka	-	-	-	-	-	-	-	0	63	15
17. Tomáš Kozelek	G Kadaň	-	-	-	-	-	-	-	0	62	13
18. Miloslav Havelka	G Zastávka	-	-	-	-	-	-	-	0	73	11
19. Barbora Galaczková		-	-	-	-	-	-	-	0	67	10
20. Kateřina Jelénková	G Staré Město	-	-	-	-	-	-	-	0	100	8
21. Luboš Rabčan	G Trstená	-	-	-	-	-	-	-	0	19	7
22. Miroslav Zgažar	SPŠCh Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	0	75	6
23.–26. Vendula Exnerová	G Nad Štolou, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	24	4
Josef Hanuš	G Děčín	-	-	-	-	-	-	-	0	19	4
Radim Kusák	G Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	0	100	4
Martin Szablatura		-	-	-	-	-	-	-	0	100	4
27.–29. Veronika Chromčíková	G Prerov	-	-	-	-	-	-	-	0	25	1
Petr Navrátil	G Prerov	-	-	-	-	-	-	-	0	25	1
Zuzana Svobodová	G Zlaté Moravce	-	-	-	-	-	-	-	0	25	1

## Kategorie třetích ročníků

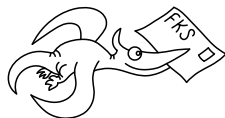
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	4	8	5	32	100	194
1. <i>Matouš Ringel</i>	G Broumov	3	4	4	5	4	7	5	32	93	181
2. <i>Jana Matějová</i>	SPŠ Chrudim	3	4	–	5	–	7	5	24	85	134
3. <i>Alexandr Kazda</i>	G Nad Alejí, Praha	3	4	4	4	4	3	5	27	72	129
4. <i>Jan Moláček</i>	G J. K. Tyla	–	–	–	–	–	–	–	0	90	69
5. <i>Lucie Strmisková</i>	G Kyjov	3	4	–	–	–	2	3	12	72	53
6. <i>Vojtěch Krejčířík</i>	G Kroměříž	3	4	2	–	–	7	3	19	69	50
7. <i>Pavel Hála</i>	G Český Krumlov	–	4	2	–	–	5	–	11	53	49
8.–9. <i>Petr Dostál</i>	G Žamberk	–	–	–	–	–	–	–	0	47	46
<i>Martin Rybář</i>	GOA Blansko	3	1	–	2	–	5	–	11	56	46
10. <i>Jan Ondruš</i>	G F. M. Pelcla	–	–	–	–	–	–	–	0	48	38
11.–12. <i>Michal Růžek</i>	G Arcibiskupské	3	2	–	–	–	4	–	9	65	36
<i>Vladimír Sommer</i>	G Ždár nad Sázavou	–	–	–	–	–	6	–	6	80	36
13. <i>Zuzana Rozlívková</i>	G Boženy Němcové	–	4	–	–	–	–	3	7	51	35
14. <i>Hynek Hanke</i>	G Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	45	33
15. <i>Jan Fazekáš</i>	ISŠ Sokolov	3	4	–	–	1	–	–	8	60	28
16. <i>Jakub Závodný</i>	G Bratislava, Grösslingova	–	–	–	–	–	–	–	0	69	27
17. <i>Jana Hrudíková</i>	G Přerov	–	–	–	–	–	–	–	0	82	23
18. <i>Jan Olšina</i>	G Kroměříž	–	–	–	–	–	–	–	0	72	21
19. <i>Zdeněk Vaňa</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	56	14
20. <i>Petr Bílý</i>	G Slaný	–	–	–	–	–	–	–	0	76	13
21.–22. <i>Jan Skalický</i>	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	46	12
<i>Radoslav Sopoliga</i>	G Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	31	12
23. <i>Jan Švarcbach</i>	G Louny	–	–	–	–	–	–	–	0	20	10
24.–26. <i>Tomáš Gavenčíak</i>	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	38	9
<i>Pavol Lakatoš</i>	G Velké Kapušany	–	–	–	–	–	–	–	0	25	9
<i>Michal Witiska</i>	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	31	9
27.–28. <i>Jan Křetínský</i>	G Matyáše Lercha	–	–	–	–	–	–	–	0	67	8
<i>Petra Suková</i>	G Svitavy	–	–	–	–	–	–	–	0	100	8
29.–30. <i>Jan Křivonožka</i>	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	29	7
<i>Libor Kukačka</i>	GOA Vrchlabí	–	–	–	–	–	–	–	0	37	7
31. <i>Pavína Karníková</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	0	22	6
32. <i>Kateřina Balcarová</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	0	21	5
33.–34. <i>Markéta Novotná</i>	G Hranice	–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
<i>Martina Smolová</i>	G Písek	–	–	–	–	–	–	–	0	24	4
35. <i>Eva Lovišková</i>	G V. Makovského	–	–	–	–	–	–	–	0	25	3
36.–37. <i>Michal Havel</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	8	2
<i>Ivan Patáčík</i>	G Partizánské	–	–	–	–	–	–	–	0	17	2
38.–39. <i>Jana Pechková</i>	G Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	0	11	1
<i>Stanislav Plánička</i>	G Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
40. <i>Jana Babováková</i>	G Most	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

## Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	4	8	5	32	100	194
1. Anton Repko	G Sv. Mikuláša, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	0	86	104
2. Petr Houštěk	G Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	0	63	64
3. Peter Greškovič	G Svidník	–	1	1	–	2	–	–	4	41	57
4. Lenka Rychtrová	G Louny	–	1	–	2	–	3	–	6	31	43
5. Michal Humpala	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	56	33
6. Martin Takáč	G Nové Zámky	–	–	–	–	–	–	–	0	47	30
7. Mária Šedivá	G Ludovíta Štúra	–	2	–	–	–	3	–	5	44	23
8. Hana Suchomelová	G Ludovíta Štúra	–	2	–	–	–	3	–	5	43	21
9. Pavel Kocourek	SPŠ Panská	3	4	–	–	2	–	–	9	86	19
10. Zdeněk Kučka	G Žďár nad Sázavou	–	–	–	–	–	–	–	0	20	18
11. Jiří Kulda	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	46	16
12.–13. Ondřej Sedláček	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	0	34	10
Markéta Vilimovská	G Českolipská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	37	10
14. Jiří Kubr	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	38	9
15. Rostislav Kváš	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	100	8
16. Markéta Kavalírová	G Českolipská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	30	7
17. Richard Gracla	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	30	6
18. Aleš Razým		–	–	–	–	–	–	–	0	24	4
19. Karel Hofman	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	38	3
20.–21. Kateřina Divišová	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	8	2
Monika Martinisková		–	–	–	–	–	–	–	0	15	2
22.–23. Štěpánka Mohylová	G Čs. exilu	–	–	–	–	–	–	–	0	13	1
Vladimíra Sečkárová	G J. G. Tajovského	–	–	–	–	–	–	–	0	8	1
24. Jan Vrba	G Arabská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

## Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	$\Sigma$
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	4	8	5	<b>32</b>	100	<b>194</b>
1. Tereza Klímošová	G Lanškroun	3	3	–	–	2	7	3	<b>18</b>	71	<b>51</b>
2. Jan Valášek	G Broumov	–	–	–	–	–	5	–	<b>5</b>	66	<b>41</b>
3. Jana Vrábelová	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	–	5	–	<b>5</b>	44	<b>36</b>
4.–5. Michal Sivák	G Ludovíta Štúra	–	2	–	–	–	1	–	<b>3</b>	41	<b>30</b>
Vladimír Sivák	G Ludovíta Štúra	–	2	–	–	–	1	–	<b>3</b>	41	<b>30</b>
6. Jan Bednář	COP Hronov	–	–	–	–	–	4	4	<b>8</b>	66	<b>27</b>
7. Ondrej Bogár	ZŠ Trenčín	–	1	–	–	–	–	–	<b>1</b>	44	<b>21</b>
8. Petra Malá		–	–	–	–	–	4	1	<b>5</b>	35	<b>13</b>
9. Daniela Svobodová		–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	37	<b>7</b>
10. Tomáš Bednárik	G Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	50	<b>4</b>
11. Marek Jansa	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	13	<b>2</b>
12.–13. Radek Škuta	G Čs. exilu	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	13	<b>1</b>
Zuzana Urbancová	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	25	<b>1</b>
14. David Chval	GOA Vimperk	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	0	<b>0</b>



**FYKOS**

**UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta**

**Ústav teoretické fyziky**

**V Holešovičkách 2**

**180 00 Praha 8**

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: [fykos-solutions@mff.cuni.cz](mailto:fykos-solutions@mff.cuni.cz)

e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.