

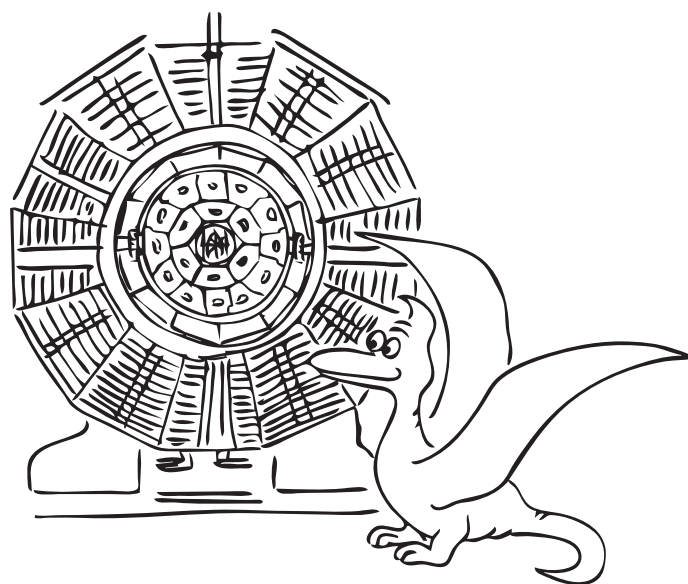
Milí řešitelé!

Dostáváte do rukou zadání letošní čtvrté série. Někteří z vás (ti úspěšnější) již brzy obdrží pozvánku na Týden s aplikovanou fyzikou (TSAF), který bude navazovat na naši tradiční akci – Den s experimentální fyzikou. Podrobnosti najdete níže. Doufáme, že se vám budou obě akce líbit a že se o tom pochlubíte svým kamarádům :-).

Kromě toho pro vás samozřejmě připravujeme jarní soustředění tentokrát na Vysočině, konat se bude na konci dubna. Máte se opět na co těšit! Budeme vás zvát podle pořadí po třetí sérii. Pokud máte málo bodů nebo jste se do řešení našich úloh ještě nepustili, nemusíte házet flintu do žita. Na podzimní soustředění se může dostat každý, stačí se jen trochu snažit a poslat nám řešení pár úloh z této či příštích sérií.

Přejeme vám, abyste mezi úlohami našli takové, které se vám budou líbit, a doufáme, že se hned pustíte do jejich řešení.

Honza Prachař



Den s experimentální fyzikou

Jako každý rok i letos vás srdečně zveme na tradiční celodenní akci s názvem *Den s experimentální fyzikou* (DSEF), kterou pořádáme přednostně pro řešitele FYKOSu samozřejmě bez ohledu na výsledky v naší soutěži a případně pro jejich přátele a pedagogický doprovod. Dostanete jedinečnou příležitost prohlédnout si nejrůznější zařízení, se kterými fyzikové pracují, seznámit se s aktuální problematikou a nejnovějšími poznatky v experimentální fyzice a také poznat učitele na Matematicko-fyzikální fakultě, kteří jistě rádi zodpoví jakékoliv vaše další dotazy. DSEF se letos uskuteční **v pondělí 2. dubna 2007** a zároveň bude prvním dnem nové akce TSAF.

Aktuální DSEF se po dvouleté přestávce vrátí v celém svém programu do areálu MFF v Tróji, domova FYKOSu, kde starší účastníci navštíví již tradičně školní reaktor Vrabec a podíváme se do zbrusu nového pavilónu nízkých teplot! Ostatní exkurze domluvíme s ohledem na výsledky poslední ankety, za jejíž vyplnění a zaslání vám děkujeme. Proto sledujte web <http://fykos.mff.cuni.cz/cz/dsef>, kde naleznete podrobnější informace o programu DSEF, o organizaci a způsobu přihlášení se na akci. Dále tam najdete seznam přihlášených účastníků, se kterými si můžete domluvit společnou cestu! Pokud by hrozilo, že byste cestovali sami, můžete v případě volné kapacity přihlásit svého kamaráda se zájmem o fyziku. Rovněž se DSEF bude moci zúčastnit váš pedagogický doprovod.

Přihlášky

K přihlášení prosíme používejte přednostně *webový formulář*, který bude zprovozněn na FYKOSích stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz> pravděpodobně v termínu **12.–24. března**, a před jeho vyplněním se dobře seznámte s pokyny! Ti, kteří nemají přístup na internet alespoň jednou týdně, mohou poprosit svého kamaráda či učitele, aby vás přihlásil, případně si najít veřejný internet v kavárně, v městské knihovně či na obecním úřadu) nebo v krajním případě nám mohou zaslat požadované údaje *jméno, příjmení, věk v době konání, zájemci o reaktor číslo OP, preferovanou skupinu č. 15 až 19 podle věku, resp. vašich znalostí a kontakt na sebe* nejlépe formou sms (tel. 723 781 754 – nevolat; diakritiku ve jménu nahradte vhodnými znaky), popřípadě poštou na adresu FYKOSu. Všem přihlášeným zašleme v týdnu před akcí podrobné informace a omluvenku do školy, což zároveň poslouží jako potvrzení vaší účasti. Web sledujte průběžně a k řešení jakékoliv situace co nejdříve použijte e-mail dsef@fykos.mff.cuni.cz!

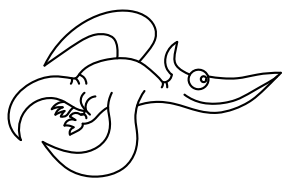
Uzávěrka elektronických přihlášek je v **sobotu 24. března 2007**, přičemž papírové přihlášky musí být odeslány nejpozději v pondělí 19. 3. Neřešitelé FYKOSu – zájemci o fyziku se přihlásí po předchozím souhlasu organizátorů a v případě volných míst. S přihláškami, prosíme, neotálejte, vyjednaná kapacita DSEF, resp. jednotlivých skupin a laboratoří je omezená!

Týden s aplikovanou fyzikou (TSAF)

Po loňském úspěšném zájezdu do CERNu v letošním roce tedy jako novinku pořádáme nultý ročník tradiční akce FYKOSu *Týden s aplikovanou fyzikou*, jehož náplní budou poněkud větší exkurze na nejrůznější česká vědecko-výzkumná či průmyslová pracoviště, kde významnou roli hraje právě fyzika. Letos se podíváme do jaderné elektrárny v Dukovanech a do vodní elektrárny v Dalešicích. Právě domlouváme zajímavé exkurze v Astronomickém ústavu AV ČR v Ondřejově, nejen k příležitosti Mezinárodního heliofyzikálního roku 2007.

Pavel Brom

dsef@fykos.mff.cuni.cz



Zadání IV. série



Termín odeslání: 19. března 2007

Úloha IV.1 ... nakupujeme minerálky

Určitě jste si v super(hyper)marketu všimli, že plastová láhev oblíbeného nápoje se při rozjetí pohyblivého pásu pokladny začne otáčet a k pokladní ji často musíte postrčit až rukou. Proč to tak je?

Zkuste analyzovat následující modelový případ. Láhev je položena na pás osou kolmo na směr pohybu pásu a láhev i pás jsou v klidu. Náhle se pás rozjede konstantní rychlostí $v = 10$ cm/s. Jakou výslednou rychlostí se bude pohybovat láhev? Nejdříve analyzujte, jak se budou chovat různé idealizace – jako třeba tuhý válec. Pak si uvědomte, že láhev je plná nápoje, který se nerad otáčí. Pro jednoduchost uvažujte viskozitu nápoje za nulovou, pak se zamyslete nad tím, jak do hry vstoupí viskozita.

Úloha IV.2 ... švestkové víno v číně

V oblíbené čínské restauraci na Vinohradech dávají každému hostu k účtu jako pozornost švestkové víno. Nápoj nalévají do malých keramických mističek s dvojitým dnem (viz obr. 2). Horní dno je skleněné a je pod ním vidět obrázek sedící číňanky (viz obr. 3). Po vypití vína obrázek číňanky zmizí (viz obr. 4). Podrobně vysvětlete, proč se tak stane. Prázdňá mistička s vypouklým skleněným dnem je vyfocena na obrázku 1.

Barevné a kvalitnější obrázky najdete na našich webových stránkách.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Úloha IV.3 ... dostavba Temelína

Odhadněte tloušťku vody potřebnou k odstínění záření z jaderného reaktoru s výkonem 980 MW v plánovaném novém bloku JE Temelín. Z celkové energie uvolněné při štěpení jádra uranu připadne zhruba 82 % na kinetickou energii fragmentů, 6 % odnesou neutrina, po 6 % mají neutrony a gama fotony.

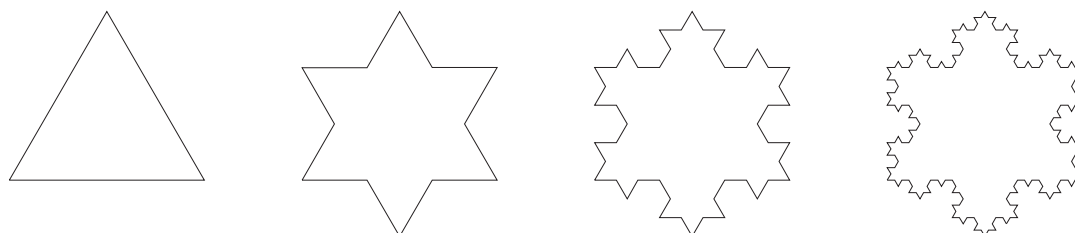
Nápověda. Pravděpodobnost, že částice projde materiálem do hloubky d , je přibližně rovna $e^{-\sigma nd}$, kde $n = N/V$ je hustota molekul materiálu (v našem případě počet molekul vody v 1 m^3) a σ je účinný průřez (cross section) pro absorpci částice na molekule. Účinný

průřez má rozměr plochy (často se užívá jednotka barn = 100 fm²) a závisí na energii částic. Hodnoty účinných průřezů se pokuste najít na internetu nebo v příslušných tabulkách.

Úloha IV.4 ... Kochova vločka

Určete moment setrvačnosti Kochovy vločky zhotovené z homogenního plechu vzhledem k ose kolmé na její rovinu a procházející jejím středem. Uvažujte, že vločka má hmotnost m a průměr a .

Kochova vločka je útvar vzniklý iterativním lepením vždy třikrát menších rovnostranných trojúhelníků na strany předchozího útvaru (viz obr. 5). Průměrem Kochovy vločky rozumíme vzdálenost vrcholů jejích protějších cípů.



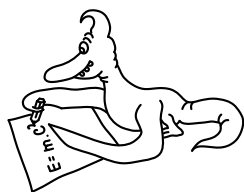
Obr. 5. První čtyři iterace při vytváření Kochovy vločky.

Úloha IV.P ... mastný papír

Jistě jste se již setkali s tím, když kapka oleje ukápla na papír. Z bílého papíru se rázem stal papír průsvitný. Vysvětlete, čím to je. Najděte ve svém životě případy, kdy se uplatňuje stejný jev, avšak třeba v úplně jiné situaci.

Úloha IV.E ... vytřete nám zrak

Změřte, jak závisí součinitel smykového tření mezi dvěma vámi vybranými materiály na velikosti stykové plochy a na hmotnosti smýkajícího se tělesa. Nezapomeňte nám napsat, s čím a jak jste měřili.



Řešení II. série

Úloha II.1 ... Čeňkova pila (3 body; průměr 3,03; řešilo 37 studentů)

Čeňkova pila se nachází na soutoku řek Vydry a Křemelné na Šumavě. Pojmenovaná je podle obchodníka s dřevem Čeňka Bubeníčka, který zde pilu v 19. století postavil. Na jejím místě nyní stojí vodní elektrárna, která je stále v provozu a patří mezi technické památky.

Vodní elektrárna využívá výškový rozdíl hladin nad a pod turbínou 10 m, výkon elektrárny je 96 kW. Voda je na turbínu přiváděna vantroky¹, které jsou široké 1 m, a voda v nich sahá do výšky 1,5 m. Při pozorování proudící vody jsme odhadli, že uprostřed vantroky má proud vody rychlost $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Odhadněte, jaká je účinnost elektrárny.

Vymyslel Honza Prachař, když byl na výletě na Šumavě.

Označme rozdíl hladin $h = 10 \text{ m}$, rozměry vantroky: šířku $a = 1 \text{ m}$, hloubku $b = 1,5 \text{ m}$, rychlost toku uprostřed koryta $v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

K určení účinnosti elektrárny je třeba znát celkovou energetickou bilanci, proto musíme stanovit maximální využitelnou energii, která turbínou projde za jednotku času. Celková energie je samozřejmě rovna součtu kinetické energie vody proudící vantroky a rozdílu potenciální energie vody nad a pod turbínou. Proto platí

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \left(\frac{\langle v^2 \rangle}{2} + g \left(h - \frac{b}{2} \right) \right).$$

Jelikož $\langle v^2 \rangle / 2 \ll g(h - b/2)$, můžeme člen odpovídající kinetické energii zanedbat. Zbývá určit hmotnostní průtok $Q = \Delta m / \Delta t = \rho ab \langle v \rangle$.

Pokud budeme vodu považovat za ideální tekutinu² (což ve skutečnosti není vůbec pravda!), dostaneme pro průtok $Q = \rho abv$. Tomuto odpovídá příkon přibližně 150 kW a účinnost (podíl výkonu a příkonu) elektrárny pak je 65 %.

Pro proud vody je ve skutečnosti nutné použít model reálné tekutiny, u které dochází vlivem vazkosti k různému rozložení pole rychlostí. Takové proudění může být dále laminární, nebo turbulentní (při vyšších rychlostech). Pro střední rychlost proudění při přechodu mezi těmito druhy proudění platí $u = \nu Re/d$, kde Re je kritická hodnota Reynoldsova čísla (pohybuje se v rozmezí 1000 až 20 000, pro náš případ předpokládejme jeho hodnotu 2000), d je rozměr potrubí (v našem případě hodnota v rozmezí a a b), a ν je tzv. kinematická viskozita, pro vodu je to hodnota přibližně $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Snadno se tak můžeme přesvědčit, že proud vody ve vantrocích je turbulentní, neb $v > u$.

Střední hodnotu rychlosti toku $\langle v \rangle$ pro turbulentní proudění je velmi obtížné určit (proto se používá numerické modelování). Pokud budeme předpokládat laminární proudění, dojdeme k účinnosti nad 100 %, což je nesmysl.

¹⁾ Vantroky jsou dřevěná stavba – koryto obdélníkového průřezu, kterým je přiváděna voda na mlýnské kolo.

²⁾ Ideální tekutina je nestlačitelná a bez vnitřního tření – viskozity.

Pokusíme se spolehnout na údaj z technických tabulek, dle kterých přibližně platí $v = 1,2\langle v \rangle$. Po dosažení za $\langle v \rangle$ vychází účinnost kolem 80 %, což odpovídá účinnosti dnešních vodních elektráren.

Miroslav Hrubý

mirek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.2 ... *drtivý dopad* (4 body; průměr 3,00; řešilo 32 studentů)

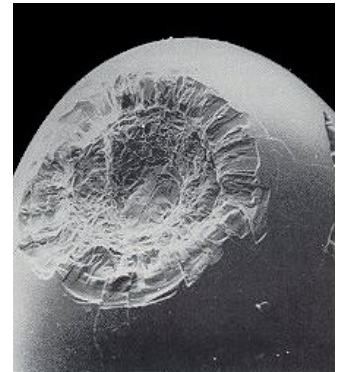
Pokuste se najít libovolný vztah mezi rychlostí meteoroidu dané hmotnosti těsně před dopadem na povrch Země a poloměrem vzniknuvšího kráteru.

Na problém narazil Honza Prachař při psaní textu Fyzikální olympiády.

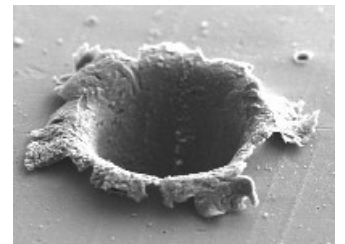
Běžný meteoroid dopadá na zemi minimálně první kosmickou rychlostí ($8 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$), ale spíše rychlostí mnohem větší. Velikost meteoroidu má vliv na tvar kráteru. Tento možná lehce překvapivý závěr lze vysvětlit, když se zamyslíme nad poměrem kinetické energie meteoroidu a množstvím deformační energie, kterou je povrch schopen „absorbovat“. Když je velikost dopadajícího meteoroidu v mikrometrech až milimetrech, kráter vypadá jako na obr. 6 a 7.

Na obrázku 6 byla dopadová rychlost částice kolem $1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, na obrázku 7 byla dopadová rychlost částice desítky kilometrů za sekundu. V obou případech se jedná o kov. V prvním případě při nižší rychlosti došlo jenom k rozlámání materiálu v místě dopadu. V druhém případě byl materiál v místě dopadu úplně roztaven, jako voda vyšpláchnul z místa dopadu a okamžitě v meziplanetárním prostoru ztuhl.

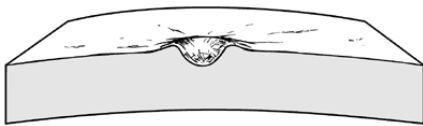
Předpokládejme, že rychlost meteoroidu při dopadu je kolem 40 kilometrů za sekundu, čili je zhruba stokrát vyšší než vystřelená kulka. Při takto vysoké rychlosti se povrch Země v okolí dopadu okamžitě roztaví a částečně vypaří – chová se jako kapalina. Rychlost přenosu energie je vyšší, než je rychlost zvuku v prostředí. Samotný dopad se pak podobá více výbuchu než deformačnímu působení (viz bod 3 dále). Proto se při popisu chování dopadu používá hydrodynamika, i když se na první pohled jedná o pevná tělesa. Na uvedených obrázcích je ukázáno, jak vypadá kráter v závislosti na velikosti dopadajícího meteoroidu.



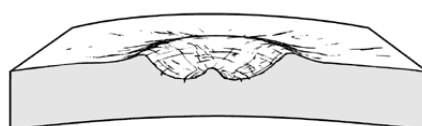
Obr. 6. Laboratorní experiment



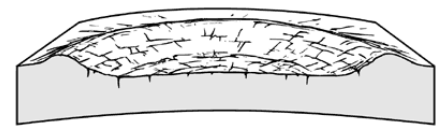
Obr. 7. Povrch sondy



Obr. 8. Malá dopadová rychlost, pevný materiál, malý rozměr meteoroidu.



Obr. 9. Velká dopadová rychlost, větší rozměr meteoroidu.



Obr. 10. Velký meteoroid, spíše už asteroid; rychlost malá, kolem $10 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Ve všech případech je přenos energie do okolí velice rychlý. Plocha, přes kterou se přenáší energie (například zvukové vlny, ochlazování atd.), je velká vzhledem k energii a hmotnosti. Plocha totiž roste s r^2 , ale kinetická energie podle (1) roste s $m \sim r^3$, tedy podstatně rychleji. Po vzniku malého kráteru dojde ke ztuhnutí prakticky okamžitě. U větších kráterů trvá tuhnutí déle, a proto se v jejich středu objevuje malý vrcholek. Jeho původ je stejný, jako když pustíte kámen do vody – po vodě se začnou šířit vlny. Jestliže roztavíte zem, vlny se po ní šíří

a vytvarují centrální vrcholek. Neroztavený materiál je rozdrčen, chová se jako písek – je to také „kapalina“.³

Kinetická energie dopadajícího meteoroidu je

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) \rho v^2 . \quad (1)$$

Podívejme se, co se děje s touto energií. Přejde na tři jiné formy:

1. energii tepelnou,
2. kinetickou energii okolní země,
3. elastickou energii (např. deformace či pnutí materiálu).

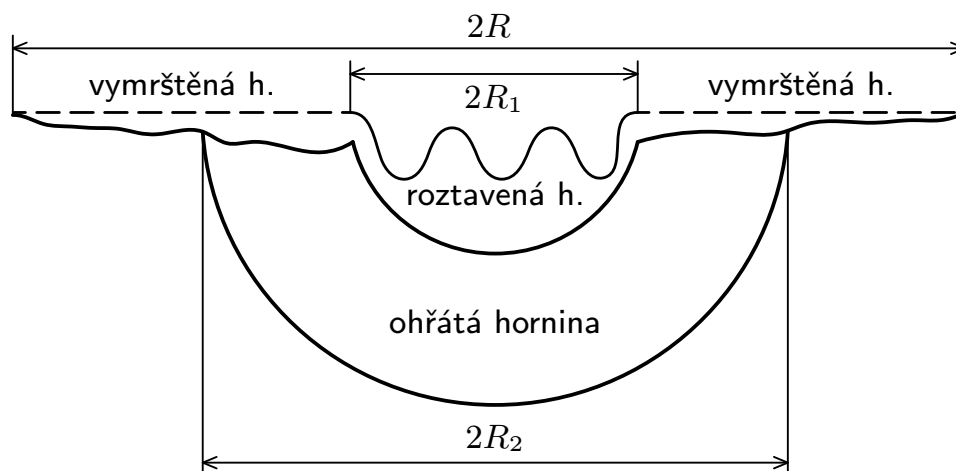
Již jsme si řekli, že pro velká tělesa můžeme bod 3 zanedbat. Energie se tedy mění v energii tepelnou a v hybnost okolní zeminy. Tedy

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{tep}} + E_{\text{hyb}} . \quad (2)$$

Tepelná energie je energie potřebná na roztavení a zvýšení teploty

$$E_{\text{tep}} = mC_P\Delta T_P + ml_{P\rightarrow K} + C_K\Delta T_K \quad (+ ml_{K\rightarrow G} + C_G\Delta T_G) ,$$

kde index P označuje pevnou fázi, K fázi kapalnou a G fázi plynnou, $l_{P\rightarrow K}$ je měrné skupenské teplo při přechodu pevná fáze–kapalina. Dopad může část horniny doslova vypařit. Hmotnost každé složky je jiná – jiné množství se roztaví a jiné (větší) množství se jenom ohřeje na vyšší teplotu. Stejný problém nás čeká i s hybností – část materiálu je vymrštěna ven do volného prostoru, část je vmrštěna zpětně do materiálu a dále ho může ohřát. Poloměr vznikuvšího kráteru nechť je R . Dle pozorování nebude mít tento kráter tvar polokoule, ale spíše mělkého dolíku. Spodek kráteru bude zalitý roztavenou horninou.



Obr. 11. Situace po dopadu meteoroidu na zem.

Jak velké množství m horniny je tedy vymrštěno a jaké ohřáto? Vymrštěna bude hmota, která je blízko povrchu. Její objem bude tedy v prvním přiblížení roven $\pi R^2 \cdot h \sim R^3$, kde $h = C \cdot R$ je výška povrchu, který je vymrštěn (C je bezrozměrná konstanta). Většina vymrštěného

³⁾ Na [www adrese http://www.lpl.arizona.edu/~gareth/impact/research/collapse/figs/crater_anim_ring.gif](http://www.lpl.arizona.edu/~gareth/impact/research/collapse/figs/crater_anim_ring.gif) najdete animovanou ukázkou hydrokódu (Simple Arbitrary Lagrangian-Eulerian Hydrodynamic Computer Code), který předpovídá chování země po dopadu meteoroidu.

materiálu je z těsného okolí dopadu. Například kdybychom tento útvar aproximovali kuželem, dostaneme $C = 1/3$.

Roztavenou a rozdrčenou horninu aproximujme polokoulí. Její objem je $\frac{2}{3}\pi R_1^3$. Po vychladnutí hornina ztuhne uvnitř kráteru, pevné dno se tak zvýší. Hornina, která byla jenom ohřáta, může být aproximována kulovým mezivrstvím, jehož objem je $\frac{2}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3) \sim R^3$.

Vidíme, že jak E_{tep} , tak E_{hyb} závisí na R^3 . Pak (dle (2) a (1))

$$\frac{1}{2}mv^2 \sim R^3 \quad \Rightarrow \quad R \sim v^{2/3} \doteq v^{0,667}.$$

Praktické experimenty s menšími krátery (ve smyslu do rozměrů kilometrů) ukazují, že závislost $R \sim v^{0,6 \div 0,7}$.

Někteří z vás se odkazovali na webové stránky. Za zmínku stojí například stránka <http://www.lpl.arizona.edu/impacteffects/>. Je na ní k dispozici modul umožňující vypočítat z rychlosti, velikosti meteoroidu a mnoho dalších údajů například průměr kráteru nebo sílu zemětřesení, které je dopadem vyvoláno. Model, podle kterého modul počítá, je popsán v dokumentu <http://www.lpl.arizona.edu/~marcus/CollinsEtAl2005.pdf>. Domnívám se, že to není moc zdařilý model: například pro bod rozpadu tělesa v atmosféře používá vzorec, kde výška rozpadu meteoroidu nezávisí na jeho velikosti. Pro průměr kráteru udává vzorec

$$D = 1,45 \left(\frac{\rho_i}{\rho_t} \right)^{\frac{1}{3}} L^{0,78} v^{0,44} g^{-0,22} \sin^{\frac{1}{3}} \vartheta,$$

kde ρ_i je hustota dopadajícího tělesa, ρ_t hustota země, L velikost meteoroidu, v dopadová rychlost, g gravitační zrychlení a ϑ úhel dopadu. Model dělali geofyzici a je to znát. Například závislost na úhlu dopadu je u reálných kráterů menší a spíše závisí na materiálu, do kterého meteoroid narazí. Pozorování kráterů na Zemi ukazují, že většina z nich je prakticky kruhová. Podle tohoto modelu by měla být velká část kráterů eliptických, což se nepozoruje. Model zjevně neuvažuje explozi. Závislost $D \approx v^{0,44}$ je vzhledem k experimentálním datům nevěrohodná.

Pavol Habuda

bzuco@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.3 ... osvětlení stolu (4 body; průměr 2,21; řešilo 19 studentů)

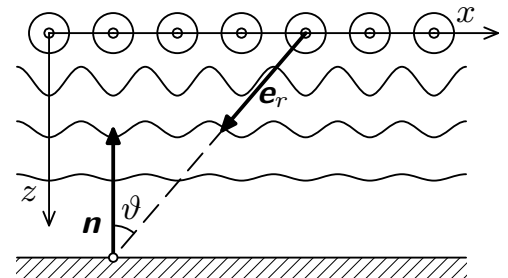
Navrhněte rozmístění zářivek na stropě pracovny, který je ve výšce 3 m nad deskou stolu tak, aby intenzita osvětlení na ploše stolu nekolísala víc než o 0,1 %.

Úloha napadla Honzu Prachaře při čtení Feynmanových přednášek z fyziky.

Nejprve je třeba uvést, jak zadaná situace vypadá. Zadaní úlohy si zjednodušíme tak, že budeme předpokládat strop jako nekonečně velkou rovinu rovnoměrně posetou nekonečně dlouhými zářivými trubicemi zanedbatelného průměru, navzájem rovnoběžnými, přičemž každé dvě sousední jsou ve vzdálenosti b od sebe.

Budeme-li značit I svítivost jednotlivého (bodového) zdroje, pak pro osvětlení plochy můžeme psát

$$E_n = \frac{I}{r^2} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}),$$



Obr. 12. Ekvipotenciály elektrického pole nabitých přímých vodičů.

kde \mathbf{e}_r je jednotkový vektor směřující od zdroje a \mathbf{n} je normálový vektor orientované plochy. Jejich skalární součin nám tedy zajistí faktor $\cos \vartheta$, kde ϑ je úhel dopadu.

Nyní přijde na řadu hlavní *trik* celého řešení. Osvětlení E_n odpovídá normálové složce intenzity elektrického pole vytvořeného bodovým nábojem velikosti $4\pi\epsilon_0 I$. Toho využijeme a převedeme náš problém na elektrostatickou úlohu. Místo zářivek si představíme nekonečně mnoho přímých nabitých vodičů a budeme počítat intenzitu elektrického pole této sítě.

Budeme-li zkoumat vzniklé elektrické pole v dostatečné vzdálenosti, poznáme, že je velmi dobře homogenní. S přibližováním se k mřížce se však bude tato vlastnost postupně vytrácet. Ekvipotenciální plochy budou již poněkud zvlňené a to je věc, která nás pro tuto chvíli bude zajímat. Budeme zkoumat amplitudu těchto sinusových vln.

Zavedeme souřadnicový systém, a to tak, že osa y bude rovnoběžná s vodiči ležícími v rovině xy a osa z bude na tuto rovinu kolmá. Využijeme znalosti obecného tvaru rovnice pro kmitání a zkusíme ji upravit do následující formule pro elektrostatický potenciál

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{b}, \quad (3)$$

kde n je řád harmonické funkce a $F_n(z)$ je amplituda n -té harmonické složky potenciálu ve vzdálenosti z . Díky tomu, že jsme předpokládali nekonečně dlouhé dráty, neměla by se závislost na y projevit vůbec. Nultý člen sumy ($n = 0$) z našich úvah dále vypustíme, neboť se jedná o konstantní hodnotu (ta vlastně určuje intenzitu osvětlení), kdežto nás zajímají oscilace.

Má-li jít o platný potenciál, musí v oblasti pod dráty (kde nejsou žádné náboje) vyhovovat Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Když do této rovnice dosadíme výraz (3), dostaneme pro každý sčítanec

$$-\frac{4\pi^2 n^2}{b^2} F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{b} + \frac{d^2 F_n}{dz^2} \cos \frac{2\pi nx}{b} = 0, \quad (4)$$

tedy $F_n(z)$ musí splňovat rovnici

$$\frac{d^2 F_n}{dz^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{b^2} F_n.$$

Řešení této diferenciální rovnice je

$$F_n = A_n e^{-z/z_0}, \quad (5)$$

kde $z_0 = b/2\pi n$.

Nyní již víme, že existuje nenulová amplituda pole s n -tou harmonickou a s rostoucí vzdáleností od stropu se bude amplituda každé harmonické zmenšovat exponenciálně. V naší aproximaci bude nadále postačovat pracovat pouze s první harmonickou ($n = 1$), neboť pro $n = 1$ je ten pokles jistě nejmenší. Případné zpřesnění výpočtu můžeme přenechat čtenáři jako cvičení; vždyť se jedná o pouhý součet příslušných členů.

Vztah (5) je klíčový pro řešení naší úlohy. Jestliže intenzita osvětlení nesmí kolísat o více než 0,1 %, znamená to, že hledáme takové b mezní, že výraz

$$e^{-2\pi n z/b} \leq 1/1000$$

ještě platí.

Prostým zlogaritmováním získáme výsledek

$$b \leq \frac{2\pi n z}{\log 1000}.$$

Číselně vycházejí pro $z = 3$ m maximální rozestupy mezi zářivkami 2,7 m.

Zvolíme-li například tuto vzdálenost rovnu třem čtvrtinám výšky nad stolem, bude exponenciální součinitel $1/4000$. A tedy pro přesnost osvětlení na tisícinu dostáváme koeficient bezpečnosti 4. Je až překvapující, jak velké rozestupy stačí k tak rovnoměrnému osvětlení.

Během opravování doručených řešení mě zejména zarazil fakt, že mnozí z vás neporozuměli slovu *zářivka* a místo toho, aby počítali s dlouhou svítící tyčí, operovali ve svých řešeních se svítícími body – žárovkami. Pokud jde o způsob řešení, tak bez výjimky všichni se snažili počítat poměr mezi intenzitou osvětlení v místě mezi dvěma sousedními zářivkami a přímo pod jednou ze zářivek. Tento přístup je pochopitelně také správný, ale protože většinu z vás napadl, zvolil jsem pro ukázkou postup s využitím triku o elektrickém poli.

Tomáš Jirotko

byrot@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.4 ... jak je daleko Slunce? (4 body; průměr 2,94; řešilo 17 studentů)

[...]

Na vás je, abyste tak jako Edmond Halley vymysleli, jak lze z měření přechodu Venuše určit vzdálenost Země od Slunce. Samozřejmě neznáte jiná než tehdejší data: poloměr Země a dobu oběhu Země a Venuše kolem Slunce z astronomických pozorování.

Úloha napadla Honzu Prachaře při čtení knížky Stručná historie téměř všeho.

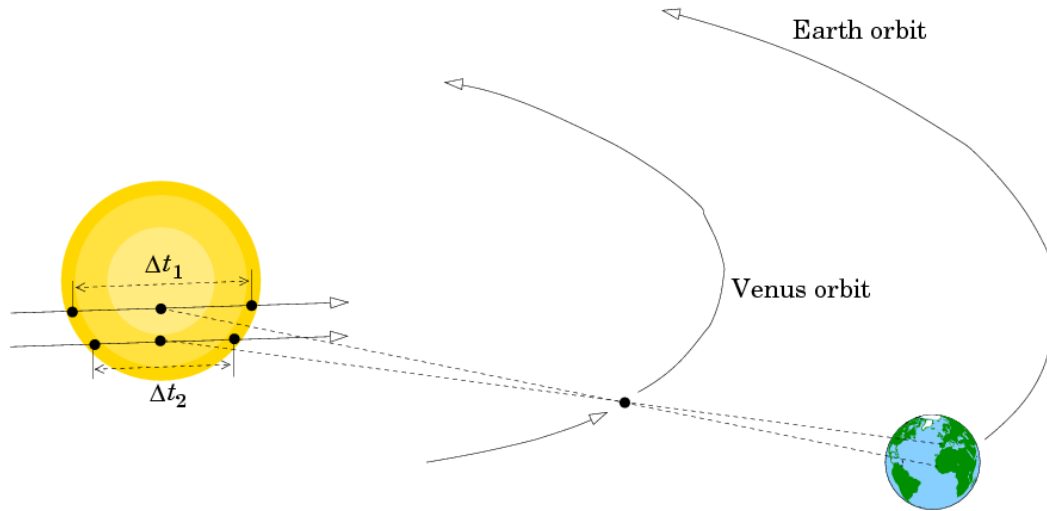
Měřením vzdálenosti Země od Slunce se lidé zabývali již ve starověku, nicméně ne s velkým úspěchem. Venuše si lidé všimli dávno, některé národy z ní udělaly božstvo, ale později prohlédly, až nakonec Edmond Halley zveřejnil svůj slavný článek *Nová metoda určení sluneční paralaxy aneb vzdálenosti Země od Slunce* (jeho anglický překlad najdete např. zde⁴). Před jeho vydáním se o změření astronomické jednotky pokoušeli např. Jan Kepler nebo Tycho Brahe, ale nepřesně. Jak Halley píše, k využití přechodu Venuše jej inspiroval podobný úkaz – přechod Merkuru – který pozoroval na observatoři na ostrově sv. Heleny. Ověření své teorie se ale nedočkal, protože kvůli mírně nakloněné rovině oběhu Venuše okolo Slunce nastávají přechody vždy v párech po asi 120 letech. My jsme přechod mohli vidět v červnu roku 2004, nejbližší další bude za 6 let a ten následující až v roce 2117.

Vzhledem k tomu, že všechny úhly jsou velmi malé a vzdálenosti očekáváme velmi velké, využijeme aproximace $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ a také, že poměr naměřených úhlových veličin je shodný s poměrem skutečných délkových veličin.

Pokud jsou oba pozorovatelé na stejném poledníku vzdáleni o h (h by mělo být kolmé na spojnici Země–Slunce), tvoří pak s Venuší trojúhelník podobný s trojúhelníkem vzniklým spojením dvou průmětů Venuše na Slunce a Venuší samotnou (viz obrázek 13). Zanedbáme-li to, že Venuše nemusí ležet přímo na spojnici středů Slunce a Země, můžeme určit koeficient podobnosti k z třetího Keplerova zákona

$$\frac{R_Z^3}{R_V^3} = \frac{T_Z^2}{T_V^2} \Rightarrow k = \left(\frac{T_Z^2}{T_V^2} \right)^{1/3} - 1.$$

⁴) <http://sunearth.gsfc.nasa.gov/eclipse/transit/HalleyParallax.html>



Obr. 13. Pozorování přechodu Venuše přes Slunce ze Země.

Pokud tedy známe vzdálenost h , dokážeme vypočítat i vzdálenost dvou průmětů Venuše na Slunce, kterou označíme d . Z naměřeného poměru ε mezi úhlovou velikostí Slunce φ_S a úhlovou vzdáleností stop Venuše φ_d potom spočítáme skutečnou velikost Slunce.

$$2r_S = d \cdot \varepsilon = \frac{h}{k} \cdot \varepsilon.$$

Pokud měříme vzdálenost Slunce od Země pomocí paralaxy, použijeme vztahu

$$R_Z = \frac{r_S}{\text{tg}(\varphi_S/2)} \approx \frac{2r_S}{\varphi_S},$$

dosadíme za poloměr Slunce a máme výsledný vztah

$$R_Z = \frac{h\varepsilon}{k\varphi_S}.$$

Zbývá už jen z měření přechodu Venuše vyhodnotit poměr ε .

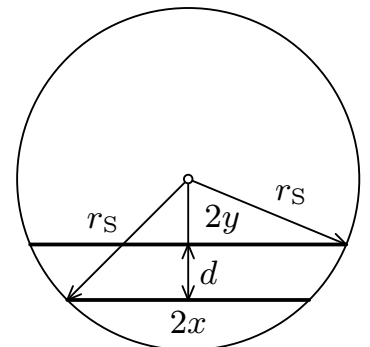
Jednodušší metoda využívá porovnání dvou zakreslených drah. Oba pozorovatelé se dohodnou na tom, že si zvolí referenční sluneční disk o poloměru r_{ref} . Během pozorování na něj zaznamenají postupně celou trajektorii přecházející Venuše. Potom se sejdou a zjistí, že jsou jejich výsledky posunuté o d_{ref} . Hledaný poměr tedy bude $\varepsilon = 2r_{\text{ref}}/d_{\text{ref}}$.

Druhou metodou je měření doby přechodu Venuše přes sluneční disk, což navrhoval i Edmond Halley. Využijeme toho, že pro malé paralaxy blízko spojnice Slunce a Země, konkrétně pro paralaxy φ_S a φ_d platí

$$\frac{\varphi_S}{\varphi_d} = \frac{2r_S}{d}.$$

Velikost d dokážeme určit z bližšího pohledu na situaci. Obě trajektorie vytínají na slunečním disku úsečky, které jsou rovnoběžné a posunuté o d (viz obr. 14). Z Pythagorovy věty určíme d

$$d = \sqrt{r_S^2 - x^2} - \sqrt{r_S^2 - y^2},$$

Obr. 14. K výpočtu vzdálenosti d .

kde $2x$ je délka kratší a $2y$ délka delší úsečky. Jaký je poměr mezi d a r_S ?

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{d}{2r_S} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r_S}\right)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_S}\right)^2}.$$

Zaměřme se nyní na poměry x/r_S , resp. y/r_S . Můžeme je nahradit za φ_x/φ_S , resp. φ_y/φ_S . Uvažme, že oba pozorovatelé vidí Venuši obíhat kolem *Země* úhlovou rychlostí ω . Její okamžitou hodnotu vypočítáme jako součet úhlové rychlosti zdánlivého oběhu Slunce (ω_S) a úhlové rychlosti oběhu Venuše (ω_V).

$$\omega = \omega_S + \omega_V = \frac{v_Z}{R_Z} + \frac{v_V - v_Z}{R_Z - R_V}.$$

Upravením dostaneme ($\eta^{-1} = 1 - (T_V^2/T_Z^2)^{1/3}$)

$$\omega = 2\pi \cdot (\eta - 1) \left(\frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_Z} \right).$$

Pak tedy dosazením všech vztahů vyjde hledané ε

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega \Delta t_1}{\varphi_S}\right)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega \Delta t_2}{\varphi_S}\right)^2}.$$

Časy Δt_1 , Δt_2 jsou naměřené údaje navržené Edmondem Halleyem (viz obr. 13).

Měření vzdálenosti mezi pozorovateli na jednom poledníku je docela jednoduché, pokud neuvažujeme sklopení zemské osy. Potom musíme přejít ke korekcím, které nám umožní získat přesnou hodnotu. Více o nich najdete například zde⁵.

Popsaným způsobem však nelze naměřit hodnotu astronomické jednotky přesně. Pokud odstraníme všechny problémy spojené s měřením vzdálenosti pozorovatelů, zůstává ještě jeden – tzv. *black drop effect*. Přibližuje-li se Venuše okraji slunečního disku, ve chvíli těsně před dotykem se její okraj a okraj Slunce slijí to útvaru, který připomíná černou kapku. Původně to bylo bráno jako důsledek chování Venušiny atmosféry (a také jako důkaz její přítomnosti), nicméně dnes víme, že za tento jev můžou turbulence v atmosféře Země. Proto také z měření v roce 1761 vyplynula hodnota $153 \cdot 10^6$ km. Více k efektu najdete například na Wikipedii⁶.

Ve vašich řešeních jste většinou využívali srovnávací metodu, době přechodu jste se radši vyhýbali, stejně jako přesnějšímu odhadu vzdálenosti mezi pozorovateli. Bohužel jsem se také nedočkal číselných výsledků – ale sám jej také nevedu, protože jediný masově pozorovaný přechod se uskutečnil 8. 6. 2004 a nejsou z něj vhodné údaje. Většina pozorování se uskutečnila v Evropě, nejsou tedy dvě dostatečně vzdálená místa (pro metodu využívající doby přechodu) a rekonstruovat záznamy trajektorií je časově náročné. Nicméně pokud by to někoho z vás zajímalo, může navštívit stránky NASA⁷ a dostat se až k naměřeným údajům pro evropská města. Pokud byste se chtěli dozvědět o přesném postupu podle Edmonda Halleye, doporučuji

⁵⁾ <http://eclipse.astroinfo.org/transit/venus/project2004/pub/Blatter.etal.eng.200306.pdf>

⁶⁾ http://en.wikipedia.org/wiki/Black_drop_effect

⁷⁾ <http://sunearth.gsfc.nasa.gov/eclipse/transit/>

přímo jeho článek nebo práci F. Mignarda⁸, kde jsou rozvedeny všechny podrobnosti.

Aleš Podolník

ales@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.P ... třepání čajem (5 bodů; průměr 3,52; řešilo 33 studentů)

Vysvětlete, proč když zatřepeme sypaným čajem v plechovce, zůstanou větší kousky lístků spíše nahoře než dole. Řešení můžete obohatit vlastním pozorováním.

S úlohou přišel Petr Sýkora.

Jev popisovaný v této úloze není v zásadě nic jiného než tzv. „Brazil Nut Problem“. Trochu nepříjemné je, že dodneška se vědecká obec neshodne na popisu procesů, které tento jev způsobují. V závislosti na vlastnostech jednotlivých částic, tvaru nádoby, amplitudě, směru a frekvenci třesení se podstatně mění pozorovaný jev, lze dokonce docílit reverzního jevu, tedy že velké částice se shromažďují na dně.

Nicméně v prvním přiblížení lze uvažovat tři různé procesy, které mohou způsobit tento jev. Prvním kandidátem je pouhé vyplňování mezer pod většími částicemi těmi menšími. Tento kandidát se uplatňuje především při malých frekvencích, kdy se veškerá kinetická energie částic stačí mezi jednotlivými otřesy disipovat. „Když drkneme do krabičky, částice čaje nadskočí. Když se vracejí vlivem gravitace dolů, je pravděpodobnější, že ty menší projdou mezerami mezi ostatními částicemi, a tudíž ve výsledku se shromažďují dole.“

Pokud zvyšujeme frekvenci a amplitudu třesení, začne se časem směr chovat podobně jako tekutina, a začne tedy platit jakási obdoba Archimédova zákona, díky které se mohou větší částice dostávat nahoru, nebo dolů.

Také se mohou při vhodných podmínkách v naší směsi objevit konvekční proudy, které se v zásadě mohou vytvořit ve dvou směrech. Buďto se uprostřed nádoby pohybují částice směrem dolů a u stěn nádoby směrem nahoru, anebo naopak uprostřed nádoby nahoru a u stěn dolů. Vzhledem k tomu, že uprostřed „teče jeden velký proud“, zatímco při okrajích „teče spousta malých“, mají větší částice menší šanci procestovat podél okrajů nádoby, zatímco středem nádoby projdou vcelku jednoduše. Tak se stane, že pokud uprostřed nádoby směřuje konvekční proud nahoru (resp. dolů), větší částice se budou shromažďovat nahoře (resp. dole). Určit, jakým směrem budou konvekční proudy téct, je velmi obtížné, v praxi se k rozhodnutí používají numerické simulace či experimenty.

Petr Sýkora

petr@fykos.mff.cuni.cz

⁸⁾ http://www.astro.uni.wroc.pl/vt-2004/inne_strony_www/Mignard_eng.pdf

Úloha II. E ... vlny na vodě (8 bodů; průměr 3,92; řešilo 13 studentů)

Na základě rozměrové analýzy najděte vztah pro rychlost vln na vodě. Teoretický vztah ověřte a najděte neznámé konstanty z měření rychlosti vln v závislosti na jejich vlnové délce. Uvědomte si, že existují dva typy vln – jedny jsou způsobené gravitací Země a druhé povrchovým napětím.

Úloha napadla Honzu Prachaře při čtení Feynmanových přednášek z fyziky.

Jednoho krásného večera si nejmenovaný řešitel úžasného FYKOSu vzpomněl, že se blíží termín odevzdání druhé série a on musí najít vztah pro rychlost vln v na vodě. Zajel si tedy k rybníčku o celkové hmotnosti M . Měsíček o hmotnosti m si jen tak svítil, vlnky na rybníčku o ploše S se jen tak proháněly a voda o hustotě ρ si v něm jen tak žblunkotala. A protože zlatá rybka v tuhle pozdní noční hodinu již tuze chrápala na dně v hloubce l , musel si řešitel FYKOSák pomoci se svým problémem úplně sám.

Po chvíli přemýšlení došel k těmto vztahům:

$$v_g = A\sqrt{\frac{g}{\lambda}}, \quad (6)$$

$$v_g = A\sqrt{g(\lambda + \text{konst})}, \quad (7)$$

$$v_g = A\sqrt{g\lambda}, \quad (8)$$

$$v_g = A\sqrt{g\lambda \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}. \quad (9)$$

Tušíte, které mohou vystihovat reálnou situaci? Víte, co mají společného?

A jak to vypadá s přesným řešením?

Teorie

Vlnění na vodě je úžasně komplikovaný proces, kterého se zúčastňuje odhadem 10^{44} molekul (to odpovídá přibližně vlně tsunami). Myslíte, že bude jednoduché dospět k přesnému řešení? Asi ne, a proto si pomůžeme jinak.

Voda je nestlačitelná, a proto rozhodně není možný pohyb molekul vody v rámci jakéhosi sloupce vody na jednom místě nahoru a dolů. Kam by se v takovém případě ztrácela voda? Právě naopak, částičky vody se při ideálním harmonickém vlnění pohybují po trajektoriích tvaru kružnice [1]. Tenhle pohyb je ale nerovnoměrný, a to znamená působící sílu. Tou je tíhové zrychlení g , které by mělo v hledaném vztahu vystupovat.

Jaké veličiny mohou být podstatné?

Poloha Měsíce nebo jeho hmotnost jsou evidentně šílenosti (když tak jsou zahrnuté v gravitačním zrychlení). Další astronomická tělesa asi též nebudou podstatná. Ale co takhle hustota vody? Čím hustší je kapalina, tím větší je na ni působící tíha. Jenomže pozor, setrvačná síla je také větší tolikrát! Z toho intuitivně vychází, že rychlost vln nebude záviset na hustotě vody. Je to obdobné, jako když rychlost padajícího tělesa nezávisí na jeho hustotě.

Závisí rychlost vln na výšce vln? Nebo na hloubce vody? Představte si, že by náš řešitel viděl na rybníčku vlny o výšce dvou metrů, jenomže ten rybníček by byl skutečně malinký o hloubce deseti centimetrů. Nebylo by to divné? Jistá závislost, která tomuhle zabránila, tedy musí existovat. Jenže my budeme předpokládat, že náš rybníček je skutečně velmi hluboký a tyto vlivy zanedbáme. Z rozumných vlivů zůstává tedy jenom vlnová délka a gravitační zrychlení.

Zkombinujeme tedy gravitační zrychlení s vlnovou délkou. Jedním z rozumných (ne však jediným) vztahů tak bude (8).

Na povrchu vody ale existuje ještě jedna síla. Pokud někde nadzvedneme povrch kapaliny, zvětšíme tím její povrch, a tedy povrchovou energii kapaliny. Ta se bude snažit povrch zmenšit, tedy na místě, kde byla voda zdvižená, se snaží ustanovit rovnou hladinu. Voda má však nějakou pohybovou energii získanou při navracení do rovnovážné polohy, kterou odevzdá sousední vodě, aby mohla stoupnout a zvýšit svou povrchovou energii, a tak dál. Takhle může na vodě existovat ještě druhý typ vlnění, způsobený povrchovým napětím. Není těžké uhádnout, že rychlost vlny bude v tomto případě záviset na povrchovém napětí σ . Teď použijeme obdobné argumenty jako výše u gravitačních vln. Předpokládáme, že rychlost závisí také na vlnové délce a speciálně tady také na hustotě, protože hustší kapalina se hýbe pomaleji (tentokrát už síla není úměrná hustotě). Po chvíli zkoušení zjistíme, že rozumnou kombinací se správným rozměrem je

$$v_{\sigma} = B \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \lambda}}. \quad (10)$$

To, co jsme právě dočetli, nebylo nic jiného než návod, jak provádět rozměrovou analýzu. Podstatné je uvědomit si, jaké veličiny jsou podstatné. Je také zřejmé, jaká úskalí tahle metoda přináší. Stále nevíme nic o parametrech A a B . Nevíme nic o tom, kdy naše vzorečky mohou platit, a hlavně netušíme, zda jsou vůbec správné. Tohle může tedy rozřešit jenom experiment.

Experiment

Máme pořádně hlubokou a rozlehlou vodní nádrž. Vytvoříme v ní pořádně silnou sérii pravidelných vln, které budeme sledovat. Zjistíme, kolik vln vznikne v jisté délce, a tím určíme jejich vlnovou délku. Rychlost vln zjistíme změřením času potřebného k tomu, aby čelo vlny projelo jistou dráhu. Experiment nezapomeneme zopakovat pro různé vlnové délky, protože jenom tak můžeme zkoumat jakoukoliv závislost na vlnové délce.

Jenomže náhle procitneme ze sna a zjistíme, že jedinou vodní plochou v našem dohledu je vana. A máme problém, protože všechno, co jsme odvodili, bylo však platné jenom pro velikou hloubku. Nezbude nic jiného, než napustit vanu.

Po prvních pokusech vytvořit pravidelné vlnění si ale vzpomeneme na to, co vidí experimentální fyzik, a zjišťujeme, že i v tomhle bodě jsme se pořádně přepočítali. Co tedy s tím?

Vlnění jednoduše nezakážeme interferovat, a tak nezbyvá, než opět přivřít obě oči a pokusit se změřit, co se dá. Při měření a vyhodnocení těchto měření však již naše oči budou opět otevřené a my nezapomeneme na chybu měření!

K těmto hodnotám se dopracovali někteří z řešitelů a opravovatelů:

Tabulka uvádí experimentální hodnoty konstant ze vztahů (8) a (10).

Experimentátor	Konstanta ze vztahu (8)	Konstanta ze vztahu (10)
<i>Jan Jelínek</i>	$A = 0,40 \pm 0,06$	$B = 4 \pm 3$
<i>Lukáš Malina</i>	$A = 0,40 \pm 0,03$	$B = 2,5 \pm 0,5$
<i>Jakub Benda</i>	$A = 0,31 \pm 0,01$	
<i>Petr Vanya</i>	$A = 0,33 \pm 0,01$	
<i>Jano Lalinský</i>	$A = 0,31 \pm 0,02$	$B = 12,1 \pm 5,9$

Střední hodnota a směrodatná odchylka našich měření vycházejí

$$A = 0,31 \pm 0,02, \quad B = 12,1 \pm 5,9.$$

Tyto hodnoty ještě poopravíme o odhadnuté chyby

$$A = 0,31 \pm 0,05, \quad B = 12 \pm 8.$$

Následně je porovnáme s teoretickými hodnotami

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \doteq 0,40, \quad B = \sqrt{2\pi} \doteq 2,5.$$

A konstatujeme, že jsme v podstatě uspěli. Protože hodnoty uvedené v [1] se poměrně dobře blíží k našim naměřeným hodnotám. Druhou záležitostí je také přesnost měření. V případě gravitačních vln to ještě ujde, ale protože povrchové vlny jsou kratší, je přesnost mnohem menší a měření má spíše orientační charakter.

Mimochodem, naši situaci nejlépe vystihuje vzorec (9), jak se dozvíte z [2].

Závěr

A na závěr již jenom čistě řečnická otázka: „Řešitelé, kteří znali teoretické hodnoty konstant A a B , se jim přiblížili měřením více než ti, kteří jejich hodnoty neznali. Proč?“

Literatura

[1] Feynman, R., P., Leighton, R., B., Sands, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky I*. Fragment 2000, strana 695.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean_surface_wave

[3] <http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/waves/wavemotion.html>

Peter Zalom

peter@fykos.mff.cuni.cz

Ján Lalinský

jano@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II.S ... částice se spinem 1/2 (6 bodů; průměr 5,25; řešilo 16 studentů)

Částice se spinem 1/2 (např. elektron) se může nacházet ve dvou stavech projekce spinu na osu z . Buď spin míří nahoru, pak se nachází ve stavu $|\uparrow\rangle$, či dolů, to je ve stavu $|\downarrow\rangle$. Tyto dva stavy tvoří bázi dvoudimensionálního Hilbertova prostoru popisující právě částici se spinem 1/2.

- Napište, jak vypadá operátor identity na tomto prostoru v řeči vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$.
- Najděte vlastní vektory a vlastní čísla matic S_1 , S_2 a S_3 .
- Máte zadány operátory \hat{S}_+ a \hat{S}_- ve tvaru $\hat{S}_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$, $\hat{S}_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$. Najděte jejich vyjádření v bázi vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ a určete, jak působí na obecný vektor $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$. Jak vypadají vlastní vektory těchto operátorů a jaká jsou vlastní čísla?
- Definujme vektory

$$|\otimes\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad |\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle).$$

Ukažte, že tyto vektory tvoří bázi na našem Hilbertově prostoru, a najděte vztah mezi koeficienty a, b v rozkladu $|\psi\rangle$ do původní báze a koeficienty c, d v rozkladu $|\psi\rangle = c|\otimes\rangle + d|\odot\rangle$ do nové báze.

e) Napište tvar operátorů spinu \widehat{S}_1 , \widehat{S}_2 a \widehat{S}_3 v bázi vektorů $|\otimes\rangle$ a $|\odot\rangle$. Určete jejich vlastní čísla a vektory.

Zadal autor seriálu Jarda Trnka.

a) Víme, že vektory $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ tvoří na našem dvoudimenzionálním Hilbertově prostoru bázi, operátor identity bude mít tedy podobu

$$\mathbb{I} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|.$$

V této bázi bude mít tento operátor samozřejmě podobu jednotkové matice.

b) Úkolem je nalezení vlastních vektorů a vlastních čísel spinových matic S_i , tj. řešit rovnice

$$S_i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Vyřešením těchto algebraických rovnic dostaneme normované vlastní vektory

$$\begin{aligned} |S_1, \lambda = 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, & |S_1, \lambda = -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \\ |S_2, \lambda = 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & |S_2, \lambda = -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ |S_3, \lambda = 1/2\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle, & |S_3, \lambda = -1/2\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle. \end{aligned}$$

Symbol λ samozřejmě značí příslušné vlastní číslo. Vidíme, že pro všechny matice jsou tato vlastní čísla pouze $\pm 1/2$. To odráží fakt, že při měření spinu v libovolném směru můžeme vždy dostat jako výsledek pouze tyto dvě hodnoty a nic jiného. Zkrátka buď spin míří nahoru, nebo dolů. Častěji značíme vlastní číslo stejně jako operátor, tedy například $|S_3 = 1/2\rangle = |\uparrow\rangle$.

c) Maticové vyjádření operátorů \widehat{S}_+ a \widehat{S}_- v bázi vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ najdeme z definice

$$\begin{aligned} S_+ &= \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\widehat{S}_+|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\widehat{S}_+|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\widehat{S}_+|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\widehat{S}_+|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\uparrow\uparrow|\langle\downarrow\uparrow\rangle & \langle\uparrow\uparrow|\langle\downarrow\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow\uparrow|\langle\downarrow\uparrow\rangle & \langle\downarrow\uparrow|\langle\downarrow\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ S_- &= \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\widehat{S}_-|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\widehat{S}_-|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\widehat{S}_-|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\widehat{S}_-|\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\uparrow\downarrow|\langle\uparrow\uparrow\rangle & \langle\uparrow\downarrow|\langle\uparrow\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow\downarrow|\langle\uparrow\uparrow\rangle & \langle\downarrow\downarrow|\langle\uparrow\downarrow\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na obecný vektor $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ působí takto

$$\widehat{S}_+|\psi\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\psi\rangle = b|\uparrow\rangle, \quad \widehat{S}_-|\psi\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\psi\rangle = a|\downarrow\rangle.$$

Vidíme tedy, že operátor \widehat{S}_+ člen $a|\uparrow\rangle$ úplně „zahazuje“, naopak člen $b|\downarrow\rangle$ jaksí „povýší“ na $b|\uparrow\rangle$. Opravdu tento operátor zvyšuje třetí komponentu spinu o jednotku, tj. $|\downarrow\rangle = |S_3 = -1/2\rangle$ zvedne na $|\uparrow\rangle = |S_3 = 1/2\rangle$. Vektor $|\uparrow\rangle$ ale už nemá kam zvedat, takže ho vynuluje.

Operátor \widehat{S}_- se chová přesně opačně, tj. snižuje kvantové číslo příslušející \widehat{S}_3 o jednotku – mění $|\uparrow\rangle$ na $|\downarrow\rangle$, vektor $|\downarrow\rangle$ však už nemá na co změnit, tak ho vynuluje. Operátory

\widehat{S}_+ a \widehat{S}_- proto nazýváme *posunovací* operátory. Tento koncept je obecný a platí pro stav s libovolným spinem⁹, např. pro částici se spinem 2 by platilo

$$\widehat{S}_+|S_3 = 1\rangle = |S_3 = 2\rangle, \quad \widehat{S}_-|S_3 = 0\rangle = |S_3 = -1\rangle \quad \text{apod.}$$

Vektory odpovídající maximální, resp. minimální hodnotě kvantového čísla \widehat{S}_3 se samozřejmě působením \widehat{S}_+ , resp. \widehat{S}_- nulují, tj. $\widehat{S}_+|S_3 = 2\rangle = \widehat{S}_-|S_3 = -2\rangle = 0$. Vraťme se k našemu příkladu.

Stejný výsledek působení posunovacích operátorů bychom dostali vynásobením nalezených matic a obecného vektoru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Je dobré si uvědomit, že oba postupy (maticový a operátorový) jsou naprosto ekvivalentní.¹⁰

Nalezení vlastních vektorů a vlastních čísel těchto operátorů (matic) je úloha velmi triviální, nicméně dává pozoruhodné výsledky

$$|S_+, \lambda = 0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle, \quad |S_-, \lambda = 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle.$$

Ke každému z operátorů existuje pouze jeden vlastní vektor, ten druhý by byl identicky nulový¹¹. Jediný vlastní vektor a nulové vlastní číslo jsou signály toho, že ani jeden z těchto operátorů nepředstavuje pozorovatelnou veličinu.

- d) Dva vektory tvoří na Hilbertově prostoru bázi, pokud jsou na sebe kolmé. To pro $|\otimes\rangle$ a $|\odot\rangle$ splněno je.

$$\langle\otimes|\odot\rangle = \frac{1}{2} (\langle\uparrow|\uparrow\rangle - \langle\downarrow|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\uparrow\rangle - \langle\uparrow|\downarrow\rangle) = 0.$$

Ve staré bázi má obecný vektor rozklad $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$. Do něj chytře vložíme identitu ve tvaru $I = |\otimes\rangle\langle\otimes| + |\odot\rangle\langle\odot|$. Potom dostaneme

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= a(|\otimes\rangle\langle\otimes| + |\odot\rangle\langle\odot|)|\uparrow\rangle + b(|\otimes\rangle\langle\otimes| + |\odot\rangle\langle\odot|)|\downarrow\rangle \\ &= (a\langle\otimes|\uparrow\rangle + b\langle\otimes|\downarrow\rangle)|\otimes\rangle + (a\langle\odot|\uparrow\rangle + b\langle\odot|\downarrow\rangle)|\odot\rangle. \end{aligned}$$

Skalární součiny vektorů staré a nové báze mají hodnoty

$$\langle\otimes|\uparrow\rangle = \langle\otimes|\downarrow\rangle = \langle\odot|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle\odot|\downarrow\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Po dosazení vyjde

$$|\psi\rangle = \frac{a+b}{\sqrt{2}}|\otimes\rangle + \frac{a-b}{\sqrt{2}}|\odot\rangle \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}, \quad d = \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

⁹⁾ Dokonce se netýká pouze spinu, ale libovolné pozorovatelné.

¹⁰⁾ Pro matematictější založené čtenáře mohou doplnit, že algebra operátorů je homomorfní s grupou regulárních matic $GL(n)$, tj. každý operátor lze vyjádřit jako matici.

¹¹⁾ Tomu by pak odpovídalo libovolné vlastní číslo, ale mluvit o něm u nulového vektoru postrádá smysl.

e) Posledním úkolem bylo vyjádřit matice spinu v bázi vektorů $|\otimes\rangle$ a $|\odot\rangle$. Přímocaráy postup „brute force“ vychází z definice

$$S'_i = \begin{pmatrix} \langle \otimes | \widehat{S}_i | \otimes \rangle & \langle \otimes | \widehat{S}_i | \odot \rangle \\ \langle \odot | \widehat{S}_i | \otimes \rangle & \langle \odot | \widehat{S}_i | \odot \rangle \end{pmatrix}.$$

K operátoru \widehat{S}_i vložíme z obou stran identitu ve tvaru $\mathbb{I} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ a dosadíme za známé hodnoty.

$$S'_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad S'_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S'_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

K takto získaným maticím pak osvědčeným postupem určíme vlastní čísla a vlastní vektory.

$$\begin{aligned} |S'_1, \lambda = 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, & |S'_1, \lambda = -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \\ |S'_2, \lambda = 1/2\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |S'_2, \lambda = -1/2\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ |S'_3, \lambda = 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & |S'_3, \lambda = -1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pozorný čtenář lehko nahlédne, že matice S_2 a S_3 se prohodily a matice S_1 se komplexně sdružila. Vlastní vektory a vlastní čísla se oproti původnímu případu nezměnily (jen prodělaly stejnou záměnu jako jejich matice). Matice S'_2 je v této bázi diagonální, což značí, že $|\otimes\rangle$, resp. $|\odot\rangle$ jsou její vlastní vektory příslušné vlastním hodnotám $1/2$, resp. $-1/2$.

Pavel Motloch si všiml velmi významného jevu. Libovolný vektor vyjádřený v nové bázi můžeme na základě výsledků úlohy d) vyjádřit pomocí staré báze jako

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

kde čárkou explicitně zdůrazňujeme, že se jedná o novou bázi. Výše zmíněnou matici nazýváme *maticí přechodu* mezi starou a novou bázi. Libovolnou matici vyjádřenou v nové bázi můžeme potom zapsat pomocí její podoby ve staré bázi jako $A' = UAU^{-1}$, kde U je ona přechodová matice. V našem případě je vyjádření c, d pomocí a, b stejné, jako by tomu bylo naopak (obecně to tak být nemusí), tj.

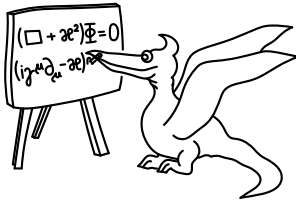
$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = U^{-1}.$$

Vyjádření matic S'_i pak dostaneme velmi jednoduše prostým vynásobením tří matic $S'_i = US_iU^{-1}$, což je podstatně méně práce než v tradičním přístupu.

Krátce k došlým řešením. Byl jsem velmi mile překvapen, že většina z vás vyřešila všechny úlohy správně či jen s nepodstatnými chybami. Bonusový bod za pěkné řešení by si tím pádem zasloužilo mnoho z vás, čímž by ale ztrácel svůj význam. Dostal ho tudíž pouze *Pavel Motloch* za chytré vyřešení poslední úlohy.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 4: Schrödingerova rovnice a její řešení

V předchozích dílech jsme vybudovali základní aparát kvantové mechaniky, tj. zavedli jsme Hilbertův prostor stavů a operátory představující pozorovatelné. V tomto napíšeme bezčasovou i časovou Schrödingerovu rovnici a ukážeme si na jednoduchém příkladu způsob, jak se řeší.

Hamiltonián a stacionární stavy

Zvláštní roli mezi všemi operátory hraje právě hamiltonián čili operátor energie. Jak se později dozvíme, tak právě on bude zodpovědný za časový vývoj daného stavu. Důsledkem toho platí, že pokud je systém v čase $t_0 = 0$ ve stavu, jenž je vlastním stavem hamiltoniánu příslušejícím nějaké energii E_i , pak v libovolném čase $t > t_0$ popíšeme systém stejným vektorem.¹² To je důvod, proč vlastní stavy hamiltoniánu nazýváme *stacionárními stavy*. Systém v rovnováze se právě v těchto stavech nachází. Rovnici

$$\hat{H}|E_i\rangle = E_i|E_i\rangle \quad (11)$$

říkáme *bezčasová Schrödingerova rovnice*. Hamiltonián se dá zavést už na klasické úrovni jako $H = T + V$, kde T je kinetická energie a V potenciální. Pro kinetickou energii platí $T = p^2/2m$, potenciální energie je ve většině případů funkcí pouze polohy $V = V(\mathbf{x})$. Toto schéma převezmeme i na kvantové úrovni, jen veličiny x , p nahradíme operátory \hat{X} , \hat{P} .

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X}).$$

Takový hamiltonián popisuje částici s dvěma stupni volnosti – poloha a hybnost (resp. rychlost) v jednorozměrném případě. (Ve třech rozměrech bychom měli tři souřadnice a tři složky hybnosti.) Bezčasová Schrödingerova rovnice nabývá tvaru

$$\left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X}) \right] |\psi\rangle = E_i |\psi\rangle.$$

Stav $|\psi\rangle$ symbolizuje vlastní stav hamiltoniánu, nicméně prozatím nevíme, jaké energii přísluší, proto ho nepíšeme v obvyklém tvaru $|E_i\rangle$. To je právě úkol, který před námi stojí – najít stavy $|\psi\rangle = |E_i\rangle$ a jim příslušné energie E_i . Obraťme se teď ke konkrétnímu tvaru hamiltoniánu. Jeho kinetická část je vždy stejná, jednotlivé případy se tedy liší potenciální částí. Na ukázkou uvádíme několik konkrétních případů systému:

$$\text{volná částice} \quad \hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m},$$

¹²⁾ Trochu předběhnu, když prozradím, že bude pouze vynásoben jakýmsi fázovým faktorem. Podstatné však je, že bude stále zůstat ve stavu s tou samou energií E_i (bude i nadále vlastním vektorem hamiltoniánu, který přísluší energii E_i).

$$\begin{aligned} \text{harmonický oscilátor} \quad \hat{H} &= \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2, \\ \text{homogenní pole} \quad \hat{H} &= \frac{\hat{P}^2}{2m} + F\hat{X}. \end{aligned}$$

Nalezení stacionárních stavů a vlastních energií ale není vůbec jednoduché, obecně vede na diferenciální rovnice, jak si ukážeme v následujícím paragrafu.

Vlnová funkce v x -reprezentaci

Podívejme se teď blíže na vlastní stavy operátoru \hat{X} (resp. \hat{P} , tam je to analogické). V minulém díle jsme psali jednotkový operátor ve tvaru

$$\mathbb{I} = \sum_{j=1}^n |j\rangle\langle j|,$$

což platí v případě, že vektory $|j\rangle$ tvoří bázi na Hilbertově prostoru.¹³

Pokud operátor \hat{X} tvoří sám úplnou množinu pozorovatelných (ÚMP), tj. s žádným jiným operátorem nekomutuje (což platí v prakticky všech relevantních případech), potom jeho vlastní stavy skutečně tuto bázi tvoří. Nicméně již víme, že těchto vektorů je nespočetně mnoho, tudíž nelze psát $\mathbb{I} = \sum_j |x_j\rangle\langle x_j|$. Logickým řešením je nahradit sumu integrálem

$$\mathbb{I} = \int dx |x\rangle\langle x|.$$

Ve spektrální reprezentaci (viz konec druhého dílu seriálu) potom bude mít operátor \hat{X} tvar

$$\hat{X} = \int dx x |x\rangle\langle x|.$$

Minule jsme si také ukazovali, jak vypočítat koeficienty rozkladu obecného vektoru $|\psi\rangle$ do báze $|k\rangle$

$$|\psi\rangle = \mathbb{I}|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n |k\rangle\langle k|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n c_k |k\rangle, \quad \text{kde } c_k = \langle k|\psi\rangle.$$

Pokud známe všechny koeficienty c_k , máme informaci o celém vektoru. Pokud za bázi zvolíme vlastní stavy operátoru \hat{X} , bude mít tento rozklad tvar

$$|\psi\rangle = \mathbb{I}|\psi\rangle = \int dx |x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle, \quad \text{kde } \psi(x) = \langle x|\psi\rangle.$$

Koeficienty $\psi(x)$ tentokrát nejsou číslovány diskretním indexem k , ale spojitým indexem x , tj. každému reálnému číslu x přiřadíme jisté číslo $\psi(x)$. Ale to je přesně definice funkce, to znamená, že místo sady koeficientů c_k zde máme jednu funkci $\psi(x)$ – *vlnovou*

¹³⁾ Pokud bychom měli úplnou množinu pozorovatelných (ÚMP) tvořenou dvěma operátory \hat{A} , \hat{B} s vlastními hodnotami a_i , b_j , pak by bázi na tomto prostoru tvořily stavy $|a_i, b_j\rangle$ a operátor identity bychom zapsali ve tvaru

$$\mathbb{I} = \sum_{i,j} |a_i, b_j\rangle\langle a_i, b_j|.$$

Analogicky potom pro ÚMP, které tvoří více operátorů. Obecně takovému rozkladu jednotky na bázevé vektory říkáme *relace úplnosti*.

funkci v x -reprezentaci,¹⁴ jež popisuje kompletně celý vektor $|\psi\rangle$. Vlnová funkce $\psi(x)$ má zcela analogickou interpretaci jako koeficient c_k v předchozím. Kvadrát její absolutní hodnoty $\varrho(x) = |\psi(x)|^2$ určuje *hustotu pravděpodobnosti*, že částice popsaná vektorem $|\psi\rangle$ se nachází v bodě x . Nejedná se zde ale o pravděpodobnost, protože ta je v každém bodě nulová.¹⁵ Pravděpodobnost, že se částice nachází v intervalu (x_1, x_2) , potom je

$$\varrho(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} dx \varrho(x).$$

Celková pravděpodobnost toho, že se částice „někde“ nachází, musí být 1, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x) = 1.$$

To je přímá analogie podmínky $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 = 1$ z předešlých dílů.

Speciálního tvaru nabývá vlnová funkce $\psi(x)$ v případě, že $|\psi\rangle$ už je vlastním stavem operátoru polohy příslušnému nějaké vlastní hodnotě x' , tj. $|\psi\rangle = |x'\rangle$. Vlnová funkce odpovídající tomuto vektoru potom je $\langle x|\psi\rangle = \langle x|x'\rangle$, kde x probíhá všechny možné hodnoty jako předtím, ale x' je fixní. Tento skalární součin odpovídá Diracově δ -funkci $\delta(x - x')$.¹⁶ To odráží fakt, že částice se tentokrát skutečně nachází právě v jednom bodě $x = x'$ a ne nikde jinde. Pak nelze již hovořit o hustotě pravděpodobnosti (ta je v bodě $x = x'$ nekonečná), ale přímo o makroskopické pravděpodobnosti, že se částice v tomto bodě nachází.

Bezčasová Schrödingerova rovnice

Napišme znovu bezčasovou Schrödingerovu rovnici ve tvaru

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle.$$

Opět jsme vlastní vektor \hat{H} označili $|\psi\rangle$, neb tyto vlastní vektory neznáme, právě naopak – hledáme je. Vynásobme skalárně tuto rovnici zleva $\langle x|$ a vložme k hamiltoniánu operátor identity.

$$\langle x|\hat{H}|\psi\rangle = \int dx' \langle x|\hat{H}|x'\rangle \langle x'|\psi\rangle = E \langle x|\psi\rangle, \quad (12)$$

¹⁴⁾ Obdobně bychom mohli celou proceduru opakovat i pro vlastní stavy operátoru \hat{P} , pak bychom mluvili o p -reprezentaci.

¹⁵⁾ Pokud by platilo, že v intervalu (x_1, x_2) má vlnová funkce nenulovou hodnotu, byla by celková pravděpodobnost, že se částice nachází mezi body x_1 a x_2 ,

$$\varrho(x_1, x_2) = \sum \varrho(x) = \sum |\psi(x)|^2.$$

Problém je v tom, že suma probíhá nekonečně mnoho hodnot x , které se mezi body x_1 a x_2 nacházejí. Celková pravděpodobnost by tudíž byla nekonečná a to je nesmysl. Je to analogické tomu, jako když se zeptáte, kolik váží voda, která se nachází v jednom bodě. Samozřejmě že je to nula, protože je jí tam nekonečně málo. Přesto můžeme mluvit o hustotě vody v tomto bodě.

¹⁶⁾ To je speciální funkce, která má všude nulovou hodnotu kromě bodu, kde její argument je nulový. Zároveň platí

$$\int dx' \delta(x - x') = 1.$$

Do integrálu přispěje pouze jeden bod $x = x'$. Pokud je integrál nenulový a funkce má nenulovou hodnotu jen v jednom bodě, musí δ -funkce v tomto bodě nabývat „nekonečna“.

kde jsme vložili operátor identity ve tvaru $\mathbb{I} = \int dx' |x'\rangle\langle x'|$. Výraz $\langle x|\widehat{H}|x'\rangle$ opět představuje číslo (přesněji funkci), neboť $\widehat{H}|x'\rangle$ je vektor a zleva skalárně vynásobený $\langle x|$ dá funkci $H(x, x')$, která obecně bude záviset jak na poloze x , tak i na poloze x' . To by ale nutně znamenalo, že fyzika v bodě x je ovlivněna situací v bodě x' . V drtivé většině případů tomu tak není (co se děje v jednom bodě závisí pouze na podmínkách právě v tomto bodě), proto se tato závislost projeví pouze jako δ -funkce, tj. $\langle x|\widehat{H}|x'\rangle = H(x')\delta(x - x')$. O takovém hamiltoniánu říkáme, že je lokální.

Ale jak zjistit tvar $H(x')$? Rozdělme si hamiltonián na dvě části, jak jsme to udělali dříve. Potenciální část je jednoduchá, závisí pouze na operátoru polohy \widehat{X} a vektor $|x'\rangle$ (stejně jako $|x\rangle$) je jeho vlastní stav příslušný hodnotě x' (resp. x). Potom tedy máme¹⁷

$$\langle x|V(\widehat{X})|x'\rangle = \langle x|V(x')|x'\rangle = \langle x|x'\rangle V(x') = \delta(x - x')V(x').$$

Kinetická část hamiltoniánu nejde takto jednoduše upravit, protože není úplně jasné, jakou má podobu maticový element $\langle x|\widehat{P}^2|x'\rangle$. Z předchozího dílu však víme, že

$$\widehat{P}|x\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx}|x\rangle.$$

Potom operátor příslušející kinetické části hamiltoniánu působí na $|x'\rangle$ jako

$$\langle x|\frac{\widehat{P}^2}{2m}|x'\rangle = \langle x|\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx'^2}\right]|x'\rangle = -\delta(x - x')\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx'^2}.$$

Vidíme, že i tento výraz je lokální stejně jako potenciální část, to potvrzuje i lokálnost celého hamiltoniánu.

Dohromady tedy z rovnice (12) dostaneme

$$\int dx' \delta(x - x') \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx'^2} + V(x') \right) \psi(x') = E\psi(x).$$

Integrovaní je přímočaré¹⁸ a dostaneme *bezčasovou Schrödingerovu rovnici v x -reprezentaci*¹⁹

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (13)$$

¹⁷⁾ Využíváme toho, že pokud $|x\rangle$ je vlastním stavem operátoru \widehat{X} příslušným vlastní hodnotě x , pak totéž platí i pro libovolnou funkci polohového operátoru, tj.

$$\widehat{X}|x\rangle = x|x\rangle \quad \Rightarrow \quad f(\widehat{X})|x\rangle = f(x)|x\rangle.$$

Tento vztah se dá dokázat Taylorovým rozvojem funkce $f(\widehat{X})$

$$f(\widehat{X})|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \widehat{X}^n|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} x^n|x\rangle = f(x)|x\rangle.$$

¹⁸⁾ Platí totiž užitečná formule $\int \delta(x - x')f(x') = f(x)$.

¹⁹⁾ Vše, co jsme v této kapitole probrali, se dá jednoduše zobecnit na trojrozměrný případ. Relace uzavřenosti bude mít v tomto případě tvar $\mathbb{I} = \int d^3\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|$. Bezčasovou Schrödingerovu rovnici pak píšeme v podobě

$$-\hbar^2/2m \cdot \Delta\psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})$$

atd.

Matematicky se jedná o diferenciální rovnici 2. řádu pro vlnovou funkci $\psi(x)$. Pokud bychom nedodali žádné další informace²⁰, nedostali bychom žádné omezení na energii E , tj. částice by mohla mít libovolnou energii. To bude pravda pro volnou částici, ale pokud ji umístíme do nějakého vnějšího pole potenciální energie, tak to platit nebude, což uvidíme později.

Vraťme se ještě k maticovému elementu $\langle x|\hat{A}|x'\rangle$. Takový výraz označíme $A(x, x')$ a mluvíme o něm jako o operátoru \hat{A} v x -reprezentaci. Je to přesná analogie výrazu $A_{kk'} = \langle k|\hat{A}|k'\rangle$ z minulého dílu. Problémem je, že zde je báze nejen nekonečná (to by mohla být i pro $k = 1, 2, \dots$), ale dokonce nespočetná²¹. Pokud platí $\langle x|\hat{A}|x'\rangle = \delta(x - x')A(x')$, je operátor \hat{A} v bázi $|x\rangle$ diagonální, tzn. že lokalita je ekvivalentní diagonalitě matice operátoru v x -reprezentaci. To vše nás vede k poznatku, že je možné udělat analogii

$$\begin{aligned} |k\rangle &\rightarrow |x\rangle, \\ c_k = \langle k|\psi\rangle &\rightarrow \psi(x) = \langle x|\psi\rangle, \\ w_k = |c_k|^2 &\rightarrow \varrho(x) = |\psi(x)|^2, \\ A_{kk'} = \langle k|\hat{A}|k'\rangle &\rightarrow A(x, x') = \langle x|\hat{A}|x'\rangle. \end{aligned}$$

Řešení bezčasové Schrödingerovy rovnice

Jak jsme již řekli, bezčasová Schrödingerova rovnice je diferenciální rovnice 2. řádu. Ta má obecně dvě nezávislá řešení, která můžeme napsat ve tvaru

$$\psi(x) = A\psi_1(x) + B\psi_2(x).$$

Konstanty A a B určíme z počátečních podmínek, které je nutné zadat.

- Hodnota vlnové funkce v nějakém bodě x_0 . Často se volí počátek souřadnic $x_0 = 0$, ale není to nutné.
- Hodnota derivace vlnové funkce opět v nějakém bodě (může být i odlišný od bodu x_0 , ale často se volí shodně).

To jsou čistě matematické požadavky. Při řešení konkrétních případů se úlisně skrývají v jiných – fyzikálních požadavcích na úlohu. Vlnová funkce $\psi(x)$ má totiž i fyzikální význam – její kvadrát udává hustotu pravděpodobnosti výskytu částice v daném bodě. Proto nutně:

- Vlnová funkce $\psi(x)$ musí být kvadraticky integrovatelná, což znamená platnost vztahu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

To je důsledkem skutečnosti, že celková pravděpodobnost nalezení částice někde je 1, jak jsme již uvedli.

- Vlnová funkce musí být spojitá; to úzce souvisí s tím, že její kvadrát pak lze interpretovat právě jako hustotu pravděpodobnosti.
- Vlnová funkce musí být diferencovatelná, což je ekvivalentní požadavku, aby její první derivace byla spojitá. Tento požadavek je nutné dodržet pouze v případě, že změny potenciálu bod od bodu jsou konečné.

²⁰⁾ Každopádně musíme zadat počáteční hodnotu funkce $\psi(x_0)$ i její derivace $d\psi(x)/dx|_{x_0}$ jako u každé diferenciální rovnice 2. řádu.

²¹⁾ To znamená, že parametr, který bázi čísluje (zde x , resp. x'), je spojitý. Tudíž můžeme těžko zapsat $\langle x|\hat{A}|x'\rangle$ do matice.

Představme si částici uvězněnou v energetické jámě vymezené souřadnicemi $x \in (0, a)$, kterým odpovídá potenciální energie $V(x) = 0$. Všude jinde je potenciální energie nekonečná, $V(x) = \infty$.²² Pusťme se do řešení.

- Bezčasová Schrödingerova rovnice má v našem případě tvar

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

kde $V(x) = 0$ pro $x \in (0, a)$ a $V(x) = \infty$ pro ostatní x . V těch je řešení jednoduché, a to identicky nulové $\psi(x) = 0$. To je vidět přímo z rovnice, neb nekonečný potenciál může být „zabit“ pouze nulovou vlnovou funkcí. Uvnitř jámy můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0.$$

To je však známá rovnice harmonických kmitů, která má obecné řešení

$$\psi(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x),$$

kde $\omega^2 = 2mE/\hbar^2$.

- V krajních bodech $x = 0$ a $x = a$ musí být vlnová funkce nulová, aby se dala spojitě napojit na řešení $\psi(x) = 0$ vně jámy. Musí tedy platit

$$0 = \psi(0) = B, \quad 0 = \psi(a) = A \sin(\omega a) + B \cos(\omega a).$$

Z těchto podmínek dostaneme $B = 0$ a $A \sin(\omega a) = 0$. Pokud nechceme mít identicky nulové řešení, kde $A = B = 0$, musí platit $\omega a = n\pi$, kde n je celé číslo. Ale frekvence ω úzce souvisí s energií, podmínky na ni tedy určí možné energetické hladiny.

$$E = \frac{\hbar^2\omega^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2} = E_0n^2, \quad \text{kde} \quad E_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}.$$

Vidíme tedy, že energie může nabývat jen některých hodnot. Správně bychom měli její hodnoty indexovat písmenem n a psát E_n . Našli jsme tedy všechny vlastní hodnoty hamiltoniánu.

- Zatím jsme dospěli k tomu, že vlnová funkce $\psi(x)$ má tvar

$$\psi(x) = A \sin(\omega x) \quad \text{pro } x \in (0, a).$$

Tím je požadavek 2. vyčerpán. Podmínku 3. zde nelze splnit, neboť toto je zrovna případ, kde dochází k nekonečné změně potenciálu. Zbývá požadavek 1., který lze napsat ve tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^a A^2 \sin^2(\omega x) dx = 1.$$

²²⁾ Je dobré si uvědomit, že se nejedná o žádnou jámu v klasickém smyslu. Je to prostě oblast v prostoru (v našem jednorozměrném případě na ose), kde je nulový potenciál, a všude jinde je nekonečný. Jako příklad si můžeme představit elektron ve Faradayově kleci, kde vně klece je velmi silné elektrické pole.

Výpočtem dostaneme podmínku (Zkuste si to, je to trénink integrování.) $A = \sqrt{2/a}$. Dostáváme výsledek ve tvaru

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}.$$

Toto jsou vlnové funkce příslušné vlastním stavům daného hamiltoniánu a příslušné vlastní hodnoty energie. Za úkol si můžete zkusit nakreslit kvadráty těchto vlnových funkcí, které určují hustoty pravděpodobnosti výskytu částice v jámě v daném bodě.

Tento příklad byl samozřejmě velmi jednoduchý. Už pokud bychom uvažovali jámu konečnou, situace by se velmi zkomplikovala – vlnová funkce by byla nenulová i vně jámy (vlnová funkce by tam měla exponenciální pokles). Postup by v tomto případě byl takový, že bychom bezčasovou Schrödingerovu rovnici vyřešili zvlášť uvnitř jámy a zvlášť vně (to jsme de facto udělali taky, jen vně bylo identicky nulové řešení), obě řešení bychom pak v krajních bodech napojili za splnění podmínek 2. a 3. Vlnové funkce i výraz pro energie by pak zdaleka nebyl tak jednoduchý. Ale i tak by to byla vcelku prostá situace, neboť by se nám povedla přesně vyřešit, což pro spoustu jiných potenciálů tak snadné nebude či to vůbec nepůjde.

Časová Schrödingerova rovnice

V klasické mechanice řešením pohybové rovnice $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ zjišťujeme, jakým způsobem se pohybuje daný hmotný bod. Jediné, co potřebujeme znát, jsou působící síly, počáteční poloha $\mathbf{r}(t=0)$ a rychlost $\dot{\mathbf{r}}(t=0)$. Zobecněním tohoto konceptu dostaneme teoretickou mechaniku, kde síly nahrazujeme energiemi. Pohyb hmotného bodu tentokrát neurčujeme zadáním působících sil, nýbrž pomocí energie. Celkovou energii pak nazveme hamiltoniánem H , který vyjádříme pomocí polohy \mathbf{r} a impulsu \mathbf{p} hmotného bodu. Řešením hamiltonových rovnic dostaneme stejně jako v klasické mechanice trajektorii $\mathbf{r}(t)$. Klasická i teoretická mechanika popisují tutéž fyzikální situaci, jen různými přístupy.

V kvantové mechanice již nadále nemůžeme mluvit o hmotných bodech a jejich trajektoriích. Informace o kvantovém systému nese vlnová funkce $\psi(x)$, jejíž kvadrát určuje hustotu pravděpodobnosti nalezení částice v daném bodě x . V tomto smyslu je částice „rozmazaná“ a netvoří hmotný bod, ale spíše jakýsi oblak, který je v některých místech hustší a v některých řidší. Proto přechodem od klasické mechaniky k mechanice kvantové měníme popis částice. Doteď jsme se zabývali popisem kvantového systému v jednom čase, stačil nám tedy pouze vektor $|\psi\rangle$ či jeho vlnová funkce v x -reprezentaci $\psi(x)$.

Většinou však chceme popsat dynamiku systému, jakým způsobem se vyvíjí s časem. Logicky se nám sem dostane závislost na čase, tedy $|\psi(t)\rangle$ (resp. $\psi(x,t)$ – už jsme si ukázali, že popis pomocí vektoru $|\psi\rangle$ a $\psi(x)$ je ekvivalentní). Stejně jako pohybová rovnice v klasické mechanice určuje, jak se polohový vektor $\mathbf{r}(t)$ vyvíjí s časem, potřebovali bychom najít i v kvantové mechanice nějakou rovnici, která by nám určovala vývoj $|\psi(t)\rangle$. Pokud hamiltonián nezávisí na čase (což budeme vždy předpokládat), lze stav $|\psi(t)\rangle$ vyjádřit pomocí počátečního stavu $|\psi(t_0)\rangle$ jako

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle,$$

kde $\hat{U}(t, t_0)$ je tzv. *evoluční operátor*, který převádí stav v čase t_0 na stav v čase t . Zásadní informací je, že tento operátor komutuje s hamiltoniánem. To je důsledkem toho, že operátor $\hat{U}(t, t_0)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right). \quad (14)$$

Potom přirozeně platí $[\hat{H}, \hat{U}(t, t_0)] = 0$ kvůli tomu, že hamiltonián samozřejmě komutuje sám se sebou. Derivací vektoru $|\psi(t)\rangle$ podle času dostaneme

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{d}{dt}\hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}\hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle,$$

což po úpravě dává

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle. \quad (15)$$

To není nic jiného než slavná *Schrödingerova rovnice*, někdy doplněná o slovíčko „časová“. Pokud je tedy vektor $|\psi(t_0)\rangle$ vlastním stavem hamiltoniánu příslušným vlastní hodnotě E , bude to platit i pro vektor $|\psi(t)\rangle$. To lehce dokážeme. Užitím $\hat{H}|\psi(t_0)\rangle = E|\psi(t_0)\rangle$ dostaneme po vynásobení obou stran rovnice operátorem $\hat{U}(t, t_0)$

$$\hat{U}(t, t_0)\hat{H}|\psi(t_0)\rangle = \hat{H}\hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \quad \hat{U}(t, t_0)E|\psi(t_0)\rangle = E|\psi(t)\rangle.$$

Z toho ihned plyne $\hat{H}|\psi(t)\rangle = E|\psi(t)\rangle$. Odvodili jsme tedy významnou vlastnost stacionárních stavů, kterou jsme avizovali už na začátku kapitoly. Zajímavé je, že u stacionárních stavů lze jít ještě dále a přímo určit, jakým způsobem závisí vektory $|\psi(t)\rangle$ na čase. Pokud uijeme předchozí výsledek a dosadíme ho do časové Schrödingerovy rovnice, dostaneme jednoduchou diferenciální rovnici prvního řádu

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = E|\psi(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = e^{-iE(t-t_0)/\hbar}|\psi(t_0)\rangle.$$

Stacionární stavy tedy závisí na čase pouze přes exponenciální faktor. Pro všechny ostatní stavy (které nejsou vlastními pro hamiltonián) může být tato časová závislost daleko složitější.

Úloha IV . S ... spinová precese

Uvažujme částici se spinem $1/2$ v magnetickém poli, které míří ve směru osy z , $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, a zanedbejme všechny stupně volnosti kromě těch spinových. Jako jeden příklad báze, kterou zde můžeme zvolit, je dvojice vektorů s ostrou hodnotou projekce spinu na osu z : $|S_3 = 1/2\rangle$, $|S_3 = -1/2\rangle$. Hamiltonián příslušný této částici lze napsat ve tvaru

$$\hat{H} = \omega \hat{S}_3,$$

kde $\omega = e\hbar B/2m$.

- a) Napište vlastní vektory a vlastní čísla hamiltoniánu \hat{H} . Určete, jak působí hamiltonián na obecný vektor $|\psi\rangle = a|S_3 = 1/2\rangle + b|S_3 = -1/2\rangle$. Taktéž vypočtete, jak působí operátor

$$\hat{U}(t, 0) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar).$$

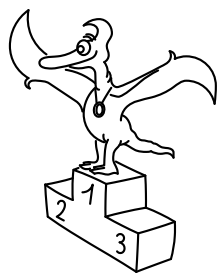
- b) Předpokládejme, že v čase $t = 0$ se částice nachází ve stavu s ostrou hodnotou z -ové projekce spinu, tj. $|\psi(0)\rangle = |S_3 = 1/2\rangle$. Určete, v jakém stavu se bude nacházet v čase $t = \tau$ a s jakou pravděpodobností naměříme částici ve stavu $|S_3 = 1/2\rangle$ a s jakou v $|S_3 = -1/2\rangle$.
- c) V případě, že v čase $t = 0$ se částice nachází ve stavu s ostrou hodnotou projekce spinu na osu y nahoru, tj. ve stavu $|S_2 = 1/2\rangle$, určete, v jakém stavu se bude nacházet v čase $t = \tau$. Určete také pravděpodobnosti, že při měření spinu ve směru y naměříme hodnoty $+1/2$, resp. $-1/2$.

Definujme střední hodnotu operátoru vztahem

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_j w_j A_j,$$

kde w_j je pravděpodobnost, že naměříme hodnotu A_j . (Rozmyslete si, že je to přirozená definice střední hodnoty.) Předpokládejte, že se v čase $t = 0$ nachází částice ve stavu s ostrou hodnotou projekce spinu na osu y nahoru, tj. ve stavu $|S_2 = 1/2\rangle$.

- d) Určete střední hodnoty operátorů spinu, tj. $\langle \hat{S}_1 \rangle$, $\langle \hat{S}_2 \rangle$ a $\langle \hat{S}_3 \rangle$ v čase $t = 0$.
- e) Ty samé střední hodnoty vypočtete v čase $t = \tau$. Okomentujte, jak výsledek souvisí s názvem úlohy.



Pořadí řešitelů po II. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	5	8	6	34	<i>100</i>	65
1. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	5	4	4	3	5	8	6	35	<i>102</i>	58
2. <i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova Praha	3	5	2	4	3	7	6	30	<i>79</i>	45
3. <i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	2	–	2	4	4	6	5	23	<i>80</i>	43
4. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	4	4	–	4	3	–	6	21	<i>79</i>	42
5. <i>František Příbyl</i>	G Milevsko	3	4	1	–	3	1	3	15	<i>51</i>	31
6. <i>Daniel Šimsa</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	3	–	–	–	–	–	5	8	<i>81</i>	29
7.–8. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	3	1	3	4	–	–	–	11	<i>64</i>	27
<i>Tomáš Tintěra</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	–	3	–	4	–	6	16	<i>93</i>	27
9. <i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>96</i>	26
10.–11. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	–	4	–	–	7	<i>85</i>	23
<i>Tomáš Bzdušek</i>	G Piešťany	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>100</i>	23
12. <i>Pavel Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	3	3	–	–	4	–	7	17	<i>95</i>	21
13. <i>Michal Pavelka</i>	G Strakonice	3	0	–	2	3	2	–	10	<i>47</i>	17
14.–15. <i>Jakub Hromádka</i>	G Frýdlant nad Ostravicí	3	4	–	–	3	–	–	10	<i>80</i>	16
<i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>70</i>	16
16. <i>Petr Šácha</i>	G Tachov	3	4	2	1	3	–	–	13	<i>60</i>	15
17. <i>Aleš Pilgr</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	<i>83</i>	10
18. <i>Hana Jirků</i>	G Terezy Novákové, Brno	–	4	–	–	–	3	–	7	<i>58</i>	7
19. <i>Matyáš Řehák</i>	G Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>36</i>	4
20.–21. <i>Pavel Kunšta</i>	G Milevsko	–	1	1	–	–	–	–	2	<i>25</i>	2
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>22</i>	2

Kategorie třetích ročníků

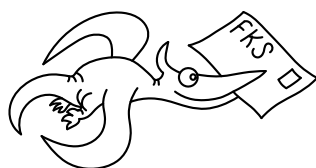
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	5	8	6	34	100	65
1. <i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	3	4	4	4	3	4	6	28	83	54
2. <i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	4	–	4	4	6	5	26	84	48
3. <i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	3	–	4	–	4	–	6	17	84	41
4.–5. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	3	4	1	2	4	–	6	20	78	38
<i>Lukáš Ledvína</i>	PČG Karlovy Vary	4	4	1	–	3	–	6	18	76	38
6. <i>Jakub Michálek</i>		3	4	–	–	–	–	–	7	91	30
7. <i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	3	3	1	2	4	–	–	13	53	23
8. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	5	5	88	22
9. <i>Pavel Trudič</i>	SPŠ Hronov	4	4	–	–	3	–	–	11	84	21
10. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	0	77	17
11. <i>Juraj Hartman</i>	Jiráskovo G Náchod	–	3	–	–	–	1	–	4	64	14
12.–13. <i>Jakub Marian</i>	G Litoměřická Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	52	12
<i>Jan Valášek</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	4	2	3	–	–	–	12	80	12
14.–15. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	73	11
<i>Tomáš Talanda</i>	G Tišnov	4	–	–	–	3	–	–	7	69	11
16. <i>Pavel Motal</i>	SPŠ a SOU Kuřim	–	0	–	–	3	–	1	4	27	9

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	5	8	6	34	100	65
1. <i>Helena Paschkeová</i>	G Terezy Novákové, Brno	3	1	3	1	4	3	–	15	51	30
2. <i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	2	1	–	4	3	–	–	10	51	24
3. <i>Michael Hakl</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	4	2	2	4	3	–	18	51	23
4. <i>Zuzana Chlebounová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	3	4	–	–	4	–	–	11	81	22
5. <i>Martin Výška</i>	G Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	91	21
6. <i>Peter Vanya</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	2	–	–	–	4	–	9	43	20
7. <i>Alžběta Pechová</i>	SPŠS Vsetín	3	2	–	–	4	–	–	9	85	17
8. <i>Dana Suchomelová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	–	4	–	–	7	75	15
9. <i>Katarína Baxová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	–	4	–	–	7	81	13
10. <i>Jana Figulová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	–	3	–	–	5	55	11
11. <i>Lenka Bendová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	3	–	4	–	–	10	83	10
12. <i>Radek Kříček</i>	G Děčín	–	–	–	–	–	–	–	0	45	9
13. <i>Jan Šedek</i>	SPŠ Hronov	–	3	–	–	3	–	–	6	58	7
14. <i>Dmytro Mishchuk</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	22	6
15.–16. <i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	3	–	–	–	–	–	–	3	100	3
<i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	1	–	–	–	–	–	–	1	43	3

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
		3	4	4	4	5	8	6	34	100	65
1. <i>Ján Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	3	1	3	3	3	–	13	69	36
2. <i>Petr Čagaš</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	3	2	2	3	3	–	5	18	54	31
3. <i>Jana Baxová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	3	4	–	–	3	–	–	10	74	23
4. <i>Simona Laňková</i>	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	28	5
5.–6. <i>Lumír Gago</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	67	4
<i>Tomáš Kohlschütter</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	40	4
7. <i>Vojtěch Mrázek</i>	G Milevsko	–	2	–	–	–	–	–	2	50	2

**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.