

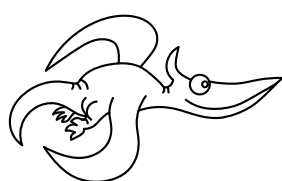
Milí řešitelé FYKOSu!

Máte v rukou poslední sérii, tedy poslední možnost, jak si ve výsledkové listině ještě trochu polepšit. Opravená řešení dostanete společně s řešením 5. série a závěrečnou výsledkovou listinou během června.

Zájemci si mohou objednat ročenku loňského ročníku semináře, ve které najdou zadání a řešení všech úloh, seriál na pokračování a pořadí řešitelů. Stačí do obálky vložit 50 korun. Stejným způsobem si můžete objednat i starší publikace – XVI. a XV. ročník za 30 korun, XIV., XIII. a XII. ročník za 20 korun, X. a IX. ročník za 10 korun a VIII. ročník za bezkonkurenčních 0 korun. Nezapomeňte do obálky vložit lístek se seznamem publikací, které si objednávejte. Úspěšným řešitelům loňského ročníku zašleme poslední ročenku zdarma!

Přejeme vám hodně úspěchů v závěrečném období školního roku.

Honza, Jarda, Jirka, Kájínek, Matouš, Pavel, Pavel, Pet, Robin & další



Zadání VI. série



Termín odeslání: 30. května 2005



Jelikož OSN vyhlásila rok 2005 za **Světový rok fyziky**, rozhodli jsme se, že tomu přizpůsobíme šestou sérii našeho semináře. Nejprve trochu historie.

Uplyne sto let od roku 1905, který se stal jakýmsi zlomem mezi klasickou a současnou fyzikou. V roce 1905 Albert Einstein vysvětlil *fotoelektrický jev* a v červnu 1905 publikoval *speciální teorii relativity*. Oba objevy odstartovaly revoluci ve fyzice. Vysvětlení fotoelektrického jevu bylo jedním ze startovních mechanismů kvantové teorie.

Speciální relativita vyústila v roce 1915 v *obecnou relativitu*, moderní teorii gravitace. Tělesa svou přítomností zakřivují čas a prostor kolem sebe. Každé těleso, na které působí jen gravitační síla, se v tomto zakřiveném prostoročase pohybuje po nejrovnějších možných drahách, tzv. geodetikách.

Einstein tedy v roce 1905 odstartoval dvojí nazírání na svět. Obecná relativita je vynikající teorií gravitace, kvantová teorie vynikající teorií ostatních tří interakcí (elektromagnetické, slabé a silné). V současné době probíhají intenzivní snahy o sjednocení obou pohledů na svět. Většina snah vede na fascinující teorii strun ve vícerozměrném prostoročase.

Následujících šest úloh poslední série je z oblasti fyziky, kterou Einstein sám studoval. Doufáme, že se vám úlohy budou líbit.

Úloha VI.1 ... *fotoefekt*

Na katodu fotočlátku dopadá ze rtuťové výbojky světlo o vlnové délce 546,1 nm a k potlačení proudu vznikajícího díky *fotoelektrickému jevu* je potřeba napětí $U_1 = 1,563$ V. Dopadá-li na katodu světlo o vlnové délce 404,7 nm, je potřeba napětí $U_2 = 2,356$ V. Vypočítejte hodnotu Planckovy konstanty h .

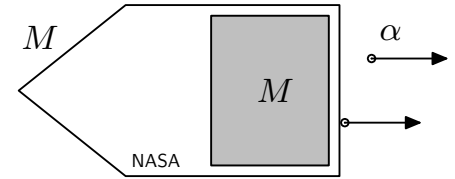
Úloha VI.2 ... jak vyrobit černou díru

Pokud stlačíme hvězdu (či jakékoliv jiné těleso) na kouli o poloměru r_g , zhroutí se nenávratně do černé díry. Tzv. *Schwarzschildův poloměr* r_g si lze v klasické analogii představit jako poloměr tělesa o hmotnosti M , z jehož povrchu lze uniknout pouze rychlostí světla (úniková rychlost je c).

Na základě znalosti hmotnosti hvězdy M určete Schwarzschildův poloměr r_g a kritickou hustotu hvězdy ρ , při které se přemění v černou díru. Příklad řešte obecně a poté konkrétně pro Zemi, Slunce a jádro galaxie o hmotnosti 100 miliard Sluncí.

Úloha VI.3 ... sonda NASA

Jet Propulsion Laboratory v Kalifornii vyvíjí pro NASA nový typ raketových pohonů. Pohonná jednotka využívá hybnost α -částic při rozpadu nuklidu fermia ${}_{100}^{257}\text{Fm}_{157}$, jehož hmotnost je m_{Fm} a poločas rozpadu T . Druhým produktem přeměny je nuklid kalifornia ${}_{98}^{253}\text{Cf}_{155}$. Hmotnost α -částice je m_α , hmotnost nuklidu kalifornia je m_{Cf} , přeměnou se uvolní energie E . Předpokládejte, že každá α -částice opouští raketu ve stejném směru.



Obr. 1

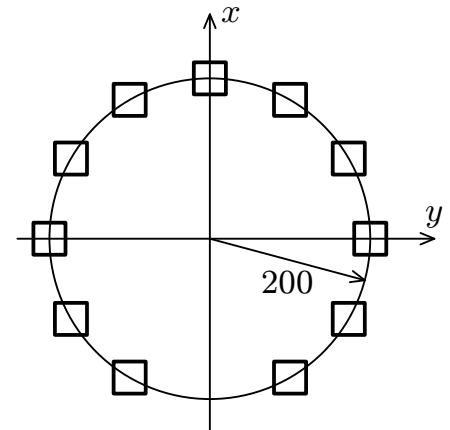
Vesmírná sonda s popsáním pohonem je na počátku v klidu, její hmotnost je M , hmotnost pohonné látky je také M . Určete rychlost sondy v po přeměně poloviny hmotnosti nuklidů fermia. Výslednou hodnotu dopočítejte i číselně pro hodnoty $E = 1,106 \cdot 10^{-12}$ J, $M = 4$ kg a $T = 100,5$ dní, ostatní hodnoty najdete v tabulkách.

Úloha VI.4 ... nezastavitelný chodec

Vraťte se na chvíli do Atén na loňské olympijské hry a určete, jaká je teoretická maximální rychlost chodce. Chodec nebude diskvalifikován, pokud se každý rozhodčí (pozorovatel) shodne na tom, že alespoň jedna noha chodce stojí v každém okamžiku na zemi.

Úloha VI.P ... výlet na Stonehenge

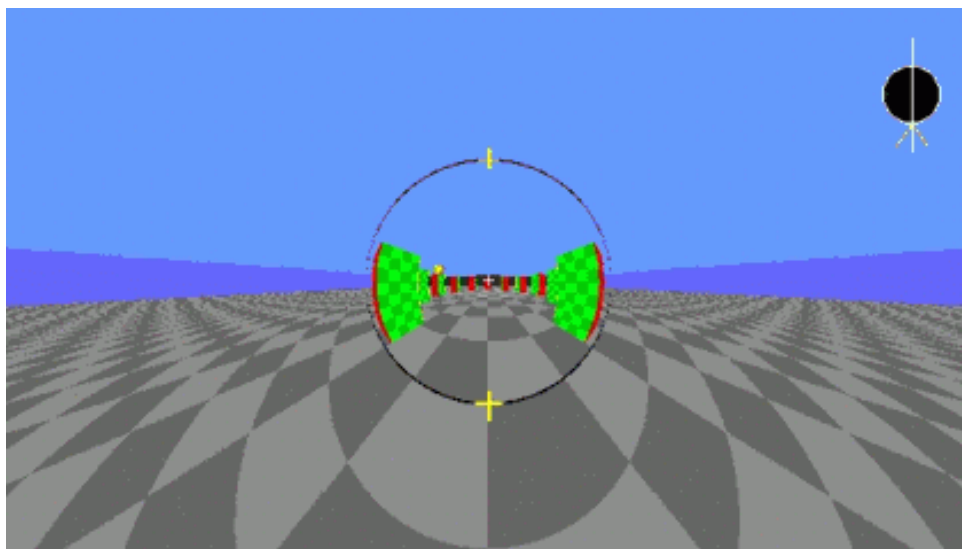
Představte si, že v raketě prolétáváte nad Stonehenge. Ten je tvořen kameny ve tvaru kvádrů rozmístěných do vrcholů pravidelného dvanáctiúhelníku (viz obrázek 2) o poloměru 200. Letíte nad osou x ve výšce $z = 50$ a díváte se vodorovným směrem. Když jste v bodě o souřadnicích $(-200, 0)$, resp. $(0, 0)$, uvidíte svět přesně tak, jak je zobrazen na obrázku 3, resp. 4. Váš stojící kamarád jej ovšem uvidí jinak, a sice jako na obrázku 5, resp. 6, přičemž oba máte shodné oči (tzn. např. stejný zorný úhel). Z obrázků přibližně určete poměr rychlosti rakety a rychlosti světla.



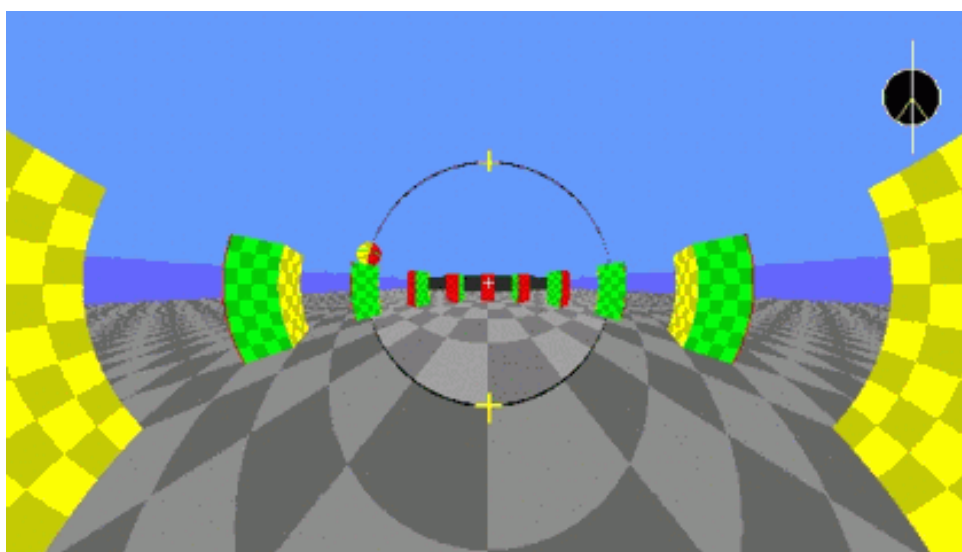
Obr. 2

Úloha VI.E ... chyťte foton

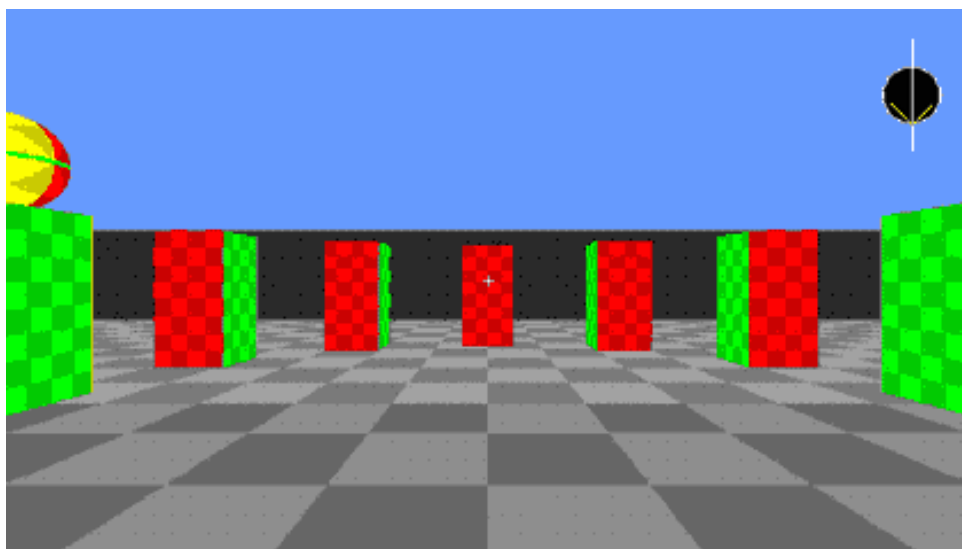
Změřte rychlost světla ve vakuu. Provést to můžete libovolným způsobem, použijte třeba i mikrovlnnou troubu.



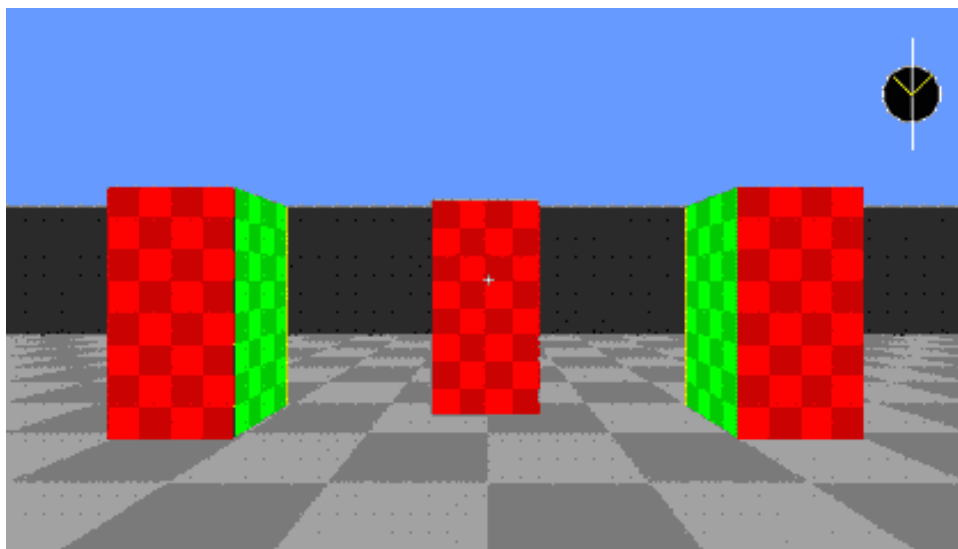
Obr. 3



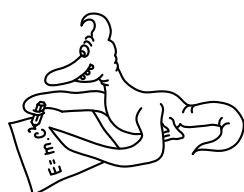
Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6



Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... atomový útok v roce 1985 (4 body; průměr 2,23; řešilo 35 studentů)

Sovětským generálům došla trpělivost. Už se nemohli dívat na provokace ze strany amerických imperialistů a stiskli červený knoflík na odpálení atomové bomby. Hned nato do řídicí místnosti přiběhl mladý poručík, který byl zodpovědný za propočítání dráhy letu, že si prý při výpočtech trochu přihnul ze stakanu vodky a důsledkem toho místo na New York míří raketa na spřátelenou Kubu.

Naštěstí je ale po ruce náhradní bomba, kterou by se ta původní dala sestřelit, čímž by se zamezilo rozkolu v socialistickém táboře. Původní raketa byla vystřelena rychlostí v_0 pod úhlem α . Jak mají sovětští experti nastavit úhel odpálení β druhé rakety, aby tu první zasáhli, když mezi oběma odpaly je časová prodleva T ?

Diskutujte, kdy se dá mír mezi spřátelenými zeměmi zachránit a kdy už ne. Odpor vzduchu zanedbejte. Všichni samozřejmě víte, že Země je placatá a její gravitační pole je homogenní.

Vymyslel Jarda Trnka v duchu 20. výročí roku 1985.

Nejprve zavedeme vhodnou soustavu souřadnic (počátek umístíme do místa startu raket, osa x bude vodorovná), pak lze popsat pohyb raket následujícími rovnicemi

$$\begin{aligned}x_1 &= v_0(t + T) \cos \alpha, \\y_1 &= v_0(t + T) \sin \alpha - \frac{1}{2}g(t + T)^2, \\x_2 &= v_0 t \cos \beta, \\y_2 &= v_0 t \sin \beta - \frac{1}{2}gt^2,\end{aligned}$$

kde x_1 a y_1 jsou souřadnice první rakety a x_2 a y_2 jsou souřadnice druhé rakety, t je čas uplynulý od vystřelení druhé rakety, v_0 je počáteční rychlost raket a g je tíhové zrychlení, zbylé veličiny

jsou dle zadání. Pro srážku musí platit $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$, porovnáním příslušných rovnic získáme soustavu dvou rovnic s neznámými β a t . Z rovnic pro x -ové souřadnice vyjádříme

$$t = \frac{T \cos \alpha}{\cos \beta - \cos \alpha}.$$

Upravujeme dále rovnici y -ových souřadnic

$$v_0 t \sin \alpha + v_0 T \sin \alpha - \frac{1}{2} g T^2 - g t T = v_0 t \sin \beta$$

po dosazení za t

$$\frac{v_0 T \cos \alpha \sin \alpha}{\cos \beta - \cos \alpha} + v_0 T \sin \alpha - \frac{1}{2} g T^2 - \frac{g T^2 \cos \alpha}{\cos \beta - \cos \alpha} = \frac{v_0 T \cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha},$$

$$v_0 T \cos \alpha \sin \alpha + (v_0 T \sin \alpha - \frac{1}{2} g T^2)(\cos \beta - \cos \alpha) - g T^2 \cos \alpha = v_0 T \cos \alpha \sin \beta$$

dostaneme rovnici

$$(\frac{1}{2} g T^2 - v_0 T \sin \alpha) \cos \beta + v_0 T \cos \alpha \sin \beta + \frac{1}{2} g T^2 \cos \alpha = 0.$$

Pro přehlednost v dalším textu označme $A = g T^2 / 2 - v_0 T \sin \alpha$, $B = v_0 T \cos \alpha$ a $C = g T^2 \cos \alpha / 2$. Protože $\beta \in (0, \pi/2)$, platí

$$B \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -(A \cos \beta + C).$$

Rovnici umocníme na druhou (může tak přibýt neplatné řešení) a upravíme do tvaru kvadratické rovnice pro $\cos \beta$

$$(A^2 + B^2) \cos^2 \beta + 2CA \cos \beta + C^2 - B^2 = 0,$$

její řešení po odsubstituování a úpravě jsou

$$\cos \beta = \frac{2gTv_0 \sin \alpha - g^2 T^2 \pm 4v_0^2 \mp 2gTv_0 \sin \alpha}{g^2 T^2 - 4gTv_0 \sin \alpha + 4v_0^2} \cos \alpha,$$

smysl má však jen $\cos \beta$ kladné

$$\cos \beta = \frac{4v_0^2 - g^2 T^2}{g^2 T^2 - 4gTv_0 \sin \alpha + 4v_0^2} \cos \alpha,$$

což je hledaný výsledek.

Na konec najdeme podmínku pro možnost sestřelení rakety. Je zřejmé, že mezi sestřelením rakety za letu a nestihnutím sestřelit raketu je situace, kdy sestřelíme raketu právě při dopadu. Pro tuto situaci platí, že obě rakety musí mít stejnou vzdálenost dopadu, a tudíž vzhledem k tomu, že mají jinak stejné vlastnosti, musí platit $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. A protože obecně hledáme řešení pro $T \neq 0$, musí být $\beta = \pi/2 - \alpha$, tedy $\cos \alpha = \sin \beta$, přičemž aby mohla druhá raketa vylétnout později a sestřelit první, musí být $\beta < \alpha$. Pro dobu letu rakety platí

$$t = 2v_0/g \cdot \sin \beta = 2v_0/g \cdot \sin \alpha.$$

Z rovnosti x -ových souřadnic $v_0 t \cos \beta = v_0(t+T) \cos \alpha$ po dosazení vyjádříme podmínku pro T

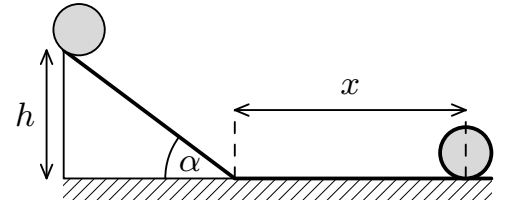
$$T < \frac{2v_0}{g} (\sin \alpha - \cos \alpha).$$

Úloha IV.2 ... za nití (4 body; průměr 2,41; řešilo 29 studentů)

Váleček o malém poloměru r a hmotnosti m se kutálí z nakloněné roviny a na jejím konci přejde hladce do vodorovného pohybu po podložce. Přitom na sebe namotává nit o délkové hustotě ρ . V jaké vzdálenosti od konce nakloněné roviny se váleček zastaví? Dále znáte výšku nakloněné roviny h a její sklon α . Tření zanedbávejte.

Úloha ze starého ročníku FYKOSu.

Zamysleme se nejprve, zda se váleček zastaví, nebo nezastaví. Na počátku nit leží na podložce a váleček ji svým pohybem vyzvedává do určité výšky. Tím vykonává práci a spotřebovává energii. Z toho tedy plyne, že se po vyzvednutí určité části nitě zastaví. Tato úvaha nás nabádá k řešení této úlohy pomocí zákona zachování energie. Hladinu nulové potenciální energie umístíme do výšky podložky. Nit ležící na zemi bude mít tedy nulovou potenciální energii. Na obrázku 7 je nakreslen váleček na počátku a po zastavení.



Obr. 7

Nejprve vypočítejme velikost mechanické energie na počátku. Váleček se nehýbe, jeho kinetická energie je tudíž nulová. Délka nitě na nakloněné rovině o výšce h a sklonu α je rovna $l = h / \sin \alpha$, její hmotnost je pak rovna $m_n = \rho h / \sin \alpha$. Těžiště nitě na nakloněné rovině je ve výšce $h/2$. Potenciální energie nitě je tedy rovna

$$E_{\text{nit}} = \frac{1}{2} m_n g h = \frac{h^2 \rho g}{2 \sin \alpha}.$$

Těžiště válečku je ve výšce $h + r \cos \alpha$ a jeho potenciální energie je rovna $mg(h + r \cos \alpha)$. Celková energie na počátku je rovna

$$E_{\text{poč}} = \frac{h^2 \rho g}{2 \sin \alpha} + mg(h + r \cos \alpha).$$

Tato energie se postupně přeměňuje v kinetickou energii válečku, později zpět v potenciální energii vyzvednuté nitě. Skutečnost, že váleček bude mít dost energie na to, aby se skutálel z nakloněné roviny nám zajišťuje jeho malý rozměr. Když se váleček zastaví, bude mít na sobě namotanou nit o délce $l + x$, kde x je vzdálenost místa zastavení válečku od nakloněné roviny. Zbytek nitě bude ležet na podložce. Celková energie bude tedy rovna potenciální energii válečku a namotané nitě. Tuto energii pak porovnáme s počáteční energií soustavy.

Předpokládejme, že po zastavení válečku je nit namotaná celými otáčkami. Proč takový zjednodušující předpoklad provádíme? Pokud bychom vypočítali přesně potenciální energii nitě namotané na válečku, zjistili bychom po porovnání počáteční a konečné energie soustavy, že dostáváme analyticky neřešitelnou rovnici pro x . Musíme tedy provést aproximaci. Navíc toto zjednodušení nám nijak významně neovlivní výsledek. Čím delší nit bude namotaná, tím přesnější řešení dostaneme. Pro malý váleček nám vyjde x mnohem větší než jeho obvod.

Těžiště nitě namotané celými otáčkami na válečku je v těžišti válečku, tj. ve výšce r . Její hmotnost je rovna $\rho(l + x)$. Celková konečná energie je tedy rovna

$$E_{\text{kon}} \doteq mgr + gr\rho(l + x),$$

kde první člen je potenciální energie válečku a druhý člen je potenciální energie nitě. Nyní dle zákona zachování energie porovnáme počáteční a konečnou energii soustavy $E_{\text{poč}} = E_{\text{kon}}$.

$$\frac{h^2 \rho g}{2 \sin \alpha} + mg(h + r \cos \alpha) = mgr + gr\rho(l + x),$$

$$x = \frac{mh}{\rho r} - \frac{m(1 - \cos \alpha)}{\rho} + \frac{h^2}{2r \sin \alpha} - \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Konkrétně pro hodnoty např. $m = 200 \text{ g}$, $r = 5 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\rho = 2 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ dostáváme uraženou vzdálenost přes 2 km. Použitá aproximace je tedy v pořádku.

Nakonec ještě malá poznámka k došlým řešením. Někteří z vás používali zákon zachování hybnosti při pohybu válečku na rovině. To ale nelze provést, neboť váleček není zcela oprostěn ode všech vnějších sil. Působí na něj tíhová síla skrze nit při jejím namotávání.

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... limuzína v garáži (4 body; průměr 2,50; řešilo 32 studentů)

Jeden z vítězů Superstar narazil na problém. Jeho nová limuzína je příliš dlouhá na to, aby se vešla do jeho staré garáže. Jeho kamarád, který studuje fyziku, si však věděl rady. Jelikož dobře zná práci Alberta Einsteina, uvědomil si, že pokud se limuzína rozjede dostatečně rychle, zkrátí se její délka z pohledu stojícího pozorovatele natolik, že se již do garáže vejde.

Na začátku a na konci garáže jsou umístěny padací dveře, které se spustí ve chvíli, kdy celá limuzína bude uvnitř. Z pohledu superstar v limuzíně se však naopak v důsledku kontrakce délek zkrátí garáž a vůz se do ní určitě nevejde. Rozhodněte, zda je možné tímto způsobem limuzínu do této garáže zaparkovat. *Podle úlohy z přednášky STR doc. Semeráka.*

Na začátku bych jen poznamenal, že tento příklad byl před rokem 1989 znám jako úloha o vysokém funkcionáři okresního výboru KSČ a jeho Tatře 613. Doba se však změnila, tudíž se změnilo i zadání úlohy.

Nezávisle na společensko-politickém podtextu je řešení tohoto zdánlivého paradoxu následovné. Z pohledu pozorovatele, který stojí v garáži, je situace jasná. Podle kontrakce délek vidí zkrácenou limuzínu, jak vjíždí do garáže. Když je uvnitř celá, zaklapnou se dveře a je hotovo. Limuzína je uvnitř, tudíž je zaparkováno.

Z pohledu řidiče limuzíny je situace poněkud složitější. Vyjdeme z Lorentzovy transformace

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Nechť auto narazí předkem v čase $t = 0$ do dveří o souřadnici $x = 0$. Ve stejném okamžiku se zaklapnou zadní dveře, jež jsou v bodě $x = -g$. Pozorovatel v autě uvidí, že se dveře zaklaply v nějakém (pozdějším) čase v bodě o souřadnici

$$x' = -\frac{g}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(do Lorentzovy transformace dosazujeme $t = 0$, $x = -g$). V soustavě spojené s autem má předek souřadnici $x' = 0$ a zadek souřadnici $x' = -a$. Požadujeme, aby se dveře zaklaply vlevo od konce auta (auto jede vůči zemi doprava, garáž proto vůči autu ujíždí doleva). To vyjádříme nerovnicí

$$\frac{-g}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} < -a,$$

odkud dostaneme stejnou nerovnost, jakou bychom dostali při výpočtu pomocí kontrakce délek v soustavě garáže

$$a < \frac{g}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Závěrečný verdikt tedy zní: Ano, limuzína bude v garáži zaparkovaná. Otázkou však je, v jakém stavu ji její majitel (ať už je to papaláš z dob minulých či hvězda šoubyznysu z dob přítomných) najde. Po zastavení se totiž limuzína roztáhne zpět na původní délku, a do garáže se tudíž přirozeně nevejde. To ovšem nic nemění na tom, že už uvnitř je. Řešení tohoto problému však již nespadá do oblasti speciální teorie relativity, ale spíše do fyziky pevných látek. Každopádně limuzína po tomto pokusu nebude pojízdná. Na to není jiný recept než si koupit jinou (či ji dostat přidělenou z ústředí strany).

Ještě pár poznámek k došlým řešením. Velké množství řešitelů použilo následující argument: Limuzínu nelze takto zaparkovat, protože po zastavení se prodlouží na původní délku a nevejde se do garáže. To je sice pravda, ale takto zaparkovaná limuzína již nebude mít ani po zastavení svou původní délku, tentokrát však ne vlivem relativistických efektů, avšak v důsledku nevratné deformace. Hodně řešitelů dospělo k závěru, že výsledek záleží na tom, z které soustavy se díváme. Z pohledu soustavy spojené s garáží bude limuzína uvnitř, ale z pohledu soustavy spojené s limuzínou bude venku. To však není možné už z prosté úvahy, že pokud se podíváme po dlouhé době na garáž (když už se limuzína zastavila a deformační procesy ustaly), tak buď ta limuzína bude uvnitř, nebo bude kus čouhat ven. A to přece nemůže v žádném případě záviset na tom, ze které soustavy se díváme.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 ... Mössbauerův jev (4 body; průměr 3,45; řešilo 20 studentů)

Frekvence fotonu vyzářeného jádrem radioaktivního železa není vždy stejná, ale při rozpadech různých jader se nepatrně liší (to platí i pro jiná jádra). Pro jednoduchost předpokládejte, že hodnota energie fotonu v klidové soustavě jádra železa leží náhodně v intervalu $(E_0 - \Delta E, E_0 + \Delta E)$, kde $E_0 = 14,4 \text{ keV}$ ($\text{keV} = \text{kiloelektronvolt}$), $\Delta E \approx 10^{-8} \text{ eV}$ ($1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

- Vyzáří-li volný nehybný atom železa foton, musí mít tento atom podle zákona zachování hybnosti opačnou hybnost než vyzářený foton. Vypočítejte kinetickou energii takového atomu a porovnejte ji s veličinou ΔE .
- Takzvaný Mössbauerův jev spočívá v tom, že je-li foton vyzářen atomem železa vázaným v krystalu, může se hybnost „zpětného rázu“ předat celému krystalu. Vypočítejte kinetickou energii krystalu (posun energie fotonu) v tomto případě za předpokladu, že krystal je složen z řádově 10^{23} atomů.

Stejně jako emise fotonu může probíhat i jeho absorpce. Foton však může být absorbován jen tehdy, když jeho energie v klidové soustavě jádra leží v intervalu $(E_0 - \Delta E, E_0 + \Delta E)$.

- Rozhodněte, zda může nehybný atom železa absorbovat foton vyzářený jiným nehybným atomem.
- Vypočítejte, jak rychle se vůči sobě musí pohybovat dva kusy železa, aby už první kus nemohl kvůli Dopplerovu jevu absorbovat fotony vyzářené druhým kusem. Dopplerovým jevem myslíme to, že frekvence záření f , kterou vyzařuje zdroj přibližující se rychlostí v , se v naší soustavě změní na

$$f' = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f.$$

Předpokládejte, že při emisi i absorpci se uplatňuje výše zmíněný Mössbauerův jev.

Potřebné konstanty naleznete v tabulkách.

Úlohu vymyslel Pavel Augustinský.

Před vlastním řešením této úlohy bude dobré vyjasnit si některé zvláštnosti ve světě atomů. Prozkoumejme nejprve proces vyzařování. Jako cokoliv ve světě atomů je i vyzařování popsáno kvantovou mechanikou a vypočítat jej není jednoduché. Nicméně nám stačí vědět, že atom, který má energii větší než minimální, může přebytečnou energii vyzářit ve formě fotonu – kvanta světla. Ovšem foton nemusí reprezentovat pouze světlo. Záleží na tom, jakou si nese energii. Takže fotony s relativně malou energií, které se vyzařují při přechodech v elektronovém obalu, pro nás znamenají mikrovlny, světlo, Röntgenovo záření, a dokonce i záření γ . Jádro vyzařuje zejména vysokoenergetické γ fotony. Jakou energii bude mít vzniklý foton, když jádro přejde z jedné hladiny na druhou? Zdálo by se, že to bude obyčejný rozdíl energií těchto hladin. Ovšem není tomu tak, a to hned ze dvou důvodů.

Za prvé, má-li dojít k přechodu mezi hladinami, jádro nemůže být přesně a pouze ve stavu odpovídajícím vyšší hladině. Tento stav je totiž tzv. stacionární, což znamená, že když už jednou jádro je v takovém stavu, zůstane v něm navždy (samozřejmě když do něj „nestrčíme“). Jistě jste už něco slyšeli o superpozici (kombinování) stavů: jádro před přechodem je dobrým příkladem oné známé Schrödingerovy kočky; jádro je spíše na vyšší hladině, ale je v něm již namícháno něco z nižší hladiny. Ježto není jasné, kolik přesně je tam vyššího stavu a kolik nižšího, není ani přesně dáno, jakou energii bude mít vyzářený foton, neboť energie stavu je také směs energií oněch dvou hladin. My samozřejmě nevíme, v jakém stavu jsou jádra v kusu železa, se kterým měříme, ale můžeme měřit s mnoha jádry a pak výsledky zprůměrovat. Takto získáme křivku udávající závislost pravděpodobnosti vyzáření fotonu na energii. Ve skutečnosti vypadá jako např. Sněžka s vrcholem umístěným nad energií, odpovídající rozdílu energií hladin; v naší úloze jsme si situaci zjednodušili.

Druhý důvod, proč energie nebude prostě rozdíl energií hladin, je zpětný ráz. Při procesu vyzařování se musí zachovávat energie a hybnost. Hybnost atomu po vyzáření je opačná, než hybnost vyzářeného fotonu, byl-li atom původně v klidu. Do bilance energie nám vstupují změna potenciální energie atomu, energie fotonu a kinetická energie atomu. Nicméně změna potenciální energie atomu je prostě rozdíl energií hladin, čili z rovnice zákona zachování energie

$$\Delta \text{energie atomu} = \text{kinetická energie atomu} + \text{energie fotonu}$$

seznáme, že energie vyzařovaných fotonů bude menší o energii zpětného rázu. Jak známo, $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ a $p = mv$, odkud $2mE_{\text{kin}} = p^2$, kde m je hmotnost tělesa, jež je vystaveno rázu, v našem případě atomu. Hybnost fotonu souvisí s energií jako $E_{\text{foton}} = pc$. Poslední vzorec plyne z teorie relativity. Velikosti hybností se musí rovnat, takže dostáváme rovnici

$$E_0 = \frac{E_{\text{foton}}^2}{2mc^2} + E_{\text{foton}}.$$

To je obyčejná kvadratická rovnice, my ji ale budeme řešit pouze přibližně, což nám usnadní práci. Kdybychom neuvažovali zpětný ráz, bude $E_{\text{foton}} = E_0$. Zpětný ráz způsobí malou změnu této energie, nechť je tato $E_{\text{foton}} = E_0 - \delta$, kde $\delta \ll \Delta$ je ona malá změna. Když toto řešení dosadíme do rovnice, dostaneme

$$0 = \frac{E_0^2 + \delta^2 + 2\delta E_0}{2mc^2},$$

kde můžeme vynechat člen δ^2 , neboť je podle předpokladu mnohem menší než ostatní členy. Takto najdeme

$$\delta \approx \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{E_0 + mc^2},$$

čili

$$E_{\text{foton}} \approx E_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{E_0}{E_0 + mc^2} \right).$$

Mol železa váží asi 56 g a nachází se v něm zhruba $6 \cdot 10^{23}$ atomů, pročez hmotnost $m \approx 9 \cdot 10^{-26}$ kg, $E_0 = 14,4 \text{ keV} = 2,3 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ a $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Z toho nakonec pro relativní změnu energie dostaneme hodnotu $1,4 \cdot 10^{-7}$, a tedy pro změnu energie $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$, což je sice málo v absolutní hodnotě, ale hodně ve srovnání s rozptylem energií fotonů způsobeným výše popsaným mechanismem.

Pojem Mössbauerův jev je označení pro situaci, kdy zpětný ráz absorbuje nikoliv jediný atom (jako v případě výše), nýbrž celý krystal najednou. Nebudeme diskutovat otázku podstaty tohoto jevu, neboť je to netriviální problém kvantové teorie pevných látek. Pro řešení naší úlohy nám postačí uvážit, že můžeme zachovat předchozí postup, avšak s m rovnajícím se nikoliv hmotnosti atomu, ale hmotnosti krystalu $m' = Nm$, kde $N \approx 1 \cdot 10^{23}$ je počet atomů v krystalu. Takto dostaneme pro hodnotu posunu energie odhad $1 \cdot 10^{-26} \text{ eV}$.

Máme-li vyzařující volný atom železa a absorbující volný atom železa, nemůže dojít k absorpci na dané energii; energie fotonů vyzařovaných i absorbovaných se nacházejí v okolí o pološířce $\Delta E \approx 1 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$ od základní energie E_0 , avšak posun energií v důsledku zpětného rázu je řádově $1 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$ (to jsme před chvílkou spočetli), okolí se tedy nebudou překrývat a to znemožní absorpci. Situace se změní s nástupem Mössbauerova jevu. Posun energií je pak pouze $\approx 1 \cdot 10^{-26} \text{ eV} \ll 1 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$; posuv proto můžeme s klidným svědomím zanedbat a k absorpci dochází.

Budeme-li nyní jedním kusem železa pohybovat, energie fotonu v laboratorní soustavě (tj. klidové soustavě druhého kusu) se změní, tentokrát v důsledku Dopplerova jevu. Díky malosti rychlosti můžeme použít jeho nejjednodušší verzi bez nějakých relativistických korekcí, tedy verzi ze zadání $f' = (1 + v/c)f$, přičemž v je kladné, když se železa přibližují. Energie fotonu je svázána s frekvencí Planckovým vztahem $E = hf$ ($h \approx 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ je Planckova konstanta), čili energie vyzářeného fotonu v laboratorní soustavě bude $E' = E(1 + v/c)$. K absorpci fotonu stojícím kusem železa bude docházet, když se tato energie bude nacházet v ΔE okolí energie E_0 , jinými slovy o $E_0 v/c$ posunutá vyzařovací charakteristika se musí překrývat s neposunutou absorpční (tj. vyzařovací) charakteristikou. Mezní případ odpovídá přibližování zdroje a nejmenší možné energii vyzářeného fotonu (příp. vzdalování a největší možné energii), tj.

$$E_0 + \Delta E = (E_0 - \Delta E) \left(1 + \frac{v}{c} \right) \approx E_0 - \Delta E + E_0 \frac{v}{c},$$

odkud $v \approx c \cdot 2\Delta E/E_0 \approx 0,4 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. Bude-li se zářící železo pohybovat (v prvním přiblížení je jedno kterým směrem) rychlostí větší než právě spočtenou, stojící kus železa nebude jím vyzářené fotony schopen absorbovat.

Objev tohoto jevu dal experimentátorům možnost zkoumat velice malé posuny frekvencí, tak malé, že se pomocí nich dá zkoumat například struktura spektrálních čar (tj. výše používaných vyzařovacích charakteristik) a jiné jemné efekty v pevných látkách. Dále se dá využít pro měření malých rychlostí, což se hodí např. při přibližování dvou kosmických lodí ve vesmíru. Pomocí něho se rovněž povedlo naměřit gravitační rudý posuv, jež předpovídá obecná teorie relativity.

Železo se k měření používá proto, poněvadž má jednu z nejužších a přitom nejvydatnějších spektrálních čar, což zlepšuje rozlišení měření. Původně se používala jádra osmia či iridia. Experimentální uspořádání může vypadat takto: zářič se pohybuje nějakou rychlostí, záření prochází skrz nepohybující se kus železa a za ním detektorem měříme intenzitu. Stojící železo bude při různých rychlostech různě absorbovat, absorbovat bude právě když se dostatečně překrývají spektrální čáry pohybujícího se a stojícího železa. Takto bychom například zjistili, že pokud má v přízemí se nacházející kus železa absorbovat fotony vyzařované železem v dvacátém patře, musí se toto přibližovat jistou rychlostí, kterou bychom změřili a odtud určili velikost rudého posuvu.

Za svůj objev byl německý fyzik Rudolf Mössbauer z Mnichova v roce 1961 oceněn Nobelovou cenou.

Matouš Ringel

matous@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . P ... rezonující sklenička (5 bodů; průměr 1,91; řešilo 22 studentů)

Kroužením mokrým prstem po hraně broušené skleničky (například na víno) lze vyloudit poměrně intenzivní zvuk. Pokud se do skleničky nalije voda, pak frekvence vyluzovaného tónu klesá se vzrůstající výškou hladiny. Sami si to vyzkoušejte a pokuste se tento jev vysvětlit.

Na problém ve vinárně narazil Michael Komm.

Skleničku s vodou si můžeme modelově představit jako jeden lineární harmonický oscilátor s určitou tuhostí k a hmotností M . Rezonanční frekvence takového oscilátoru závisí na těchto parametrech následujícím vztahem

$$f = \sqrt{\frac{k}{M}}.$$

V prvním přiblížení budeme považovat tuhost za nezávislou na množství vody ve skleničce. Hmotnost M nebude přesně součet hmotností skleničky a vody v ní, ale půjde spíše o efektivní hmotnost – voda i sklenička k ní budou přispívat svým dílem. Zde můžeme v prvním přiblížení předpokládat lineární závislost, tj.

$$M = am_{\text{sklo}} + bm_{\text{voda}}.$$

Koeficienty a a b jsou materiálové konstanty dané tvarem skleničky, tuhostí skla, viskozitou vody a dalšími veličinami. Jejich přesné určení by bylo komplikované, nám ale ke kvalitativnímu posouzení stačí předpoklad, že jde o nenulová kladná čísla. Nyní nás bude zajímat závislost frekvence na množství nalité vody.

$$f(m_{\text{voda}}) = \sqrt{\frac{k}{am_{\text{sklo}} + bm_{\text{voda}}}}.$$

Analýza takovéto funkce není obtížná. Pro kladné m_{voda} monotónně klesá, tedy s rostoucím množstvím vody ve skleničce klesá frekvence vydávaného zvuku.

V řešeních se často vyskytovaly některé chybné modely, které stojí za to rozebrat. Někteří řešitelé se domnívali, že ve skleničce rezonuje vzduchový sloupec podobně jako v píšťale varhan. To by ovšem vyvolávalo přesně opačnou závislost, tj. s rostoucím množstvím vody roste frekvence. Jiné navrhované vysvětlení bylo, že frekvence se mění vlivem tlumení kmitů sklenky o vodu. To by sice vysvětlovalo charakter závislosti, nicméně intenzita vydávaného zvuku by rychle klesala s množstvím vody, což se nepozoruje. Posledním častým modelem bylo, že se

kmity původně generované pohybem prstu po skle přenášejí do vody a ta rezonuje. Tento model ovšem nevysvětluje, proč rezonuje i prázdná sklenička a proč je změna frekvence při malých množstvích vody blízká frekvenci prázdné skleničky.

Michael Komm

michael@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . E ... čaj po večeři (8 bodů; průměr 5,33; řešilo 24 studentů)

Organizátoři FYKOSu popíjeli v menze po večeři výborný čaj. Protože jsou to zvědaví lidé, zamysleli se někteří z nich nad procesem chladnutí čaje. Předmětem sporu bylo, do jaké míry přispívají k chladnutí čaje procesy vypařování, vedení tepla a vyzařování. Pokuste se stejný problém řešit experimentálně. *Námět na úlohu zaslal do konference Jirka Franta.*

Teorie

Čaj chladne díky vypařování, vyzařování a vedení tepla. Ze Stefanova-Boltzmannova zákona můžeme už předem říci, že vliv vyzařování bude nepatrný.

Jak to naměřit? Jedním z možných způsobů bylo zjišťovat poměr tepel odevzdaných čajem jednotlivými způsoby okolí v různých časech a tím i při různých teplotách. Platí následující vztahy

$$Q_1 = ml_v, \quad Q_2 = \frac{\lambda S \Delta T \tau}{d}, \quad Q_3 = \sigma T^4 S \tau,$$

kde Q_1 je teplo odevzdané vypařováním, Q_2 je teplo odevzdané vedením a Q_3 je teplo odevzdané vyzařováním. (T je teplota, τ je čas. Pozor, l_v není měrné skupenské teplo varu, je to měrné skupenské teplo vypařování.) Při měření Q_1 měříme úbytek hmotnosti čaje v hrníčku v závislosti na čase, pro zjištění tepla odevzdaného vedením stačí pouze proměřit plochu nádoby, tloušťku jejích stěn, teplotu a zaznamenávat čas, u vyzařování to je podobné. Vše ostatní nalezneme v tabulkách. Při určování tepla odevzdaného vypařováním je však nutno odfiltrovat zbylé dva faktory (vyzařování a vedení), analogicky při měření obou zbylých tepel. (Viz dále.)

Druhý přístup, který lze zvolit, je následující. Nejprve proměřit časovou závislost teploty čaje v hrnku, kde jsou odstíněny všechny tři vlivy, poté měřit za přítomnosti pouze jednoho z faktorů, pak přidat druhý faktor a nakonec ten třetí. Dostaneme graf, kde jsou nad sebou čtyři křivky a z mezer mezi nimi vidíme podíl jednotlivých faktorů na chladnutí při různých teplotách.

Jak provést odstínění? Vypařování se zbavíme překrytím hladiny (zaujal mě nápad *Zuzany Jungrové* „přikrýt“ hladinu nalitím oleje), vedení odstraníme co nejlepší tepelnou izolací (např. zavřít hrníček do kalorimetru) a vyzařování lze odfiltrovat zabalením do alobalu. Žádný z faktorů však bohužel neodfiltrujeme stoprocentně.

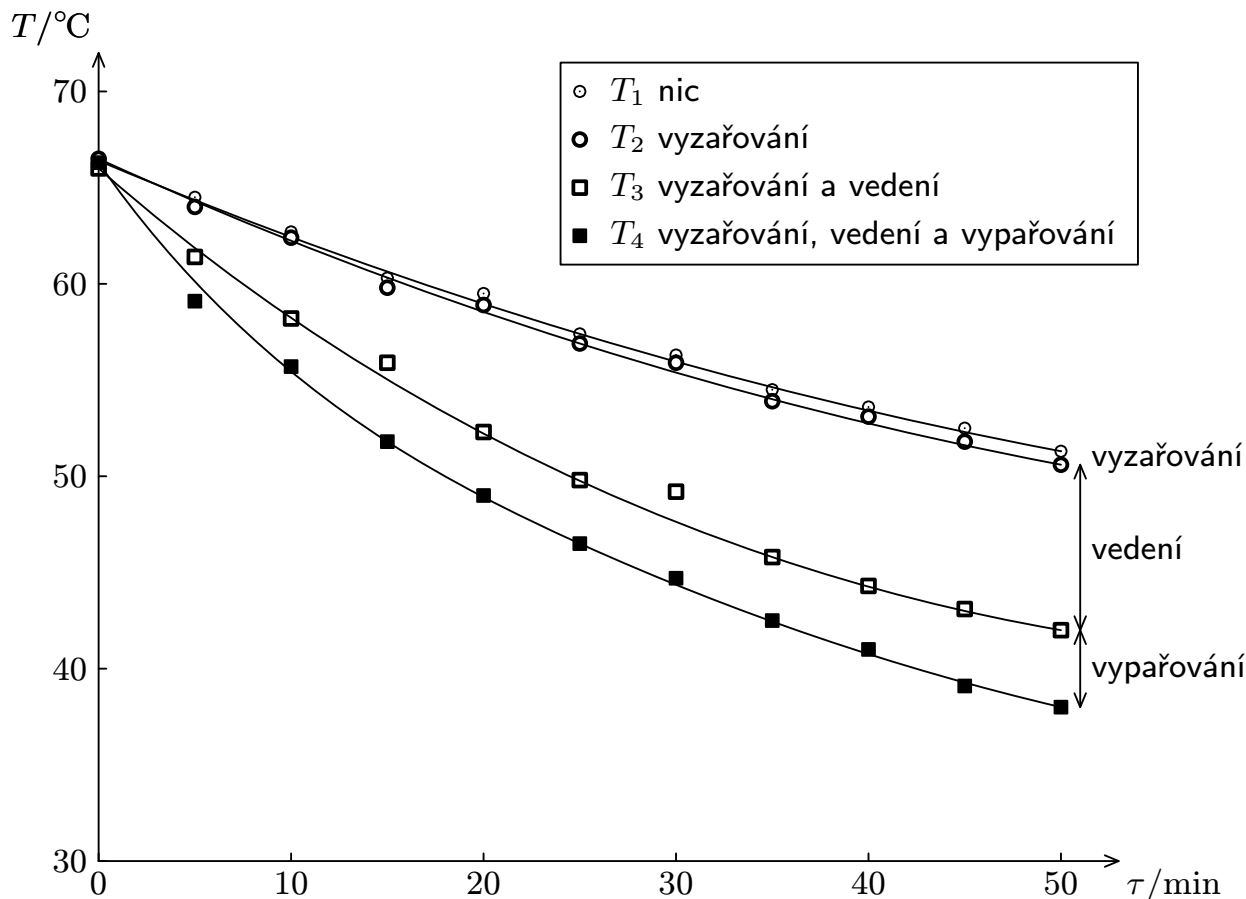
Experiment

Pro svůj experiment jsem zvolila druhý postup. K měření jsem použila digitální teploměr. Jako chladnou kapalinu jsem si opatřila originální výborný čaj z menzy. K odstranění odpařování jsem používala igelit, na tepelné odizolování jsem si zapůjčila kalorimetr a vyzařování jsem brzdila alobalem. Výsledky jsou v grafu na obrázku 8.

t [min]	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
T_1 [°C]	66,4	64,5	62,7	60,3	59,5	57,4	56,3	54,5	53,6	52,5	51,3
T_2 [°C]	66,5	64,0	62,4	59,8	58,9	56,9	55,9	53,9	53,1	51,8	50,6
T_3 [°C]	66,0	61,4	58,2	55,9	52,3	49,8	49,2	45,8	44,3	43,1	42,0
T_4 [°C]	66,3	59,1	55,7	51,8	49,0	46,5	44,7	42,5	41,0	39,1	38,0

Závěr

Jak je vidět z grafu, podíly jednotlivých faktorů na chladnutí výborného čaje z menzy dost závisí na teplotě. Ve vlivu na chladnutí ve výsledku vede vedení, vypařování se výrazněji uplatňuje pouze na začátku (při vyšších teplotách), jak si jako jediný správně všiml *Pavel Motloch*. Vypařování je skutečně zanedbatelné.



Obr. 8

Poznámky k došlým řešením

Většina řešitelů taktéž použila druhou metodu, avšak s tím rozdílem, že odfiltrovali pouze jeden faktor a zkoumali, jak se tato křivka liší od té, při jejímž měření nebylo odfiltrováno nic. Někteří z vás se pokoušeli o procentuelní odhad zastoupení jednotlivých faktorů v procesu chladnutí. Ti, kdo poctivě provedli měření pro všechny tři faktory, zjistili, že po sečtení dostanou zdatelně méně než 100 %. Je to způsobeno tím, že se nám zdaleka nepodařilo dosáhnout dokonalého zabránění ani vypařování, ani vyzařování a už vůbec ne dokonalé tepelné izolace. Všechny tři jevy se tedy ve skutečnosti více či méně překrývaly. Z toho je vidět, že úvaha typu „vedení je 40 %, vypařování 20 %, takže vyzařování musí být 40 %“ nebyla zrovna nejšťastnější.

Jana Ringelová

jana@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . S ... Lagrangeovy rovnice 2. druhu (5 bodů; průměr 4,71; řešilo 14 studentů)

Malý korálek o hmotnosti m klouže bez tření na drátu ve tvaru kruhové smyčky poloměru R , smyčka se otáčí konstantní úhlovou rychlostí Ω kolem svislé osy (viz obr. 9).

a) Vhodně zvolte zobecněnou souřadnici a sestrojte Lagrangeovu funkci problému.

- b) Sestavte Lagrangeovu rovnici 2. druhu, která popisuje pohyb korálku.
 c) Rozhodněte, kdy je rovnovážná poloha v nejnižší poloze smyčky stabilní a kdy je labilní v závislosti na Ω . Pro Ω , kdy je tato poloha stabilní, vypočítejte periodu kmitů korálku kolem této polohy.
 d) Za bonusové body nalezněte další rovnovážné polohy, diskutujte, zda jsou stabilní, nebo labilní. Pokud jsou stabilní, určete periodu kmitů kuličky kolem těchto rovnovážných poloh.

Úloha byla zadána jako domácí úkol k přednášce doc. Podolského.

- a) Systém má jeden stupeň volnosti – výchylku z nejnižší polohy, tu popíšeme úhlem φ z obrázku 9.

Kulička se jednak otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí Ω a jednak se pohybuje po kruhovém drátu úhlovou rychlostí $\dot{\varphi}$. Celková kinetická energie je součet energií těchto dvou pohybů

$$T = \frac{1}{2}m(R\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m(\Omega R \sin \varphi)^2 = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}^2 + \Omega^2 \sin^2 \varphi).$$

Pokud nulovou hladinu zvolíme ve středu smyčky, potenciální energie kuličky v tíhovém poli bude

$$V = -mgR \cos \varphi.$$

Lagrangeova funkce tedy je

$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}^2 + \Omega^2 \sin^2 \varphi) + mgR \cos \varphi.$$

- b) Ze seriálu víme, že Langrangeova rovnice je

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

po dosazení vychází

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\varphi}) - (mR^2\Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mgR \sin \varphi) &= 0, \\ \ddot{\varphi} - \Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{g}{R} \sin \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

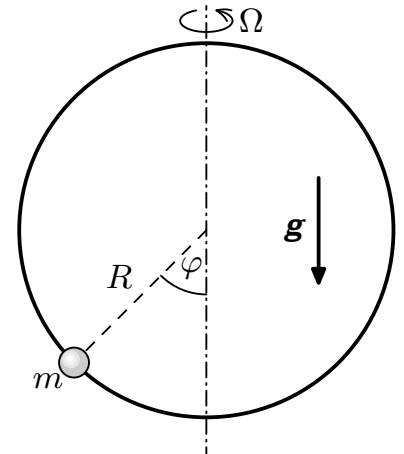
dostali jsme pohybovou rovnici kuličky.

- c) Nejprve nalezneme všechny rovnovážné polohy kuličky. Ty budou jistě tam, kde kulička zůstane, pokud ji tam umístíme. Jinak řečeno, zrychlení kuličky v těchto polohách bude nulové $\ddot{\varphi} = 0$. Pohybová rovnice (1) nám dává

$$0 = \ddot{\varphi} = \left(\Omega^2 \cos \varphi - \frac{g}{R} \right) \sin \varphi, \quad (2)$$

odtud dostáváme podmínky

$$\sin \varphi = 0 \quad \text{nebo} \quad \cos \varphi = \frac{g}{\Omega^2 R}.$$



Obr. 9

Rovnovážné polohy budou v bodech

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi \quad \text{a} \quad \varphi_3 = \pm \arccos \frac{g}{\Omega^2 R} \quad (\text{je-li } \Omega > \sqrt{g/R}).$$

Dále vyšetříme, je-li poloha φ_1 stabilní, nebo labilní. Jak je vidět z rovnice (2), hodnota $\ddot{\varphi}$ mění v bodě $\varphi = 0$ znaménko (tam platí $\cos \varphi_1 = 1$). Je-li $\Omega \leq \sqrt{g/R}$, přechází $\ddot{\varphi}$ z kladných hodnot do záporných. Pokud vychýlíme kuličku z této polohy, bude urychlena zpět – jedná se o polohu stabilní. Je-li $\Omega > \sqrt{g/R}$, přechází $\ddot{\varphi}$ ze záporných hodnot do kladných a poloha tedy bude labilní.

Zbývá určit periodu kmitů kuličky kolem polohy φ_1 , je-li splněna podmínka $\Omega \leq \sqrt{g/R}$ a poloha je stabilní. Vyzjistíme proto, co se stane, pokud kuličku vychýlíme o malý úhel ξ z této polohy. Dosadíme $\varphi = 0 + \xi$ do pohybové rovnice (1) a využijeme aproximační vztahy $\sin \xi \approx \xi$ a $\cos \xi \approx 1$

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{g}{R} - \Omega^2 \right) \xi = 0. \quad (3)$$

To nám však připomíná rovnici harmonických kmitů $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, úhlová frekvence kmitů kuličky tedy je

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \Omega^2}.$$

- d) Hledejme další stabilní rovnovážné polohy, jak po nás chce zadání. Kolem polohy $\varphi_2 = \pi$ je závorka ve výrazu (2) vždy záporná. Znaménko $\ddot{\varphi}$ se mění z mínusu do plusu, kulička je tedy urychlována směrem odtud – poloha je vždy labilní.

Počítejme derivaci $\ddot{\varphi}$ v bodech φ_3 , abychom vyšetřili, zda $\ddot{\varphi}$ ve φ_3 roste nebo klesá.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\ddot{\varphi}}{dt} \right|_{\varphi_3} &= \Omega^2 (\cos^2 \varphi_3 - \sin^2 \varphi_3) - \frac{g}{R} \cos \varphi_3 = \\ &= \Omega^2 \left(\frac{2g^2}{\Omega^4 R^2} - 1 \right) - \frac{g^2}{\Omega^2 R^2} = \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{g^2}{R^2} - \Omega^4 \right) < 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Zrychlení $\ddot{\varphi}$ zde tedy klesá, obě polohy jsou vždy stabilní (pokud ovšem existují).

Stejným způsobem jako v c) vypočítáme periodu kmitů. Do (1) dosadíme $\varphi = \varphi_3 + \xi$, kde ξ je malé (ξ^2 budeme zanedbávat), a použijeme součtové vzorce

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \left(\frac{g}{R} - \Omega^2 \cos(\varphi_3 + \xi) \right) \sin(\varphi_3 + \xi) &= 0, \\ \ddot{\xi} + \left(\frac{g}{R} - \Omega^2 \cos \varphi_3 + \Omega^2 \xi \sin \varphi_3 \right) (\sin \varphi_3 + \xi \cos \varphi_3) &= 0, \\ \ddot{\xi} + \left(\frac{g}{R} - \Omega^2 \cos \varphi_3 \right) \sin \varphi_3 - \Omega^2 \xi (\cos^2 \varphi_3 - \sin^2 \varphi_3) + \frac{g}{R} \xi \cos \varphi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Nyní dosadíme za φ_3 a zjistíme, že druhý člen je identicky nulový, a využijeme výsledku (4). Dostaneme

$$\ddot{\xi} + \frac{1}{\Omega^2} \left(\Omega^4 - \frac{g^2}{R^2} \right) \xi = 0, \quad (5)$$

úhlová frekvence kmitů tedy je

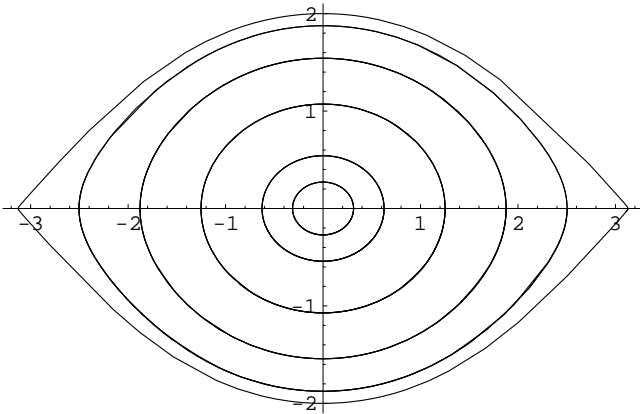
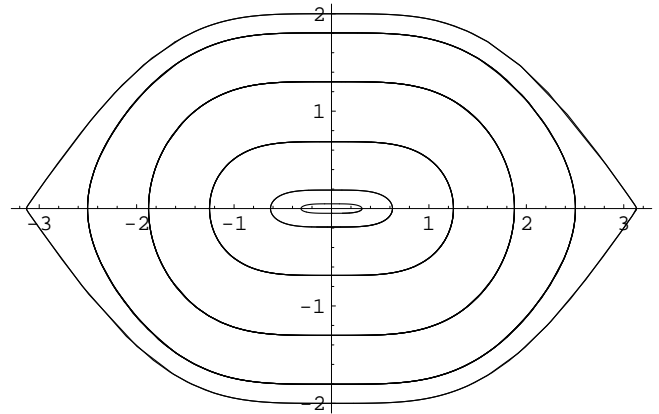
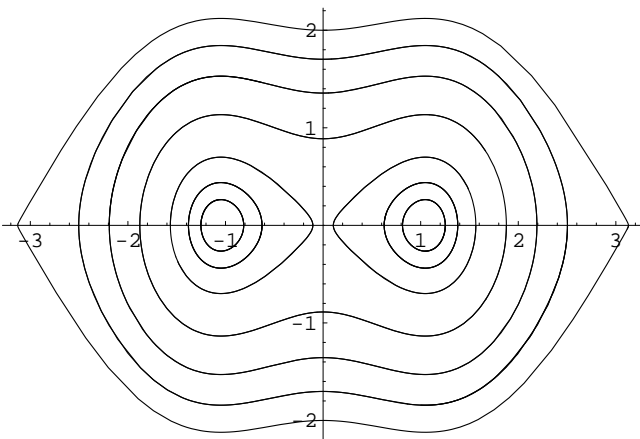
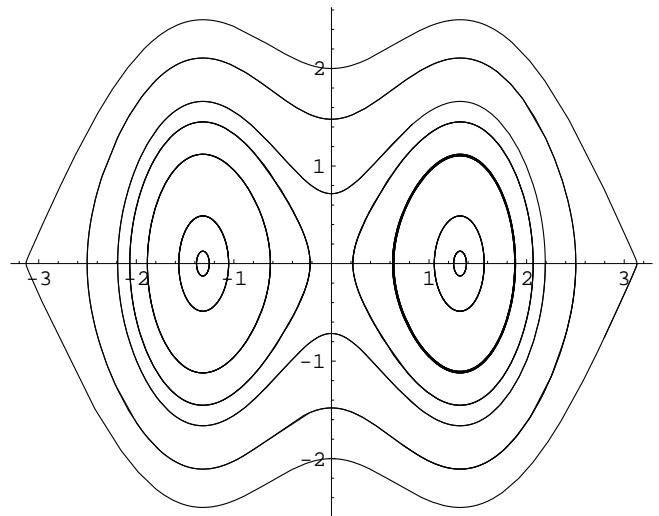
$$\omega = \sqrt{\Omega^2 - \frac{g^2}{\Omega^2 R^2}}.$$

Můžeme si všimnout, že pokud $\Omega \rightarrow \sqrt{g/R}$, jde koeficient u ξ v (3) a (5) k nule. Pokud bychom však dělali menší zanedbání, zjistili bychom, že nenulové zůstanou koeficienty u ξ^3 . Pohyb v nejnižším bodě za podmínek $\Omega = \sqrt{g/R}$ tedy popisuje rovnice ve tvaru $\ddot{\xi} + a^2\xi^3$, jejím řešením je sice kmitání kolem rovnovážné polohy, není však už harmonické.

To znamená, že abychom mohli zanedbat členy vyššího řádu v obou rovnicích, musíme při $\Omega \rightarrow \sqrt{g/R}$ čím dál více zmenšovat amplitudy malých kmitů.

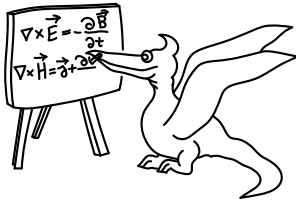
Na závěr si pro zajímavost můžete prohlédnout fázový portrét systému. Ten dostaneme řešením pohybové rovnice (1). Na vodorovnou osu vynášíme φ a na svislou $\dot{\varphi}/s^{-1}$. Jedná se vlastně o trajektorii kuličky v souřadnicích $(\varphi, \dot{\varphi})$.

Diagramy na obrázcích 10 až 13 odpovídají různým hodnotám $\Omega^2 R/g$ při $g/R = 1 s^{-2}$, v každém diagramu je několik trajektorií pro různé počáteční podmínky. V diagramech jsou dobře vidět stabilní a labilní polohy. Stabilní polohy (v digramu tzv. eliptické body) jsou trajektoriemi obíhány a od labilních poloh (tzv. hyperbolické body) se trajektorie rozbíhají. Sami si pro porovnání rozmyslete, jak vypadá fázový portrét harmonického oscilátoru.

Obr. 10. $\Omega^2 R/g = 0,25$ Obr. 11. $\Omega^2 R/g = 1$ Obr. 12. $\Omega^2 R/g = 2$ Obr. 13. $\Omega^2 R/g = 4$

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 4: Hamiltonovská formulace mechaniky

V předposledním dílu seriálu si povíme něco o Hamiltonovu pohledu na mechaniku. K tomu si budeme muset nejprve definovat několik pojmů, které vycházejí z Lagrangeova formalismu.

Zobecněná hybnost a energie

Nechť Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na některé ze souřadnic q_j (takové souřadnici říkáme *cyklická*), tedy

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Potom se Lagrangeovy rovnice 2. druhu redukují na tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0.$$

Odtud plyne, že výraz v závorce je konstantní v čase. Tuto veličinu nazýváme *zobecněná hybnost*

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (6)$$

Zobecněná hybnost se zachovává v případě cykličnosti souřadnic q_j . Poznamenejme ovšem, že obecně mohou mít p_j velmi rozmanitý fyzikální význam. Pokud uvažujeme kartézský souřadnicový inerciální systém, ve kterém nezávisí potenciální energie na rychlostech, platí pro lagrangián

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - V(\mathbf{r}, t).$$

Po dosazení do vztahu pro zobecněnou hybnost dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial v_j} = m v_j = p_j.$$

Vidíme tedy, že za jistých podmínek může být zobecněná hybnost shodná s běžnou hybností, ale obecně tomu tak není.

Pokud Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase, tj. platí-li

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

existuje mimořádně důležitá veličina (která je mimochodem integrálem pohybových rovnic)

$$h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L. \quad (8)$$

Tvrzení, že se jedná o integrál pohybových rovnic (tj. pro řešení pohybových rovnic je h konstantní neboli zachovává se podél trajektorie), snadno dokážeme přímým výpočtem. Platí totiž

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{dL}{dt},$$

kde

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Celkově tedy máme

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

což je rovno nule z platnosti 2. Lagrangeovy rovnice a podmínky (7). Veličina h se nazývá *zobecněná energie* a zachovává se tehdy, nezávisí-li Lagrangeova funkce na čase. Stejně jako zobecněná hybnost má zobecněná energie rozmanitý fyzikální význam, záleží hlavně na podobě lagrangiánu. Pokud můžeme napsat Lagrangeovu funkci ve tvaru

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - V(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

kde koeficienty a_{ik} jsou konstanty nebo funkce souřadnic q_i , můžeme se snadno přesvědčit o tom, že vztah pro h se dá napsat ve tvaru

$$h = T + V.$$

V tomto případě má zobecněná energie význam mechanické energie.

Hamiltonova funkce, Hamiltonovy rovnice

V první polovině 19. století našel W. Hamilton novou formulaci klasické mechaniky. Pohybové rovnice v ní nabývají mimořádně jednoduchého tvaru. Hamiltonovská formulace měla velice důležitý význam pro další rozvoj fyziky zejména v oblasti kvantové mechaniky a statistické fyziky.

Hamiltonovskou formulaci budeme aplikovat na stejné problémy, pro které je možné odvodit Lagrangeovu funkci. Pro definici Hamiltonovy funkce budeme potřebovat zobecněné hybnosti, které jsme zavedli vztahem

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zobecněnou energii v souřadnicích q_i, p_i nazýváme *Hamiltonovou funkcí*

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (9)$$

Odtud se dají odvodit Hamiltonovy rovnice

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

kteřé pro systém s n stupni volnosti představují soustavu $2n$ diferenciálních rovnic prvního řádu pro $2n$ neznámých q_i, p_i . Tyto rovnice jsou nižšího řádu než rovnice Lagrangeovy, což je jejich velká výhoda. $2n$ -rozměrný prostor proměnných q_i, p_i nazýváme *fázovým prostorem* a dvojici q_i, p_i se stejným indexem říkáme *kanonicky sdružené veličiny*.

Hamiltonova formulace mechaniky je ekvivalentní s lagrangeovskou. Tak jako v Lagrangeově formulaci jsme hledali Lagrangovu funkci, budeme zde hledat funkci Hamiltonovu.

Na jednoduchém příkladu si ukážeme odvození Hamiltonovy funkce a Hamiltonových rovnic. Jedná se o triviální úlohu, nevyplnou z ní tedy výhody Hamiltonovy formulace oproti Lagrangeově či Newtonově metodě.

Příklad 11 – matematické kyvadlo hamiltoniánem

Určete Hamiltonovu funkci a Hamiltonovy rovnice pro matematické kyvadlo délky l .

Řešení

V příkladu 6 jsme popisovali matematické kyvadlo pomocí Lagrangeovy funkce, kterou jsme odvodili vztahem (14)

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos \varphi).$$

Za zobecněnou souřadnici jsme volili úhlovou výchylku z rovnovážné polohy. K ní kanonicky sdružená zobecněná hybnost je

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}, \quad (10)$$

kteřá je odlišná od normální hybnosti $ml\dot{\varphi}$. Pro Hamiltonovu funkci podle (9) dostáváme

$$H = p_\varphi\dot{\varphi} - L = ml^2\dot{\varphi}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \varphi).$$

Zdůrazňujeme, že hamiltonián je funkce souřadnic φ a p_φ , v předchozím vztahu je proto nutné za $\dot{\varphi}$ dosadit z (10).

Hamiltonovy rovnice pro matematické kyvadlo jsou

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi.$$

Tuto soustavu vyřešíme nejsnáze tak, že ji převedeme na jedinou rovnici 2. řádu, kterou bychom stejně dostali z Lagrangeovy metody

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Kanonické transformace

V Lagrangeově formalismu jsme mohli přecházet mezi libovolnými zobecněnými souřadnicemi, aniž by se změnil tvar Lagrangeovských rovnic.

Ukazuje se, že v Hamiltonově formalismu máme ruku ještě volnější. Třída transformací, vůči kterým zachovávají Hamiltonovy funkce tvar, je daleko širší. Tyto transformace nazýváme *kanonické*. Z tvaru Hamiltonových rovnic vidíme, že zobecněné souřadnice a hybnosti zde mají zcela rovnoprávnou roli. Proto není divu, že existuje kanonická transformace, která vede k vzájemné výměně souřadnic a hybností.

Popisem kanonických transformací se zde bohužel zabývat nebudeme, matematický aparát by přesahoval rámec tohoto textu.

Poissonovy závorky

Mějme ve fázovém prostoru dvě funkce závislé na čase $f(q_j, p_j, t)$ a $g(q_j, p_j, t)$. Poissonovou závorkou těchto funkcí nazýváme funkci

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

Dá se ukázat, že tato funkce $\{f, g\}$ se nemění při kanonických transformacích. Mají proto klíčový význam pro formulaci tvrzení hamiltonovské mechaniky, důležitou roli sehrály při budování kvantové mechaniky.

Ukažme si jednu důležitou vlastnost Poissonových závorek. Pokud funkce $f(q_j, p_j)$ nezávisí explicitně na čase, je f integrálem pohybových rovnic, právě když

$$\{H, f\} = 0.$$

Odtud již snadno plyne, že sama Hamiltonova funkce je integrálem pohybových rovnic, pokud nezávisí na čase.

Dokonce platí následující věta. Jsou-li f a g integrály pohybových rovnic, je integrálem pohybových rovnic i jejich Poissonova závorka $\{f, g\}$. Ještě než ukončíme povídání o hamiltonovské formulaci mechaniky, ukážeme příklad na Poissonovy závorky.

Příklad 12 – volná částice

Ukažte, že hybnost $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ volné částice je integrál pohybu.

Řešení

Na volnou částici se budeme dívat z kartézského souřadného systému, tedy $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$. Lagrangián volné částice je

$$L = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2).$$

Zobecněné hybnosti

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i$$

odpovídají normálním hybnostem. Hamiltonián tedy je

$$H = m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \frac{p^2}{2m}.$$

Vypočítejme Poissonovy závorky z hamiltoniánu a j -té složky hybnosti

$$\{H, p_j\} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} = 0,$$

neboť ani hamiltonián, ani j -tá složka hybnosti nezávisí na souřadnicích

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Zjistili jsme, že p_j je integrál pohybu, tudíž i $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ je integrál pohybu.

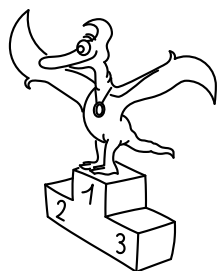
Úloha VI.S ... *Hamiltonův formalismus*

Langrangián částice v elektromagnetickém poli je

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2}m \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 - q\varphi + q \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i A_i,$$

kde φ je elektrický potenciál a \mathbf{A} magnetický vektorový potenciál.

- Určete zobecněné hybnosti částice p_i příslušející rychlostem \dot{x}_i .
- Napište Hamiltonovu funkci (v souřadnicích (x_i, p_i) !).
- Řešte Hamiltonovy rovnice, je-li $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ a $\varphi = -Ex_1$.



Pořadí řešitelů
po IV. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	134
1. <i>Stanislav Vosolobě</i>	G U Balvanu Jablonec nN	2	2	2	4	5	8	7	30	89	116
2. <i>Anton Repko</i>	G Sv. Mikuláša, Prešov	–	1	5	4	1	–	6	17	84	82
3. <i>Ivan Dimitrov</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	69	69
4. <i>Bedřich Roskovec</i>	MasG Petáková, Plzeň	3	4	5	4	–	–	4	20	68	52
5. <i>Petr Houšťek</i>	G Pelhřimov	–	–	–	–	–	–	–	0	85	50
6. <i>Robert Roreitner</i>	MasSŠ chemická, Praha	2	–	3	2	–	–	–	7	51	42
7. <i>Roman Fiala</i>	VOŠ a SPŠE Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	68	41
8. <i>Petr Vaško</i>	MasG Petáková, Plzeň	4	4	–	3	–	–	5	16	77	34
9. <i>Jakub Závodný</i>	G Bratislava, Grösslingova	–	–	–	–	–	–	–	0	80	32
10.–11. <i>Zdeněk Kučka</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	0	67	28
<i>Zuzana Safernová</i>	G Bílovec	3	–	5	–	–	–	–	8	97	28
12. <i>Daniel Božík</i>	G Jura Hronca	2	4	5	–	–	–	5	16	90	26
13. <i>Petr Morávek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	86	25
14.–15. <i>Kateřina Fišerová</i>	G Lepařovo, Jičín	–	–	–	–	–	–	–	0	81	22
<i>Peter Greškovič</i>	G Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	56	22
16.–17. <i>Pavλίna Böhmová</i>	G Komenského Havířov	–	–	–	–	–	–	–	0	52	14
<i>Petr Kubala</i>	SPŠ Frýdek Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	39	14
18. <i>Petr Novotný</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	43	10
19. <i>Lenka Doubravová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	60	9
20.–21. <i>Jana Babováková</i>	G Most	–	–	–	–	–	–	–	0	42	8
<i>Michal Humpula</i>	G Uherský Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	50	8
22.–24. <i>Zdeněk Lochman</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	37	7
<i>Tomáš Mihalík</i>	G Husitská	–	–	–	–	–	–	–	0	22	7
<i>Denis Vald</i>	G Jírovcova, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	0	41	7
25.–27. <i>Markéta Kavalírová</i>	G Českolipská Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	75	6
<i>Markéta Vilimovská</i>	G Českolipská Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	75	6
<i>Kateřina Žabková</i>	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	25	6
28. <i>Jiří Kubr</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	27	3

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	134
1. <i>Tomáš Bednárik</i>	G Vsetín	2	2	4	4	4	8	4	28	76	99
2. <i>Martin Konečný</i>	G Boskovice	2	2	4	3	3	7	3	24	61	72
3. <i>Aleš Podolník</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	4	–	2	4	–	3	–	13	71	70
4. <i>Miroslav Hrubý</i>	BG Barvičova Brno	4	–	–	–	–	–	–	4	67	60
5. <i>Petr Bezmozek Dvořák</i>	SPŠ Jihlava	2	2	1	0	–	8	–	13	56	59
6. <i>Monika Josieková</i>	G Český Těšín	4	2	2	4	2	–	6	20	63	58
7. <i>Ondřej Bílka</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	2	3	3	4	–	8	6	26	79	55
8. <i>Peter Perešíni</i>	G J. G. Tajovského	–	4	–	2	5	–	–	11	87	52
9. <i>Marek Scholz</i>	G Neratovice	–	–	–	–	–	4	–	4	81	51
10. <i>Petra Malá</i>	G Moravský Krumlov	1	–	3	–	–	6	–	10	60	49
11. <i>Libor Šachl</i>	G Terezy Novákové Brno	3	2	1	5	0	2	–	13	46	47
12. <i>Miroslav Janáček</i>	G a SPgŠ Liberec	2	–	1	–	0	4	–	7	52	45
13. <i>Martin Koštejn</i>	G a SPgŠ Liberec	2	4	0	–	1	–	–	7	56	43
14. <i>Zuzana Pôbišová</i>	G J. G. Tajovského	2	–	0	–	4	7	–	13	64	41
15. <i>Petr Smital</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	–	4	3	4	–	–	–	11	75	40
16. <i>Jenda Valášek</i>	G Broumov	2	–	3	–	–	4	–	9	69	38
17. <i>Jan Bednář</i>	COP Hronov	2	2	–	–	–	–	–	4	61	34
18. <i>Beáta Hergelová</i>	G Lučenec	2	3	2	–	3	5	–	15	54	31
19. <i>Vojtěch Molda</i>	G Vsetín	1	2	2	–	0	–	–	5	41	30
20. <i>Roman Derco</i>	G Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	73	29
21. <i>Slavomír Takáč</i>	G Nové Zámky	–	–	–	–	–	–	–	0	88	28
22. <i>Adam Přenosil</i>	G Sladkovského n., Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	70	26
23. <i>Michal Sivák</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	66	23
24.–25. <i>Tereza Klimošová</i>	G Lanškroun	–	–	–	–	–	–	–	0	88	21
<i>Vladimír Sivák</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	60	21
26. <i>Tomáš Jirotko</i>	G Klatovy	–	2	2	–	–	–	–	4	50	20
27. <i>Martina Miková</i>	G Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	0	43	17
28.–29. <i>Pavel Burda</i>	G Křenová Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	56	15
<i>Jiří Hloska</i>	G Terezy Novákové Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	60	15
30. <i>Jana Pokorná</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	58	14
31.–32. <i>Michal Seidel</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	58	11
<i>Tomáš Šťastný</i>	G D. Tatarku, Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	34	11
33. <i>Lucie Hympánová</i>	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	28	10
34.–35. <i>Jaroslav Hančl</i>	G Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	73	8
<i>Jana Vrábelová</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	35	8
36.–37. <i>Martin Hrdlička</i>	G Louny	–	–	–	–	–	–	–	0	64	7
<i>Hana Vítová</i>	G Bystřice n. Pern.	2	–	–	–	–	–	–	2	54	7
38. <i>Milan Klicpera</i>	G Čelákovice	–	–	–	–	–	–	–	0	21	6
39.–40. <i>Vendula Ernerová</i>	G Nad Štolou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
<i>Radek Papoušek</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
41.–44. <i>Radka Bystřická</i>	G Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	0	57	4
<i>Tomáš Janda</i>	G Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
<i>Jan Matoušek</i>	G Žižkova, Kolín	–	–	–	–	–	–	–	0	25	4
<i>Darja Suchá</i>	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	57	4
45. <i>František Matyska</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	20	3
46.–47. <i>Martin Bernátek</i>	SOŠ Krnov	–	–	–	–	–	–	–	0	25	2
<i>Ondřej Lébl</i>	G Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	0	29	2

Kategorie druhých ročníků

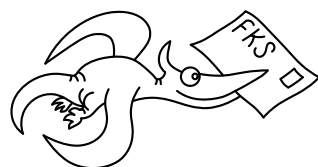
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	134
1. <i>Pavel Motloch</i>	G Petra Bezruče	4	1	3	4	0	9	8	29	90	113
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy Praha	–	–	4	4	–	4	6	18	84	85
3. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	2	3	3	4	3	1	–	16	52	54
4. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	2	4	0	–	–	5	–	11	61	44
5.–7. <i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická Praha	1	1	3	3	0	–	–	8	45	42
<i>Lukáš Malina</i>	G Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	74	42
<i>Jana Przewczková</i>	G Komenského Havířov	1	1	–	–	–	6	1	9	54	42
8. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra	–	2	–	–	0	4	–	6	50	39
9.–10. <i>Marek Bukáček</i>	G Havlíčkův Brod	–	–	1	–	1	1	–	3	40	27
<i>Jakub Prouza</i>	COP Hronov	2	–	–	–	–	–	–	2	57	27
11. <i>Daniel Šimsa</i>	G Josefa Jungmanna	3	–	–	4	–	–	3	10	49	23
12. <i>Juraj Zajac</i>	G Ľudovíta Štúra	–	–	–	–	–	–	–	0	51	20
13. <i>Martin Lexa</i>	G Vysoké Mýto	–	–	–	–	–	–	–	0	54	19
14. <i>Vlastimil Peksa</i>	G Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	67	18
15.–16. <i>Miroslav Kaděra</i>	G Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	67	16
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	40	16
17. <i>Kristýna Krejčová</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	0	54	15
18. <i>Peter Berta</i>	G Velké Kapušany	–	–	–	–	–	–	–	0	69	11
19. <i>Petr Dvořák</i>	G V. Makovského	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10
20. <i>Jiří Špale</i>	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	73	8
21. <i>Beáta Garšicová</i>	G Vídeňská, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	47	7
22.–23. <i>Petr Šácha</i>	G Tachov	–	–	–	–	–	–	–	0	32	6
<i>Martin Štys</i>	SOU Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	75	6
24. <i>Miloslava Kučeríková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	36	4
25. <i>Petra Votavová</i>	G Cheb	–	–	–	–	–	–	–	0	11	3
26.–27. <i>Tomáš Ehrlich</i>	G Holešov	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
<i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	18	2
28.–29. <i>Martin Berka</i>	G Moravská Třebová	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0
<i>Jana Susová</i>	GOA Sedlčany	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	5	34	100	134
1. <i>Tereza Fantová</i>	G Benešov	2	2	2	–	2	–	–	8	40	36
2. <i>Katarína Rozvadská</i>	G Ludovíta Štúra	–	–	–	–	–	5	–	5	44	32
3.–5. <i>Katarína Bazová</i>	G Ludovíta Štúra	–	2	–	–	–	4	–	6	48	31
<i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	2	2	4	3	1	7	2	21	48	31
<i>Jan Valášek</i>	G Zborovská, Praha	2	2	1	–	5	–	–	10	58	31
6. <i>Zuzana Jungrová</i>	G Blovice	1	–	–	–	1	8	–	10	36	22
7. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	53	21
8. <i>Josef Müller</i>	G dr. Josefa Pekaře	–	–	–	–	–	–	–	0	38	18
9.–10. <i>Michal Berta</i>	G Trebišov	1	1	1	–	1	–	–	4	19	17
<i>Jan Červenka</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	38	17
11. <i>Lenka Sabová</i>	G Javorová, S. Nová Ves	–	–	–	–	–	–	–	0	57	16
12. <i>Michaela Kubinová</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	42	14
13. <i>Petra Navrátilová</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	26	7
14. <i>Jan Macháček</i>	G Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	0	18	5
15. <i>Petr Hons</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	15	4
16. <i>Aleš Růžička</i>	G Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	13	3
17.–18. <i>Vlastimil Daníček</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	4	2
<i>Jan Navrátil</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	18	2
19. <i>Barbora Henzlová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1

Soutěž ve hledání chyb

jméno	III	IV	Σ
1. <i>Jan Matoušek</i>	9	10	19
2.–3. <i>Jana Przeczková</i>	8	6	14
2.–3. <i>Martin Konečný</i>	7	7	14
4. <i>Jakub Benda</i>	6	3	9
5. <i>Petra Malá</i>	3	3	6
6. <i>Tomáš Bednárík</i>	3	1	4
7. <i>Beáta Hergelová</i>	–	1	1

**FYKOS****UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8**www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.