

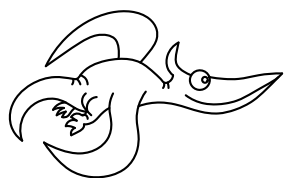
Milí řešitelé FYKOSu!

Máte v rukou poslední sérii, tedy poslední možnost, jak si ve výsledkové listině ještě trochu polepšit. Opravená řešení dostanete společně s řešením 5. série a závěrečnou výsledkovou listinou během června.

Všechny úlohy poslední šesté série navrhl a zformuloval Matouš Ringel. S vašimi řešeními mu proto pošlete nějaký hezký dárek, protože byste jinak neměli co řešit :o).

Přejeme vám hodně úspěchů v závěrečném období školního roku.

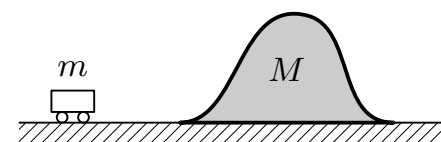
Organizátoři

**Zadání VI. série**

Termín odeslání: 22. května 2006

Úloha VI.1 ... zdolání kopečku

Vozíček o hmotnosti m jede po rovině rychlostí v , na níž leží dřevěný „kopeček“ o hmotnosti M a výšce h , jenž po rovině klouže bez tření (viz obr. 1). Vozíček na kopeček najede. Za jakých podmínek se mu podaří přejet přes vrchol? Jakou rychlostí se bude hora nakonec pohybovat?



Obr. 1

Úloha VI.2 ... kukačky na lanech

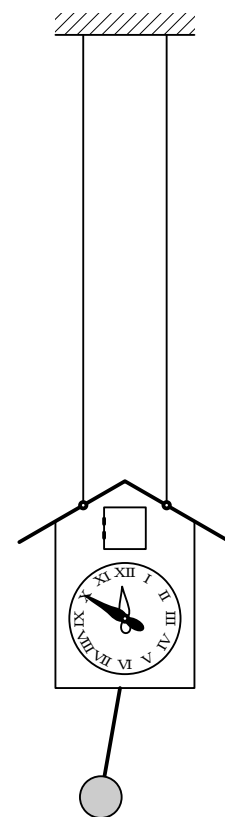
Kyvadlové hodiny o hmotnosti M jsou zavěšeny na dvou dlouhých rovnoběžných lanech (viz obr. 2). Kyvadlo se skládá ze závažíčka o hmotnosti m a lehké tyčky o délce l . Určete, o kolik se budou takové hodiny předbíhat (opozďovat) oproti hodinám pevně přibitým na stěně.

Úloha VI.3 ... roztáčíme elektromotor

Na hřídeli elektromotoru je navinuta nit, na konci které je zavěšeno závaží o hmotnosti m . Pokud motor připojíme na ideální zdroj napětí U , závaží pojede vzhůru rychlostí v_1 . Jakou rychlostí bude závaží klesat, pokud zdroj odpojíme a vstup elektromotoru zkratujeme? Mechanické tření neuvažujte.

Úloha VI.4 ... sluneční prasátko

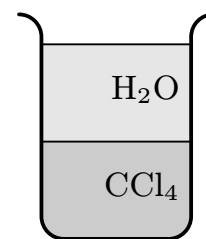
Za slunečných dní je oblíbenou zábavou vrhat obdélníkovým zrcátkem sluneční prasátka. Možná jste si všimli, že někdy má prasátko lichoběžníkový tvar a jindy tvar elipsy. Za jakých okolností nastává každá varianta? Pokud možno svou podmínku zformulujte kvantitativně.



Obr. 2

Úloha VI. P ... podivný bod varu

Do nádoby nalijeme dvě kapaliny, vodu a tetrachlormetan. Tyto dvě kapaliny se mezi sebou nemísí. Teplota varu vody je $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, teplota varu tetrachlormetanu je asi $77\text{ }^{\circ}\text{C}$. Pokud bychom však tento systém zahřivali, dočkali bychom se překvapení. K varu (vzniku bublin) totiž dochází již při asi $66\text{ }^{\circ}\text{C}$. Vysvětlete zdánlivou podivnost.

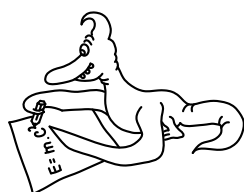


Obr. 3

Úloha VI. E ... poznej své tělo

Na závěr ročníku pro vás máme jednoduchou experimentální úlohu. Z následujících tělních tekutin si vyberte alespoň dvě a změřte jejich alespoň jednu fyzikální vlastnost (hustotu, viskozitu, elektrickou vodivost, index lomu, teplotu varu, ...) – sliny, krev, moč, pot, slzy, žaludeční šťávy, míza.

V této úloze se řiďte heslem čím více, tím lépe.

**Řešení IV. série****Jednotky na planetě Balónků**

Každá fyzikální soustava, chce-li dosáhnout nějakého fyzikálního uplatnění (výsledku), musí ze vstupních dat vyprodukovat číslo krát tzv. rozměr tohoto čísla. Všechna odvození v následujících řešeních uděláme v soustavě SI.

Když vyjadřujeme délku, hustotu, tlak apod. pomocí čísel, vždy musíme za napsanými ciframi uvést také jednotky, ve kterých jsme měřili. Naměřili jsme délku 12 centimetrů nebo 12 stop? Či např. osvětlení: je to 1 lux nebo Hefnerova svíčka na čtverečný yard? Jednotka je nedílnou součástí výsledku.

V našem případě máme dvě soustavy jednotek. První je soustava SI (tvořena metrem, sekundou, kilogramem, mol...), druhá je balonkovská soustava ŠTLM (špurgl, temp, luftík, muška, ...). Každou fyzikální veličinu umíme převést z jedné soustavy jednotek do druhé.

Z nápovědy v první úloze (*Každý Balónek má maximálně jeden provázek.*) jste měli usoudit, že Balónci počítají ve dvojkové soustavě. Všechny číselné hodnoty byly proto zadané ve dvojkové soustavě a tak s nimi bylo potřeba nakládat. Řešení úloh uvádějí výsledky jak ve dvojkové tak v desítkové soustavě.

Zuzka Safernová & Honza Prachař

Úloha IV.1 ... turnaj Balónků (4 body; průměr 2,72; řešilo 43 studentů)

Kdesi v dalekém vesmíru za 1001 hvězdami a jednou černou dírou byla nebyla planeta Balónků. Tyto inteligentní duté bytosti každý rok pořádají soutěž „Čím výš, tím líp“.

Každý z balónků si přiváže provázek, aby bylo možné určit jeho výšku. Aby se mohli Balónci účastnit soutěže, musí mít všichni stejné parametry. Kupodivu nikdo zatím nikdy nevyhrál. Délková hustota provázku je 11 luftíků na špurgl, hustota atmosféry je 110101 luftíků na krychlový špurgl, poloměr každého z balónků je 10 špurglů, hmotnost Balónka je 10 luftíků. Při pádu tělesa v tíhovém poli na planetě Balónků se za každý temp jeho rychlost zvýší o 111 špurglů za temp. Určete, jakou maximální výšku Balónka hlavní rozhodčí soutěže naměří a jak se bude Balónek pohybovat po dosažení této výšky. Nezvednutá část provázku každého Balónka leží volně na zemi. Závody Balónků probíhají v malých výškách, kde je hustota atmosféry přibližně konstantní.

Nápověda: Každý Balónek má maximálně jeden provázek.

Úlohu zná Petr Sýkora od doc. Šímy.

Představme si, že držíme kulatý balónek objemu V a hmotnosti M , k němuž je přivázaný provázek délkové hustoty τ , jehož konec volně leží na zemi. Atmosféra má hustotu ρ , velikost tíhového zrychlení označíme g . Teď balónek pustíme – jaké síly na něj působí? Vztlaková síla velikosti $V\rho g$ jej bude tahat nahoru, tíhová velikosti Mg dolů, když balónek trochu vystoupí, provázek ho začne tahat nějakou silou velikosti F_p směrem dolů, a pokud se hýbe, působí na něj také odporová síla velikosti F_o , a to vždy směrem proti okamžité rychlosti.

Najdeme rovnovážnou výšku h_0 balónku, ve které se síly působící na balónek přesně ruší. Vztlakovou sílu působící na provázek zanedbáme; předpokládáme, že hustota provázku je mnohem větší než hustota vzduchu. (Stejně by to znamenalo pouze menší efektivní τ .) Výsledná síla působící na balónek má velikost

$$0 = F = V\rho g - Mg - \tau hg$$

a rovnovážná výška je

$$h_0 = \frac{V\rho - M}{\tau} = 1\,001\,001\,111_{[2]} \text{ špurglů} = 591_{[10]} \text{ špurglů}.$$

Jak bude vypadat pohyb balónku? Jak si všimli Lukáš Strítěský a Jakub Michálek, jsou v podstatě tři možnosti, jak bude pohyb vypadat, závisující na velikosti odporu proti pohybu:

- velký odpor – balónek se pomalu doplazí k rovnovážné poloze,
- mezní odpor – balónek projde rovnovážnou polohou, překmitne a shora se doplazí do rovnovážné polohy,
- malý odpor – balónek projde rovnovážnou polohou vícekrát, kmitá, přičemž perioda jeho pohybu závisí na tlumení, tlumenými kmity se postupně přibližuje k rovnovážné poloze.

Někteří z vás nebyli s tímhle řešením spokojeni a chtěli zjistit přesněji, co se bude s balónkem dít. Abychom to udělali, vrátíme se k analýze sil a sestavíme pohybovou rovnici. Je třeba ale zdůraznit, že následující úvahy budou také nepřesné. To, co získáme, nebude přesná předpověď pohybu balónku, ale hrubý, i když zajímavý pohled na jeho chování.

Pohybová rovnice balónku je

$$M\mathbf{a} = \mathbf{F}_{vz} + \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_o,$$

kde síly jsou po pořádku vztlaková, tíhová, od provázku a odporová. Všechny síly působí ve svislém směru, takže v dalším budeme psát jenom jednu rovnici pro svislé složky sil.

Uurčíme velikost síly od provázku. V některých vašich řešeních se vyskytl předpoklad, že velikost síly F_p je stejná jako velikost tíhové síly působící na provaz. Ale síla F_p nejenže vyrovnává tíhovou sílu, ale také navíc urychluje ležící část provázku. Takže F_p bude větší než τhg . Abychom si úlohu zjednodušili, budeme předpokládat, že energie se ztrácí pouze v důsledku odporu vzduchu a žádné jiné ztráty nenastávají (např. v provázku). Síla velikosti F_p působí na provaz směrem nahoru a při povytáhnutí o kousek dh vykoná práci $F_p dh$. Ta se rovná přírůstku pohybové a polohové energie provázku.

Podívejme se na okamžik t , kdy je balónek ve výšce h a provázek má rychlost v , hmotnost m , a na okamžik $t + dt$, kdy jsou veličiny větší o dh , dv a dm . Přírůstek energie provazu je $F_p dh = dE_k + dE_p$, takže

$$F_p dh = \frac{1}{2}v^2 dm + mv dv + \frac{1}{2}gh dm + \frac{1}{2}mg dh \quad \Rightarrow \quad F_p = \frac{1}{2}\tau v^2 + \tau h(a + g).$$

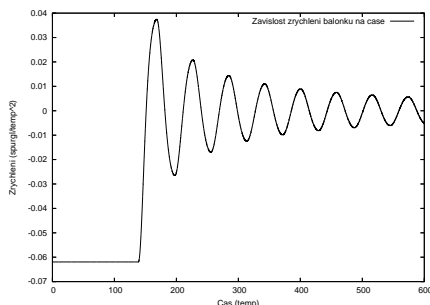
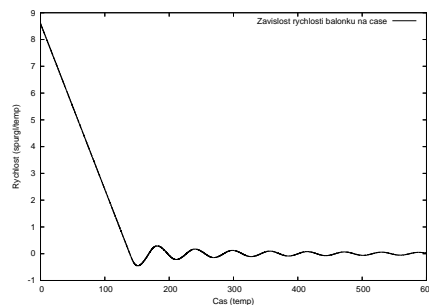
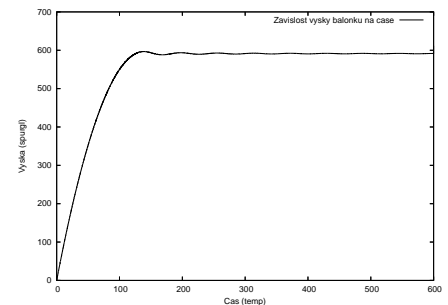
Použijeme lineární a kvadratickou závislost velikosti odporové síly na rychlosti $F_o = Av + C\pi R^2 \rho v^2/2$; směr odporové síly je vždy opačný než směr rychlosti. Pohybová rovnice balónku tedy je

$$(M + \tau h) \frac{d^2 h}{dt^2} = (V\rho - M - \tau h)g - A \frac{dh}{dt} - \frac{1}{2} \left[\tau + C\pi R^2 \rho \operatorname{sgn} \left(\frac{dh}{dt} \right) \right] \left(\frac{dh}{dt} \right)^2$$

a hledáme funkci $h(t)$.

Tvarový součinitel pro kouli je přibližně¹ $C = 1/2$, jak ale odhadnout A ? Závisí na viskozitě prostředí, kterou nevíme. Lze očekávat, že vliv lineárního členu na pohyb bude převládající až blízko rovnovážné polohy, když se balónek pohybuje pomalu – velmi velké A způsobí, že balónek nebude kmitat, ale jenom se pomalu doplazí do rovnovážné polohy. Naopak vliv kvadratického členu bude silnější, když se balónek pohybuje velmi rychle. Abychom alespoň něco zjistili, zvolíme $A = 0$.

Zrychlení balónku je složitou funkcí h a v , takže kamarád počítač bude mít práci. Řešit takovou rovnici můžeme pomocí počítače např. takto. Z rovnice můžeme vypočítat zrychlení a , z něho dokážeme vypočítat novou rychlost po uplynutí času Δt jako $v(t + \Delta t) = v(t) + a\Delta t$, z ní umíme vypočítat, jak se v následujícím okamžiku balónek pohne $y(t + \Delta t) = y + v\Delta t$. Tyto hodnoty dosadíme do pohybové rovnice a vypočítáme nové zrychlení, tak můžeme vypočítat mnoho bodů a pak je vynést do grafu (obrázky 4, 5 a 6).

Obr. 4. $a(t)$ Obr. 5. $v(t)$ Obr. 6. $h(t)$

¹) D. Ilkovič: Fyzika, SVTL 1962, Bratislava

Podívejme se na výsledek. Balónek si to od počátku šine jednoznačně nahoru a velmi rychle dosáhne maximální rychlosti (tak rychle, že to na grafu není vidět). Poté zrychlení spadne do záporných hodnot a balónek rovnoměrně zpomaluje, dosahuje maximální výšky 597 špurglů a tlumeně kmitá kolem své rovnovážné polohy. Vidíme, že balónek je *silně brzděn* a jeho maximální výška je téměř totožná s rovnovážnou.

Není teď těžké říci, jaké výsledky by dal náš model pro zvětšující se A . Větší A znamená větší odporovou sílu, tj. pomalejší vzestup nahoru, ještě větší pak nekmitavý pohyb – Balónek se bude pomalu přibližovat rovnovážné poloze. V každém případě se Balónek výš než do výšky 597 špurglů nedostane. Samozřejmě, náš model není právě nejdokonalejší, odporovou sílu jsme jenom střelili a podobně to bylo s předpokladem ideálního provázku. Ve skutečnosti se jiné vlivy a hlavně vítr nezanedbatelně projeví a někam našeho Balónka zavanou.

Ján Lalinský

jano@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.2 ... výprava na planetu Balónků (4 body; průměr 3,18; řešilo 28 studentů)

NASA chystá velkou výpravu na planetu Balónků za účelem navázání komunikace s tamními inteligentními dutými bytostmi. Špiónům se podařilo zjistit od místních informátorů následující údaje: atmosféra je složena z plynu o muškové hmotnosti 10001 luftíků na mušku, počet molekul atmosféry v jedné mušce je 10^{1101} , tloušťka atmosféry je 10^{10001} špurglů a srovnáním teploměrů obou civilizací špióni určili, že sedmi pozemským kelvinům odpovídá jeden luftík krát špurgl čtverečný na temp čtverečný.

Určete teplotu na povrchu planety a rozhodněte, zda by si měli kosmonauti vzít spíše tričko či kožich. Při řešení se vám můžou hodit i údaje z již zmíněné soutěže.

Úloha ze starého ročníku FYKOSu.

Pro jednoduchost předpokládejme, že hustota atmosféry je konstantní v celé své výšce. Jiný podobně jednoduchý model předpokládá lineární pokles hustoty s výškou. Složitější modely, používající např. barometrickou formuli

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right)$$

(kterou dostaneme za předpokladu konstantní teploty ve všech výškách), mají jeden velký problém. Vždy v nich neznáme hodnotu víc než jedné neznámé. Potřebovali bychom vědět hodnoty tlaku, teploty, hustoty, ... v jednom bodě svrchní vrstvy atmosféry. Jelikož tyto informace nemáme, je nejjednodušší spokojit se s lineárním, leč nerealistickým modelem (jež takovýto bod poskytuje).

K dalšímu řešení využijeme stavovou rovnici ideálního plynu $pV = NkT$. Hustota atmosféry je konstantní. Tlak na povrchu planety (atmosféra má výšku h) je roven hydrostatickému tlaku $p = \rho h g$. Dosazením těchto dvou rovnic do sebe dostaneme

$$T = \frac{ghM_m}{N_A k}.$$

Všechny výše uvedené rovnice platí i na planetě Balónků. Potíž činí „Boltzmannova konstanta“ v jednotkách ŠTLM. V jednotkách SI je její rozměr J/K. V TŠLM jednotkách si ji označme k' a zvolme $k' = 1$ (bezrozměrně). Pak platí

$$T = \frac{ghM_m}{N_A k'} \equiv \frac{ghM_m}{N_A}.$$

Toto je vyjádření teploty v TŠLM ($[T] = \text{luftík} \cdot \text{špurgl}^2 \cdot \text{temp}^{-2}$). My ovšem chceme vyjádřit teplotu T v soustavě SI. V zadání zaznělo: *sedmi pozemským kelvinům odpovídá jeden luftík krát špurgl čtvereční na temp čtvereční*. Takže nahradíme-li v rovnici v TŠLM jednotkách luftík·špurgl²·temp⁻² sedmi kelviny, dostaneme teplotu v jednotkách SI.

$$\frac{ghM_m}{N_A} \left[\frac{\text{luftík} \cdot \text{špurgl}^2}{\text{temp}^2} \right] = 7 \cdot \frac{ghM_m}{N_A} [\text{K}] = T[\text{K}].$$

Po dosazení zadaných jednotek dostáváme $T = 11\,010\,000\,010\,000$ v kelvinech.

Většina z vás si uvědomila, že toto číslo je opravdu velmi velké a Balónci by za této teploty nemohli existovat. Někteří z vás objevili práci záškodnického šotka a jeho záludnost napravili (tzn. upravili formulaci zadání: *jednomu kelvinu odpovídá sedm luftíků krát špurgl čtvereční na temp čtvereční*). Z této změny vyplývá teplota $100\,010\,000_{[2]} \text{ K}$, což je sympatických $272_{[10]} \text{ K}$.

Správnou odpovědí na zadanou otázku po překonání všech peripetií tedy je, že kosmonauti by si měli vzít kožich. Vzhledem ke všem možným nástrahám, které na vás číhaly a z nichž ne všechny byly úmyslné, jsme uznávali i odpověď tričko, ovšem pokud byla podpořena výsledkem $13\,328 \text{ K}$ či jeho adekvátem plynoucím z jiného modelu.

Zuzka Safernová & Pavol Habuda
zuzka@saferna.net, bzuco@fykos.mff.cuni.cz

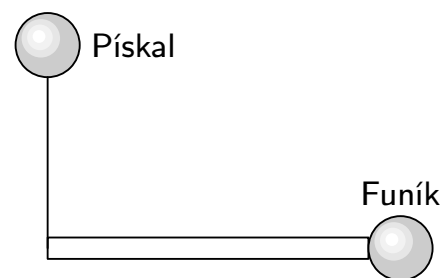
Úloha IV.3 ... Balónci na kolotoči (3 body; průměr 2,11; řešilo 36 studentů)

V hlavním městě planety Balónků Medicinbaldorfu se jednou za debrecinský megatemp koná pouť. Hlavní atrakcí je speciální balónkovský kolotoč, který se Funík s Pískalem rozhodli navštívit.

Dutou tyčí délky L je provlečen provázek délky $l > L$. Na jeden konec provázku se přivázal Funík, na druhý konec Pískal. Oba kamarádi by měli vážit stejně, Funík ale ke snídani snědl kousek rozemleté traverzy a je o trošku těžší. Poté se tyč začne točit kolem svislé osy na ni kolmé. Určete polohu osy tak, aby vodorovná vzdálenost mezi Balónky byla co největší.

Vymyslel Jirka a Kájínek špatně pochopil.

Abychom mohli určit polohu osy, musíme si nejprve vhodně zvolit počátek soustavy souřadnic. Protože při změně polohy osy se mění těžiště soustavy, je vhodné místo těžiště zvolit jiný stabilnější počátek souřadnic. Zvolme třeba začátek tyče blíže lehčímu Balónkovi (Pískalovi). Dohodněme se i na počátečních podmínkách. Před tím, než se začne kolotoč točit, lehčí Balónek vystoupá do maximální výše a těžší Balónek zůstane nejnižší (viz obr. 7). Poté se začne kolotoč otáčet konstantní úhlovou rychlostí ω .



Obr. 7

Zavedme si ještě značení (viz obr. 8). Síly F_1 a F_2 jsou výslednice tíhové, vztlakové a odstředivé síly a x je hledaná poloha osy rotace.

Úloha se dá řešit tak, že si vzdálenost mezi Balónky vyjádříme jako funkci polohy osy rotace a její první derivaci položíme rovnou nule. Místo toho, abychom převedli úlohu na matematický problém, zkusíme se nejdříve nad úlohou zamyslet a pokusit se ji vyřešit fyzikální úvahou.

Osu umístíme na konec tyče k těžšímu Balónkovi $x = L$ a postupně jí budeme posouvat směrem k lehčímu Balónkovi $x = 0$.

1. V prvním případě bude těžší Balónek namáčknut na tyč a lehčí Balónek bude co nejdále od osy. Vzdálenost mezi Balónky se tak bude limitně² blížit l pro velké ω . Ekvivalentně k tomu se úhel α_1 blíží pravému úhlu. Tato poloha je jasný lokální extrém, neboť vzdálenost nemůže být větší než l a navíc při pouze malém posunutí osy směrem k lehčímu Balónkovi je zřejmé, že vzdálenost klesá.
2. Při posouvání osy směrem k lehčímu Balónkovi stále klesá účinek odstředivé síly na lehčího Balónka a roste účinek odstředivé síly na těžšího Balónka, α_1 klesá. V určitém okamžiku musí nastat rovnost velikostí sil F_1 a F_2 , tedy $\text{tg } \alpha_1 = \text{tg } \alpha_2$. Nastala rovnovážná poloha, která je však labilní. Při dalším posunutí převládne síla F_2 a těžšího Balónka přetáhne lehčí Balónek a namáčkne ho na tyč určitou silou. Tato poloha je evidentně další lokální extrém, tentokrát minimum.³
3. Posouváme-li osu dále směrem k lehčímu Balónkovi, pozorujeme, že vliv odstředivé síly na těžšího Balónka stále roste, zatímco vliv odstředivé síly na lehčí balónek stále klesá. Takto se dostaneme až na konec tyče $x = 0$, kde nutně musí nastat další lokální extrém. Vzdálenost mezi balónky se zase limitně² blíží l pro veliké ω . Ekvivalentně tomu se α_2 blíží pravému úhlu.

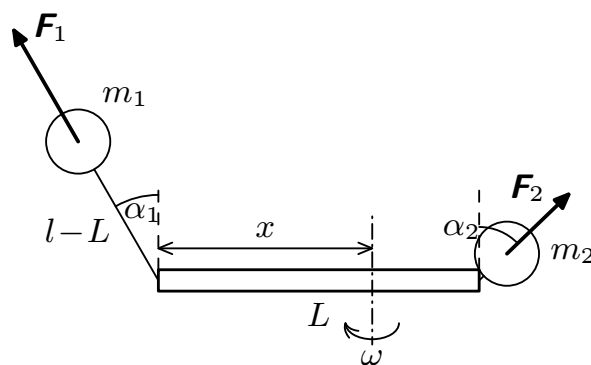
Který ze dvou lokálních extrémů je globální? Zase se nejdřív zamysleme. Vzdálenost mezi Balónky je tím větší, čím jsou úhly α_1 a α_2 větší. Tyto úhly jsou tím větší, čím větší je velikost odstředivé síly. Tedy globální extrém musí nastat až v druhém případě. Maximální vzdálenost mezi Balónky tedy nastane v případě, umístíme-li osu na konec tyče u lehčího Balónka.

Co se vlastně stane, když Balónci nasednou na kolotoč podle obr. 7 a začnou se točit kolem této osy? Těžší Balónek přetáhne lehčího jen v případě, že velikost odstředivé síly těžšího Balónka bude větší než výslednice vztlakové a tíhové síly lehčího Balónka. Vyjádříme si tedy mezní úhlovou rychlost ω_0

$$V \varrho g - m_1 g = m_2 \omega_0^2 L \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{|V \varrho - m_1| g / m_2 L},$$

kde V je objem Balónka, ϱ je hustota atmosféry a g je místní tíhové zrychlení.

V celé úloze uvažujeme, že Balónci v průběhu otáčení zůstávají ve společné rovině s osou a tyčí. Ve skutečnosti tomu tak není. Balónci mají jistý fázový posuv (jsou ve skluzu), ale to na výsledek úlohy nemá vliv.



Obr. 8

²⁾ Pro případ, kdy se velikost vztlakové síly bude rovnat velikosti tíhové síly, bude vzdálenost mezi Balónky l pro jakékoliv ω .

³⁾ Soustava se jen malým posunutím k lehčímu Balónkovi dostane do nové stabilní rovnovážné polohy. Zajímavé je, že kdybychom nyní pohnuli osu směrem k těžšímu Balónkovi, původní labilní rovnovážný stav bychom zde už nenašli. Museli bychom se vrátit mnohem více zpět v závislosti na poměru hmotností obou Balónků. Soustava se totiž změnila – lehčí Balónek je namáčknut na tyč a těžší Balónek zaujal svou rovnovážnou polohu co nejdále od osy rotace.

Mnozí řešitelé hledali osu v těžišti. Jiní vyjádřili funkční závislost vzdálenosti Balónků, ale nikoliv na poloze osy. Závěrem lze říci, že nic není tak jednoduché, jak se zdá.

Roman Fiala & Zdeněk Kučka

roman@fykos.mff.cuni.cz, zdenek@fykos.mff.cuni.cz

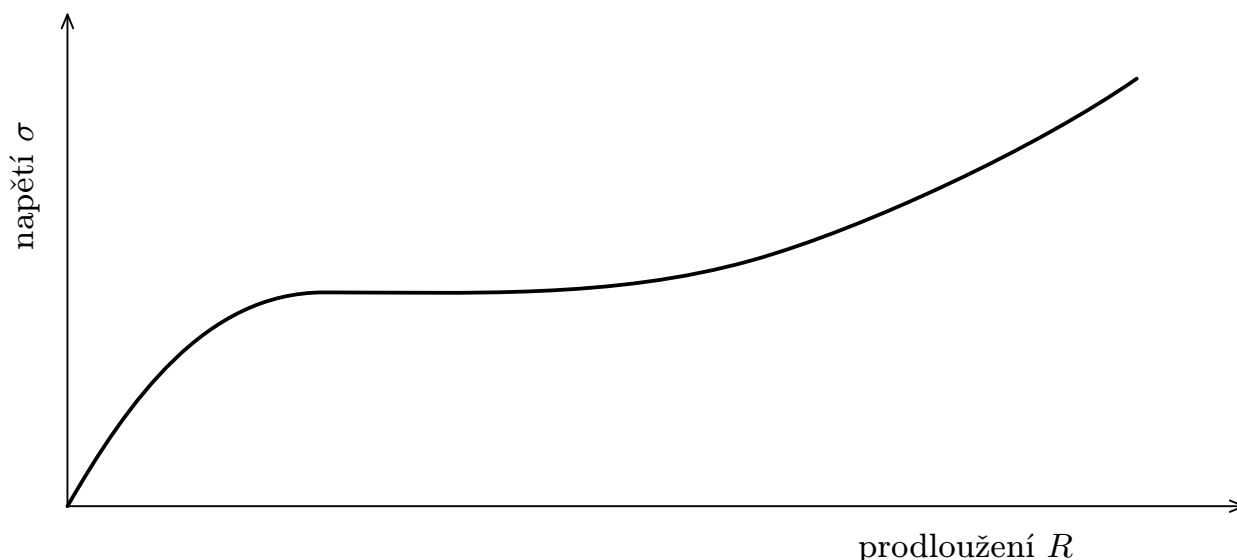
Úloha IV.4 ... svatba Balónka a Balónky (3 body; průměr 1,49; řešilo 41 studentů)

... a už zní svatební síní slavnostní pískot a fukot. Ano, je to tak, Pískal s Foukalkou si dnes řeknou své písk. A už je tu první novomanželský polibek, při němž se spojí svými otvory. Poté kněz slavnostně rozváže provázky a dojde k propojení. Popište, co bude následovat. Nezapomeňte, že všichni svobodní Balónci mají stejné parametry.

Úlohu navrhl Petr Sýkora.

Pokud se dva Balónci spojí otvory, v zásadě mohou nastat dvě různé situace. V případě, že oba byli vcelku málo nafouknuti, nastane případ obdobný chronicky známému experimentu spojených bublin, kdy se jedna bublina prakticky vyfoukne do druhé. Pokud byli oba Balónci nafouknuti více, tato analogie již neplatí a Balónci zůstanou zhruba ve stejném stavu, v jakém byli před spojením.

Pro pochopení fyzikální podstaty rozdílu mezi těmito situacemi nám napomůže kvalitativní graf závislosti napětí gumy na jejím relativním prodloužení (viz obr. 9). Je vidět, že zde máme zhruba tři oblasti. V první (velmi krátké) oblasti nám napětí rychle roste s prodloužením, toto je ten největší odpor na počátku nafukování. Pak následuje oblast, kdy se napětí příliš nemění s prodloužením, a toto je právě oblast, kdy je situace obdobná bublinám, které mají prakticky konstantní povrchové napětí. A nakonec je tu oblast, kde napětí opět začne růst. Toto je oblast, kde se již prakticky nic neděje po spojení Balónků.



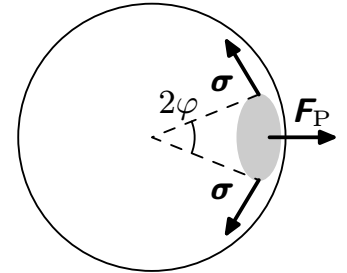
Obr. 9. Závislost napětí gumy na jejím prodloužení

V celém dalším textu budeme v našich spíše kvalitativních úvahách předpokádat kruhového Balónka o poloměru R s přetlakem P vzduchu uvnitř oproti okolnímu atmosférickému tlaku, kdy navíc přetlak bude malý oproti velikosti atmosférického tlaku. Tudíž hustota vzduchu uvnitř Balónka bude považována za konstantní. Tento předpoklad jde jednoduše ověřit například tak, že pokud k otvoru Balónka připevníme trubici, stačí její konec ponořit pod vodu do hloubky necelého půlmetru a Balónek již není schopen překonat hydrostatický tlak.

Nyní se podíváme na myšlený kroužek v povrchu Balónka o poloměru r a budeme studovat, jaké síly na něj působí. Jelikož nás zajímají především ustálené stavy, budeme předpokládat, že tento kroužek je v klidu, a tedy výslednice vnějších sil je nulová. Také zanedbáme vliv gravitace, jelikož hmotnost povrchu Balónka je malá. Zbyly nám tedy dvě působící síly – přetlak P vzduchu uvnitř Balónka a napětí σ jeho stěny, které působí na obvodu našeho myšleného kruhu, ve směru tečném k povrchu Balónka a zároveň kolmo ke kružnici ohraničující náš myšlený kruh.

Je zřejmé, že přetlak bude na náš myšlený kruh působit silou F_P směrem ven o velikosti $F_P = \pi r^2 P$. Úhel mezi rovinou našeho myšleného kroužku a tečnou rovinou k povrchu Balónka na okraji kruhu označíme φ . Z geometrie Balónka je zřejmé, že $\sin \varphi = r/R$. Z povahy napětí stěny zase můžeme odvodit, že výslednice napětí po celém obvodu našeho kruhu míří dovnitř Balónka a má velikost

$$F_N = 2\pi r \sigma \sin \varphi = \frac{2\pi \sigma r^2}{R}.$$



Obr. 10

Jelikož tyto síly mají opačný směr a jsou to jediné dvě uvažované síly, musí se v klidu jejich velikosti rovnat, tedy

$$\pi r^2 P = \frac{2\pi \sigma r^2}{R} \Rightarrow P = \frac{2\sigma}{R}. \quad (1)$$

Musíme si uvědomit, že σ pro Balónek nemusí být zdaleka konstantní, jako je tomu například u bubliny.

Nyní se vrátíme k našemu grafu závislosti σ na relativním prodloužení. Začneme oblastí, kde je σ prakticky konstantní, a situace je tedy analogická dvěma spojeným bublinám. Když se podíváme na (1) a budeme uvažovat konstantní σ , je zřejmé, že čím více bude Balónek nafouknutý, tím nižší tlak bude uvnitř. Tedy pokud na počátku máme stejně nafouknuté Balónka a Balónku a tlak v Balónkovi se nepatrně zvýší, vzduch začne proudit do Balónky a tím ji zvětšovat, čímž klesá tlak uvnitř ní. Zároveň se zmenšuje Balónek, čímž se zvyšuje tlak uvnitř něj. Máme tedy situaci, která skončí až ve chvíli, kdy se jeden z Balónků dostane mimo oblast, kdy σ nezávisí na prodloužení, což v praxi znamená, že jeden z Balónků se skoro vyfoukne a druhý se mírně nafoukne.

Pokud se budeme zabývat oblastí velkých prodloužení, můžeme vcelku úspěšně aproximovat závislost napětí na poloměru Balónka pomocí lineární závislosti, tedy $\sigma = \alpha R$, kde α je nějaký koeficient úměrnosti větší než nula. Pokud tento vztah dosadíme do (1), získáme vztah

$$P = 2\alpha.$$

Je tedy vidět, že tlak v Balónkovi (pro tuto oblast poloměrů) příliš nezávisí na poloměru Balónka. Pokud tedy máme na počátku stejně nafouknuté Balónka i Balónku a vlivem fluktuací se v jednom z nich nepatrně zvýší tlak, nic se neděje, jelikož ten se opět vyrovná, aniž by se výrazně změnil poloměr.

Petr Sýkora

petr@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . P ... Balónek uprchlík (4 body; průměr 2,37; řešilo 35 studentů)

Na planetě Balónků došlo k revoluci a k moci se dostali fundamentalisté, kteří zakázali jíst traverzy se šlehačkou. Jelikož šlo o Funíkovo oblíbené jídlo, nezbylo mu nic jiného než odejít do dobrovolné emigrace.

Při přiletu na Zem byl Funík zavřen do karantény a byl mu změřen objem V a teplota T . Imigrační úřad však rozhodl, že nedostane azyl, pokud nezmění svůj objem na V' a teplotu na T' . Funík nemůže v karanténě přijímat ani odevzdávat žádné teplo, měnit počet částic, ze kterých je složen, i na traverzy se šlehačkou si prozatím musí nechat zajít chuť. Poradte Funíkovi, jak to má udělat, aby mohl na Zemi prožít šťastný a spokojený život.

Problém Matouš slyšel na přednášce prof. Koteckého a vymyslel řešení.

I pravil Velký Balón svým věrným Balónkům:

„Dosud jste dodržovali zákony, jež byly vyřčeny v pradávných dobách. Přijde však ten, jenž objeví tajné učení, které mělo být zapomenuto, a vzepře se nesvobodnému pohybu po předem určených křivkách. Jen on pochopí mou radu, že žádný okamžik není dost krátký.“

Jako správný věřící zná Funík tento citát z Balible. V semináři trávili nad interpretací tohoto citátu celé věky. Ale ani oni, ani nikdo z učenců s tím nepohnul. Od té doby si na to nikdy nevzpomněl, až teď v karanténě při zoufalé modlitbě a odříkávání Balónnáše. Ztratil už všechnu naději, jak splnit podmínky, jež mu byly stanoveny. Kdyby jeho teplota T a objem V ležely na adiabatě, která je spojuje s požadovanou teplotou T' a objemem V' , nebylo by co řešit. Prostě by se pořádně nadechnul či naopak vydechnul a bez výměny tepla by dosáhl požadovaných hodnot. Pánové z imigračního ale Funíka na Zemi nechtějí a určili V' a T' tak, aby to takto splnit nešlo. A už od mládí se učil poučku, již vyslovil v dávných dobách moudrý Adiat, že pokud si s nikým nevyměňuje teplo, musí se jeho stavové veličiny nevyhnutelně pohybovat po předem určené křivce, jež nese mudrcovo jméno. Ale zčistajasna pochopil posvátný citát. Mudrc se mýlil. Pokud provede libovolný proces dostatečně rychle, teplo se nestačí vyměnit. A to je klíč k záhadě, jež trápila Balónky po celé věky. Dosáhnout potřebné teploty a objemu byla už pro Funíka hračka. V mžiku si spočítal, že potřebuje svůj objem snížit na V'' (ale i se zvýšením objemu by si Funík poradil) při zachování stejné teploty T , aby se potom mohl po adiabatě dostat na hodnoty T' , V' . Mobilizoval tedy všechny své síly a prudce narazil do stěny karantény. Během krátkého okamžiku se jeho objem snížil na potřebnou hodnotu V'' . Pak už nezbyvalo, než podepsat propouštěcí protokoly a začít nový život plný štěstí a spojenosti. A že se to Funíkovi skutečně povedlo, svědčí i to, že se zanedlouho dostal jako první Balónek do žebříčku stovky největších boháčů světa díky své síti rychlých občerstvení Mc'Travers. I lidi totiž nakonec poznali, co je dobré.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

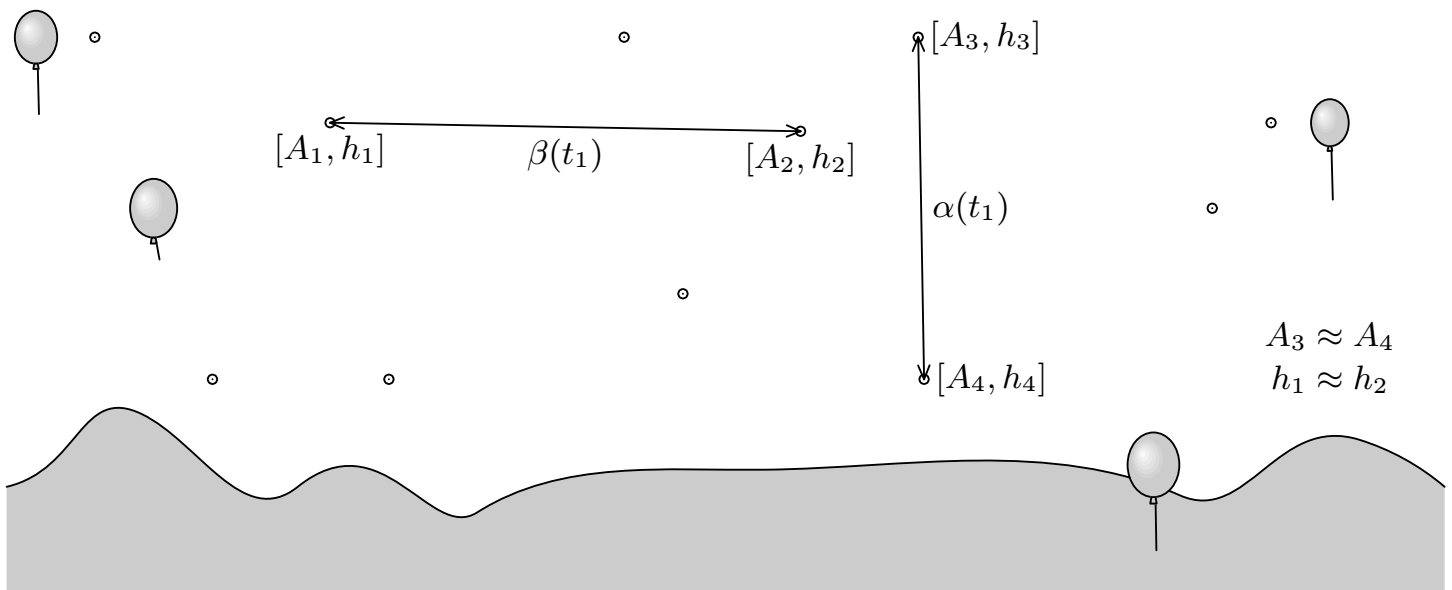
Úloha IV . E ... jak oči Balónka klamou (8 bodů; průměr 4,70; řešilo 20 studentů)

Balónci při pozorování oblohy často soudí, že se jim souhvězdí vysoko nad hlavou zdají menší, než když si je prohlížejí nízko nad obzorem. Proveďte pozorování na Zemi a měřením ověřte, zda jde skutečně o klam. Změřte úhlovou vzdálenost $\alpha(t_1)$ dvou vybraných hvězd, které jsou přibližně nad sebou (mají stejný azimut A), a úhlovou vzdálenost $\beta(t_1)$ jiných dvou hvězd, které jsou ve stejné výšce h nad obzorem, (tzn. kontrola v obou nezávislých směrech) v okamžiku, kdy se tyto hvězdy nacházejí co nejnižše nad obzorem. Až později stejné dvojice

hvězd najdete v co největší výšce, měření obou úhlových vzdáleností $\alpha(t_2)$, $\beta(t_2)$ zopakujte. Snažte se pochopitelně měřit co nejpřesněji!

Zvlášť oceníme, pokud ze znalosti katalogizovaných souřadnic hvězd přesně vypočítáte jejich teoretickou úhlovou vzdálenost. Nezapomeňte popsat použité pomůcky a zamyslet se nad jejich výhodami a nevýhodami (resp. diskutovat přesnost měření), uvést důležité podmínky měření a určit zkoumané hvězdy – alespoň načrtněte mapku hvězdného okolí a uveďte směr (např. jih) a čas měření. Vyhodnoťte chyby měření a v diskusi srovnajte výsledky.

Vymyslel Pavel Brom inspirován dotazem na hvězdárně.



Primárním cílem úlohy mělo být ověřit neměnnost úhlových vzdáleností mezi hvězdami, a to ve dvou nezávislých a významných směrech – vodorovném a svislém. Totiž právě ve vertikálním směru můžeme očekávat případné změny úhlových vzdáleností, když si uvědomíme, že směr šíření světla je ovlivňován při průchodu atmosférou, což má za následek posunutí pozice hvězdy. Tento jev se nazývá *atmosférická refrakce* a jeho případné potvrzení nám budiž výzvou k honbě za co nejvyšší přesností našeho měření!

Teorie

V teoretické části bychom nejprve měli provést rešerši, abychom získali kvantitativní představu o velikosti atmosférické refrakce a podle toho mohli plánovat přesnost měření a vybrat vhodné hvězdy. Mnohá literatura udává maximální hodnotu refrakce 34 úhlových minut při obzoru, o kterou je pozorovaná pozice hvězdy posunuta výš oproti skutečné. (Díky refrakci je tedy Slunce déle nad obzorem, a to řádově o několik minut.) Zdůrazněme okolnost *při obzoru* a uvědomme si, že bychom neměřili absolutní refrakci, nýbrž tzv. diferenciální refrakci, což znamená, že se posouvají polohy obou hvězd, mezi kterými úhlovou vzdálenost měříme. Ke snížení relativní chyby bychom tedy měli volit hvězdy raději více vzdálené.

K potvrzení atmosférické refrakce bychom potřebovali měřit s přesností menší než půl stupně. Jelikož počasí většinou nedovoluje měřit hvězdy těsně nad obzorem, pro reálně zkoumané hvězdy je vliv refrakce mnohem menší a její přímé experimentální potvrzení by bylo v našich možnostech nesmírně náročné. (Viz komentář k došlým řešením.)

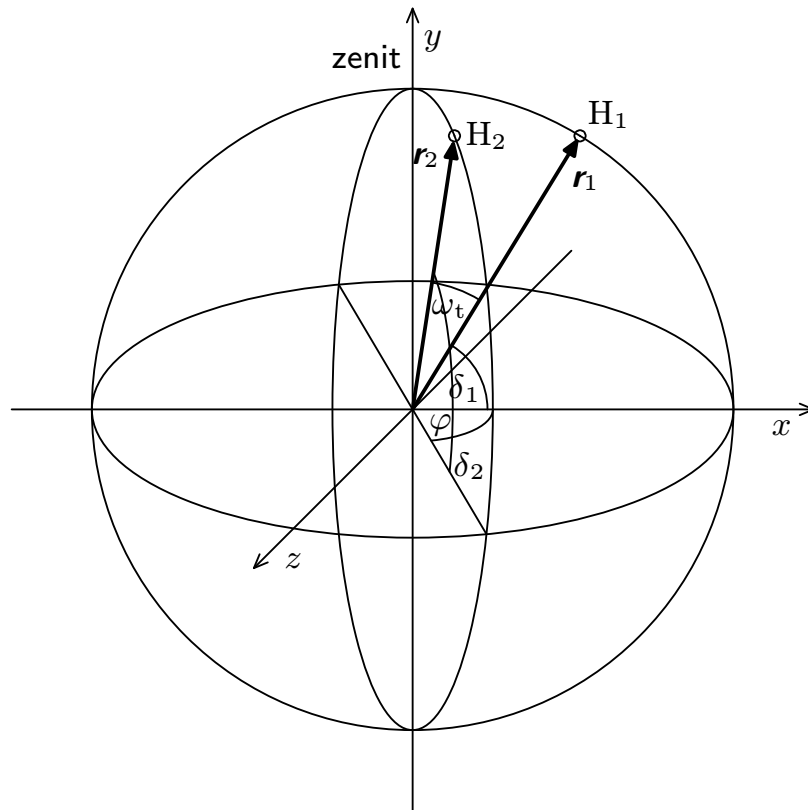
Do teorie dále patří uvedení vztahu pro výpočet teoretické úhlové vzdálenosti dvou hvězd se známými katalogizovanými souřadnicemi α (rektascenze) a δ (deklinace). Uveďme rychlé odvození vztahu od *Marka Pechala*, který využil analytickou geometrii. Osu x zavedeme jako

průsečnici roviny světového rovníku s rovinou deklinační kružnice první hvězdy, osu y definuje v kladném smyslu polopřímka střed sféry – zenit a konečně osa z je na ně kolmá. Polohový vektor první hvězdy na jednotkové sféře je $\mathbf{r}_1 = (\cos \delta_1, \sin \delta_1, 0)$, analogicky pro druhou hvězdu, jejíž deklinační kružnice je v našem souřadném systému otočena podél osy y o úhel $\varphi = |\alpha_1 - \alpha_2|$, dostáváme polohový vektor $\mathbf{r}_2 = (\cos \delta_2 \cos \varphi, \sin \delta_2, \cos \delta_2 \sin \varphi)$. Hledaná teoretická úhlová vzdálenost ω_t mezi hvězdami potom odpovídá úhlu svíranému těmito vektory, který vypočteme pomocí skalárního součinu (sčítají se součiny vždy odpovídajících komponent vektorů). Platí

$$\cos \omega_t = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \varphi + \sin \delta_1 \sin \delta_2,$$

odkud po dosazení za φ a zjednodušení díky sudosti funkce kosinus dostáváme⁴

$$\omega_t = \arccos (\cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2) + \sin \delta_1 \sin \delta_2).$$



Obr. 11

⁴⁾ Při užití Pythagorovy věty k vyjádření délky tětivy v hledaném oblouku (vezmeme-li délky odvěsen jako rozdíl y -souřadnic v našem souřadném systému a vzdálenost pat kolmic spuštěných z obou hvězd na rovinu rovníku) vypočteme délku tohoto oblouku z délky tětivy podle získaného vztahu

$$\omega_t = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2) - \sin \delta_1 \sin \delta_2)},$$

který odpovídá předchozímu výrazu přes identitu $\arcsin \sqrt{(1-x)/2} = \arccos x/2$, pro $x \in \langle -1; 1 \rangle$, kterou lze dokázat srovnáním derivací obou stran a samozřejmě funkčních hodnot např. v krajním bodě.

Plánování experimentu a pomůcky

V zimě kolem Vánoc se jako vhodné hvězdy nabízejí např. Polárka a některá z hvězd Velkého vozu pod Polárkou v době krátce po setmění. Po půlnoci najdeme Velký vůz v nadhlavníku, což by nám velice vyhovovalo. Bohužel v podmínkách měření (opar při obzoru, světelné znečištění) nebyla jasnost hvězd Velkého vozu dostatečná pro spolehlivé vizuální měření a obecně bylo nutné volit co nejjasnější hvězdy, jako např. vůbec nejjasnější hvězdu na obloze Sírius (α CMa) a jasnou hvězdu přibližně nad ním při jeho východu, třeba levou horní hvězdu Orionu s názvem Betelgeuze (α Ori). Kolem 23 hodin se tyto hvězdy nacházejí nejvýše nad obzorem (kulminují). Vodorovná úhlová vzdálenost byla měřena mezi jasnými hvězdami Rigel (β Ori) (v Orionově obrazci vpravo dole) a Prokyon (α CMi; alfa v souhvězdí Malého psa nalevo od horních hvězd Orionu).

K měření byla použita v antice osvědčená Jakobova hůl, která byla realizována ocelovým metrem a nevelkým dřevěným trojúhelníkem s ryskou. Samozřejmostí je užití statistického zpracování, které potlačí náhodnou chybu subjektivního měření (chceme srovnávat střední hodnoty). Dalšími potřebami byla baterka s červeným světlem, sešit pro zápis hodnot a slabé i silné rukavice.

Experimentálně zjištěná úhlová vzdálenost ω byla vypočtena z průměru d naměřených hodnot d_i délky Jakobovy hole (tj. vzdálenost trojúhelníka od oka) a se znalostí pevné délky l přepony trojúhelníka (vzdálenosti vrcholů, se kterými se kryly obě hvězdy při nastavené vzdálenosti d_i). Z jednoduché geometrie zřejmě platí

$$\omega = 2 \operatorname{arctg} \frac{l}{2d}.$$

Chybu takto vypočteného úhlu určíme z chyby měření l i d např. pomocí parciálních derivací

$$\Delta\omega_d = \frac{\partial\omega}{\partial d}(d_0, l_0)\Delta d = \frac{4l_0}{4d_0^2 + l_0^2}\Delta d,$$

$$\Delta\omega_l = \frac{\partial\omega}{\partial l}(d_0, l_0)\Delta l = \frac{4d_0}{4d_0^2 + l_0^2}\Delta l,$$

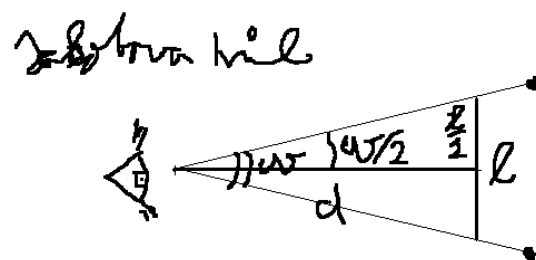
které sloučíme podle kvadratického zákona sčítání chyb, tedy výsledek uvedeme ve tvaru

$$\omega = \left(2 \operatorname{arctg} \frac{l}{2d} \pm \frac{4}{4d^2 + l^2} \sqrt{d^2(\Delta l)^2 + l^2(\Delta d)^2} \right) \cdot \frac{180^\circ}{\pi},$$

kde l , d jsou spočtené střední hodnoty ze statistického zpracování.

Postup měření

Jakmile byly za soumraku vybrané hvězdy pozorovatelné, zaznamenal jsem podmínky měření (datum, místo, čas, teplotu, příp. tlak a vlhkost vzduchu, měřené hvězdy a jejich výšky nad obzorem) a zahájil měření. Zapřel jsem se do rozvětveného stromu, tzn. opřel záda o kmen a levou ruku o příhodnou větev. Pravou rukou jsem konec ocelového metru vždy přikládal stejným způsobem na kost vedle oka, dřevěný trojúhelník jsem spolu s navijákem metru držel v levé ruce tak, že ocelový pásek metru byl kolmo na plochu trojúhelníka a ryska trojúhelníka přiléhala právě ke stupnici, na které bylo možno odečítat hodnotu d_i . Citlivě jsem měnil



Obr. 12. Jakobova hůl (náčrtek)

vzdálenost trojúhelníku od oka, dokud se měřené hvězdy nekryly s vrcholy trojúhelníka při rychle střídavém pohledu (to zajistí, že oba vrcholy současně splývají s příslušnými hvězdami). Před odečtením hodnoty jsem ukazováčkem přitiskl stupnici metru k dřevěnému trojúhelníku, aby nedošlo k posunutí. Pro vyšší efektivitu jsem si zapamatovával tři naměřené hodnoty a ty pak najednou zapsal. Nastavení délky Jakobovy hole při měření jsem prováděl střídavě jak při prodlužování, tak při zkracování vzdálenosti trojúhelníka od oka. Měření úhlové vzdálenosti jsem pro každou dvojici hvězd opakoval 10krát pro statistické zpracování. Na konci měření jsem opět zapsal aktuální podmínky experimentu.

Výsledky

Všechna měření byla provedena v neděli 22. ledna 2006 na louce (využití rozvětveného stromu) NPP Radouč u Mladé Boleslavi. Teplota vzduchu (měřená kuchyňským lihovým teploměrem s chybou $0,5^\circ\text{C}$) na začátku první série měření byla -4°C , na konci -5°C ; později na začátku i na konci druhé série -9°C . Velikost atmosférického tlaku byla odhadnuta podle televizní relace o počasí na (1030 ± 10) hPa. Během první série měření vzrostly výšky hvězd nad obzorem o 3 až 4 stupně, během druhé série klesly nejvýše o 2 stupně. Naměřené hodnoty úhlových vzdáleností jsou uvedeny a statisticky zpracovány v následující tabulce.

série	d_1 [cm]	d_2 [cm]	d_3 [cm]	d_4 [cm]	d_5 [cm]	d_6 [cm]	d_7 [cm]	d_8 [cm]	d_9 [cm]	d_{10} [cm]
I H	22,1	22,0	22,2	22,1	22,1	22,1	22,2	22,1	22,1	22,2
I V	31,1	31,3	31,6	31,7	31,1	31,6	31,6	31,3	31,2	31,5
II V	31,5	31,8	31,5	31,45	31,9	31,4	31,0	31,3	31,2	31,5
II H	22,0	22,1	22,1	22,1	22,2	22,1	22,2	22,1	22,1	22,1

Naměřené hodnoty délky Jakobovy hole (H – horizontální, V – vertikální vzdálenost).

série	čas	hvězdy	výška nad obzorem	průměr d [cm]	σ_d [cm]
I H	17:55–18:21	α CMi – β Ori	$8^\circ, 18^\circ$	22,115	0,058
I V	18:30–18:56	α CMa – α Ori	$4^\circ, 31^\circ$	31,400	0,226
II V	23:00–23:21	α CMa – α Ori	$22^\circ, 44^\circ$	31,455	0,263
II H	23:22–23:44	α CMi – β Ori	$45^\circ, 23^\circ$	22,110	0,057

Naměřené úhlové vzdálenosti – statistické zpracování.

Ze střední hodnoty délky Jakobovy hole d a pro hodnotu $l = (15,70 \pm 0,05)$ cm vypočteme experimentálně stanovenou úhlovou vzdálenost ω s příslušnou chybou podle odvozeného vztahu. Chybu měření Δd určíme ze standardní výběrové odchylky σ_d a možné chyby měření ocelovým metrem 0,05 cm podle kvadratického zákona sčítání chyb $\Delta d = \sqrt{\sigma_d^2 + (0,05 \text{ cm})^2}$. Střední hodnoty správně zaokrouhlíme v řádu první (v případě jedničky až druhé) platné číslice chyby, kterou bezpečně zaokrouhlujeme nahoru. Na závěr vypočteme teoretickou úhlovou vzdálenost pro známé souřadnice hvězd rektascenze (α) a deklinace (δ). Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce.

Hvězda	Souřadnice α	Souřadnice δ	$d_{I,II} \pm \Delta d_{I,II}$ [cm]	$\omega \pm \Delta\omega$ [°]	rel [%]	ω_t [°]
α CMi	$7^{\text{h}}39^{\text{m}}18,12^{\text{s}}$	$+5^\circ 13' 30''$	$22,12 \pm 0,06$	$39,01 \pm 0,15$	0,4	38,51
β Ori	$5^{\text{h}}14^{\text{m}}32,28^{\text{s}}$	$-8^\circ 12' 6''$	$22,11 \pm 0,06$	$39,01 \pm 0,15$	0,4	38,51
α CMa	$6^{\text{h}}45^{\text{m}}8,92^{\text{s}}$	$-16^\circ 42' 58,1''$	$31,4 \pm 0,3$	$28,1 \pm 0,3$	1,1	27,10
α Ori	$5^{\text{h}}14^{\text{m}}32,28^{\text{s}}$	$+7^\circ 24' 25,4''$	$31,5 \pm 0,3$	$28,0 \pm 0,3$	1,1	27,10

Výsledky měření.

Diskuse

Srovnáním hodnot v tabulce výsledků měření můžeme učinit závěr, že střední hodnoty zjištěných úhlových vzdáleností mezi určitou dvojicí hvězd s ohledem na chybu měření jsou poměrně dobře blízké, tedy můžeme konstatovat, že zdánlivá změna velikosti souhvězdí (uvážíme-li, že např. průměr Měsíce vidíme pod úhlem asi $0,5^\circ$) je skutečně klamem, což jsme experimentálně ověřili s chybou měření menší, než je např. úhlový průměr Měsíce. Domnělé zmenšení velikosti hvězdných obrazců vysoko nad obzorem než při pozici těsně nad obzorem můžeme vysvětlit jako psychologický efekt. Obrazce nízko nad obzorem máme možnost srovnávat s pozemskými objekty (domy, paneláky), vůči nimž se souhvězdí zdají poměrně velká, zatímco ve větší výšce nad obzorem možnost srovnávat nemáme a nabýváme dojmu, že souhvězdí jsou menší v rámci rozlehlé nebeské klenby.

Měření je zatíženo relativní chybou kolem 1 %. Přes použití primitivních pomůcek se podařilo chybu měření snížit, a to zejména užitím statistického zpracování, volbou vhodných hvězd (tj. dostatečně vzdálených) i parametrů pomůcek (l). Výsledná absolutní chyba je menší než maximální možná velikost atmosférické refrakce. Refrakci se však nepodařilo přímo potvrdit, jelikož nebylo možné měřit hvězdy těsně nad obzorem kvůli oparu a pro reálné výšky je velikost refrakce menší než výsledná absolutní chyba měření. Dokonce střední hodnoty jsou vychýleny v opačném smyslu, než bychom čekali (úhlová vzdálenost v důsledku diferenciální refrakce je nejmenší těsně při obzoru a pro větší výšky nad obzorem roste). Toto odchýlení lze zdůvodnit náhodnou chybou při měření čili statistikou. S ohledem na výslednou chybu nemůžeme z měření vyvozovat žádné závěry ohledně potvrzení refrakce, nanejvýš můžeme odhadnout její maximální velikost na $0,3^\circ$, což souhlasí s realitou. Srovnáním experimentálních hodnot s teoretickými objevujeme, že měření je zatíženo systematickou chybou (měřené úhlové vzdálenosti vycházejí větší než teoretické), což lze zdůvodnit okolností, že jsme se okem nedívali přesně z vrcholu (bližšího konce) Jakobovy hole. V tomto měření však systematická chyba není podstatná, jestliže jsme měřili stále stejným způsobem!

Závěr

Prohlásíme-li za okem postřehnutelný rozdíl ve velikostech obrazců souhvězdí, jenž je minimálně srovnatelný s úhlovým průměrem Měsíce, pak se nám podařilo s relativní chybou asi 1 %, resp. s absolutní chybou pod $0,3^\circ$ ověřit, že úhlová vzdálenost mezi hvězdami se nemění (více než uvedená chyba měření) a popisované zdání je skutečně psychologický klam.

Poznámky k došlým řešením

Všichni, kteří si vyzkoušeli měření v tak nehostinné zimě, si zaslouhují mé uznání a lepší bodové ohodnocení. Někteří úlohu pojali jako přímé ověření atmosférické refrakce a v teorii se zabývali její velikostí. I takováto řešení s přirozeným úsilím dosáhnout co nejvyšší přesnosti jsme náležitě ocenili. Nejrafinovanější metody využívaly digitální fotoaparát (*Lukáš Strítěský, Tomáš Bednárík*) a srovnávání velikosti např. Měsíce odečítané v pixelech; skutečně již pouhým okem můžeme postřehnout, že Slunce nebo Měsíc je těsně při obzoru zdeformované a připomíná zploštělý bochník. K potvrzení refrakce by byly v našich možnostech vhodnější nepřímé metody, např. měření doby výskytu Slunce nad obzorem v den rovnodennosti apod.

K přímé metodě měření úhlových vzdáleností si mnozí vyrobili nejrůznější pomůcky (deska, či dokonce dlouhá hokejka pro zapichování špendlíků, hřebíků apod., které se kryly s pozorovanými hvězdami), příp. další rozmanité realizace Jakobovy hole. Nejzávažnějšími chybami byl výpočet teoretické úhlové vzdálenosti s použitím Pythagorovy věty pro rozdíly v úhlových souřadnicích jakožto délky odvěsen. Naštěstí dotyční řešitelé věřili více svým experimentálním

hodnotám. Zdůrazňuji, že závěr konstatující experimentální ověření něčeho musí udávat rovněž chybu měření, jinak takové tvrzení nemá dobrý smysl.

Pavel Brom

paja@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . S ... čtvrtý díl (5 bodů; průměr 4,09; řešilo 11 studentů)

- a) Jakou tepelnou kapacitu plynu složeného z tříatomových molekul s atomy uspořádanými do vrcholů trojúhelníku předpovídá klasická fyzika? Na jakou hodnotu tato kapacita poklesne při snížení teploty na 100 K?
- b) Zjistěte chování výrazů pro vnitřní energii krystalu a energetické spektrum záření černého tělesa pro malé teploty. Odvoďte dále tzv. Wienův posunovací zákon. Ten říká, že frekvence ω_m , pro níž má závislost intenzity záření černého tělesa na teplotě maximum, je přímo úměrná teplotě.
- c) Vypracujte lepší teorii tepelné kapacity krystalu, aby uvažovala kolektivní kmity atomů. Případné integrály nemusíte počítat.
- Nápověda.* Uvědomte si, že se krystalem šíří zvukové vlny (jak příčné, tak podélné, a to různými rychlostmi). Počet modů nemůže být větší, než je počet stupňů volnosti $3N$ krystalu (N je počet částic).

Zadal autor seriálu Matouš Ringel.

- a) Při řešení budeme postupovat naprosto stejně jako v seriálu. Víme, že na každý kinetický stupeň volnosti jedné molekuly připadá střední kinetická energie $kT/2$, a z viriálového teorému je nám také známo, že na každou harmonickou interakci mezi dvěma částicemi připadá střední potenciální energie $kT/2$.

Naši tříatomovou molekulu si můžeme představit tak, jako to ukazuje obrázek 13; pružiny znamenají harmonickou interakci mezi částicemi. Pružiny jsou tři, proto je střední potenciální energie molekuly rovna $3kT/2$.

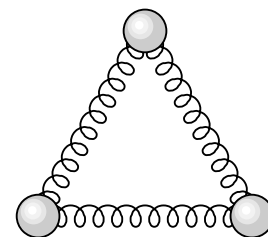
Střední kinetickou energii molekuly můžeme určit velice snadno. Jelikož pracujeme se třemi atomy a každý se může hýbat ve třech směrech, máme dohromady devět stupňů volnosti. Proto střední kinetická energie molekuly bude $9kT/2$. Počet stupňů volnosti jsme mohli určit i poněkud jiným způsobem, a sice rozložit si pohyb molekuly na jisté elementární pohyby. Jedním z nich je pohyb těžiště molekuly – tři stupně volnosti, dále rotace molekuly jako celku kolem svislé osy a dvou os procházejících vždy jednou molekulou a středem protější strany (tři stupně volnosti); nakonec jsou to tři kmitavé pohyby, podmíněné pružinami. Celkem rovněž dostáváme devět kinetických stupňů volnosti.

Jelikož se v jednom molu plynu nachází N_A molekul, molární tepelná kapacita plynu je rovna

$$c = N_A \cdot \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2} \right) kT = 6RT.$$

Pokud plyn ochladíme na teplotu 100 K, „zamrznou“ vibrační stupně volnosti molekuly; tuhost pružin klesá k nule. Tepelná kapacita se zmenší právě o příspěvek potenciální a kinetické energie kmitů, tedy o $3kT/2 + 3kT/2$ na molekulu. Nová měrná tepelná kapacita proto bude rovna

$$c_{100\text{ K}} = N_A \cdot \frac{6}{2} kT = 3RT.$$



Obr. 13

- b) Nyní se podíváme, jak se chovají inkriminované v seriálu odvozené vzorce pro nízké teploty. Nejprve prozkoumáme závislost tepelné kapacity krystalu

$$c = R \frac{\hbar^2 \omega^2}{kT^2} \frac{\exp(\hbar\omega/kT)}{(\exp(\hbar\omega/kT) - 1)^2}.$$

Při malých teplotách je poměr $\hbar\omega/kT$ velice velký. Ve jmenovateli tedy můžeme s klidným svědomím zanedbat jedničku, čímž dostaneme

$$c \approx R \frac{\hbar^2 \omega^2}{kT^2} \exp(-\hbar\omega/kT).$$

Einsteinův model řeší zásadní rozpor s třetím termodynamickým zákonem – tepelná kapacita jde se snižující se teplotou k nule. Předpovězený pokles je v zásadě exponenciální. Experimentálně pozorovaná závislost ovšem klesá k nule mnohem pomaleji, a to jako T^3 . Situaci poněkud napravíme v další podúloze.

Pro spektrální hustotu energie záření černého tělesa jsme v seriálu odvodili vztah

$$u(\omega) = V \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}.$$

Malé teploty odpovídají velkým β . Stejně jako v předchozím odstavci lze zanedbat jedničku ve jmenovateli oproti exponenciále, čímž získáme

$$u(\omega) \approx V \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \exp(-\hbar\omega/kT).$$

Opět jsme došli k téměř exponenciální závislosti na frekvenci. V tomto případě je však tento závěr v naprostém souhlasu s experimentem.

Dalším úkolem bylo najít maximum spektrální hustoty energie, respektive určit jeho závislost na teplotě. To provedeme snadným derivováním vzorce pro $u(\omega)$. Nejprve si však pro přehlednost označíme $x = \hbar\omega/kT$. Podmínka nulové derivace zní

$$0 = \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \sim \frac{d}{dx} \frac{x^3}{e^x - 1},$$

kde jsme vynechali všechny na frekvenci nezávislé faktory. Vypočítáme poslední derivaci

$$0 \sim \frac{3x^2}{e^x - 1} - \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2},$$

čili

$$3(e^x - 1) = x e^x.$$

Poslední rovnice má jisté řešení x^* , jež nejde určit analyticky⁵ (pro zajímavost $x^* \approx 2,82$). My jej však ani znát nemusíme. Spokojíme se s faktem, že v maximu platí $x = x^*$, čili

$$\omega = x^* \frac{kT}{\hbar} \approx 2,82 \frac{k}{\hbar} \cdot T.$$

⁵⁾ Nicméně jde odhadnout analyticky. Rovnici přepíšeme na tvar $1 - e^{-x} = x/3$ a exponenciálu rozložíme do Taylorovy řady $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$. To znamená $x - x^2/2 + x^3/6 + \dots = x/3$, tedy $2/3 = x/2 - x^2/6 + \dots$. Zanedbáme-li člen s druhou mocninou, dostaneme odhad $x^* \approx 4/3 \approx 1,33$. Ponecháme-li jej a vezmeme-li kladný kořen příslušné kvadratické rovnice, náš odhad bude $x^* \approx 3,56$. Po chvílce přemýšlení o zanedbaných členech si snadno uvědomíte, že tyto dvě hodnoty omezují x^* shora i zdola.

Odvodili jsme Wienův posunovací zákon.

- c) Naším posledním úkolem je vylepšit teorii tepelné kapacity krystalu. Jak jsme již naznačili v seriálu i v zadání úlohy, hlavním problémem Einsteinova modelu je předpoklad, že každý atom kmitá nezávisle na všech ostatních. Představme si například dvě spřažená kyvadla (jakožto model krystalu o dvou atomech). Zkušenost dokonce již s tímto triviálním modelem nás učí, že není vhodné uvažovat kmity obou kyvadel samostatně, nýbrž uvažovat kmity coby superpozici dvou normálních kmitů (jeden z nich odpovídá situaci, kdy se kyvadla kývají ve fázi, a druhý v protifázi).

Potřebovali bychom tedy zjistit, jakého druhu jsou kolektivní kmity v krystalu. Nápo- věda nás nasměrovala na zvukové vlny. Představme si například stojatou zvukovou vlnu v krystalu. Každá taková vlna o určité frekvenci odpovídá vpravdě kolektivním kmitům, neboť stačí znát pohyb jediného atomu, abychom mohli určit pohyb všech ostatních. Taková stojatá vlna ovšem nemůže být libovolná, nýbrž platí pro ni známá kvantovací podmínka, totiž že do rozměru krystalu se musí vejít celý počet půlvln. Skutečné kmity pak odpovídají superpozici jednotlivých stojatých vln (modů).

Závěr zní: Místo individuálních kmitů uvažuj jednotlivé mody zvukových vln. Odteď jsme v přesně stejné situaci jako při odvozování hustoty záření černého tělesa. Můžeme jej doslova zopakovat, pouze musíme vhodně zaměnit rychlost světla (elektromagnetických vln) za rychlost zvukových vln.

Pokud si osvěžíme zmíněný postup, snadno poznáme, že vhodným místem k nahrazení c za rychlost zvuku je rovnice pro $g(E) dE$. Nynější situace je však poněkud složitější. Máme totiž jak příčné vlny, šířící se rychlostí v_{\perp} se dvěma možnými polarizacemi, tak podélné vlny s jednou polarizací a rychlostí v_{\parallel} . Každé z těchto vlnění přispěje příslušným způsobem do celkové hustoty stavů. Správná hustota stavů bude proto dána vztahem

$$g(E) dE = V \frac{E^2 dE}{2\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{2}{v_{\perp}^3} + \frac{1}{v_{\parallel}^3} \right).$$

Porovnejme tento vzorec s hustotou stavů pro světlo. Snadno nahlédneme, že naše $g(E)$ získáme záměnou

$$\frac{2}{c^3} \rightarrow \frac{2}{v_{\perp}^3} + \frac{1}{v_{\parallel}^3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3}{v^3},$$

kde jsme definovali jakousi efektivní rychlost šíření vln v (jež odpovídá třem modům – dva příčné a jeden podélný). Až na jeden dále diskutovaný drobný detail stačí ve všech formulích pro záření černého tělesa provést tuto záměnu a získáme tím odpovídající vzorec pro kmity atomů v krystalu.

Onen drobný detail spočívá v otázce celkového počtu modů. Tento počet není pro elektromagnetické záření v krabici nijak omezený. Ovšem celkový počet modů v krystalu bude jistě omezen počtem stupňů volnosti atomů v uzlech krystalové mříže. Každý atom se může pohybovat ve třech směrech (má tři stupně volnosti), krystal jako celek má tedy $3N$ stupňů volnosti. Počet vybuzených modů musí být (alespoň přibližně) roven tomuto číslu. Řešením je neuvažovat mody s frekvencí větší než nějaká určitá frekvence ω_D (Debyeova frekvence). Ta je dána rovností celkového počtu modů a $3N$

$$3N = \int_0^{\omega_D} g(\omega) d\omega = \int_0^{\omega_D} \frac{3V\omega^2}{2\pi^2 v^3} d\omega = \frac{3V}{2\pi^2 v^3} \frac{\omega_D^3}{3},$$

odkud

$$\omega_D = 2\pi v \left(\frac{3\rho}{4\pi} \right)^{1/3},$$

kde jsme zavedli hustotu atomů $\rho = N/V$. Nyní bychom například mohli vypočítat vnitřní energii, a to jako

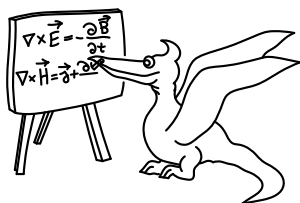
$$E = \int_0^{\omega_D} u(\omega) d\omega = \frac{3V\hbar}{2\pi^2v^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} = 9NkT \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1},$$

kde jsme zavedli tzv. Debeyeovu teplotu T_D , splňující $\hbar\omega_D = kT_D$.

Snadno prozkoumáme limitní vlastnosti tohoto výrazu. Pro velké teploty je horní mez integrálu velice malá, hlavní příspěvek k integrálu pochází od malých x . Tehdy můžeme místo exponenciály napsat první dva členy Taylorova rozvoje a odhadnout integrál jako $\int x^2 dx = (T_D/T)^3/3$. Potom $E \approx 3NkT$ a molární tepelná kapacita je $c = dE/dT = 3N_A kT = 3RT$, což identifikujeme jako Dulongův-Petitův zákon. Pro malé teploty je naopak horní mez integrálu velmi velká. Integrand exponenciálně klesá, takže hlavní příspěvek k integrálu pochází z oblastí nevelkých x . Integrál je proto téměř nezávislý na teplotě. Závislost energie na teplotě bude tedy dána pouze předintegrálním faktorem, a to jako $E \sim T^4$. Tepelná kapacita je derivací energie, proto $c \sim T^3$ zcela ve shodě s experimentem.

Matouš Ringel

matous@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 6: Poslední díl

Poslední díl seriálu zasvětime diskusi různých modelů magnetismu látek. Tuto problematiku jsme zvolili proto, že je relativně názorná a také poměrně nenáročná na předběžné znalosti čtenáře; navíc patří k jakémusi fyzikálnímu folklóru, se kterým se čtenář stejně jednou bude muset seznámit.

Jak je všem, kdo četli třetí díl seriálu, dobře známo, různé látky po vložení do magnetického pole reagují různě. V zmíněném třetím dílu jsme vypracovali jednoduchou teorii paramagnetismu. Uvažovali jsme pouze interakce částic s vnějším magnetickým polem a nikoliv mezi sebou. Zesilování magnetického pole jsme pak připsali na vrub snaze spinů orientovat se ve směru pole.

Je nám však jasné, že interakci mezi sousedními spiny není vždy možné jen tak zanedbat. Podíváme se, jaký vliv má interakce mezi částicemi na chování látky. Interakce mezi spiny v krystalech má obvykle jednoduchý tvar. Buď se snaží sousední spiny otáčet tak, aby mířily ve stejném směru, nebo naopak. Dále se omezíme pouze na prvním případě, jehož teorie je jednodušší.

Pokročíme kvalitativním rozborem situace. Představme si spiny ve vrcholech krystalové mřížky snažící se natočit stejným směrem (jako např. v železe) při nevelké teplotě. Tuto mřížku

vložíme do velice slabého magnetického pole (krystal se vždy nachází v nějakém magnetickém poli, např. v poli Země). Pokud teplota není příliš velká, většina spinů bude orientována v jednom jistém směru, určeném slabým magnetickým polem. Bez tohoto pole by nebylo zcela jasné, kterým směrem se spiny natočí. Většina spinů mířících stejným směrem znamená nenulovou makroskopickou magnetizaci. Při zvětšování teploty se však tepelný pohyb bude snažit uspořádání rozbít; magnetizace krystalu bude klesat s teplotou k nule, již dosáhne při teplotě T_C (Curieova teplota). Nad touto teplotou tepelný pohyb zcela rozbije uspořádání a ferromagnet se chová jako paramagnet.

Můžeme se ptát, proč ne každé železo, které najdeme kolem sebe, je namagnetované. Ve skutečnosti totiž je. Ve větším kusu železa se totiž vytvoří malé ostrůvky spinů mířících v zásadě stejným směrem (tzv. domény); ty je možno vidět pod mikroskopem. Pokud je vnější pole dostatečně slabé, domény jsou orientovány v náhodných směrech a celková magnetizace je blízka nule. Jakmile se vnější pole zvýší, domény se snaží orientovat se v jeho směru jako celek a celková magnetizace krystalu se stává nenulovou. Domény spolu složitým způsobem interagují a vývoj celého kusu železa je ještě dále komplikován svou závislostí na historii (způsobu přípravy) – hysterezi.

Naše ambice však nedosahují takových výšin. My budeme uvažovat mnohem jednodušší situaci, tzv. *Isingův model*. Spiny s_i (očíslované přirozenými čísly) rozmístíme do vrcholů d -rozměrné pravoúhlé mříže, jejíž každá strana obsahuje N spinů; na mříži je tedy celkem N^d spinů. Spinům dovolíme nabývat hodnot $+1$ a -1 . Ještě musíme každé konfiguraci spinů přiřadit určitou energii. Pokud je vnější magnetické pole rovno B , energii konkrétní konfigurace Isingova modelu definujeme jako⁶

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j - B \sum_i s_i,$$

přičemž J je nějaký kladný parametr. Zde se první suma bere přes všechny dvojice nejbližších sousedů (takových, mezi kterými na mříži vede příčka). V druhé sumě sčítáme přes všechny vrcholy mříže. Pro ilustraci jsme do obrázku 14 zakreslili energii jedné dvojice spinů v závislosti na jejich vzájemné orientaci a na orientaci vůči vnějšímu magnetickému poli (jeho směr určuje dlouhá šipka).



Obr. 14

Nyní přijde smutná zpráva pro všechny, kdož se těšili na vyřešení dalšího problému. Exaktní řešení (tj. vzorec pro partiční sumu) tohoto problému není kromě jednodimenzionální mříže a dvoudimenzionálního případu s nulovým magnetickým polem známo.

Věnujme se dále přibližnému řešení Isingova modelu. Celá složitost problému spočívá v následujícím. Kdyby v energii nevystupovaly součiny sousedních spinů, situace by byla velice jednoduchá – partiční suma by byla součinem partičních sum každého spinu zvlášť

$$Z = \sum \exp(+\beta B \sum_i s_i) = \sum_i \prod_i e^{+\beta B s_i} = \prod_i \left(\sum_{s_i=\pm 1} e^{+\beta B s_i} \right) = \left(e^{\beta B} + e^{-\beta B} \right)^N.$$

⁶⁾ Pro jednoduchost používáme takové jednotky, ve kterých je magnetický moment spinu roven jedné. V takových jednotkách je B odlišné od pole v nějakých normálních jednotkách o konstantní faktor.

V takovém případě se každý spin chová v podstatě nezávisle na ostatních. Magnetizace mříže pak bude součtem hodnot $M = \sum \langle s_i \rangle$. Jelikož se energie nemění při posunutí celé mříže, všechny střední hodnoty $\langle s_i \rangle$ jsou stejné; definujeme průměrnou magnetizaci na jeden spin vztahem $m = \langle s_i \rangle$, pak bude $M = Nm$. Střední hodnotu spinu pro tento jednoduchý případ jsme vlastně vypočítali již v třetím díle seriálu. Tam jsme dostali (pokud ve smyslu poznámky pod čarou 6 položíme $\mu = 1$)

$$m = \langle s_i \rangle = \frac{e^{\beta B} - e^{-\beta B}}{e^{\beta B} + e^{-\beta B}} = \operatorname{tgh} \beta B.$$

Klíčová otázka zní, jak započítat interakci mezi sousedními spiny. Nabízejí se různé možnosti. Jedním řešením je nahradit každý fluktuující sousední spin svojí střední hodnotou.

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j - B \sum_i s_i \quad \rightarrow \quad -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot \langle s_j \rangle - B \sum_i s_i.$$

Efektivně to vede ke vzniku dodatečného magnetického pole $B_1 = qJm$, kde q je počet nejbližších sousedů každého spinu.⁷ Výraz pro E přejde do tvaru

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot m - B \sum_i s_i = -(Jqm + B) \sum_i s_i = -(B_1 + B) \sum_i s_i.$$

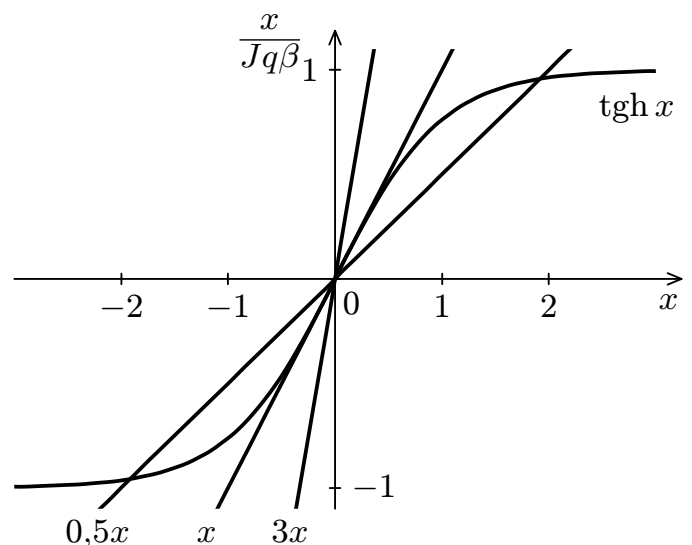
Ovšem pro takovou energii známe jak partiční sumu, tak magnetizaci. Dosazením do příslušného vzorce dostáváme rovnici

$$m = \langle s_i \rangle = \operatorname{tgh} \beta(B_1 + B) = \operatorname{tgh} \beta(Jqm + B).$$

Takovým rovnicím se říká selfkonzistentní rovnice. Význam tohoto slova pochopíme snadno, pokud uvážíme, jak se objevilo m na levé a jak na pravé straně rovnice. Napravo jsme *předpokládali*, že střední magnetizace je m , a z toho vypočítali magnetizaci, kterou takový model předpovídá. Aby byl náš postup konzistentní, musíme tímto výpočtem dostat stejnou hodnotu m magnetizace, jakou jsme vložili do výpočtu pravé strany. To však jistě nepůjde pro libovolnou hodnotu m . Naopak, půjde to pouze pro zcela určité hodnoty m . Jinými slovy, odvozenou rovnici přímo použijeme k určení těch m , pro které výpočet dává smysl; musíme nalézt její kořeny.

Nečekejme však, že se nám pro ně podaří dostat nějaký vzoreček. Opět jsme nuceni použít nějaké přibližné metody. Pokusíme se onu rovnici vyřešit graficky, a to pro případ nulového pole B ; každý pak snadno provede tutéž úvahu i pro nenulové B . Do grafu vyneseme křivku odpovídající pravé straně a křivku odpovídající levé straně. Je lepší pracovat místo s proměnnou m s proměnnou $x = Jqm\beta$. Řešená rovnice má v této proměnné tvar

$$\frac{x}{Jq\beta} = \operatorname{tgh} x.$$



Obr. 15

⁷⁾ Na čtvercové mříži ve 2D $q = 4$, na přímce v 1D $q = 2$, na kubické mříži v 3D $q = 6, \dots$

Směrnice tečny funkce $\tanh x$ v $x = 0$ je 1. Z grafu okamžitě vidíme, že nenulová řešení existují pouze tehdy, pokud $1/Jq\beta < 1$ (pak existuje průsečík přímky a $\tanh x$); pokud existují, jsou dvě. Díky existenci slabounkého vnějšího pole, o němž jsme mluvili na začátku tohoto dílu, se z těchto dvou řešení vybere to, jež má v takovém poli menší energii.

Podmínku na existenci spontánní magnetizace můžeme přepsat do názornějšího tvaru $kT < Jq$. Nenulová magnetizace při nulovém vnějším magnetickém poli B tedy existuje pouze při dostatečně nízkých teplotách. Na pravé straně podmínky stojí vlastně typická energie interakce mezi sousedními spiny, na pravé straně zase typická energie tepelných fluktuací. Podmínka se takto změnila v od začátku zřejmý fakt, totiž že uspořádání je možné, pouze pokud je uspořádání libá energie větší než uspořádání rozbíjející energie. Teplota, pro niž právě platí $kT_C = Jq$, se nazývá kritická (Curieova) teplota; dochází při ní k fázovému přechodu druhého druhu mezi fází neuspořádanou a uspořádanou.

Zatím jsme odvodili, kdy řešení existuje a kolik jich je, nikoliv ale jak se chová např. v závislosti na teplotě. Pokusíme se najít přibližný vzorec pro m pro teploty blízké kritické teplotě T_C . Na to použijeme známý trik, a sice rozvineme $\tanh(\beta Jqm)$ do Taylorovy řady kolem bodu 0. Ta má tvar

$$\tanh x \approx x - x^3/3 + \dots$$

Pro teploty $T < T_C$ a malé magnetizace $m \ll 1$ máme potom přibližnou rovnici

$$m \approx \beta Jqm - (\beta Jqm)^3/3 + \dots,$$

odkud

$$m^2(\beta Jq)^3/3 \approx \beta Jq - 1.$$

Uvědomme si, že magnetizace je malá, pouze pokud se teplota příliš neliší od T_C (viz graf na obr. 15). Proto předchozí rovnici přepíšeme pomocí nové proměnné $\varepsilon = (T_C - T)/T$, přičemž ve sledované oblasti platí $\varepsilon \ll 1$. Pokud ještě položíme $\beta Jq \approx \beta_C Jq = 1$, rovnice nabude tvaru

$$m \approx \sqrt{3}(\beta Jq - 1)^{1/2} = \sqrt{3} \cdot \varepsilon^{1/2}.$$

Závislost magnetizace na vzdálenosti od kritické teploty je mocninná. Mohli bychom vypočítat chování dalších veličin v okolí T_C , např. susceptibility $\chi = \lim_{B \rightarrow 0} \partial m / \partial B$, či najít závislost magnetizace m na vnějším magnetickém poli B při kritické teplotě $T = T_C$ (přesně). Tyto dva výpočty jsme vybrali jako úlohy k tomuto dílu seriálu (krom jiných).

Jak jsme již podotkli, při $T = T_C$ nastává fázový přechod mezi fází uspořádanou ($T < T_C$) a neuspořádanou ($T > T_C$). Pokud studujeme chování různých veličin v různých modelech, které také vykazují podobný druh fázového přechodu, téměř vždy nalezneme mocninnou závislost. Navíc se ukazuje, že exponenty těchto závislostí (kritické exponenty) nezávisí na konkrétním modelu, nýbrž pouze na počtu rozměrů mříže a na rozměru tzv. parametru uspořádání. To je nějaký parametr charakterizující makroskopický stav systému, jenž má v neuspořádané fázi hodnotu 0 a v uspořádané fázi nějakou nenulovou hodnotu. V našem konkrétním případě je parametrem uspořádání střední magnetizace m (s rozměrem 1). Pokud bychom vzali model, jenž uvažuje spiny jakožto vektory ve třírozměrném prostoru, parametrem uspořádání by byla také střední magnetizace, nyní však jsoucí vektorem \mathbf{m} (s rozměrem 3); tento model by měl tedy odlišné kritické exponenty.

Jak je možné, že všechny kritické exponenty závisí na pouhých dvou celých číslech? Především je jasné, proč nezávisí např. na síle interakce; změna by vedla pouze k pronásobení

mocninné závislosti nějakým faktorem. Proč ale nezávisí na detailech interakce? Důvod je velice hluboký a náš jednoduchý model jej vůbec nevystihoval. Spiny se totiž v blízkosti kritického bodu vůbec nechovají nezávisle. Spiny jsou mezi sebou korelovány a vzdálenost, na které se ovlivňují (korelační délka), jde při přibližování ke kritickému bodu do nekonečna. Chování modelu tedy neurčují interakce na krátkou vzdálenost, nýbrž na dlouhou vzdálenost. Je jedno, zda při výpočtu energie uvažujeme jen nejbližší sousedy či dvě vrstvy nejbližších sousedů apod. Tyto interakce jen zprostředkovávají korelaci mezi dalekými spiny a detaily zprostředkovatelů jsou nepodstatné; každý spin efektivně interaguje s obrovským počtem jiných spinů. Dosah korelací ovšem přirozeně závisí na počtu rozměrů prostoru; druh interakce je zase (nikoliv již přirozeně) vystižen rozměrem parametru uspořádání.

Zcela přirozeně náš jednoduchý model selže při výpočtu kritických exponentů. Sousední spiny jsou silně korelované, nemůžeme proto nahradit sousední spiny jejich střední hodnotou. Pokud by však sousedů bylo hodně (což nastává v prostoru s velkou dimenzí), byly by v okolí každého spinu zastoupeny mnohé hodnoty s_i . Průměrujeme velký soubor a ten dosti přesně dává hodnotu m nezávisle na velikosti centrálního spinu. Náš model je tedy dobrý v limitě $q \rightarrow \infty$. Bohužel, dvojka či šestka se rozhodně nedá považovat za ∞ .

Existuje několik dalších modelů magnetismu. Jejich řešení je však ještě složitější než výpočet chování Isingova modelu (které v zajímavých případech není známo). Proto je uvedeme pouze telegraficky pro rozšíření obzoru. Jedno možné zobecnění je povolit spinům nabývat více hodnot než dvou (*Pottsovy modely*). Jiný přístup je uvažovat spin \mathbf{s}_i jakožto klasický vektor délky 1, jenž se může natáčet do libovolného směru. Energie určité konfigurace je pak přirozeně dána vzorcem

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j - \mathbf{B} \cdot \sum_i \mathbf{s}_i .$$

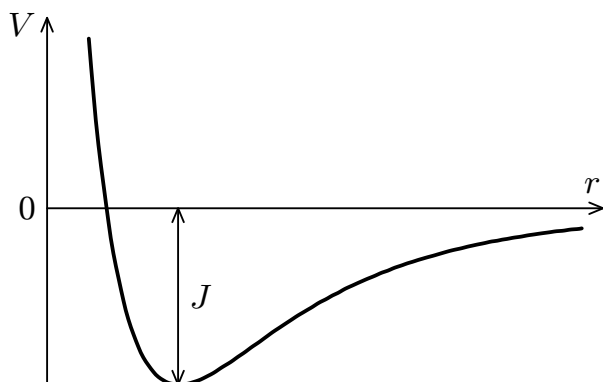
Tomuto modelu se říká *klasický Heisenbergův model*. Jak již bylo zmíněno výše, jeho chování je v okolí kritické teploty podstatně odlišné od chování Isingova modelu, a to právě díky svému vektorovému charakteru. Existuje i přirozené kvantové zobecnění, kdy vektory \mathbf{s}_i nahradíme příslušnými operátory spinu (*kvantový Heisenbergův model*). Známý je rovněž *Hubbardův model* (kvantový), jenž popisuje magnetismus d-elektronů v kovech, přitom uvažuje i Coloumbickou energii interagujících elektronů.

Jiným druhem zobecnění Isingova modelu jsou modely uvažující stejný obor hodnot spinu, nicméně umožňující i jiné interakce než interakce pouhých nejbližších sousedů. Sem spadá např. široká třída *gaussovských modelů*, v nichž je energie dána kvadratickou formou spinů. Můžeme uvažovat i interakce nekonečného dosahu, což ovšem není případ magnetismu; existující výsledky jsou mimo to dosti zmatené.

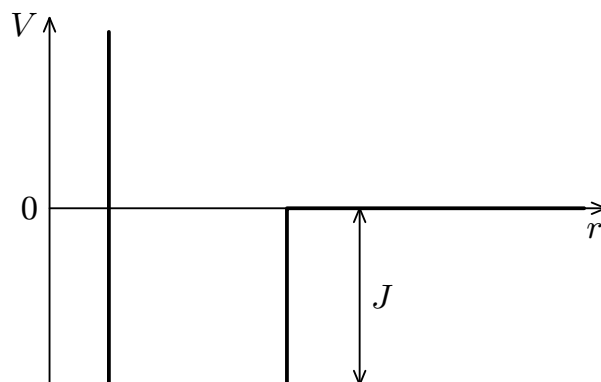
Nakonec vzniká možnost přidat do modelu náhodnost. A to buď prostřednictvím fluktuujícího vnějšího pole (tzv. *random field Ising model*), nebo přidáním příměsových atomů s určitým magnetickým momentem na mříž. Tyto atomy můžeme uvažovat buď jako pevně umístěné (kdy do partiční sumy tato náhodnost nepřispívá, středuje se až při výpočtu termodynamických veličin), případně náhodně se pohybující (potom jejich rozmístění musíme započítat do partiční sumy); oba druhy náhodnosti vedou k různému chování. Velice zajímavým a důležitým modelem je *model spinového skla*. Spinové sklo je v podstatě Isingův model s náhodnými (ale pevnými) interakčními energiemi J , různými pro různé dvojice spinů. Tyto interakční energie mohou být i záporné, takže některé dvojice spinů se snaží zarovnávat ve stejném směru, zatímco jiné proti sobě. Tyto odlišné snahy dělají chování značně chaotickým.

Dvě aplikace Isingova modelu

Poté, co jsme naznačili těžkosti teorie magnetismu, neodpustíme si uvést další zajímavé aplikace Isingova modelu. Již jsme naznačili, že Isingův model nevysvětluje ferromagnetismus kvantitativně správně. Příčina leží v zanedbání vektorových vlastností spinu – spin se zde uvažuje jako skalár. Existuje ale jiný přírodní jev, který je naopak popsán docela dobře. Je jím přechod pára-kapalina.



Obr. 16



Obr. 17

Jak víme, elektricky neutrální atomy či molekuly na sebe působí silami, jejichž párový potenciál vypadá v zásadě jako na obrázku 16. Můžeme se pokusit přenést situaci na mříž, abychom nemuseli uvažovat složitosti spojené se spojitým prostorem. Potom do čtverečků mříže dosadíme čísla 0 a 1, přičemž nula odpovídá prázdné buňce a jednička buňce obsazené jedním atomem. Pokud zvolíme rozměr mříže tak, aby vzdálenost středů dvou buněk (tj. šířka buňky) odpovídala poloze minima potenciálu, můžeme spojitý potenciál nahradit přibližným nespojitým (viz obr. 17), jenž zajistí, aby potenciální energie všech dvojic atomů kromě nejbližších sousedů byla nulová a potenciální energie nejbližších sousedů byla $-J$, kde J je hloubka potenciálové jámy párového potenciálu. Energie určité konfigurace atomů se pak bude rovnat (obsazení i -té buňky označíme jako n_i)

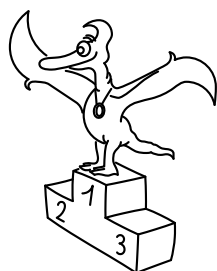
$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} n_i \cdot n_j .$$

Je evidentní, že se tento model dá přepsat na Isingův model (v jiných proměnných). Konkrétní výpočet ponecháváme za úlohu. V chování je pak dobře vidět kondenzace a jde vypočítat i kritická teplota. V tomto případě však pojem kritické teploty známe i ze střední školy. Kritická teplota je teplota odpovídající pravému konci křivky koexistence páry a kapaliny (v diagramu T, P). Vzhledem k tomu, že parametrem uspořádání je zde hustota kondenzované fáze (skalár), jeho rozměr se shoduje s rozměrem magnetizace Isingova modelu a Isingův model správně předpovídá kritické exponenty.

Jiným příkladem může být chování tzv. binárních slitin. Na mříži máme atomy dvou typů A a B . Pokud spolu sousedí dva atomy A , jejich energie je rovna E_{AA} . Podobně energie dvou sousedních atomů typu B je E_{BB} . Nakonec energie sousedních atomů AB je E_{AB} . Zjistit vlastnosti takového modelu dáváme rovněž za domácí úkol.

Úloha VI. S ... poslední úloha

- a) Kvalitativně popište, jak se chová tepelná kapacita Isingova modelu s nulovým vnějším magnetickým polem v okolí kritické teploty.
- b) Podobným postupem, jako jsme vypočítali chování magnetizace m v okolí kritického bodu, určete chování susceptibility χ ($\lim_{B \rightarrow 0} \partial m / \partial B$) a závislost magnetizace na magnetickém poli při kritické teplotě.
- c) Ukažte, že model mřížového plynu vede ke kondenzaci a určete kritickou teplotu.
- d) Prozkoumejte model binární slitiny.

Pořadí řešitelů
po IV. sérii

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	3	4	8	5	31	<i>100</i>	131
1. Marek Pechal	G Lesní čtvrť, Zlín	4	5	3	3	5	4	7	31	<i>97</i>	127
2. Tomáš Bednárik	Masarykovo G Vsetín	4	4	3	3	3	8	2	27	<i>85</i>	111
3. Libor Šachl	G Terezy Novákové Brno	3	2	3	2	4	–	2	16	<i>67</i>	71
4. Lukáš Stržiteský	Masarykovo G Vsetín	4	3	2	2	4	8	6	29	<i>81</i>	61
5.–6. Petra Malá	G Moravský Krumlov	2	–	0	2	2	3	–	9	<i>64</i>	58
<i>Jan Váňa</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	4	5	3	1	–	–	–	13	<i>70</i>	58
7.–8. Martin Konečný	G Boskovice	–	–	3	1	–	–	3	7	<i>67</i>	57
<i>Marek Scholz</i>	G F. Palackého, Neratovice	–	3	–	3	–	–	–	6	<i>76</i>	57
9. Vojtěch Molda	Masarykovo G Vsetín	–	3	3	0	2	–	–	8	<i>66</i>	54
10. Roman Derco	G dukl. hrdinov, Svidník	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>74</i>	48
11. Jenda Valášek	G Broumov	4	–	–	2	–	–	–	6	<i>76</i>	44
12. Martin Koštejn	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>60</i>	39
13. Miroslav Hrubý	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>65</i>	37
14. Aleš Podolník	G Kapitána Jaroše, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>69</i>	36
15. Petr Bezi Dvořák	SPŠ Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>71</i>	29
16. Tomáš Jirotko	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>69</i>	27
17. Jan Bednář	SPŠ Hronov	2	–	–	–	–	–	–	2	<i>70</i>	26
18.–19. Zuzana Pôbišová	G Tajovského, B. Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>65</i>	24
<i>Adam Přenosil</i>	G Sladkovského n. Praha	1	–	–	–	–	–	–	1	<i>59</i>	24
20. Jiří Šperka	GOA Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>75</i>	21
21. Ján Mikuláš	G B. S. Timravy, Lučenec	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>80</i>	20
22. Rushil Goel		–	–	–	–	–	–	–	0	<i>76</i>	16
23. Monika Josieková	G Český Těšín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>60</i>	12
24. Martin Slezák	G Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>63</i>	10
25. Hana Vítová	G Bystřice n. Pern.	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>37</i>	7
26.–27. Miroslav Janáček	G a SPgŠ Liberec	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>50</i>	6
<i>Jakub Klener</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>50</i>	6
28.–29. Ondřej Bílka	G Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>33</i>	4
<i>Ladislav Štěpánek</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	<i>100</i>	4
30. Darja Suchá	G Kladno	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>50</i>	2

Kategorie třetích ročníků

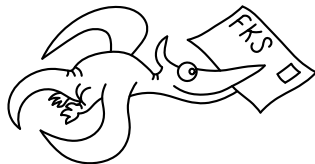
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	3	4	8	5	31	100	131
1. <i>Pavel Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	3	1	3	2	5	6	6	26	90	118
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	4	1	2	3	3	5	4	22	77	97
3.–4. <i>Tomáš Bzdušek</i>	G Piešťany	2	4	3	2	4	1	3	19	64	81
<i>Daniel Šimsa</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	3	4	3	–	4	1	5	20	77	81
5. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	3	3	1	1	2	–	–	10	72	78
6.–7. <i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova Praha	3	0	1	1	3	1	2	11	57	70
<i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	4	3	1	1	2	–	–	11	70	70
8. <i>Peter Berta</i>	G Velké Kapušany	3	5	3	1	2	–	–	14	71	67
9. <i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	–	–	2	–	6	–	11	84	57
10. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	1	6	3	1	–	3	–	14	63	51
11. <i>Marek Kaleta</i>	G Terezy Novákové Brno	4	–	3	1	–	–	–	8	68	49
12. <i>Hana Jirků</i>	G Terezy Novákové Brno	3	4	3	1	–	–	–	11	64	48
13. <i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	2	4	3	1	–	–	–	10	62	44
14. <i>Ondřej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	–	1	5	–	9	64	41
15. <i>Marek Bukáček</i>	G Havlíčkův Brod	3	–	3	–	–	–	–	6	50	34
16. <i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická, Praha	1	–	–	1	–	–	–	2	38	26
17.–18. <i>Jakub Prouza</i>	COP Hronov	3	–	2	–	–	–	–	5	51	24
<i>Jana Przewczková</i>	G Komenského Havířov	–	–	–	–	–	–	–	0	44	24
19. <i>Martin Štys</i>	COP Hronov	2	–	0	1	0	–	–	3	38	23
20. <i>Lukáš Novotný</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	86	18
21.–22. <i>František Batysta</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	0	100	17
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	68	17
23. <i>Matěj Korvas</i>	G Jaroslava Seiferta, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	48	14
24. <i>Jakub Vodňanský</i>	G Broumov	–	–	–	–	–	–	–	0	50	12
25.–26. <i>Martin Berka</i>	G Moravská Třebová	2	–	–	–	1	–	–	3	31	10
<i>Jan Stránský</i>	G Dobruška	–	–	–	–	–	–	–	0	45	10
27. <i>Přemysl Šrámek</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	89	8
28. <i>Ján Hreha</i>	G Liptovský Hrádok	–	–	–	–	–	–	–	0	46	6
29.–30. <i>Hana Lesáková</i>	G Konstantinova Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
<i>Jakub Loucký</i>	G Písek	–	–	–	–	–	–	–	0	24	4
31.–32. <i>Petr Dvořák</i>	G Makovského, N. Město n.M.	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
<i>Michal Pavelka</i>	G Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	3	4	8	5	31	100	131
1. <i>Jakub Michálek</i>	G Jana Keplera, Praha	4	3	3	3	4	8	4	29	92	121
2. <i>Lukáš Vítovec</i>	PČG Karlovy Vary	3	2	1	1	4	6	–	17	64	76
3. <i>Lukáš Drápal</i>	G Ch. Dopplera, Praha	2	4	2	2	1	6	–	17	63	64
4. <i>Vladimír Boža</i>	G D. Tatarku, Poprad	2	4	2	1	2	–	–	11	63	52
5. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	2	2	3	–	3	–	–	10	73	51
6.–7. <i>Juraj Hartman</i>	G Náchod	4	4	2	1	2	–	–	13	77	47
<i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	3	–	–	–	5	4	–	12	76	47
8. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM Zlín	4	3	1	1	1	6	–	16	58	44
9. <i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	3	–	3	–	1	6	4	17	73	41
10. <i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	2	–	–	2	3	–	–	7	40	33
11. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	1	–	1	1	–	–	–	3	53	31
12. <i>Tomáš Talanda</i>	G Tišnov	1	3	3	1	2	–	–	10	53	28
13.–14. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	0	93	27
<i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	0	32	27
15. <i>Katarína Rozvadská</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	–	–	–	–	2	51	19
16. <i>Jiří Sedlák</i>	G Boskovice	–	–	–	3	–	–	–	3	42	13
17. <i>Zuzana Jungrová</i>	G Blovice	–	–	1	1	2	–	–	4	39	12
18. <i>Matěj Bitnar</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	30	10
19. <i>Jan Valášek</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	50	6
20. <i>Petra Navrátilová</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	25	5
21.–22. <i>Jan Červenka</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
<i>Michaela Kubinová</i>	G Ostrava - Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
23.–25. <i>Vlastimil Daníček</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	25	3
<i>Lucie Kadrmanová</i>	G Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	0	33	3
<i>Vojtěch Špulák</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	23	3
26. <i>Martin Flíger</i>	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
		4	4	3	3	4	8	5	31	100	131
1. Lukáš Cimpl	G Frenštát pod Radhoštěm	2	1	1	1	3	1	–	9	36	37
2. Katarína Baxová	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	6	–	6	59	33
3. Alžběta Černeková	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	1	1	–	–	2	50	26
4.–5. Richard Polma	G Mladá Boleslav	2	3	–	–	–	–	–	5	50	25
Peter Vanya	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	2	1	1	–	–	4	37	25
6.–7. Jana Figulová	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	1	1	–	–	2	56	15
Jan Šedek	COP Hronov	–	–	–	1	0	–	–	1	38	15
8. Dana Suchomelová	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	75	12
9.–10. Petr Motloch	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10
Lukáš Vrablic	SPŠ Hradec Králové	–	–	0	1	–	–	–	1	23	10
11.–12. Vojtěch Kaluža	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	100	4
Jan Mertlík	COP Hronov	–	–	–	1	0	–	–	1	13	4
13.–16. Ondřej Chvostek	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	38	3
Petr Kaděra	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	75	3
Jakub Moškoř	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	75	3
Jiří Novák	COP Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	10	3
17. Ondřej Masný	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
18. Martin Konečný		–	–	–	–	–	–	–	0	0	0

**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.