

Milí řešitelé!

XX. ročník FYKOSu je již u konce. Doufáme, že se vám seminář líbil, že jste si zasoutěžili, ale hlavně se také něco nového naučili. S maturanty se těšíme na shledání v řadách organizátorů, s ostatními pak v příštím ročníku a s těmi úspěšnějšími také na podzimním soustředění.

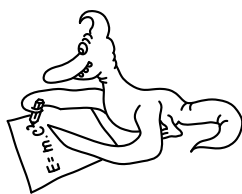
Věříme, že si na konci školního roku či během prázdnin najdete chvíli času na přečtení řešení 5. a 6. série. Na konci brožurky najdete výsledkovou listinu po 5. sérii a konečnou výsledkovou listinu. S letošním seriálem se rozloučíte jeho posledním dílem na straně 27 i poslední bonusovou úlohou. Asi se vám bude stýskat, ale všechno jednou končí.

Vás, kteří se již nedočkavě těšíte na příští XXI. ročník FYKOSu, potěší zadání první série a první díl seriálu na konci brožurky.

Během prázdnin budeme pracovat na ročence XX. ročníku, kde najdete souhrn všech úloh i jejich řešení, seriál a také krátké texty o podzimním a jarním soustředění a o TSAFu. Velké části letošních řešitelů (těm úspěšnějším) zašleme ročenku zdarma koncem letošního roku. Účastníci jarního soustředění se již také brzy dočkají DVD z limitované edice, na kterém budou mimo jiné fotky a video.

Za všechny organizátory vám pěkné prázdniny přeje

Honza Prachař

**Řešení V. série****Úloha V.1 ... smrt klavíristy (3 body; průměr 2,74; řešilo 31 studentů)**

Z okna výškové budovy vypadl klavír i s klavíristou, který po celou dobu pádu hrál zděšené A. O k pater pod tímto oknem odpočíval nebohý umývač oken. Jak velké je k , jestliže poslední, co umývač slyšel, bylo Ais, tedy tón o půltón vyšší? Rychlost zvuku v daném vzduchu je $347 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, výška jednoho patra je 3,1 m. *Morbidní úlohu navrhl Petr Sýkora.*

Tato příhoda jest klasickým příkladem Dopplerova jevu.

Jelikož to poslední, co nebohý umývač oken slyšel, byl zvuk o frekvenci vyšší, než vysílal klavírista svým nástrojem, je zřejmé, že se v ten okamžik klavírista k umývači přibližoval. Fyzikální interpretace této situace je vcelku jednoduchá. Klavírista s klavírem prostě a jednoduše trefí umývače a tím ho zabije.

Ačkoliv existuje spousta různých ladění, budeme uvažovat temperované ladění. V temperovaném ladění zvýšení tónu o půltón odpovídá zvýšení frekvence $\sqrt[12]{2}$ -krát.

Nemalá část řešitelů použila špatný vzorec pro tento případ Dopplerova jevu, ve zkratce si jej proto odvodíme v aproximaci pro rovnoměrný přímočarý pohyb zdroje směrem ke statickému přijímači. Frekvenci, na které zdroj vysílá, označíme f , vzdálenost, jež je mezi zdrojem a přijímačem v čase t , označíme jako $l(t) = l_0 - vt$, kde l_0 je počáteční vzdálenost a v je rychlost zdroje směrem k přijímači. Nyní zavedeme veličinu $T(t)$, která bude vyjadřovat, jak dlouho potrvá cesta signálu vyslaného v čase t od zdroje k přijímači. Zvukový signál se šíří prostředím rychlostí c .

$$T(t) = \frac{l(t)}{c} = \frac{l_0 - vt}{c}. \quad (1)$$

Budeme uvažovat, že signál je harmonický, a tedy vysílaný signál lze popsat jakousi veličinou

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

kde A_0 a φ_0 jsou nějaké konstanty a $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence. Tento signál dorazí k přijímači v čase $t + T(t)$, a tedy, pokud zavedeme označení A' pro signál vnímaný přijímačem, znamená to

$$A'(t + T(t)) = A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (2)$$

Jenže to nám příliš neříká o frekvenci, jakou bude přijímač vnímat. Pro čas přijímače $t' = t + T(t)$ z (1) vyjádříme

$$t = \frac{c}{c-v} \left(t' - \frac{l_0}{c} \right).$$

Nyní dosadíme do rovnice (2)

$$A'(t') = A_0 \cos \left(\frac{c}{c-v} \omega t' - \frac{\omega l_0}{c-v} + \varphi_0 \right) = A_0 \cos(\omega' t' + \varphi'_0).$$

Je tedy vidět, že přijímač bude vnímat harmonický signál o úhlové frekvenci

$$\omega' = \frac{c}{c-v} \omega \quad \Rightarrow \quad \frac{f'}{f} = \frac{c}{c-v}.$$

Tímto jsme odvodili vztah pro Dopplerův jev, kde zdrojem je klavír a přijímačem umývač. Drobné chyby se dopouštíme přiblížením pro rovnoměrný přímočarý pohyb. Nicméně, jelikož $v \ll c$ a zároveň velikost zrychlení není nijak závratná, můžeme si aproximaci dovolit.

Ze vztahu pro Dopplerův jev a znalosti temperovaného ladění víme, že těsně před nárazem klavíru do hlavy umývače platilo pro rychlost klavíru v

$$\sqrt[12]{2} = \frac{c}{c-v}.$$

Dále také víme, že padal-li klavírista s klavírem z výšky h nad umývačem volným pádem, dopadal na umývače rychlostí $v = \sqrt{2hg}$. Výšku h vyjádříme pomocí počtu pater $h = kp$, kde p je výška patra. Docházíme tak k finální rovnici

$$k = \frac{c^2}{2gp} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \right)^2.$$

Po dosazení zadaných hodnot a $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ vychází

$$k \doteq 6,24,$$

ta čtvrtina patra navíc odpovídá tomu, že klavír vypadl z okna a okna mívaly spodní okraj o něco výš, než je podlaha.

To, že příhoda skončila dvojnásob smutně (zemřel i umývač), si uvědomila většina řešitelů. Pokud jste uvažovali jiné (běžné) ladění, nebylo to považováno za chybu.

Petr Sýkora

petr@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.2 ... kapitán Kork opět zasahuje (4 body; průměr 2,53; řešilo 19 studentů)

Deník kapitána Korka: „Hvězdný čas 51824,2. Budoucnost hvězdné flotily je znovu ohrožena. Romulani se nás pokoušejí zničit. Zaútočila na nás jejich nová bitevní loď typu Karusel s laserovým otáčivým dělem. Doktor Spok rozhodl, že není možno se s nimi utkat a musíme zaujmout výhodnější postavení co nejdále od nepřítele. Náš palubní vědecký pracovník bohužel ale zrovna spí a my ho nechceme budit. Jsme zřejmě odsouzeni k záhubě...“

Poradte kapitánovi, jaký manévr má provést, aby unikl jisté zkáze. Hvězdná loď Enterprise má tvar koule o poloměru R , na začátku je ve vzdálenosti r_0 . Dělo Karuselu se otáčí úhlovou rychlostí ω a střílí vždy do míst, kde jeho laserový senzor zjistí přítomnost Enterprise. Jakou nejmenší rychlostí se může Enterprise pohybovat, aby Karuselu ještě unikla?

Úloha z hlavy Jardy Trnky. Volné pokračování úlohy III.4 ze 17. ročníku.

Kapitán zrovna dokončil záznam v deníku, když vtom vešel doktor Spok.

Kapitáne, naše situace je kritická.

Spoku! Přemýšlel jsem nad tím. Nemůžeme jen tak čekat, až nás Romulani odstřelí. Musíme něco vymyslet! Nějaký mazaný manévr.

To je logické. Jenže jaký? To nám počítač nepoví.

Hm... Vzpomínáš si na léta v akademii? To jsme těch akrobatických manévrů propočítali. Ještě teď mám hrůzu z těch integrálů. Pojď, zkusíme to vypočítat.

Fascinující nápad.

* * *

Jak to vyřešili Spok s Korkem? Že se jim to podařilo, není pochyb, ale zkusme se na to podívat také sami, abychom se pocvičili v nelehké kinematice, i když si o matematických a fyzikálních dovednostech absolventů Hvězdné akademie můžeme samozřejmě nechat jen zdát.

Senzory Enterprise naštěstí zachytily Karusel v nemalé vzdálenosti, takže r_0 je mnohem větší než velikost lodi R . Senzory také zjistily, že dělo Karuselu se rychle otáčí a má zároveň laserový senzor otáčející se s dělem. Kdykoliv laserový paprsek dopadne na plochu k němu kolmou, odrazí se a šíří se zpět k detektoru Karuselu. Detektor se neotáčí, ale sbírá signály ze všech směrů a pak poví dělu, kam má střílet. Signál se zpět na Karusel dostane za dobu

$$t_1 = \frac{r_0}{c}.$$

Rozebereme nejdříve poněkud defenzivní taktiku, kdy se Enterprise bude pohybovat po kružnici ve vzdálenosti r_0 od Karuselu. Jakmile Karusel dostane signál, počká, až se dělo natočí do směru, ze kterého signál přišel, a vypálí. Toto natočení trvá dobu

$$t_2 = \frac{2\pi - \{\omega \cdot 2t_1\}}{\omega},$$

kde složené závorky znamenají podstatnou část z úhlu natočení, tedy úhel z intervalu $[0, 2\pi)$. V dalším okamžiku Karusel střílí laserovým dělem a míří na místo, kde byla Enterprise zpozorována. Laserové torpédo dosáhne onoho místa za dobu

$$t_3 = \frac{r_0}{c}.$$

Jak se nejjednodušeji vyhnout zásahu? Stačí, když se Enterprise posune o vzdálenost R . Bude to těžký manévr, ale nic jiného jí nezbyvá. K tomu má k dispozici čas $t_1 + t_2 + t_3$; pokud

se má Enterprise vyhnout této strašlivé zbrani, musí se pohybovat po kružnici kolem Karuselu nejmenší rychlostí

$$v_{\min} = \frac{R}{t_1 + t_2 + t_3} = c \cdot \left[\frac{2r_0}{R} + \frac{c}{\omega R} \cdot \left(2\pi - \left\{ \frac{2\omega r_0}{c} \right\} \right) \right]^{-1}.$$

Enterprise se tedy dostane o malý kousek dál a za chvíli se celá akce opakuje. Pokud ale Enterprise zabere i ve směru od Karuselu (libovolně malou rychlostí), začne se po spirále vzdalovat, čímž se bude zmenšovat i rychlost v_{\min} , jak jistě vidíte. Postupně se tak Enterprise dostane do bezpečné vzdálenosti od Karuselu.

* * *

Připravte se na manévr! Všichni na svá bojová stanoviště! Spoku, zadal jste manévr do počítače?

Manévr zadán a propočten.

Tak tedy vpřed!

A tak byla hvězdná loď Enterprise i s posádkou zase jednou zachráněna. Aby se opět odvážně a neohroženě mohla vydat tam, kam se dosud nikdo nevydal...

Ján Lalinský

jano@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.3 ... odporová řada (4 body; průměr 1,43; řešilo 14 studentů)

Vzijte se do role ředitele firmy, která chce jako první na světě začít vyrábět rezistory pro všeobecné použití. Na základě průzkumu trhu bylo zjištěno, že poptávka po rezistorech je rovnoměrně rozdělena v rozmezí 1Ω – $10 \text{ M}\Omega$. Z technických důvodů však můžete vyrábět pouze konečné množství, řekněme 169, různých rezistorů.

Pokud zákazník požaduje rezistor s hodnotou R_p a vy mu nabídnete rezistor s hodnotou R_n , bude „míra jeho nespokojenosti“ dána vztahem $(1 - R_p/R_n)^2$. Otázkou je, jaké hodnoty odporu musí mít vámi vyráběných 169 rezistorů, aby byla střední nespokojenost všech zákazníků minimální. Pro jednoduchost řekněme, že první a poslední rezistor z vaší nabídky musí mít hodnoty 1Ω a $10 \text{ M}\Omega$.

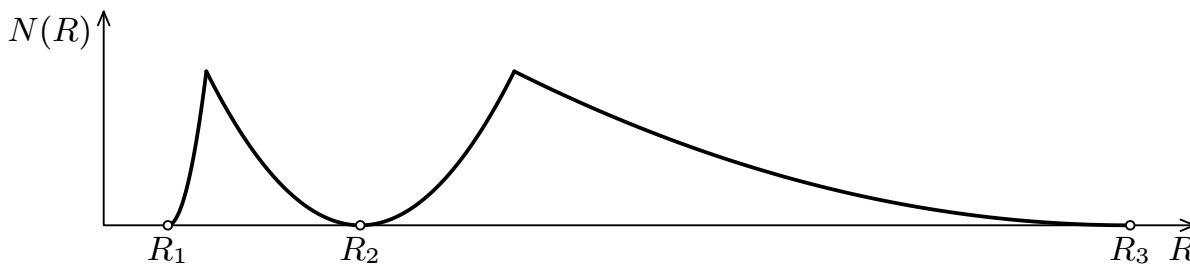
Úlohu zformuloval Pavel Augustinský.

Je smutné, že se nám úlohu nepodařilo zadat tak, aby její výsledek odpovídal naší představě. Správné zadání mělo znít: „Otázkou je, jaké hodnoty odporu musí mít vámi vyráběných 169 rezistorů, aby byla maximální nespokojenost zákazníka minimální.“ Vyřešíme obě úlohy paralelně.

Začneme sestavením funkce nespokojenosti $N(R)$ zákazníka, který požaduje odpor R . Její hodnota pro odpor R bude (v zájmu ředitele firmy) minimum z čísel $\{(1 - R/R_n)^2\}_{n=1}^{169}$, kde R_n jsou hodnoty 169 vyráběných rezistorů. V bodech R_n bude její hodnota nulová. Načrtněme graf této funkce v intervalu (R_1, R_3) do obrázku 1. Graf sestává z kusů parabol majících minimum v bodech R_n . Dvě sousední paraboly na sebe navazují v bodě, kde mají stejnou hodnotu. Mezi body R_1 a R_2 to bude v bodě \mathfrak{R}_1

$$\left(1 - \frac{\mathfrak{R}_1}{R_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_1}{R_2}\right)^2 \Rightarrow \mathfrak{R}_1 = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}},$$

jinými slovy se jedná o harmonický průměr obou hodnot.



Obr. 1. Graf funkce nespokojenosti zákazníka.

Úspěšně jsme vyhodnotili, jaký rezistor z naší sady nabídnout zákazníkovi požadujícímu rezistor R a jaká bude jeho nespokojenost. To všechno udává funkce $N(R)$. Minimalizace střední nespokojenosti zákazníků odpovídá minimalizaci plochy pod grafem funkce $N(R)$; minimalizace maximální nespokojenosti odpovídá minimalizaci maxima funkce $N(R)$. Necht' odpory R_1 a R_3 jsou pevně dané. Pojďme hledat hodnotu odporu R_2 , abychom splnili vyřčené požadavky.

Plocha pod grafem na intervalu (R_1, R_3) je

$$S = \frac{1}{3} \frac{(R_2 - R_1)^3}{(R_2 + R_1)^2} + \frac{1}{3} \frac{(R_3 - R_2)^3}{(R_3 + R_2)^2}.$$

Při změně prostředního odporu o malé dR_2 se plocha změní o (ověřte)

$$dS = \left\{ \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^2 - \left(\frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \right)^2 - \frac{2}{3} \left[\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^3 + \left(\frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \right)^3 \right] \right\} dR_2.$$

Plocha bude minimální, pokud při malé změně dR_2 se plocha téměř nezmění. Výraz ve složené závorce se musí rovnat nule. Rovnici vyřešíme a vyjádříme R_3 pomocí R_1 a R_2 . Výsledný výraz zde nebudeme uvádět, neb je moc dlouhý. Dále budeme raději postupovat numericky. Jde o to najít hodnotu R_2 tak, aby pro $R_1 = 1 \Omega$ bylo $R_{169} = 10 \text{ M}\Omega$. Máme vlastně rekurentní relaci $R_n(R_{n-1}, R_{n-2})$; s její pomocí pro vybrané R_2 kontrolujeme správnost R_{169} . Budeme-li zkoušet dostatečně dlouho, dojdeme k číslu $R_2 \doteq 32,64 \Omega$ (odpory dalších rezistorů jsou uvedeny v tabulce). Zajímavé může být podívat se na závislost R_n na n . Numerickým fitem i analyticky¹ lze ukázat, že závislost je kubická

$$R_n \approx 2,04 \cdot (n - 0,84)^3 \Omega.$$

Funkce nespokojenosti má lokální maxima v bodech \mathfrak{R}_n ; zde nabývá hodnot

$$N(\mathfrak{R}_n) = \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_n}{R_n} \right)^2 = \left(\frac{R_{n+1} - R_n}{R_{n+1} + R_n} \right)^2.$$

Hodnotu nejvyššího maxima můžeme snižovat do té doby, než mají všechna maxima stejnou hodnotu. Tato úvaha nás dovádí k rovnici

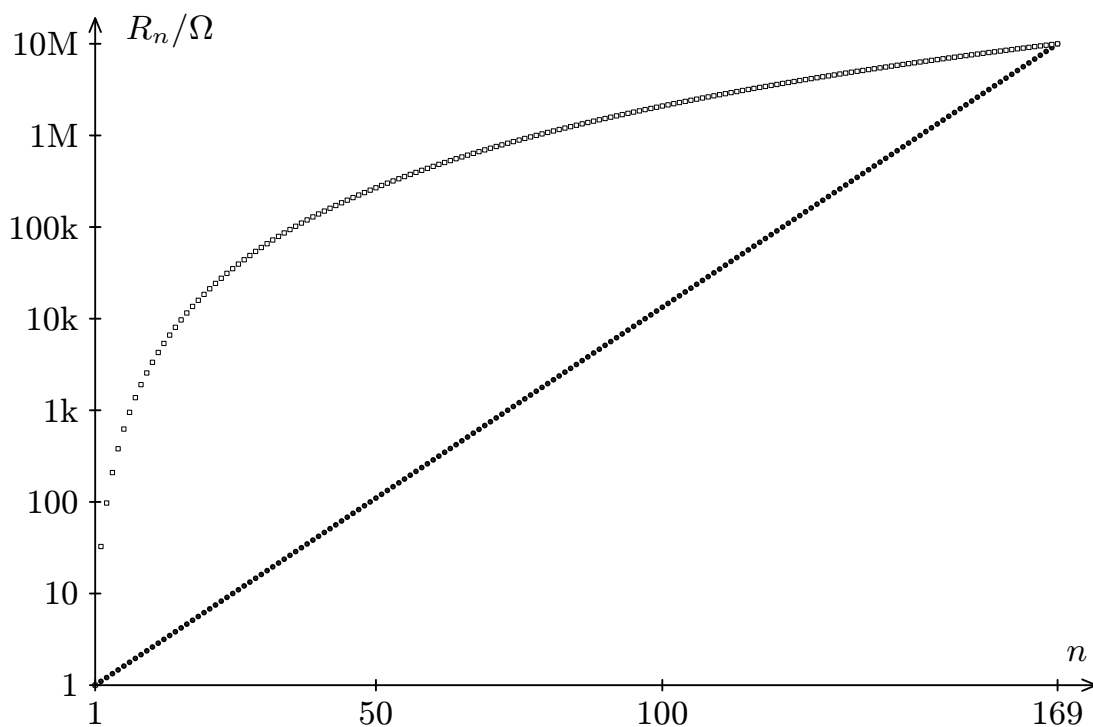
$$\left(\frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \right)^2 = \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^2 \Rightarrow R_3 = \frac{R_2}{R_1} \cdot R_2.$$

¹⁾ Zájemce odkazují na *Martina Výšku*, martin.vyska@centrum.cz, kterého tímto zdravím doufaje, že se mu bude řešení líbit.

Odporů rezistorů tedy tvoří geometrickou posloupnost $R_n = kR_{n-1} = k^{n-1}R_1$. Hodnota odporu roste exponenciálně s n . Zbývá vypočítat k , aby pro $R_1 = 1\ \Omega$ bylo $R_{169} = 10\ \text{M}\Omega$. Tento úkon zvládne každý s pomocí kalkulačky $k = \sqrt[168]{10 \cdot 10^6} \doteq 1,10$. Hodnoty odporů všech rezistorů uvádíme v tabulce.

Vypočtené hodnoty odporu prvních 47 rezistorů. V prvním řádku jsou vždy odpory pro minimální střední nespokojenost, v druhém pro minimální maximální nespokojenost.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R [Ω]	1,0	33	97	210	380	620	950	1,4k	1,9k	2,6k	3,3k	4,3k
R [Ω]	1,0	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,9
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
R [Ω]	5,4k	6,6k	8,1k	9,7k	12k	14k	16k	18k	21k	24k	28k	31k
R [Ω]	3,2	3,5	3,8	4,2	4,6	5,1	5,6	6,2	6,8	7,5	8,3	9,1
n	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
R [Ω]	35k	39k	44k	49k	54k	60k	66k	72k	79k	86k	94k	102k
R [Ω]	10	11	12	13	15	16	18	20	22	24	26	29
n	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	
R [Ω]	111k	120k	129k	139k	149k	160k	172k	184k	197k	210k	220k	...
R [Ω]	32	35	38	42	46	51	56	62	68	75	83	



Obr. 2. Grafické znázornění vypočtených hodnot odporů (puntíky – pro minimalizaci maximální nespokojenosti, čtverečky – pro minimalizaci střední nespokojenosti).

Na závěr si neodpustíme zamýšlenou poznámku k části řešení týkající se opraveného zadání. Elektrotechničtí nadšenci jistě nenechali bez povšimnutí, že námi vypočtené hodnoty odporů přesně odpovídají jmenovitým hodnotám (tj. průmyslově vyráběných) odporů. Není to

náhoda. Technologie výroby rezistorů samozřejmě nemůže zaručit neomezeně přesné hodnoty odporů. Odpory vyráběných rezistorů mají toleranci (např. 20 %, 10 %, 5 % atd.), tzn. když si koupíte rezistor s odporem $10\ \Omega$ a tolerancí 5 %, je jeho odpor nejpravděpodobněji v intervalu $(9,5\ \Omega; 10,5\ \Omega)$. Pro vyráběné rezistory byly zvoleny hodnoty odporů tak, aby relativní rozdíl hodnoty libovolného požadovaného odporu a hodnoty odporu vyráběného rezistoru byl menší než uváděná tolerance. Tak totiž budeme mít jistotu, že v hromádce vyrobených rezistorů najdeme ten, který má požadovaný odpor. Kýženou vlastnost má právě geometrická řada, neb relativní rozdíl po sobě následujících odporů $(R_{n+1} - R_n)/R_n = k - 1$ je konstanta (pro libovolné n). Řady odporů se značí podle toho, kolik odporů připadá na dekádu, E6, E12, E24 atd. (jejich tolerance jsou po řadě 20 %, 10 %, 5 % atd.). Hledáním řady odporů, pro kterou bychom dosáhli minimální maximální nespokojenosti, je v elektrotechnické terminologii hledání řady s minimální maximální tolerancí. Není tedy divu, že výsledky se shodují. Podivné číslo 169 bylo zvoleno, aby na dekádu připadlo 24 odporů, což odpovídá řadě E24.

Ke správnému řešení došel pouze *Martin Výška*, ostatní udělali v komplikovaných úpravách chybu nebo se zalekli složitosti vztahů, které jim vycházely. Několik řešitelů přišlo s nápadem, že řešením by mohly být jmenovité hodnoty odporů (ano, to byla naše představa!). Nemale počet řešitelů navrhl řadu s konstantním rozestupem odporů, takto by ovšem v ředitelském křesle dlouho nevydrželi, neb zákazník požadující odpor $10\ \text{k}\Omega$ by byl obslužen rezistorem s odporem $1\ \Omega$.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.4 ... *exhumace dárečku od Buffala* (4 body; průměr 3,05; řešilo 22 studentů)

Buffalo Bill se už roky snaží polapit Jessieho Jamese, známého banditu. V městečku Clay County mu konečně přišel na stopu. Strhla se přestřelka. Buffalo si všiml sudu plného petroleje na vozíku mezi sebou a Jessiem. „Jak dostat sud k Jessiemu, abych ho mohl zapálit,“ rozmýšlí Bill.

Jessie prostřelil sud v 9/10 výšky a ze sudu začal stříkat petrolej. Buffalo se trefil přesně do poloviny sudu a střílí znovu. Vyřešte, s jakým počátečním zrychlením se bude pohybovat vozíček v závislosti na tom, kam se Bill trefí podruhé. Předpokládejte, že hybnost kulky je nulová, a tření zanedbejte.

Do jaké výšky by se musel Buffalo trefit, aby petrolej stříkal nejdále?

Znovu zadaná úloha V.1 z 18. ročníku. Přílepek od Honzy Hradila.

Nejdříve se zamyslíme nad tím, co se děje, když sud zasáhne jedna střela. Ze sudu o hmotnosti M začne vytékat petrolej o hustotě ρ díky působení hydrostatické síly $F = Sh\rho g$, kde h je výška petroleje nad otvorem a S je plocha otvoru, který vytvoří střela v sudu. Hydrostatická síla petroleje působí také na stěny sudu, výslednice sil působících na opačných stranách sudu je nulová (mají stejnou velikost a opačný směr). Celková hydrostatická síla působící na sud však nulová není, protože síla působící na stěnu naproti otvoru po střele se nevykompenzuje s opačnou silou; ta urychluje vystřikující petrolej. Docházíme k závěru, že na sud působí síla o velikosti F . Snadno tedy určíme zrychlení a sudu způsobené jednou střelou

$$a = \frac{Sh\rho g}{M}.$$

V naší situaci sečteme zrychlení zapříčiněné vystřikujícím petrolejem z děr po všech třech kulkách (za kladný směr uvažujeme směr k Jessiemu)

$$a = \frac{S\rho g}{M} \left(-\frac{H}{10} + \frac{H}{2} + x \right) = \frac{S\rho g (2H/5 + x)}{M},$$

kde H je výška sudu a x je vzdálenost místa, kam se trefí Buffalo podruhé, od horní stěny sudu. Je zřejmé, že se sud bude vždy pohybovat směrem k Jessiemu, neboť $a > 0$.

Ještě zbývá vyřešit druhou otázku, do jaké výšky se má Bill trefit, aby petrolej stříkal nejdále. Celý problém je pouze určení maximální délky vodorovného vrhu. Počáteční rychlost v_0 získáme z Bernoulliho rovnice $v_0 = \sqrt{2gx}$. Pro délku vodorovného vrhu platí

$$L = v_0 t = \sqrt{2gx} \cdot \sqrt{\frac{2(H-x)}{g}} = \sqrt{4x(H-x)}.$$

Vzdálenost L bude nabývat maxima pro $x = H/2$. Má-li petrolej stříkat nejdále, musí se Buffalo trefit do poloviny výšky sudu.

Pozorný řešitel si jistě všiml, že stejná úloha byla zadána již v 18. ročníku (odtud ta exhumace). Úlohu jsme zadali znovu, protože jsme tehdy udělali chybu v jejím řešení. Částice petroleje sice ze sudu vylétávají rychlostí $v_0 = \sqrt{2gx}$, ale ne všechny se pohybují ve směru kolmém na stěnu sudu. Z tohoto důvodu je hybnost vyteklého petroleje menší (poloviční), než jsme tehdy uvedli. Ze stejného důvodu se průřez proudu vystřikujícího petroleje zmenší na polovinu.

Letos úlohu správným způsobem řešili pouze dva řešitelé a zcela správně ji vyřešil *Ján Bogár*. Jen *Helena Paschkeová* upozornila, že se sud ve skutečnosti pohybovat nebude, protože síla, která sud urychluje, nepřekoná statické tření.

Zdeněk Kučka

zdenek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.P ... co je to za okna? (3 body; průměr 1,63; řešilo 19 studentů)

Nedávno si nechal jeden z organizátorů doma vyměnit okna. Místo starých dřevěných přišla nová plastová s dvojitými skly. Okna se dodávají v několika variantách podle toho, jestli je prostor mezi skly evakuován anebo naplněn některým ze vzácných plynů. Navrhněte způsob, jak zjistit, kterou variantu organizátorovi dodali, ovšem bez trvalých následků na oknech.

Problém ze života Michaela Komma.

Hned na začátku bychom rádi uvedli, že vakuová okna se pravděpodobně průmyslově vůbec nevyrobějí, protože samotné sklo rozumné tloušťky by nemohlo odolat atmosférickému tlaku (101 kPa odpovídá zatížení 10 t na 1 m² skla). Evakuovaná okna by musela mít zesílené sklo a nějaké vyztužení mezi skly. Místo toho se prostor mezi skly vyplňuje vzácným plynem (příp. trochu zředěným, nejčastěji argonem) pro jeho dobré tepelně-izolační vlastnosti.

Kostru následujícího řešení sestavili organizátoři FYKOSu na jedné ze svých schůzek. Víc hlav víc ví. Vymysleli jsme celkem šest metod, jak identifikovat plyn mezi skly v oknech. Postupy uvádíme v pořadí podle jednoduchosti a reprodukovatelnosti získaných výsledků.

Povězme, že myšlenka plyn mezi skly nejdříve zkapalnit (ba dokonce nechat ztuhnout) není rozhodně skvělá. Vzácné plyny mají velice nízké teploty varu. Tento fakt je umocněn tím, že plyn mezi skly může být zředěný, což působí další pokles teploty varu. Tím pádem nápad plyn zkapalňovat hodnotíme jako technicky neproveditelný (nemluvě o tom, že okno by pravděpodobně utrpělo trvalé následky).

Vysokofrekvenční elektrický výboj

Nadějný nápad se zdá být umístit okno do vysokofrekvenčního elektrického pole – napětí aspoň kilovolt, frekvence řádově 10 MHz. Vysokofrekvenční generátor se dá vymontovat z mikrovlnné trouby. Pokud je mezi okny zředěný plyn, mohl by za příznivých podmínek zažehnout doutnavý výboj. Je potřeba vyzkoušet různé polohy elektrod a ladit napětí, dokud nedojde k průrazu. Výhoda vysokofrekvenčního výboje je ta, že na rozdíl od stejnosměrného výboje nevyžaduje vodivé elektrody, může tedy vzniknout v plynu uvnitř uzavřené nádoby s elektrodami vně.

Zapálí-li se doutnavý výboj, můžeme jásat. Po změření emisního spektra výboje by identifikace prvku neměla být problém.

Identifikace radioizotopu

Další z možností je zjistit přítomnost nějakého radioizotopu. Nejvíce výhodná by byla existence izotopu, který by při rozpadu emitoval gama kvantum. Alfa a beta částice se absorbují ve skle, jejich emisi v plynu mezi skly tedy není možné evidovat. Energii gama kvanta lze změřit dost přesně (scintilační detektor a fotonásobič) a následná identifikace izotopu je snadná. Situace mezi přírodními izotopy však není růžová. Helium a neon mají pouze stabilní izotopy. Trojice argon, krypton, xenon sice radioaktivní izotopy má, avšak jediný ^{81}Kr podléhá gama rozpadu (0,281 MeV) s poločasem rozpadu 229 tisíc let. Tento izotop se navíc vyskytuje ve stopových množstvích, neboť není přírodní, nýbrž vzniká v atmosférických sprškách.

Musíme si proto pomoci sami. Patřičné okno s sebou vezmeme na návštěvu reaktoru či synchrotronu a necháme ho vystavit neutronovému či synchrotronovému záření. Nestabilních izotopů si takto vyrobíme podle libosti. Pak již stačí zaznamenat gama foton vzniklý přechodem některého jádra vzácného plynu z excitovaného stavu a jsme v cíli.

Měření rychlosti zvuku

Spíše diskutabilní metodou je měření rychlosti zvuku v plynu v závislosti na teplotě. Nejdříve zodpovíme otázku, jak měřit rychlost zvuku. Okno položíme a skleněnou desku posypeme nějakým práškem (pilinami). Reproductorem budeme vydávat zvuk o známé frekvenci f , kterou budeme měnit, dokud nezačnou skleněné desky rezonovat. Z uspořádání pilin na skle odečteme vlnovou délku λ a ze vztahu $v = f\lambda$ určíme rychlost zvuku. Rozlišit, kdy rezonuje pouze sklo a kdy vzduch mezi skly, by neměl být velký problém, neb rychlost zvuku ve skle je o řád vyšší, než bychom čekali v plynu. Zásadní je ovšem otázka, zda je možné, aby zvuk v řídkém plynu rezonoval tak silně, aby rozkmital i skla.

Snad lepší postup by byl digitálně zaznamenat zvuk vzniknuvší klepnutím na okenní tabuli a následně ve Fourierově transformaci identifikovat pík odpovídající stojatému zvukovému vlnění v plynu. Příčný rozměr okna udává vlnovou délku a poloha píku frekvenci.

Předpokládejme, že se nám podaří naměřit závislost rychlosti zvuku na teplotě $v(T)$. Pro ideální plyn platí, že rychlost zvuku je úměrná odmocnině poměru tlaku a hustoty, přesněji $v = \sqrt{\gamma p/\rho}$, kde γ je Poissonova konstanta. Stejný poměr vystupuje ve stavové rovnici ideálního plynu $p/\rho = RT/M_m$, kde M_m je molární hmotnost plynu. Závislost v^2 na T je tedy lineární a směrnice této přímky je rovna $\gamma R/M_m$. Určíme-li tuto hodnotu, budeme již schopni vydedukovat, jaký plyn máme v okně.

Nukleární magnetická rezonance

Pokud by součástí dodávky oken bylo i okénko menších rozměrů (třeba na záchod), mohli bychom jej vzít do nemocnice na nukleární magnetickou rezonanci. Zkrátka to okno se musí vejít do mašiny, kde měří NMR na pacientech.

Okno umístíme do statického magnetického pole a frekvenci budícího radiofrekvenčního pole naladíme tak, aby rezonoval precesní pohyb jader některého ze vzácných prvků. Potíž spočívá v tom, že jádra, na kterých chceme měřit, musí mít nenulový magnetický moment (jinak by na ně magnetické pole nemělo žádný vliv). Ze vzácných plynů nemá pouze argon žádný přírodní izotop s nenulovým jaderným magnetickým momentem. Ostatní jsou uvedeny v následující tabulce, kde pro srovnání najdete i izotopy využívané pro NMR v medicíně (H, C, N).

Magnetické momenty jader izotopů vzácných plynů, jejich zastoupení v přírodě a citlivost při měření NMR. Srovnání s izotopy používanými v medicíně.

Izotop	Spin	Magnetický moment [μ_N]	Rel. zastoupení v přírodě [%]	Rel. citlivost
^1H	1/2	2,79	99,98	1
^{13}C	1/2	0,70	1,11	$0,18 \cdot 10^{-3}$
^{14}N	1	0,40	99,63	$2,94 \cdot 10^{-3}$
^3He	1/2	2,13	0,00014	$0,0006 \cdot 10^{-3}$
^{21}Ne	3/2	-0,66	0,27	$0,036 \cdot 10^{-3}$
^{83}Kr	9/2	-0,97	11,5	$4,8 \cdot 10^{-3}$
^{129}Xe	1/2	0,78	26,4	$5,8 \cdot 10^{-3}$
^{131}Xe	3/2	0,69	21,2	$3,2 \cdot 10^{-3}$

V posledním sloupci tabulky je citlivost NMR při měření na daném izotopu. Suverénně nejcitlivější je měření na vodíku (má velký magnetický moment), měřitelná spektra bude mít i krypton, xenon a snad i neon. Silně pochybujeme, že NMR půjde naměřit na jádrech hélia, zastoupení izotopu ^3He je příliš nepatrné. Vyhodnocením spekter NMR pro všechny rezonanční frekvence jader vzácných plynů tedy identifikujeme všechny vzácné plyny krom hélia a argonu.

Optické (UV) absorpční spektrum

Fotony s frekvencí optického a UV záření jsou atomy absorbovány při přechodech elektronů v atomových obalech. Na první pohled snadné by mělo být změření optického (a případně UV) absorpčního spektra plynu. Otázkou ovšem zůstává, zda by absorpce na zředěném plynu byla měřitelná.

Infračervené absorpční spektrum

Jako slibná metoda se nabízí infračervená spektroskopie. Rotační a vibrační pohyb molekul je kvantován a energetická škála takových pohybů odpovídá infračervené části spektra. V případě vzácných plynů však narazíme na podstatný zádrhel. Atomy vzácných plynů jak známo netvoří molekuly, plyn je tvořen jen samotnými atomy. Atom sám o sobě nemůže kmitat ani rotovat, a tak nenaměříme ani žádné spektrum.

Řešitelé se většinou zaměřovali na rozlišení mezi evakuovaným oknem a oknem vyplněným vzácným plynem, a to pomocí nějakých experimentů se zvukem (ten se jak známo nešíří vakuem). Často se objevovaly pravděpodobně neúčinné experimenty založené na měření indexu lomu, tepelné vodivosti. Jen dvě řešitelky (obě Terezy) trefně podotkly, že okno s evakuovaným prostorem mezi skly je blbost.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V . E ... levotočivý svět (8 bodů; průměr 6,36; řešilo 14 studentů)

Změřte optickou aktivitu roztoku glukózy v závislosti na jeho koncentraci. Optická aktivita je stáčení roviny lineárně polarizovaného světla při průchodu danou látkou. Úhel otočení je přímo úměrný délce dráhy, kterou paprsek v látce urazil, a závisí také na vlnové délce světla. Pokuste se zjistit/vymyslet/vzpomenout, čím je optická aktivita na molekulární úrovni způsobena.

Měření optické aktivity se používá k zjištění koncentrace cukru v roztocích. Je tato metoda spolehlivá? Má každý cukr stejnou optickou aktivitu?

Úloha napadla Honzu Prachaře při čtení Feynmanových přednášek z fyziky.

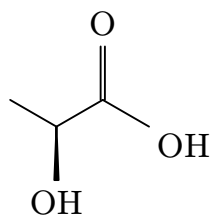
Teorie

Izomery jsou látky, které mají stejný molekulární vzorec, ale mají různé rozmístění molekul v prostoru. Izomerů je mnoho druhů a chemici je třídí do všemožných kategorií. Nás ovšem zajímají pouze ty izomery, které stáčí rovinu polarizace lineárně polarizovaného světla. Látky s touto vlastností se nazývají optické izomery nebo *enantiomery*. Vyznačují se tím, že některé z jejich konformací² jsou navzájem zrcadlovými obrazy. To znamená, že se k sobě mají jako pravá a levá ruka a bez přeuspořádání vazeb (trhání prstů) je nelze přinutit překrýt se.

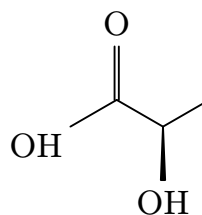
Na střední škole se obvykle věc značně zjednodušuje a tvrdí se, že každá molekula obsahující tzv. chirální uhlík je optický izomer. Uhlíku se říká chirální, když má na každé z vazeb jiný atom. To není úplně pravda. Existuje řada sloučenin, které jsou chirální a asymetrický uhlík neobsahují a na druhé straně existuje řada sloučenin, které asymetrický uhlík mají a přesto chirální nejsou.

Jak tedy poznáme chirální a achirální molekulu? Pro naše účely postačí, že chirální sloučenina nemá rovinu ani střed symetrie. Toto platí pro libovolnou konformaci zkoumané sloučeniny. Stačí tedy vyšetřit, nejlépe na modelu dané molekuly, přítomnost těchto dvou jednoduchých prvků symetrie a následně lze obvykle snadno rozhodnout o chiralitě dané sloučeniny.

Příklad chirální sloučeniny je na obrázku. Používáme dohodnutý způsob zápisu prostorové molekuly. Vazby kreslené plnou čarou jsou v rovině papíru, vazby rozšiřující se (plné klínky) vystupují před papír a vazby čárkované (šrafované klínky) směřují za papír. Neoznačené vrcholy značí uhlíky s příslušným počtem vodíků. Všimněme si, že oba optické izomery se k sobě mají skutečně jako levá a pravá ruka. Mají stejné fyzikální vlastnosti, liší se pouze v tom, že každý



Obr. 3.
l-kyselina
mléčná



Obr. 4.
d-kyselina
mléčná

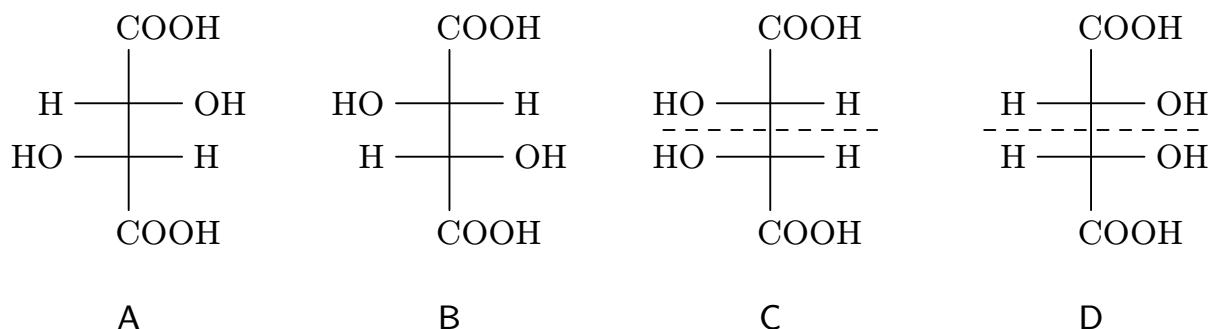
otáčí rovinu polarizovaného světla o stejný úhel, ale v opačném smyslu. Jejich směs v poměru 1 : 1, která je opticky neaktivní, se nazývá racemát. Ten má často odlišné fyzikální vlastnosti od čistých enantiomerů.

Vyjadřování konfigurace pomocí prostorových vzorců je pracné a u složitějších molekul může být i nepřehledné, proto bylo nutné najít způsob, jak zapsat konfiguraci dvourozměrně.

²) Konformace přeloženo z chemičtiny znamená prostorové uspořádání.

Způsob převedení trojrozměrného vzorce do roviny (a naopak) navrhl německý chemik Emil Fischer (1852–1919), zakladatel moderní chemie sacharidů. Princip zápisu tady nebudeme zbytečně popisovat. Lze ho najít v každé rozumné učebnici organické chemie.

Se zvyšujícím se počtem asymetrických atomů uhlíku se samozřejmě zvyšuje i počet stereoizomerů. Obecně sloučenina, která má ve své molekule n center chiralidy, může existovat ve 2^n konformacích. Ne všechny tyto prostorové izomery jsou opticky aktivní. Neaktivní konformace se nazývají mezoforma. Příkladem budiž konformace kyseliny vinné znázorněné na obrázku 5 pomocí Fischerova schématu. Struktury A a B představují dvojici enantiomerů, ale struk-



Obr. 5. Fischerovo schéma konformací kyseliny 2,3-dihydroxybutandiové (vinné).

туры C a D, přestože jsou navzájem zrcadlovými obrazy, enantiomery nejsou. Ve skutečnosti jde o stejnou molekulu jinak umístěnou v prostoru (pootočením vzorce C, resp. D o 180° získáme strukturu totožnou s jejím zrcadlovým obrazem). Takovéto sloučeniny, přestože obsahují ve své molekule centra chiralidy, nejsou opticky aktivní. Uspořádání C a D je tedy mezoforma.

Míra stočení roviny polarizace se řídí Biotovými vztahy:

1. Stočení je úměrné tloušťce prošlé vrstvy.
2. Stočení ve stejné pravotočivé a levotočivé látce se liší jen znaménkem.
3. Stočení způsobené několika vrstvami se algebraicky sčítá.
4. Stáčivost klesá s rostoucí vlnovou délkou světla.

Z posledního Biotova zákona plyne, že se bílé světlo průchodem opticky aktivní látkou rozkládá na barevné spektrum. Tomuto jevu se říká rotační disperze.

Každou opticky aktivní látku charakterizuje konstanta – *specifická otáčivost*. Pro roztoky aktivní látky definujeme specifickou otáčivost jako úhel, o který se otočí rovina polarizovaného světla při jednotkové tloušťce 1 dm a jednotkové koncentraci 1 g/ml. Udává se v kruhových stupních. Znaménko specifické otáčivosti značí, na kterou stranu se bude otáčet rovina polarizace. Z pohledu proti směru šíření světla mají enantiomery, které stáčejí světlo ve směru hodinových ručiček, znaménko kladné a označují se jako +formy. Enantiomer stáčejí světlo na opačnou stranu je –forma.³

Fyzikální princip je zhruba takovýto. Představte si molekulu ve tvaru spirály postavenou na výšku, ke které přichází světlo z levé strany. Tvar spirály není nutný ke vzniku optické aktivity, nicméně se na něm velmi jednoduše dá nastínit podstata věci. Světlo lineárně polarizované ve směru osy spirály procházející kolem molekuly rozkmitá elektrony ve směru své polarizace. Tím vznikne v molekule indukovaný střídavý proud. O střídavém proudu je známo, že generuje elektromagnetické vlnění. Indukovaný proud nemá směr přesně stejný jako vlnění, které jej

³⁾ Z tohoto odstavce je jasně patrné, jak to dopadá, když se ve fyzikálních vztazích dlabou chemici. Všechno zkazí. Místo radiánů používají stupně, místo kilogramů gramy, místo metrů decimetry.

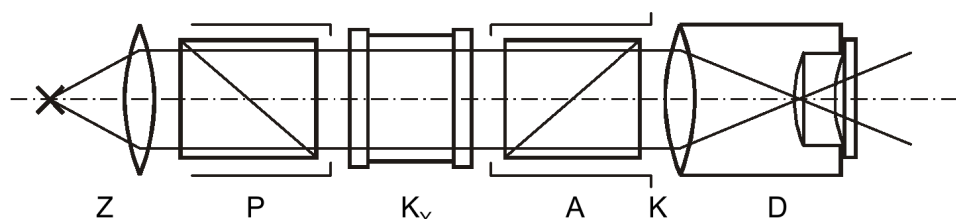
vytvořilo. Elektrony jsou v molekule nuceny pohybovat se ve směru spirály, takže kmitají i ve směru kolmém na směr polarizace příchozí vlny. Takto vytvořená složka proudu by neměla vyvolat žádné záření, jelikož účinky se odečítají se stejně velkým proudem opačné fáze, který vznikne na protější straně spirály. To není úplně pravda, jelikož vlna vygenerovaná proudem vlevo se šíří konečnou rychlostí. Takže v době, kdy se setkává a skládá s vlnou vytvořenou vpravo, je rozdíl fází o chlup větší než π . Velikost chlupu závisí na rychlosti světla a rozměrech spirály. Tak se k původní vlně přidala ještě malilinkatá složka, která kmitá ve směru na ni kolmém, což znamená stočení roviny polarizace.

Biotovy zákony jsou zřejmým a poměrně jednoduchým důsledkem předchozího odstavce. Nejzajímavější případ je racemát. To se + a - molekuly perou o to, na kterou stranu se světlo otočí. Výsledkem je remíza a světlo zůstane tak, jak bylo, jenom má trochu zamotanou hlavu. Záření s různými energiemi indukuje různě velké proudy a tím pádem se i různě stáčí. Přičemž záření s vyšší frekvencí vytváří větší proud. Z toho důvodu se dá pozorovat disperze. Výše popsany efekt působí i na nepolarizované světlo. Nicméně u něj to není tak jednoduše pozorovatelné. Dalším zajímavým faktem je, že pokud pošlete světlo z opačné strany, v našem případě zprava, stočí se rovina polarizace ve stejném směru, jako když světlo přijde zleva.

Pozoruhodné jsou efekty cukrů v biochemii. Ukazuje se, že živé organismy jsou uzpůsobeny výhradně k trávení pravotočivých sacharidů. Když předhodíte bandě hladových bakterií racemát nějakého cukru, stráví z něj pouze pravotočivou polovinu. Pak se sežerou navzájem a poslední nakonec umře hlady, přestože se doslova topí v potravě. Z fyzikálního a chemického hlediska jsou + a - formy cukrů zcela ekvivalentní, avšak příroda je v tomto směru vybíravá a rostliny tvoří pouze pravotočivé formy cukrů, zatímco chemickou syntézou vzniká racemát.

Měření

Specifickou otáčivost zjišťujeme na přístrojích zvaných polarimetry. Nejjednodušší polarimetr tvoří polarizátor, který mění přirozené (nepolarizované) světlo na lineárně polarizované, a analyzátor, kterým zjišťujeme orientaci polarizace po průchodu zkoumanou látkou. Polarizátor se dá realizovat mnoha způsoby. V přístrojích se používá chytře vybroušený hranol z islandského vápence. Mezi polarizátor a analyzátor se vloží roztok nality v kyvetě. Analyzátor není nic jiného než polaroidová fólie se stupnicí okolo. Na stupnici se odečítají úhly, o které se stočila rovina polarizace.



Obr. 6. Schéma polarimetru, Z – zdroj světla, P – polarizátor, K_v – kyveta, A – analyzátor, K – kukátko, D – dalekohled.

V domácích podmínkách je nejjednodušší metodou, jak lineárně polarizovat světlo, odraz. Pokud světlo dopadá na sklo pod určitým úhlem, je odražený paprsek úplně polarizovaný. Tento úhel se nazývá Brewsterův a vypočítá se jako $\arctg n_1/n_2$, kde n_1 a n_2 jsou indexy lomu prostředí, ze kterého paprsek přichází a do kterého jde.

V polních podmínkách je místo kyvety potřeba sehnat nádobu, která má dvě rovnoběžné stěny, přes něž je vidět skrz. Koncentrace roztoků se nejsnáze mění ředěním. Na začátku si připravíme známý objem roztoku o známé koncentraci. Potom zředěním vodou o stejném objemu získáme roztok s poloviční koncentrací.

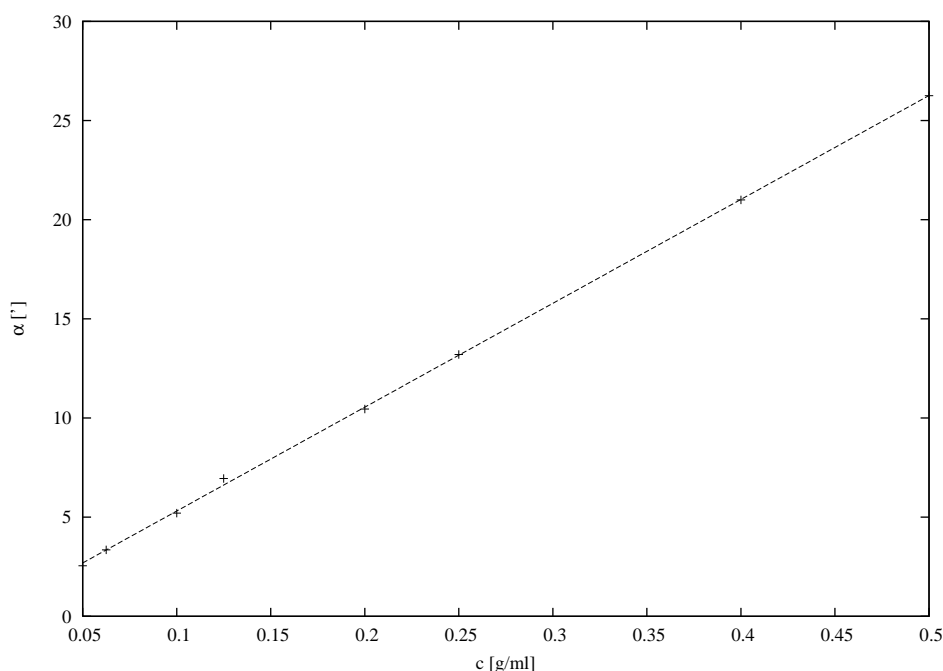
Jako analyzátor se dá použít polarizační filtr do fotoaparátu nebo obyčejný kousek polaroidu. Polaroid má tu užitečnou vlastnost, že propouští světlo polarizované podél osy polaroidu, zatímco světlo polarizované ve směru kolmém silně absorbuje. Posvítíme-li na polaroid normálním nepolarizovaným světlem, projde jím pouze ta část nepolarizovaného svazku, která kmitá ve směru osy polaroidu. Takže propuštěné světlo je lineárně polarizované. Tato vlastnost se hodí k zjišťování, zda je nějaký svazek paprsků polarizovaný. V případě, že ano, je možné určit směr polarizace. To je přesně to, co potřebujeme v analyzátoru. Prostým měřením úhlu otočení polaroidu můžeme zjistit míru stočení světla po průchodu roztokem.

Výsledky

Na závěr uvádím hodnoty stočení roviny lineárně polarizovaného světla při průchodu roztokem glukózy za teploty 20,5 °C v závislosti na koncentraci. K měření byla použita sodíková výbojka a maminčin polarimetr. Konstrukce polarimetru je trochu odlišná od té popsané výše, jako analyzátor se používá otočný hranol. Délka kyvety je standardní 1 dm.

Změřené hodnoty stočení v závislosti na koncentraci.

α [°]	2,55	3,35	5,20	6,95	10,45	13,20	21,00	26,25
c [g/ml]	0,05	0,0625	0,1	0,125	0,2	0,25	0,4	0,5



Obr. 7. Změřené hodnoty stočení v závislosti na koncentraci, lineární regrese.

Naše měření potvrdila teoretický předpoklad, že otáčivost glukózy závisí přímo úměrně na koncentraci (viz graf na obr. 7). Lineární regresí tedy vyjde specifická otáčivost glukózy

$$\alpha = (52,4 \pm 0,4)^\circ \text{ ml} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{dm}^{-1}.$$

Vojta Molda

vojta@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V . S ... spin-orbitální interakce (6 bodů; průměr 5,40; řešilo 5 studentů)

Elektron je částice se spinem $\frac{1}{2}$ popsaným operátorem $\hat{\mathbf{S}}$. Kromě spinu však může mít i orbitální moment hybnosti popsaný operátorem $\hat{\mathbf{L}}$ a kvantovým číslem l . Celkový impulsmoment částice je pak definován jako

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{L}}.$$

Předpokládejte, že se elektron nachází v druhém excitovaném stavu ($l = 2$).

- a) Určete možné velikosti celkového impulsmomentu j a kolikrát jsou tyto hodnoty degenerovány, tj. kolik vektorů $|l, l_3\rangle|s, s_3\rangle$ odpovídá danému j .
- b) Projekce na třetí osu jsou $s_3 = \frac{1}{2}$ a $l_3 = -1$. Stanovte, jaký celkový spin j a jeho projekci j_3 na třetí osu můžeme naměřit, a určete příslušné pravděpodobnosti.

Zajímavým jevem je samointerakce elektronu sama se sebou, a to právě prostřednictvím jeho impulsmomentů. Přesně řečeno spin interaguje s orbitálním momentem hybnosti. Tato spin-orbitální interakce je popsána hamiltoniánem

$$\hat{H}_{so} = a(\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}),$$

kde a je konstanta a tečka představuje skalární součin dvou vektorů. V důsledku této interakce se energetické hladiny elektronu rozštěpí v závislosti na jeho spinové konfiguraci.

- c) Pokud je energie elektronu bez spin-orbitální interakce E_0 a orbitální moment hybnosti $l = 2$, určete vzdálenost rozštěpených energetických hladin.
- d) S jakou pravděpodobností tyto energie naměříme pro stav s projekcemi na třetí osu $s_3 = \frac{1}{2}$ a $l_3 = -1$?

Zadal autor seriálu Jarda Trnka.

- a) Pro velikost celkového impulsmomentu máme jen dvě možnosti: $j = \frac{5}{2}$ a $j = \frac{3}{2}$. Degenerace je pak určena počtem stavů $|l, l_3\rangle|s, s_3\rangle$, které tvoří bázi příslušného podprostoru. Pro $j = \frac{5}{2}$ máme

$$\begin{aligned} j_3 = \pm \frac{5}{2} : & \quad |2, \pm 2\rangle|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle & 2 \text{ stavy;} \\ j_3 = \pm \frac{3}{2} : & \quad |2, \pm 1\rangle|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle, \quad |2, \pm 2\rangle|\frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}\rangle & 4 \text{ stavy;} \\ j_3 = \pm \frac{1}{2} : & \quad |2, \pm 1\rangle|\frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}\rangle, \quad |2, 0\rangle|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle & 4 \text{ stavy.} \end{aligned}$$

To dává dohromady celkem 10 různých stavů. Obdobně pro $j = \frac{3}{2}$ dostaneme

$$\begin{aligned} j_3 = \pm \frac{3}{2} : & \quad |2, \pm 2\rangle|\frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}\rangle, \quad |2, \pm 1\rangle|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle & 4 \text{ stavy;} \\ j_3 = \pm \frac{1}{2} : & \quad |2, \pm 1\rangle|\frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}\rangle, \quad |2, \pm 0\rangle|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle & 4 \text{ stavy.} \end{aligned}$$

V tomto případě dostaneme 8 různých stavů. To tedy znamená, že hodnota $j = \frac{5}{2}$ je 10krát degenerovaná, zatímco $j = \frac{3}{2}$ je 8krát degenerovaná.

- b) Velikost projekce celkového impulsmomentu na třetí osu máme pevně danou, $j_3 = l_3 + s_3 = -\frac{1}{2}$. Pomocí mašinérie C-G koeficientů pak dojdeme ke vztahu

$$\begin{aligned} |l=2, l_3=-1\rangle|s=\frac{1}{2}, s_3=\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot |j=\frac{5}{2}, j_3=-\frac{1}{2}, l=2, s=\frac{1}{2}\rangle + \\ &+ \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot |j=\frac{3}{2}, j_3=-\frac{1}{2}, l=2, s=\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Příslušné pravděpodobnosti pro naměření velikosti celkového impulsmomentu jsou $p_{5/2} = 0,4$ a $p_{3/2} = 0,6$.

- c) K určení energií rozštěpených hladin je vhodné vztah pro spin-orbitální interakci vtipně upravit

$$\hat{J}^2 = (\hat{L} + \hat{S})^2 = \hat{L}^2 + 2(\hat{L} \cdot \hat{S}) + \hat{S}^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{L} \cdot \hat{S} = \frac{1}{2}(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2).$$

Odtud je zřejmé, že vlastními stavy poruchy hamiltoniánu \hat{H}_{so} budou právě stavy $|j, j_3, l, s\rangle$. Vlastní hodnoty celkového hamiltoniánu $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{so}}$ pak budou

$$\hat{H}|j, j_3, l, s\rangle = E_0 + \frac{a}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)].$$

Konkrétně pro $l = 2$, $s = \frac{1}{2}$ máme

$$\begin{aligned} \hat{H}|\frac{5}{2}, j_3, 2, \frac{1}{2}\rangle &= (E_0 + a)|\frac{5}{2}, j_3, 2, \frac{1}{2}\rangle, \\ \hat{H}|\frac{3}{2}, j_3, 2, \frac{1}{2}\rangle &= (E_0 - \frac{3}{2}a)|\frac{3}{2}, j_3, 2, \frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

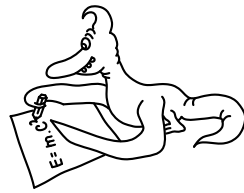
Vzdálenost rozštěpených hladin je $5a/2$.

- d) Pravděpodobnosti naměření těchto energií přesně kopírují výsledky z úlohy b). Velikosti spinu a orbitálního impulsmomentu jsou zadány, záleží pouze na velikosti celkového impulsmomentu. Platí tedy $p(E_0 + a) = 0,4$ a $p(E_0 - 3a/2) = 0,6$.

Na závěr malou poznámku k došlým řešením, kterých věru nebylo mnoho. Ti, kteří vyřešili i tuto úlohu, si zaslouží uznání. Věřím, že počítání C-G koeficientů vás bavilo, a opravdovým fajnšmekrům doporučuji si příklad přepočítat pro částici se spinem 2 a orbitálním impulsmomentem $\frac{7}{2}$:-).

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

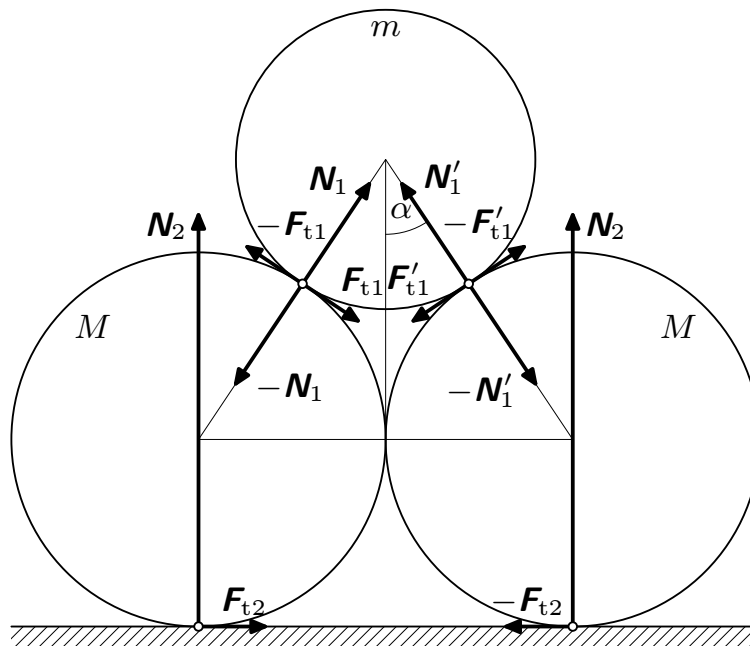


Řešení VI. série

Úloha VI.1 ... tři válce děda vševěda (4 body; průměr 1,90; řešilo 21 studentů)

Zjistěte, za jakých podmínek bude soustava tří válců na obrázku 8 v klidu a nerozkutá-li se. Hustota materiálu válců je ρ , spodní válce mají poloměr R , horní válec má poloměr r . Součinitel tření je mezi všemi povrchy stejný.

Zadal Honza Prachař, aby prověřil vaše znalosti ze statiky soustav tuhých těles.



Obr. 8. Geometrie úlohy a síly působící na válce.

Jaké síly na válce působí? Tíhová síla působí na každý válec, dále na sebe navzájem působí válce normálovými a třecími silami a konečně na válce působí podložka (viz obr. 8, pro lepší přehlednost síly tíhové nejsou zakresleny). Těsně před rozkutálením na sebe spodní válce vůbec působit nebudou. Ze symetrie úlohy plyne $|\mathbf{N}_1| = |\mathbf{N}'_1| \equiv N_1$ a $|\mathbf{F}_{t1}| = |\mathbf{F}'_{t1}| \equiv F_{t1}$. Věty momentové vzhledem k osám válců dávají

$$F_{t1} = F_{t2} \equiv F_t.$$

Postupujme přímočaře a pro každý válec napíšeme rovnováhu sil

$$mg = 2N_1 \cos \alpha + 2F_t \sin \alpha, \quad (3)$$

$$Mg + N_1 \cos \alpha + F_t \sin \alpha = N_2, \quad (4)$$

$$F_t + F_t \cos \alpha = N_1 \sin \alpha, \quad (5)$$

kde m je hmotnost válce horního a M značí hmotnost válců spodních.

Nemají-li válce po sobě sklouznouti, zároveň musí platit

$$F_t \leq fN_1 = \frac{fmg}{2 \cos \alpha} - fF_t \operatorname{tg} \alpha,$$

$$F_t \leq fN_2 = f \left(Mg + \frac{1}{2}mg \right),$$

kde jsme využili rovnic (3) a (4). Dosadivše za F_t z poslední nevyužité rovnice (5), podle které

$$F_t(1 + \cos \alpha) = N_1 \sin \alpha = \frac{1}{2}mg \operatorname{tg} \alpha - F_t \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad F_t = \frac{mg \sin \alpha}{2(1 + \cos \alpha)},$$

podmínky pro součinitel tření získají tvar (zde je potřeba provést několik úprav, ty necháváme na vás)

$$f \geq \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right),$$

$$f \geq \frac{m}{2M + m} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{m}{2M + m} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right).$$

Koukajíce na tyto podmínky, hned pochopíme, že při splnění první nerovnosti je automaticky splněna i druhá. Pročež se zabývejme jen tou první.

Geometrie úlohy říká $\sin \alpha = R/(R + r)$, proto obdržíme

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\frac{R}{R+r}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R+r}\right)^2}} = \frac{R}{R+r + \sqrt{2Rr + r^2}} = 1 + \frac{r}{R} - \sqrt{\frac{2r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

Hledaná podmínka tudíž zní

$$f \geq 1 + \frac{r}{R} - \sqrt{\frac{2r}{R} + \left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

Na závěr si dovolíme krátkou diskusi. Pravou stranu předchozí nerovnosti označíme f_0 .

a) Je-li $r \ll R$, můžeme zanedbat r/R vzhledem k 1 a dostaneme

$$f_0 \approx 1 - \sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

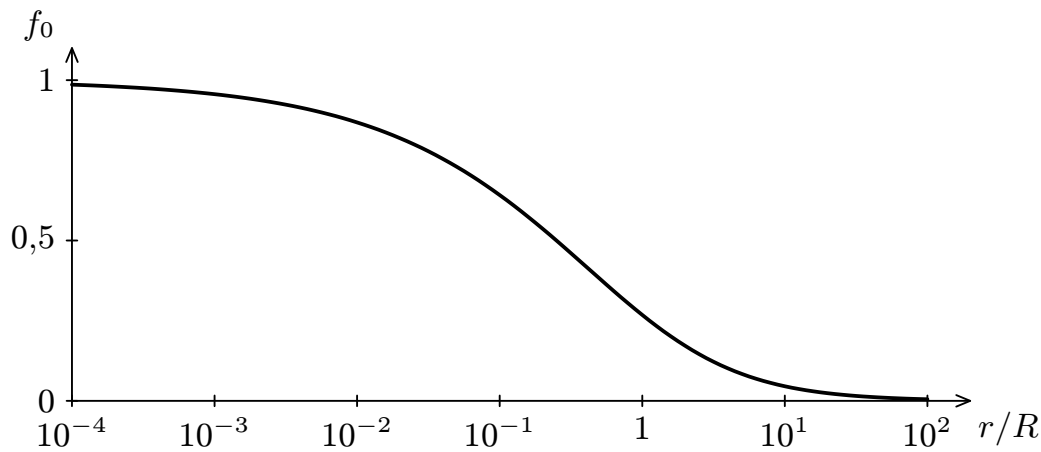
b) Je-li $r = R$, vychází

$$f_0 = 2 - \sqrt{3} \doteq 0,268.$$

c) Je-li $r \gg R$, rozvineme odmocninu do druhého řádu

$$f_0 = 1 + \frac{r}{R} - \frac{r}{R} \sqrt{1 + \frac{2R}{r}} \approx 1 + \frac{r}{R} - \frac{r}{R} \left(1 + \frac{R}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right) = \frac{R}{2r}.$$

Zjišťujeme, že mezní hodnota f_0 součinitele tření s rostoucím poměrem r/R klesá. To zní logicky – horní válec má malinký poloměr, zapadne hluboko do škvíry mezi spodními válci a bude je od sebe odtlačovat, naopak horní válec s velkým poloměrem bude na spodní válce tlačit spíše jen z vrchu. Graf závislosti $f_0(r/R)$ jsme pro vaše potěšení vynesli v obrázku 9.

Obr. 9. Závislost f_0 na poměru r/R .

Doufal jsem, že nám ukážete, že víte jak na to. Ale zklamal jsem se, neb dorazila pouze tři bezezbytku správná řešení (*Dalimil Mazáč, Martin Výška a Hanka Šírová*). Je mrzuté, že jen výjimečný gymnazista umí vyřešit úlohu o statice, což patří k úplně prvním a nejjednodušším věcem vyučovaným ve fyzice.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.2 ... podivná atmosféra (4 body; průměr 3,07; řešilo 15 studentů)

Okolo planety o poloměru R se nachází atmosféra, jejíž index lomu se mění s výškou podle vztahu $n = n_0 - \alpha h$. Zjistěte, v jaké výšce h nad povrchem planety se světelný paprsek vyslaný tečně k povrchu bude pohybovat po kružnici okolo planety.

Úloha neznámého archivního původu.

Úlohu vyřešíme použitím zákona lomu. Atmosféru planety rozdělíme na tenoučké kulové vrstvy vzduchu o tloušťce dh s indexem lomu $n(h) = n_0 - \alpha h$, sousední vrstva má index lomu $n(h + dh) = n_0 - \alpha(h + dh)$. Má-li se paprsek šířit po kružnici, musí dopadat na rozhraní dvou vrstev pod mezním úhlem φ_m . Zákon lomu říká

$$\sin \varphi_m = \frac{n_0 - \alpha(h + dh)}{n_0 - \alpha h}.$$

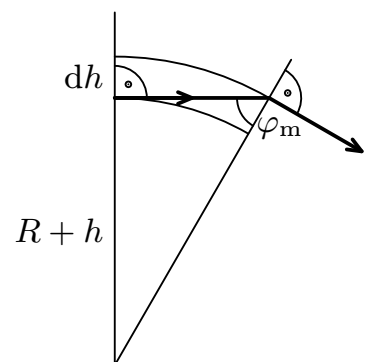
Z geometrie problému (viz obr. 10) plyne

$$\sin \varphi_m = \frac{R + h}{R + h + dh} = \left(1 + \frac{dh}{R + h}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{dh}{R + h},$$

kde jsme využili přibližného vztahu $(1 + dh)^{-1} \approx 1 - dh$, který platí pro malé dh . Porovnáním odvozených vztahů dostaneme

$$h = \frac{n_0}{2\alpha} - \frac{R}{2}.$$

Zbývá dodat, že kruhová orbita existuje pro $n_0/\alpha > R$. Úloha nebyla obtížná a většina řešitelů ji vyřešila správně.



Obr. 10. Lom paprsku

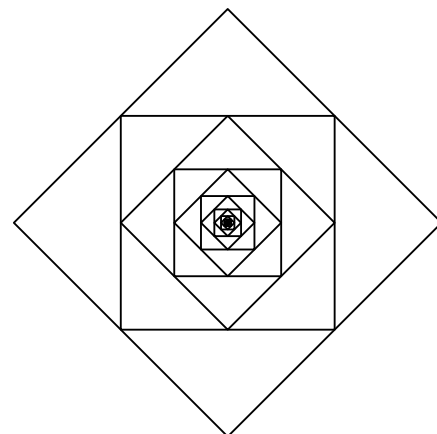
Zdeněk Kučka

zdenek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.3 ... čtverák čtverec (4 body; průměr 2,73; řešilo 15 studentů)

Obvod na obrázku 11 vznikne spojením nekonečně mnoha drátěných čtverců, přičemž každý následující je $\sqrt{2}$ -krát menší. Drát, ze kterého je obvod vyroben, o délce rovné straně největšího čtverce má odpor R . Určete odpor obvodu mezi krajními body vlevo a vpravo.

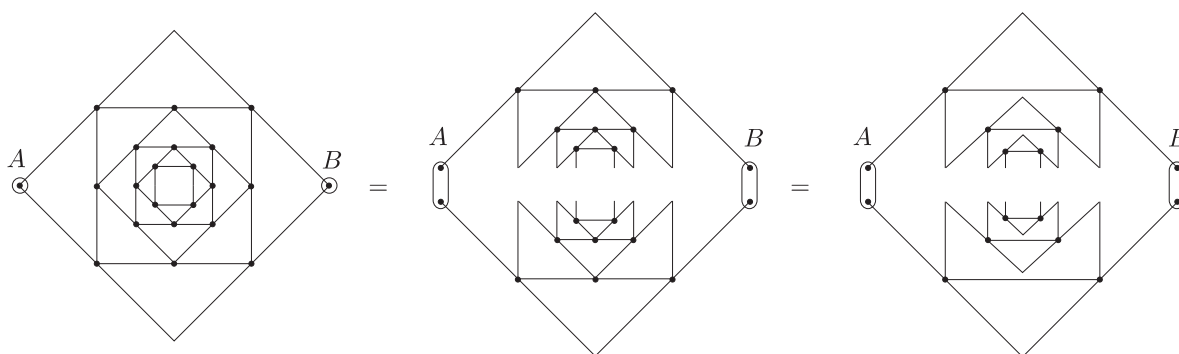
Úlohu vymyslel Marek Pechal.



Obr. 11. Drátěná síť neznámého odporu.

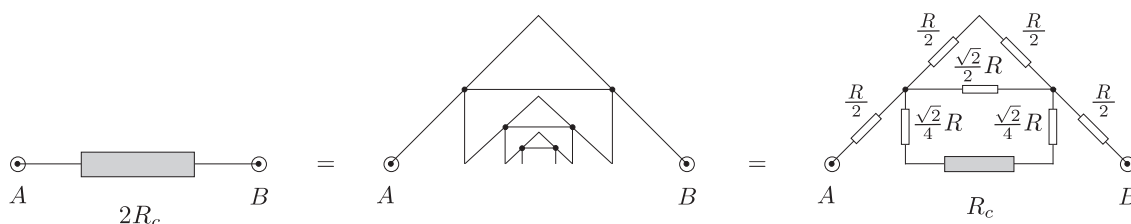
V prvé řadě si uvědomíme několik skutečností plynoucích ze symetrie úlohy. Vedeme-li totiž osu symetrie vstupním a výstupním vrcholem čtverce (označme si je dále A a B), pak kvůli symetrii neteče mezi takto vzniklými půlkami obvodu žádný proud. Nic se tedy nestane, pokud obvod podélně rozdělíme na dva stejné paralelně spojené obvody (jak ukazuje první „rovnost“ ve schématickém obrázku 12).

Dále si všimneme uzlů ležících na ose úsečky AB . Na těch je zřejmě potenciál rovný aritmetickému průměru potenciálů ve vrcholech A a B . Ze symetrie vzhledem k řečené ose také plyne, že napětí na vzájemně si odpovídajících úsecích obvodu jsou stejná, a tedy jsou si rovny i proudy protékající odpovídajícími si větvemi. Proto v uvažovaných uzlech neprochází proud mezi čtverci, které se zde stýkají (jinými slovy – proud, který přiteče po straně většího čtverce, po ní také odteče; stejně tak pro menší čtverec). Oba čtverce můžeme tedy od sebe v těchto uzlech oddělit, aniž by se změnil celkový odpor obvodu. Tuto skutečnost vyjadřuje druhá z „rovností“ v obrázku 12.



Obr. 12. Rozdělení obvodu

Nyní využijeme toho, že takto upravená půlka původního obvodu, která má odpor $2R_c$ (označuje-li R_c hledaný odpor celého čtverce), obsahuje jako svou část dvakrát menší kopii sebe sama samozřejmě o dvakrát menším odporu R_c . Pak mají ovšem obvody znázorněné na obrázku 13 stejný odpor, a to právě $2R_c$.



Obr. 13. Výpočet odporu obvodu

Takto dostaneme následující rovnici

$$2R_c = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}R} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}R + R_c}}.$$

Zavedením označení x pro poměr R_c/R pak získáme

$$\frac{1}{2x - 1} = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + x}$$

a následnými úpravami předchozí rovnice přejde v kvadratickou

$$2(\sqrt{2} + 1)x^2 + 2x - (\sqrt{2} + 2) = 0.$$

Jejími řešeními jsou čísla (použité úpravy vyžadují trochu hraní s rozšiřováním zlomků a odmocninami)

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 2)}}{4(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{3}}{2},$$

z nichž samozřejmě význam řešení zadané úlohy má pouze to se znaménkem plus (jinak by výsledný odpor byl záporný). Dostáváme tak výsledek

$$R_c = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} R.$$

Marek Pechal

marek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.4 ... zákrytová dvojhvězda (4 body; průměr 3,28; řešilo 18 studentů)

Magnituda jisté zákrytové dvojhvězdy se mění se čtyřdenní periodou v této posloupnosti:

vedlejší minimum	$m = 3,5$,
maximum	$m = 3,3$,
hlavní minimum	$m = 4,2$,
maximum	$m = 3,3$.

Větší složka této dvojhvězdy má také vyšší teplotu než její průvodce. Za předpokladu, že Země leží v oběžné rovině dvojhvězdy, vypočítejte magnitudy jednotlivých složek a poměr jejich délkových rozměrů. Převodní vztah mezi magnitudou m hvězdy a osvětlením E , které způsobuje, je

$$m = -2,5 \log (E/E_0),$$

kde E_0 je pevně definovaná hodnota.

Nepoužitá úloha z archivu.

Podívejme se nejprve, jak probíhá dění v soustavě námi zkoumané dvojhvězdy. Tento systém obíhá kolem společného těžiště. Během jednoho oběhu nastanou pro vzdáleného pozorovatele čtyři zajímavé fáze:

- Menší hvězda se nachází před velkou, ale protože je chladnější, vnímáme to jako pokles osvětlení. V tomto okamžiku k nám přichází nejméně světla vůbec. Nastává hlavní minimum.
- Větší z obou hvězd zcela zakryje tu menší. Vidíme tedy pouze světlo z jedné hvězdy, proto lze říci, že magnituda odpovídající vedlejšímu minimu je zároveň magnitudou $m_1 = 3,5$ velké hvězdy.
- Menší hvězda je vedle velké tak, že se z našeho pohledu navzájem nepřekrývají. Tato situace tedy nastává dvakrát během jednoho oběhu. V těchto okamžicích pozorujeme světlo od obou hvězd na největší ploše, proto dochází k minimální magnitudě (tj. maximum jasnosti).

Po této analýze se můžeme směle pustit do dalších výpočtů. Domluvme se, že dále budeme indexovat velkou hvězdu jako 1 a malou pak 2. Pokračujme studiem třetí situace v pořadí. Během ní se osvětlení od obou hvězd prostě sčítá, tedy

$$3,3 = -2,5 \log \left(\frac{E_1 + E_2}{E_0} \right).$$

Kromě toho můžeme určit i osvětlení E_1 velké hvězdy ze vztahu

$$3,5 = -2,5 \log \left(\frac{E_1}{E_0} \right),$$

neboť známe její magnitudu. Z výše uvedených rovnic lze po úpravách vyjádřit osvětlení E_2 menší hvězdy

$$E_1 = 10^{-3,5/2,5} E_0, \quad E_2 = 10^{-3,3/2,5} E_0 - E_1 = E_0 \left(10^{-3,3/2,5} - 10^{-3,5/2,5} \right),$$

pomocí něhož již snadno zjistíme její magnitudu

$$m_2 = -2,5 \log \left(\frac{E_2}{E_0} \right) = -2,5 \log \left(10^{-3,3/2,5} - 10^{-3,5/2,5} \right) \doteq 5,2.$$

Nyní nastal čas, abychom do našeho řešení také zapojili poloměry r_1, r_2 obou hvězd. Využijeme k tomu situaci, kdy se menší ze složek nachází z našeho pohledu před větší hvězdou. Víme, že osvětlení je úměrné velikosti plošného průmětu hvězdy, tedy obsahu kruhu πr^2 . Osvětlení z dvojhvězdy v dané pozici jest

$$E' = E_2 + E_1 \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \right),$$

protože z velké hvězdy vidíme pouze její část. Pro zjednodušení označme $\varrho \equiv r_2/r_1$ hledaný poměr velikostí. Jako vždy platí vzorec ze zadání, tedy

$$4,2 = -2,5 \log \left(\frac{E'}{E_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{E_2 + E_1(1 - \varrho^2)}{E_0} \right).$$

Rovnost stačí odlogaritmovat, dosadit za E_1 a E_2 a dostaneme

$$10^{-4,2/2,5} = \left(10^{-3,3/2,5} - 10^{-3,5/2,5} \right) + 10^{-3,5/2,5} (1 - \varrho^2),$$

odkud již vede přímá cesta k výsledku

$$\varrho = \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{10^{-3,3/2,5} - 10^{-4,2/2,5}}{10^{-3,5/2,5}}} \doteq 0,82.$$

Naše výsledky ještě shrňme do následujícího závěru. Za daných zjednodušujících podmínek je magnituda větší hvězdy 3,5, menší potom 5,2 a poměr jejich poloměrů menší ku větší vychází přibližně 0,82.

Tomáš Jirotko

byrot@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. P ... jak vypadají ufoni? (4 body; průměr 2,64; řešilo 11 studentů)

Zamyslete se nad tím, jestli by nějaké zvíře mohlo teoreticky komunikovat pomocí elektromagnetických vln rádiových frekvencí (10 Hz–100 MHz). Zkuste navrhnout, jak by vypadaly biologické ekvivalenty potřebných elektrických součástek.

Zadal Michael Komm doufaje, že přijdete na něco zajímavého.

Poslední dobou se stále častěji setkáváme s bytostmi schopnými komunikovat na telepatické úrovni. Tato jejich schopnost nás při každém setkání s nimi staví do nevýhodné pozice. Naším cílem bylo objasnit fyzikální podstatu jejich schopností.

Výsledky projektu

Při výkonu vysílače 0,5 W lze dosáhnout vzdálenosti přibližně 3 km. Lidské tělo má jen na ztrátovém teple výkon cca 100 W [1]. Tedy energie pro vysílač máme dost. Už zbývá jenom dokázat potřebný výkon vyzářit ve formě radiofrekvenčního vlnění. O existenci podobného zařízení se vedou i seriózní diskuse. Žralok má orgán zvaný Lorenziniho ampule, který je schopen rozpoznat elektromagnetickou aktivitu okolí (citlivost 5 nV/cm) [2]. Orgán citlivý na elektrické pole má například také ptakopysk, který je s jeho pomocí schopen registrovat pohyb drobných vodních živočichů [3].

Co je vlastně nerv? Nerv je tukem obalená bílkovina zakončená synapsí, kterou se šíří elektrický vzruch. Na synapsi dojde k uvolnění chemikálie (miozinu), který vzruch předá další

synapsi. Právě miozin nahrazují některé drogy. Pro bližší popis viz [4]. Na vyzáření potřebně silné vlny by bylo potřeba nervová vlákna uspořádat do vhodného tvaru a zesílit jimi procházející proud. Uvažujeme-li dipólovou anténu, pak odpovídající velikost antény pro frekvenci 10 Hz je $7,5 \cdot 10^3$ km, ale pro 100 MHz by se jednalo jen o 75 cm. Dosazovali jsme do vztahu

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f},$$

kde l je délka dipólu, λ vlnová délka, c rychlost světla a f je frekvence. Tento výpočet provedla *Helena Paschkeová*. Tělo živočicha však vysoké frekvence neumí generovat, frekvence živočišných procesů dosahují nejvýše 10 kHz (doba, než elektrický impuls projde jednou nervovou buňkou).

Detekce signálu by byla eventuálně možná už na buněčné úrovni, jak nás upozornil *Petr Šedivý*. K této myšlence se přiklání i *Hana Šírová*.

Reference

- [1] <http://www.lowlevel.cz/log/pivot/entry.php?id=77>
- [2] <http://en.wikipedia.org/wiki/Electroreceptor>
- [3] <http://savci.upol.cz/ptakorit.htm>
- [4] <http://www.ereska.cz/rs/tissue.html>

Roman Fiala

roman@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. E ... *slintací úložka* (6 bodů; průměr 4,15; řešilo 13 studentů)

Změřte, jaký maximální podtlak (i přetlak) je člověk schopen vyvinout sáním (nafukováním) ústy. *O ruce vás chtěl připravit Michael Komm.*

Rozepisovat, co je to podtlak nebo přetlak, by asi bylo zbytečné, a proto se u této experimentální úlohy neobjeví teoretická část řešení. Existuje mnoho způsobů, jak lze měřit rozdíl tlaků, tedy přetlak či podtlak. Asi nejméně nápaditou, ale nejpřesnější metodou je použít nějaký laboratorní nebo komerčně vyráběný barometr.

Většina z vás ve svém improvizovaném barometru použila hadici a vodu. Asi nejlepším řešením je z hadice udělat jakousi U trubici a do jednoho jejího konce foukat nebo z něj sát. Z největšího dosaženého rozdílu mezi vrchní a spodní hladinou dle notoricky známého vzorce pro hydrostatický tlak $h\rho g$ snadno vypočítáme rozdíl tlaků mezi oběma ústími trubice. Jenom musíme dát pozor na to, abychom odečítali opravdu rozdíl hladin a ne pouze změnu výšky jedné z hladin, kterou bychom poté museli vynásobit dvěma.

Další vcelku rozumnou metodou za použití hadice a vody je zkoušet, jak vysoko jsme schopni nasát sloupec vody. Zde je třeba měřit výšku a ne délku po hadici, která nemusí být ani vertikální, ani rovná. Obdobně pro přetlak můžeme zkoumat, do jaké hloubky jsme schopni vyfouknout bublinky skrz hadici.

Objevil se i poněkud kuriózní způsob měření tlaku, a to s využitím Bernoulliho rovnice, kdy se měl změřit objem prošlý trubici dané délky za nějaký čas. Nicméně při tomto řešení je nemalý problém změřit právě objem prošlého plynu, nemluvě o tom, že se neměří maximální dosažitelný, ale maximální udržitelný přetlak. Na podobný problém s určením objemu vzduchu narazí pokus o změření množství vzduchu, které si je člověk schopen natlačit do úst, a porovnání s objemem úst.

Co se týče naměřených hodnot, je zřejmé, že je naprosto individuální, jaký přetlak či podtlak je kdo schopen vytvořit. Záleží to na stavbě těla, zdravotním stavu a celkově minulosti daného člověka. Hodnoty naměřené řešiteli se pohybovaly od 5 kPa do 30 kPa pro přetlak a od 5 kPa do 70 kPa pro podtlak. Bohužel spousta řešitelů měřila pouze jeden z údajů, a tak nelze příliš srovnávat, ale zdá se, že většina lidí je schopna vyvinout vyšší podtlak než přetlak. To potvrzuje mé měření komerčním manometrem, kdy jsem dosáhl podtlaku 40 kPa a přetlaku 25 kPa.

Petr Sýkora

petr@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.S ... lineární harmonický oscilátor ve vnějším poli (6 bodů; průměr 6,00; řešili 3 studenti)

Uvažujme lineární harmonický oscilátor s hamiltoniánem

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 \hat{X}^2.$$

a) Určete maticové elementy

$$X_{mn} = \langle m | \hat{X} | n \rangle, \quad P_{mn} = \langle m | \hat{P} | n \rangle,$$

kde $|n\rangle$ (resp. $|m\rangle$) jsou vektory zkonstruované v textu seriálu.

b) Vypočítejte střední hodnotu energie ve stavu $|n\rangle$ a určete, jaká část této energie pochází od kinetického členu $\hat{P}^2/2M$ a jaká od členu potenciální energie $M\omega^2 \hat{X}^2/2$.

Vložme celý systém do slabého homogenního elektrického pole. Interakce se systémem je pak popsána hamiltoniánem

$$\hat{H}' = -F\hat{X},$$

kde F je konstanta a platí $\hat{H}' \ll \hat{H}_0$.

c) Vypočítejte v prvním řádu poruchové teorie opravu k energii n -té hladiny.

d) Řešte tuto úlohu přesně a srovnejte výsledek s poruchovým řešením.

Nápověda: Jak neporušený hamiltonián \hat{H}_0 , tak i celkový hamiltonián $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ jsou translačně invariantní, tj. hodnota energie se nezmění, pokud operátor souřadnic posuneme o konstantní hodnotu $\hat{X} \rightarrow \hat{X} - \xi$.

Zadal autor seriálu Jarda Trnka.

a) Podle seriálu je rozpis operátorů \hat{X} a \hat{P} pomocí kreačních a anihilačních operátorů

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}(a + a^\dagger), \quad \hat{P} = i\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}}(a^\dagger - a).$$

Maticové elementy operátorů potom jsou

$$X_{mn} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} \langle m | a^\dagger + a | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} (\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} + \sqrt{n} \delta_{m,n-1}),$$

$$P_{mn} = i\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}} \langle m | a^\dagger - a | n \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}} (\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} - \sqrt{n} \delta_{m,n-1}).$$

Tento výsledek mimo jiné znamená, že diagonální maticové elementy těchto operátorů jsou vždy nulové,

$$\langle n | \hat{X} | n \rangle = \langle n | \hat{P} | n \rangle = 0.$$

b) Pro střední hodnotu kinetické energie ve stavu $|n\rangle$ dostaneme

$$\langle n | \frac{\hat{P}^2}{2M} | n \rangle = -\frac{\hbar\omega}{4} \langle n | (a^\dagger - a)^2 | n \rangle = -\frac{\hbar\omega}{4} \langle n | a^\dagger a^\dagger + aa | n \rangle + \frac{\hbar\omega}{4} \langle n | a^\dagger a + aa^\dagger | n \rangle.$$

První člen je nulový a druhý se dá pomocí komutační relace $[a, a^\dagger] = 1$ upravit, vyjde tedy

$$\langle n | \frac{\hat{P}^2}{2M} | n \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \langle n | a^\dagger a | n \rangle + \frac{\hbar\omega}{4} \langle n | n \rangle = \frac{n\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Zcela identickým postupem dostaneme

$$\langle n | \frac{1}{2} M \omega^2 \hat{X}^2 | n \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Pro celkovou energii poté platí

$$\langle n | \hat{H}_0 | n \rangle = \langle n | \frac{\hat{P}^2}{2M} | n \rangle + \langle n | \frac{1}{2} M \omega^2 \hat{X}^2 | n \rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

c) Podle seriálu dostáváme opravu k energii v prvním řádu poruchové teorie

$$\Delta E_n = \langle n | \hat{H}' | n \rangle = -F \langle n | \hat{X} | n \rangle.$$

Tento maticový element již známe – je nulový, jak bylo ukázáno v úloze a). Pro první opravu energie tedy platí $\Delta E_n = 0$.

d) Hamiltonián systému je dle zadání

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} M^2 \omega^2 \hat{X}^2 - F \hat{X}.$$

Nápověda říká, že tento hamiltonián je translačně invariantní, tj. při změně $\hat{X} \rightarrow \hat{X} - \xi$ se energetické spektrum nezmění. Udělejme tedy substituci $\hat{X} = \hat{X}' + \xi$,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} M^2 \omega^2 (\hat{X}' + \xi)^2 - F(\hat{X}' + \xi) = \\ &= \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} M^2 \omega^2 \hat{X}'^2 + (M^2 \omega^2 \xi - F) \hat{X}' + \frac{1}{2} M^2 \omega^2 \xi^2 - F\xi. \end{aligned}$$

Konstanta ξ je libovolná, tj. zvolme ji jako $\xi = F/(M^2 \omega^2)$. Hamiltonián nabude tvaru

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} M^2 \omega^2 \hat{X}'^2 - \frac{F^2}{2M^2 \omega^2} = \hat{H}'_0 - \frac{F^2}{2M^2 \omega^2}.$$

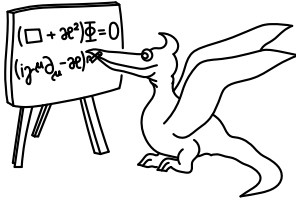
Díky translační invarianci platí

$$\langle n | \hat{H}'_0 | n \rangle = \langle n | \hat{H}_0 | n \rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Vidíme tedy, že při vložení do konstantního vnějšího pole se celé energetické spektrum posune o energii $\Delta E_n = -F^2 / (2M^2\omega^2)$. Ačkoliv první řád poruchové teorie dává nulovou opravu, skutečná změna energie je nenulová. Můžeme tedy říci, že tato změna je efekt vyššího řádu.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 7: Za hranicemi kvantové mechaniky

V posledním díle uděláme rychlý průlet pokročilými partiemi teoretické fyziky, které na kvantovou mechaniku navazují. Nejedná se v žádném případě o nějaký soustředěný výklad, ale spíše o motivační povídání.

Kvantová mechanika vs. speciální teorie relativity

Již při vzniku kvantové mechaniky bylo jasné, že jeden velmi důležitý problém se zamlčuje. Kvantová mechanika totiž v jistém smyslu představuje analogii ke klasické newtonovské fyzice, tedy v jejích základech nejsou zakořeněny principy speciální teorie relativity. Stejně jako v klasické mechanice se i v kvantové mechanice může šířit signál libovolnou rychlostí, což působí nám všem známé problémy. Řešení se snažili najít dva z tehdejších teoretických fyziků – *Oskar Klein* a *Walter Gordon*. Jejich myšlenka byla jednoduchá a přímočará: pro volnou částici známe jak klasickou podobu energie, tak její relativistickou modifikaci. Zkusme tedy tento přechod udělat i na úrovni hamiltoniánu

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} \quad \rightarrow \quad \hat{H} = \sqrt{\hat{P}^2 c^2 + M^2 c^4}.$$

Časová Schrödingerova rovnice pak má nám dobře známou podobu. Nicméně odmocnina v Hamiltoniánu může být nepříjemným problémem, proto bylo nutné celou rovnici „umocnit“⁴, což ve výsledku vedlo v x -reprezentaci na slavnou *Kleinovu-Gordonovu rovnici*

$$\left(\square + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(x) = 0.$$

Operátor čtverečku (d'Alembertův operátor neboli d'Alembertián) se často používá a je definován jako

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta.$$

⁴⁾ Samozřejmě odvození nebylo tak naivní a mělo svá logická opodstatnění.

Kleinova-Gordonova rovnice má však jednu vadu – nespĺňuje principy kvantové mechaniky. Obsahuje totiž druhé časové derivace, tj. při jejím řešení jsou potřeba dvě počáteční podmínky (počáteční stav a jeho časová derivace). To je však v příkrém rozporu s předpokladem, že k popsání vývoje systému potřebujeme znát pouze jeho počáteční stav (tzn. jednu počáteční podmínku).

S řešením tohoto problému přišel jeden z největších fyziků 20. století – *Paul Dirac*. Šikovnou manipulací s Kleinovou-Gordonovou rovnicí dospěl ke slavné Diracově rovnici

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - Mc)\psi(x) = 0,$$

kteřá je již prvního řádu v derivacích. Rozbor této rovnice by zabral více času⁵, nicméně vězte, že $\psi(x)$ tentokrát již nepředstavuje jednu funkci, ale celou čtveřici funkcí. To Dirac vysvětlil tak, že jeho rovnice nepopisuje bezspinovou částici jako Kleinova-Gordonova rovnice, ale částici se spinem 1/2, a to společně i s její antičásticí. To dává dohromady čtyři komponenty $\psi(x)$.

I zde se však objevily problémy, tentokrát však skrytějšího rázu (konkrétně se jednalo o nemožnost zkonstruovat vlastní stavy operátoru polohy). To vše nakonec vedlo k závěru, že kvantová mechanika není slučitelná se speciální relativitou, a k jejímu zavržení jako fundamentální teorie.

Nemusíte ji však oplakávat ani kvůli tomu skákat z mostu, nejedná se totiž o žádnou tragédii. Ukazuje to jen na to, že i kvantová mechanika má své meze platnosti, stejně jako tomu je u klasické newtonovské fyziky.

Kvantová teorie pole

Kompletní propojení kvantové mechaniky a speciální teorie relativity se povedlo až v kvantové teorii pole. Ústředním pojmem je zde *operátor pole*, jenž obsahuje lineární kombinaci příslušných kreačních a anihilačních operátorů částic daných vlastností. Například operátor skalárního pole se dá napsat ve tvaru

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dp}{\sqrt{2E}} \left(e^{-ipx} \hat{a}(p) + e^{ipx} \hat{a}^\dagger(p) \right).$$

Vidíme, že tento operátor obsahuje kreační a anihilační operátory skalárních částic všech hybností. Další pole (vektorové, spinorové, ...) obsahují také všechny kombinace projekce spinu a případné další vlastnosti. Zkrátka, operátor pole obsahuje všechny možnosti pro daný typ částice, které mohou existovat. Takto zkonstruované operátory pole mají vhodné transformační vlastnosti vůči Lorentzově transformaci, což právě ve výsledku zaručuje splnění speciálněrelativistických podmínek.

Zapůsobením skalárního pole na vakuum dostaneme

$$\hat{\varphi}(x)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dp}{\sqrt{2E}} e^{ipx} |p\rangle.$$

⁵⁾ Pro zvědavce můžu alespoň poznamenat, že ∂_μ je vektor derivací

$$\partial_\mu = \left(-\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Symbol γ^μ představuje čtveřici tzv. *Diracových matic*, což jsou matice 4×4 splňující jisté komutační relace.

Z této lineární kombinace vybereme jednu, pokud zprava zapůsobíme konkrétním stavem $|p'\rangle$ skalární částice s hybností p' . Normalizace se zde často volí netradičně, každopádně

$$\langle p' | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle \neq 0.$$

Nenulovost tohoto maticového elementu potvrzuje, že pole $\hat{\varphi}(x)$ skutečně generuje skalární částice.

Stejně jako v kvantové mechanice i zde chceme primárně počítat amplitudy přechodu z počátečního stavu $|\text{in}\rangle$ do koncového stavu $|\text{out}\rangle$. Tato amplituda odpovídá maticovému elementu

$$\langle \text{out} | \hat{S} | \text{in} \rangle \approx \langle \text{out} | \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \hat{\mathcal{H}}(x) \right) | \text{in} \rangle,$$

kde $\hat{\mathcal{H}}(x)$ je hustota hamiltoniánu, $\hat{H}(t) = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}(x)$. Tento vztah by vám měl být částečně povědomý již z normální kvantové mechaniky. Hustota hamiltoniánu $\hat{\mathcal{H}}$ je vytvořená z kvantových polí, které se v teorii vyskytují, a musí splňovat jisté podmínky symetrií. I zde se používají metody poruchové teorie, konkrétně v podobě tzv. *Feynmanových diagramů*.

Standardní model interakcí

Kvantová teorie pole je ideálním teoretickým prostředkem, jak popsat spektrum elementárních částic a jejich vzájemné interakce. Existují čtyři fundamentální interakce – elektromagnetická, silná a slabá jaderná a gravitační. První tři jmenované existují jako konzistentní kvantové teorie pole: pro elektromagnetismus kvantová elektrodynamika (*QED – Quantum electrodynamics*), pro silnou jadernou interakci kvantová chromodynamika (*QCD – Quantum chromodynamics*). Slabou jadernou interakci se podařilo sjednotit s elektromagnetickou ve společnou teorii elektroslabé interakce (*EW – Electroweak interactions*). Existuje spousta modelů, jak spojit všechny tři interakce působící v mikrosvětě v teorii Velkého sjednocení (*GUT – Grand unified theory*), žádná však není experimentálně potvrzena.

A co gravitace?

Poslední interakcí, o které jsme ještě nemluvili, je gravitační. Od dob Einsteina pro ni máme klasickou nekvantovou teorii – obecnou teorii relativity, která velmi dobře popisuje realitu. Přechod k teorii kvantové však skrývá několik potíží.

Dominantní oblast působení je na velkých škálách (hvězdy, černé díry, vesmír jako celek). V mikrosvětě jsou její efekty naprosto nepozorovatelné, proto je těžké zde dělat nějaké experimentální testy. Přesto daleko závažnějším problémem je nalezení samotného modelu kvantové teorie gravitace. Zejména jde o to, že v kvantové teorii pole se pozadí (prostorčas) bere jako konstantní, nehybné, nicméně gravitace (jak již víme od Einsteina) ho zakřivuje. Existuje spousta pokusů, jak tyto problémy nějak řešit či je alespoň obejít – supergravitace, kvantová smyčková gravitace, přesto prozatím bez rozhodujícího úspěchu.

Superstruny

Ještě ambicióznějším projektem je propojení všech čtyř typů interakcí do jedné kompletní teorie, která by popisovala celý vesmír, a to na všech škálách. Vedoucí proud v tomto snažení se koncentruje kolem teorie superstrun (*Superstrings*). Mnoho již bylo v tomto oboru uděláno, ale situace je natolik složitá, že ke konkrétním závěrům se prozatím nedospělo. Teoretičtí fyzikové jsou v pohledu na teorii superstrun rozdělení a často do hry vstupují i emoce a iracionalita.

Prvním hlavním problémem je „přílišná bohatost teorie“. Kromě stavů, jež by se daly identifikovat se známým spektrem částic, obsahuje ještě spoustu dalších, které se v přírodě nerealizují, a zatím neexistuje způsob, jak je z teorie odstranit. Dalším zásadním problémem teorie superstrun je (alespoň prozatím) absence prediktivní síly, tj. v tomto stavu vývoje není schopna dávat nějaké experimentálně měřitelné předpovědi. Poslední vážnou výtkou, kterou odpůrci superstrun zdůrazňují, je přílišná „matematizace“ problému. Složitost problému vyžaduje obtížné matematické konstrukce a lidé, kteří se tímto zabývají, často již nemají kontakt s fyzikální podstatou, již tato teorie sleduje.

I přes tyto slabiny zůstávají superstruny nejslibnějším kandidátem na finální teorii. V tomto oboru pracuje celá řada špičkových fyziků a matematiků a mnoho významných objevů se již podařilo udělat. Mezi nejvýznamnější patří objev AdS/CFT korespondence v roce 1997, která v jistém smyslu dává dohromady objekty v obecné relativitě a v kvantové teorii pole.

Až budoucí výzkumy ukáží, jestli bude teorie superstrun zavržena jako zcela chybná, či naopak všechny nedostatky vyřeší a v učebnicích fyziky se objeví na nejčestnějším místě.

Úloha VII. S ... za nobelovku

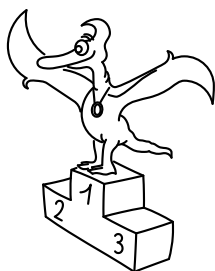
Vytvořte lokální renormalizovatelnou kvantovou teorii pole, která popisuje všechny čtyři typy sil jako projevy jedné sjednocené interakce.

Kdo tuto úlohu vyřeší, nechť mě kontaktuje, o nobelovku se rozdělíme, stačí mi i třetina.

Krátká poznámka na závěr. Vysoce oceňuji všechny řešitele, kteří ve svém snažení vytrvali až k poslednímu dílu. Můžete mít opravdu dobrý pocit, že jste zvládli základy kvantové mechaniky. Pro další studium doporučuji následující úvodní knížku J. J. Sakurai: *Modern Quantum Mechanics*. Pro pokročilejší čtení bych preferoval vynikající českou učebnici J. Formánka: *Úvod do kvantové teorie I a II*.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po V. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	3	8	6	32	100	168
1. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	3	3	–	4	2	9	6	27	97	143
2. <i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova Praha	3	3	2	3	3	4	3	21	70	112
3. <i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	86	69
4. <i>Pavel Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	97	62
5. <i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	–	–	–	–	–	–	6	6	97	60
6. <i>Tomáš Tintěra</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	98	55
7. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	69	50
8. <i>František Příbyl</i>	G Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	0	49	48
9. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	0	79	42
10.–11. <i>Daniel Šimsa</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	0	67	37
<i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	77	37
12. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	–	–	–	–	–	–	–	0	64	27
13. <i>Tomáš Bzdušek</i>	G Piešťany	–	–	–	–	–	–	–	0	100	23
14. <i>Jakub Hromádka</i>	G Frýdlant nad Ostravicí	3	–	–	–	–	–	–	3	81	22
15. <i>Michal Pavelka</i>	G Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	0	48	21
16. <i>Petr Šácha</i>	G Tachov	–	–	–	–	–	–	–	0	60	15
17. <i>Aleš Pilgr</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	83	10
18. <i>Hana Jirků</i>	G Terezy Novákové, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	58	7
19. <i>Martin Judiny</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	42	5
20. <i>Matyáš Řehák</i>	G Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	0	36	4
21.–22. <i>Pavel Kunšta</i>	G Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	0	25	2
<i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	22	2

Kategorie prvních ročníků

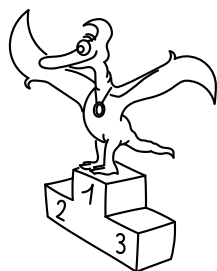
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	3	8	6	32	100	168
1. <i>Petr Cagaš</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	3	2	0	2	1	1	–	9	52	76
2. <i>Ján Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	3	4	–	5	2	–	–	14	66	74
3. <i>Jana Baxová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	4	1	7	–	15	73	53
4. <i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	3	2	–	3	6	7	–	21	82	42
5. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	1	3	–	–	2	–	–	6	65	20
6.–7. <i>Simona Laňková</i>	G Havlíčkův Brod	1	1	–	–	–	–	–	2	28	7
<i>Petr Váňa</i>	G Nymburk	3	–	2	–	2	–	–	7	70	7
8.–9. <i>Lumír Gago</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	67	4
<i>Tomáš Kohlschütter</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	40	4
10. <i>Vojtěch Mrázek</i>	G Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	3	8	6	32	100	168
1. <i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	91	102
2. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	3	–	3	4	2	–	6	18	82	87
3. <i>Lukáš Ledvína</i>	PČG Karlovy Vary	3	3	3	3	–	7	–	19	82	78
4. <i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	3	–	–	4	–	8	–	15	90	73
5. <i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	2	–	–	1	–	–	6	80	70
6. <i>Airidas Korolkovas</i>		2	4	0	3	2	8	–	19	81	58
7. <i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	3	1	0	3	2	7	–	16	48	49
8. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	2	–	–	3	1	9	–	15	69	43
9. <i>Pavel Trudič</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	73	38
10. <i>Jakub Michálek</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	90	35
11. <i>Jan Valášek</i>	G Ch. Dopplera, Praha	2	2	–	3	–	–	–	7	70	31
12. <i>Juraj Hartman</i>	Jiráskovo G Náchod	2	–	0	3	–	–	–	5	57	28
13. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	3	–	–	–	–	–	–	3	89	25
14. <i>Tomáš Talanda</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	0	75	24
15.–16. <i>Jakub Marian</i>	G Litoměřická Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	52	12
<i>Pavel Motal</i>	SPŠ a SOU Kuřim	–	–	–	–	–	–	–	0	28	12
17. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	73	11

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	4	4	4	3	8	6	32	100	168
1. <i>Helena Paschkeová</i>	G Terezy Novákové, Brno	3	–	3	3	1	7	–	17	61	80
2. <i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	3	–	0	3	3	7	–	16	55	71
3. <i>Martin Výška</i>	G Nad Alejí, Praha	3	3	5	–	–	–	6	17	96	65
4. <i>Michael Hakl</i>	G Ch. Dopplera, Praha	3	2	0	2	0	2	–	9	46	58
5. <i>Peter Vanya</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	3	3	1	3	0	–	–	10	48	57
6. <i>Katarína Baxová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	–	–	6	–	9	71	44
7. <i>Zuzana Chlebounová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	3	3	–	1	–	–	–	7	67	40
8. <i>Alžběta Pechová</i>	SPŠS Vsetín	3	2	–	2	–	–	–	7	62	38
9. <i>Michal Maixner</i>	G Žilina - Vlčince	3	3	1	2	0	–	–	9	64	30
10. <i>Jana Figulová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	–	0	–	–	3	52	28
11. <i>Dana Suchomelová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	75	18
12. <i>Jan Hylmar</i>	SSŠ výp. techniky Praha	3	2	–	4	–	–	–	9	61	17
13. <i>Jan Šedek</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	69	11
14. <i>Lenka Bendová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	83	10
15. <i>Radek Kříček</i>	G Děčín	–	–	–	–	–	–	–	0	45	9
16. <i>Dmytro Mishchuk</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	22	6
17.–18. <i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
<i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	–	–	–	–	–	–	–	0	43	3



Pořadí řešitelů po VI. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	6	6	32	100	200
1. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	97	143
2. <i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	70	112
3. <i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	86	69
4. <i>Pavel Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	97	62
5. <i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	–	–	–	–	–	–	–	0	97	60
6. <i>Tomáš Tintěra</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	98	55
7. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	69	50
8. <i>František Příbyl</i>	G Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	0	49	48
9. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	0	79	42
10. <i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	77	37
11. <i>Daniel Šimsa</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	0	67	37
12. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	–	–	–	–	–	–	–	0	64	27
13. <i>Tomáš Bzdušek</i>	G Piešťany	–	–	–	–	–	–	–	0	100	23
14. <i>Jakub Hromádka</i>	G Frýdlant nad Ostravicí	–	–	–	–	–	–	–	0	81	22
15. <i>Michal Pavelka</i>	G Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	0	48	21
16. <i>Petr Šácha</i>	G Tachov	–	–	–	–	–	–	–	0	60	15
17. <i>Aleš Pilgr</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	83	10
18. <i>Hana Jirků</i>	G Terezy Novákové, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	58	7
19. <i>Martin Judiny</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	42	5
20. <i>Matyáš Řehák</i>	G Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	0	36	4
21. <i>Pavel Kunšta</i>	G Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	0	25	2
22. <i>Jaroslava Lavková</i>	G Poprad	–	–	–	–	–	–	–	0	22	2

Kategorie třetích ročníků

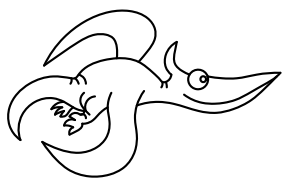
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	6	6	32	100	200
1. <i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	5	4	4	4	–	–	6	23	93	125
2. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	4	4	1	4	–	–	–	13	82	100
3. <i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	4	4	4	4	–	–	–	16	92	89
4. <i>Lukáš Ledvina</i>	PČG Karlovy Vary	1	4	3	–	–	–	–	8	80	86
5. <i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	2	–	3	–	5	77	75
6. <i>Airidas Korolkovas</i>		0	4	4	4	–	–	–	12	80	70
7. <i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	0	0	0	4	4	5	–	13	48	62
8. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	0	69	43
9. <i>Pavel Trudič</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	73	38
10. <i>Jakub Michálek</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	90	35
11. <i>Juraj Hartman</i>	Jiráskovo G Náchod	2	2	–	–	–	–	–	4	56	32
12. <i>Jakub Marian</i>	G Litoměřická Praha	4	4	4	3	–	5	–	20	71	32
13. <i>Jan Valášek</i>	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	70	31
14. <i>Hana Šírová</i>	G F. Palackého, Val. Meziříčí	5	4	4	4	4	–	6	27	104	27
15. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	0	89	25
16. <i>Tomáš Talanda</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	0	75	24
17. <i>Pavel Motal</i>	SPŠ a SOU Kuřim	–	–	–	–	–	–	–	0	28	12
18. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	73	11
19. <i>Prabhat Rao Pinnaka</i>		1	–	4	–	–	5	–	10	71	10

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	6	6	32	100	200
1. <i>Helena Paschkeová</i>	G Terezy Novákové, Brno	2	–	1	3	3	5	–	14	61	94
2. <i>Martin Výška</i>	G Nad Alejí, Praha	5	4	4	4	3	3	6	29	94	94
3. <i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	0	55	71
4. <i>Michael Hakl</i>	G Ch. Dopplera, Praha	1	–	–	1	4	5	–	11	48	69
5. <i>Peter Vanya</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	0	–	1	1	4	4	–	10	48	67
6. <i>Katarína Baxová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	3	1	–	–	4	69	48
7. <i>Michal Maizner</i>	G Žilina - Vlčince	2	1	3	4	–	5	–	15	65	45
8. <i>Zuzana Chlebounová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	67	40
9. <i>Alžběta Pechová</i>	SPŠS Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	0	62	38
10. <i>Jana Figulová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	0	–	–	–	1	–	–	1	47	29
11. <i>Dana Suchomelová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	4	–	1	–	5	68	23
12. <i>Jan Hylmar</i>	SSŠ výp. techniky Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	61	17
13. <i>Jan Šedek</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	69	11
14. <i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	2	4	2	–	–	–	–	8	58	11
15. <i>Lenka Bendová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	83	10
16. <i>Radek Křiček</i>	G Děčín	–	–	–	–	–	–	–	0	45	9
17. <i>Dmytro Mishchuk</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	22	6
18. <i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	6	6	32	100	200
1. <i>Ján Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	0	1	2	4	1	5	–	13	63	87
2. <i>Petr Čagaš</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	1	2	–	2	3	3	–	11	52	87
3. <i>Jana Baxová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	4	1	–	–	5	72	58
4. <i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	1	4	–	–	–	5	–	10	80	52
5. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	0	–	–	–	–	–	–	0	57	20
6. <i>Simona Laňková</i>	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	0	28	7
7. <i>Petr Váňa</i>	G Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	0	70	7
8. <i>Lumír Gago</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	67	4
9. <i>Tomáš Kohlschütter</i>	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	0	40	4
10. <i>Vojtěch Mrázek</i>	G Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2



Zadání I. série



Termín odeslání: 15. října 2007

Úloha I. 1 ... *míhání krajiny*

Prozkoumejte skutečnost, že se při pohledu z jedoucího vlaku vzdálenější objekty na horizontu zdánlivě pohybují po okně pomaleji, zatímco sloupy u trati se jen tak mihnou. Jak závisí tato zdánlivá rychlost pohybu krajiny na její vzdálenosti od cestující veřejnosti?

Úloha I. 2 ... *zachraňte bublinu*

Batyskaf Trieste se ponořil do velké hloubky Mariánského příkopu a vypustil bublinu, která začala stoupat. Jakou rychlostí bude stoupat? Bude se tato rychlost měnit? Za jaký čas vystoupá až na hladinu? Jak velká je nejrychlejší bublina?

Úloha I. 3 ... *vážíme si Slunce*

Navrhněte několik metod ke stanovení (odhadu) hmotnosti Slunce, dostatečně je vysvětlete a vypočítejte podle nich hmotnost naší nejbližší hvězdy.

Úloha I. 4 ... *zachraňte pivo*

Nákladní automobil jedoucí rychlostí v veze láhve piva. Řidič si náhle všiml, že po ujetí vzdálenosti d ho čeká nebezpečná zatáčka, která má poloměr R . Vžijte se do řidiče a vymyslete, jakou taktiku zvolit při brzdění, jestliže počet rozbitých láhví piva je úměrný největšímu zrychlení a vy jich chcete rozbít co nejméně. Zbytek piv můžete za odměnu vypít.

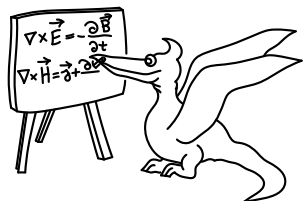
Úloha I. P ... *orosená odměna aneb ať vám kozel neuteče*

Chováte neposlušného kozla, jehož oblibou je přeskakovat plot k sousedům. Nahánění kozla už máte pokrky, proto jste nakoupili vyšší pletivo, kterým chcete svůj pozemek nově oplotit. Místo, kde má plot stát, je ve svahu, a tak je situace trochu komplikovanější. Vy si ale jistě poradíte. Pod jakým úhlem plot vzhledem ke svahu postavit tak, aby bylo pro kozla co možná neobtížnější jej přeskočit?

Úloha I. E ... *ulovte si hlemýžď*

Změřte, jaký nejpomalejší pohyb je schopné zaregistrovat lidské oko. Konkrétně měřte nejmenší okamžitou úhlovou rychlost vybraného objektu vzhledem k nehybnému pozadí, kterou vaše neustále otevřené oko dokáže zpozorovat během doby maximálně 5 s.

Pár tipů na pomalé pohyby: plazení hlemýžďe, pohyb Slunce vůči obzoru při západu, otáčení hodinových ručiček, růst rostlin, růst živočichů, vzájemný pohyb hvězd...



Seriál o počítačové fyzice

Úvod

Začínáme se dnes zabývat pro vás nadmíru užitečným tématem – využitím počítače pro řešení nespočetného množství úloh, a to nejen fyzikálních problémů. Letošní seriál nás také naučí jinému pohledu na matematický aparát, který využijeme při výpočtech na počítači. To nám mimo jiné umožní snáze vypočítat derivace, integrály, řešit diferenciální rovnice. Zkrátka téměř cokoliv.

Sami jistě cítíte, že si budeme moci hrát s jakýmkoliv fyzikálním systémem, omezení budeme jen naší silou a rychlostí procesorů. A i kdyby si kvůli vašim budoucím zběsilým výpočtům vaše mašinky přály raději odejít do křemíkového nebe, můžeme jejich práci rozdělit mezi více procesorů a spustit je na superpočítači, který běží v našem univerzitním výpočetním středisku.

Prvním přírodním jevem, který si vezmeme na mušku, je gravitační působení a jeho účinky. Důvody jsou k tomu dva. Klasický popis je pro každého jednoduše pochopitelný. Avšak již úloha, kdy na sebe gravitačně působí tři volná tělesa, například tři hvězdy, které kolem sebe obíhají, není analyticky řešitelná. Co to znamená? Že například dráhy těchto těles, dobu oběhu apod. můžeme vypočítat pouze použitím nějaké přibližné numerické metody⁶ a zpravidla jen na počítači. Vývoj celého systému je třeba pěkně počítačově nasimulovat.

Takto modelovat se dá cokoliv. Bloudění opilého námořníka, požár v pralese, růst buněk, kvantová turbulence v supratekutém heliu (pokud byste to zvládli), časový vývoj naší Sluneční soustavy či crash test automobilu. Většinu času budeme věnovat simulacím čistě fyzikálním. Výběr témat můžete hodně ovlivnit sami, pokud se s námi během roku podělíte o své choutky.

A v čem to budeme dělat? Málokdo tuší, kolik se toho dá simulovat už v tom „blbém“ Excelu⁷. Bez problému nám v něm může rotovat celá hvězdokupa. Navíc díky FYKOSímu textu Úvod do programování, jež doporučujeme stáhnout z našeho webu⁸, si během hodinky úplně každý, kdo umí na počítači alespoň nainstalovat nějaký program, nainstaluje překladač Pascalu a naučí se nejnужnějším základům vyššího programování.

Těšíme se na vaše řešení. Uvítáme rovněž jakékoliv ohlasy. Napište nám prosím, co vám jde, co vám nejde a co byste se rádi dozvěděli! Uvědomujeme si, že je třeba si osvojit spoustu dovedností s počítačem, které se vám však budou ve fyzice i životě nesmírně hodit. A jako se vším je nejtěžší začít. Proto, abychom vás neodradili, a naopak vám umožnili se spoustu skvělého naučit, tak další díl se pokusíme ušít na míru vašim ohlasům. Jeho převážná většina může být pro ty pokročilejší opakováním, nicméně ti zajisté uznají, že dobře si osvojit esenciální základy programování je důležité. Věříme, že pak už to půjde všem místo po banánové slupce jako po másle.

⁶⁾ Neděste se prosím vás tohoto sprostého slova, naopak řešit něco numericky, tedy číselně, je principiálně jednodušší postup než obecný analytický, tedy odvozování vzorečků.

⁷⁾ Je to dle mého soudu snad nejlepší software, jaký kdy Microsoft udělal!

⁸⁾ Všechny dokumenty týkající se seriálu se na stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz> objeví během léta.

Chtěl bych zmínit pár dobrých zdrojů. V knihovničce FO⁹ je k nalezení text Šedivý, P.: *Modelování pohybů numerickými metodami*. Dále se numerickými metodami zabývá seriál osmého ročníku FYKOSu. Určitě proto neváhejte navštívit náš Archiv ročenek. Dále mohu doporučit Houmpejdž Tomáše Ledvinky, počítačového fyzika z Ústavu teoretické fyziky, jenž na Matematicko-fyzikální fakultě přednáší Programování pro fyziky <http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka>. Naším tématem se zabývá i devátá kapitola prvního dílu Feynmanových přednášek z fyziky.¹⁰

Kapitola 1: Gravitace

Pro simulování gravitačního působení nám postačí dvě věci. Newtonův druhý pohybový zákon, který říká, že síla je součinem hmotnosti a zrychlení

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}. \quad (6)$$

A Newtonův gravitační zákon. Ten praví, že velikost gravitační síly působící mezi dvěma hmotnými body je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná kvadrátu jejich vzdálenosti.

$$F = \varkappa \frac{M_1 M_2}{r^2},$$

kde M_1 a M_2 jsou hmotnosti hmotných bodů, r je jejich vzdálenost a \varkappa je gravitační konstanta. Její změřená hodnota je $(6,6742 \pm 0,0010) \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$. Také po vás ve škole učitel křičel, abyste dodali, že tato gravitační síla je přitažlivá a působí ve směru spojnice hmotných bodů? Zapišme to vektorově

$$\mathbf{F} = -\varkappa \frac{M_1 M_2 \mathbf{r}}{r^3}. \quad (7)$$

V čitateli zlomku jsme \mathbf{r} označili tučně, abychom zdůraznili, že se jedná o vektor neboli o dvě souřadnice x a y určující velikost a směr spojnice hmotných bodů (třeba Měsíce a Země v rovině oběhu). Ve jmenovateli zlomku r značí pouze velikost vektoru \mathbf{r} , tzn. jeho délku, a proto zde zvýrazněno není. Reprezentuje-li například onu vzdálenost Měsíce od Země, bývá výhodné umístit těžší hmotný bod do počátku souřadnic. Z Pythagorovy věty pak získáme $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, kde x a y jsou souřadnice polohy Měsíce.

Jak jste na střední škole definovali okamžitou (nikoliv průměrnou) rychlost? Jako změnu polohy (označíme $\Delta\mathbf{R}$) za velmi krátký časový úsek Δt , čili

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t},$$

kde $\Delta\mathbf{R}$ chápeme jako změnu polohového vektoru. A co je zrychlení? Nic jiného než změna rychlosti za velmi krátký časový úsek

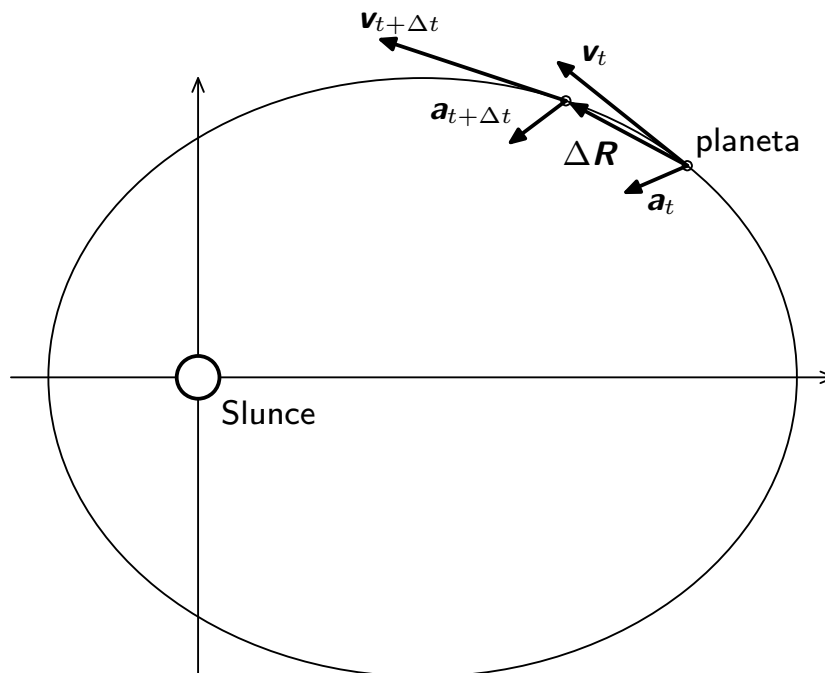
$$\mathbf{a} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Uvažme například planetu obíhající Slunce. Při numerickém modelování nejprve zvolíme počáteční podmínky systému v čase t_0 , tj. počáteční polohu planety \mathbf{R}_{t_0} , například $[-0,6; 0]$ (první číslo $-0,6$ je x -ová souřadnice polohového vektoru a druhé je y -ová souřadnice), pro

⁹⁾ <http://fo.cuni.cz/index.php?file=25>

¹⁰⁾ Zabřednout do tajů programování vám může pomoci knížka Pavla Töpfera: *Algoritmy a programovací techniky*, která obohacuje mnohé školní knihovny.

jednoduchost zatím bez jednotek. Dále její počáteční rychlost \mathbf{v}_{t_0} , například $[0; 1]$ (čili $v_{x0} = 0$ a $v_{y0} = 1$). A pak ještě zvolíme krátký časový interval třeba $\Delta t = 0,1$.



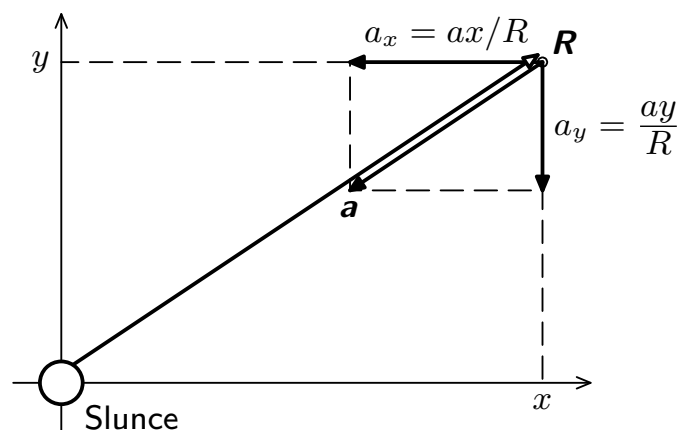
Obr. 14. Pohyb planety okolo Slunce

Jaká bude poloha planety v čase $t_0 + \Delta t$? Užijme právě zavedených vztahů pro okamžitou rychlost a zrychlení. Planeta tedy za dobu Δt změni svou polohu (čím je Δt menší, tím přesněji) o $\Delta \mathbf{R} = \mathbf{v} \Delta t$ a zrychlí o $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{a} \Delta t$. Proto poloha planety v čase $t_0 + \Delta t$ je $\mathbf{R}_{t_0 + \Delta t} = \mathbf{R}_{t_0} + \mathbf{v}_{t_0} \Delta t$. Rychlost planety $\mathbf{v}_{t_0 + \Delta t} = \mathbf{v}_{t_0} + \mathbf{a} \Delta t$. A čemu se rovná \mathbf{a} ?

Například na Zemi při volném pádu je zrychlení téměř všude stejné $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, což je přibližně v soustavě souřadné spojené se Zemí $a_x = 0 \text{ N}$ a $a_y = -9,81 \text{ N}$ (minus, protože urychluje směrem dolů). A u planety obíhající Slunce? V každém bodě prostoru bude zrychlení jiné, je však snadné jej vypočítat. Jak už jsme zmínili, vystačíme s Newtonovým gravitačním a druhým pohybovým zákonem. Spojme je tedy dohromady.

$$M_p \mathbf{a} = -\kappa \frac{M_p M_S \mathbf{R}}{R^3},$$

kde M_p je zde hmotnost planety a M_S hmotnost Slunce. Na obou stranách rovnice se M_p vykrátí. Zjistili jsme tedy, že velikost zrychlení \mathbf{a} planety na hmotnosti planety nezávisí. Za předpokladu, že hmotnost Slunce je mnohem větší než hmotnost planety $M_S \gg M_p$, můžeme gravitační působení planety na Slunce zanedbat. Slunce tedy zůstane nehybně ukotvené v počátku souřadné soustavy a \mathbf{R} je potom polohovým vektorem planety. Získáváme vztahy pro obě souřadnice zrychlení



Obr. 15. Určení souřadnic zrychlení

$$a_x = -\kappa \frac{M_S x}{R^3}, \quad a_y = -\kappa \frac{M_S y}{R^3}. \quad (8)$$

Už víme, jak vypočítat \mathbf{R} i \mathbf{v} v čase $t_0 + \Delta t$ a jak počítat \mathbf{a} . Provedeme znovu tu samou rošádu s planetou pro další krátký časový úsek Δt a takto budeme dále odborně řečeno iterovat pomocí takzvaných rekurentních vzorců¹¹

$$t_i + \Delta t = t_i + \Delta t, \quad \mathbf{R}_{t_i + \Delta t} = \mathbf{R}_{t_i} + \mathbf{v}_{t_i} \Delta t, \quad \mathbf{v}_{t_i + \Delta t} = \mathbf{v}_{t_i} + \mathbf{a}_{t_i} \Delta t. \quad (9)$$

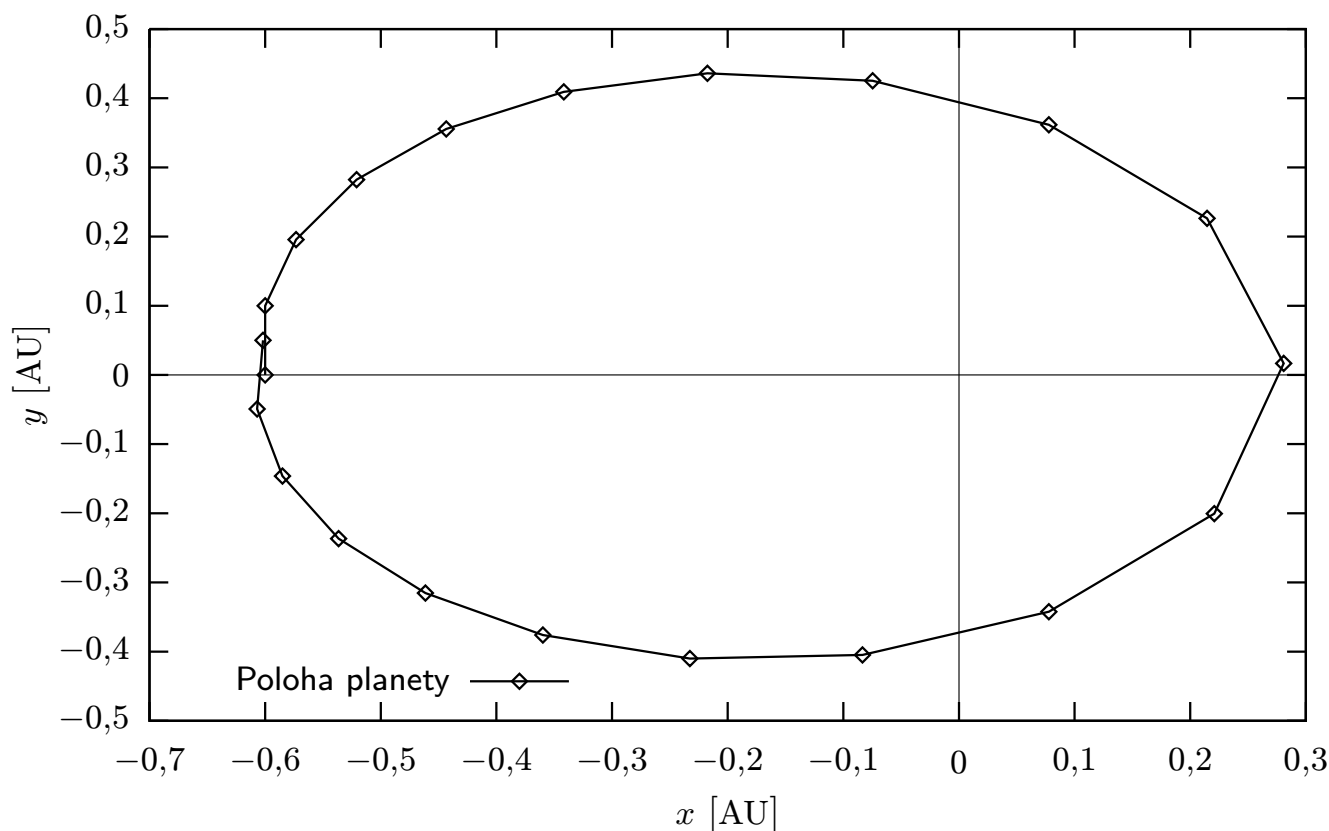
Nyní již umíme úplně vše, abychom mohli provést například takovýto výpočet. Počáteční poloha planety je $x_0 = -0,6 \text{ AU}$ a $y_0 = 0 \text{ AU}$. AU je astronomická délková jednotka (Astronomical Unit). Její velikost je střední vzdálenost Země od Slunce, přibližně $150 \cdot 10^6 \text{ km}$. Počáteční rychlost planety je $v_{x0} = 0 \text{ AU} \cdot \text{rok}^{-1}$ a $v_{y0} = 1 \text{ AU} \cdot \text{rok}^{-1}$. A nechť $\kappa \cdot M_S = 1 \text{ AU}^3 \cdot \text{rok}^{-2}$, což přibližně řádově platí pro hmotnost našeho Slunce¹², které váží asi $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Vyzkoušejte sami, že zvolíme-li časový krok 0,1 roku, vypočteme takovouto tabulku hodnot:

Vypočtené hodnoty polohy, rychlosti a zrychlení planety v uvedených jednotkách.

t	x	y	r	a_x	a_y	v_x	v_y
0	-0,6000	0,0000	0,6000	2,7778	0,0000	0,0000	1,0000
0,1	-0,6000	0,1000	0,6083	2,6659	-0,4443	0,2666	0,9556
0,2	-0,5733	0,1956	0,6058	2,5792	-0,8797	0,5245	0,8676
0,3	-0,5209	0,2823	0,5925	2,5046	-1,3574	0,7750	0,7319
0,4	-0,4434	0,3555	0,5683	2,4156	-1,9368	1,0165	0,5382
0,5	-0,3417	0,4093	0,5332	2,2541	-2,6998	1,2419	0,2682
0,6	-0,2175	0,4361	0,4874	1,8791	-3,7671	1,4298	-0,1085
0,7	-0,0746	0,4253	0,4318	0,9263	-5,2834	1,5225	-0,6369
0,8	0,0777	0,3616	0,3699	-1,5355	-7,1474	1,3689	-1,3516
0,9	0,2146	0,2264	0,3120	-7,0679	-7,4587	0,6621	-2,0975
1	0,2808	0,0167	0,2813	-12,6166	-0,7501	-0,5995	-2,1725
1,1	0,2208	-0,2006	0,2983	-8,3187	7,5547	-1,4314	-1,4170
1,2	0,0777	-0,3423	0,3510	-1,7973	7,9170	-1,6111	-0,6253
1,3	-0,0834	-0,4048	0,4133	1,1816	5,7340	-1,4930	-0,0519
1,4	-0,2327	-0,4100	0,4714	2,2212	3,9133	-1,2708	0,3394
1,5	-0,3598	-0,3760	0,5204	2,5524	2,6676	-1,0156	0,6062
1,6	-0,4614	-0,3154	0,5589	2,6430	1,8070	-0,7513	0,7869
1,7	-0,5365	-0,2367	0,5864	2,6607	1,1741	-0,4852	0,9043
1,8	-0,5850	-0,1463	0,6030	2,6678	0,6672	-0,2184	0,9710
1,9	-0,6069	-0,0492	0,6088	2,6889	0,2180	0,0504	0,9928
2	-0,6018	0,0501	0,6039	2,7327	-0,2274	0,3237	0,9701

¹¹⁾ Rekurentní vzorec nebo předpis nám určuje posloupnost (zde posloupnost poloh a rychlostí planety v jednotlivých časových intervalech), jejíž následující člen se dá určit ze znalosti jednoho nebo více členů předcházejících. Proto je také nutné znát člen první, tj. počáteční podmínku.

¹²⁾ Nevěříte-li, můžete si to ověřit. Převedte gravitační konstantu z jednotek základních (m, kg a s) na jednotky použité (AU, kg a rok).



Obr. 16. Vypočtené polohy planety v jednotlivých časových okamžicích.

Planeta oběhla přibližně za 1,95 roku. Mohli bychom z vypočtených hodnot odečíst třeba ještě délku poloos, avšak vidíme, že poněkud nepřesně. Velice jednoduše lze dosáhnout velkého zpřesnění užitím jemnějšího časového kroku (třeba 0,01 roku) nebo přesnější numerickou metodou (o numerických metodách též v Úvodu do programování).

Úloha I. S ... gravitace

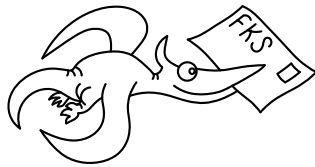
Krom programu `Planeta.xls` prosím stáhněte¹³ též `DveHvezdy.xls` a `TriHvezdy.xls`. Může se vám hodit přečíst již zmíněný FYKOSí Úvod do programování. Díky němu budete určitě schopni stáhnout a přeložit program `Planeta.pas`, `DveHvezdy.pas` a `TriHvezdy.pas`. Cvičením a přípravou na úlohy je tyto programy pochopit a lehce si s nimi pohrát, zkusit si do nich „zaštourat“ či je lehce poupravit.

- Úkolem prvním je obohatit alespoň dva programy o něco svého nebo je upravit podle svého. Například nejrůzněji pozměňte počáteční podmínky a hmotnosti. Nebo k systému přidejte další planetu či další hvězdu. Také můžete vyzkoušet pozměnit gravitační zákon a počítat se silou $F = A/R^2 + B/R^3$, kde A a B jsou pevně zvolené konstanty apod.
- Uvažujte dvě stejně těžké hvězdy, které kolem sebe obíhají po kružnici. Po ose této kružnice se k nim začne náhle přibližovat hvězda třetí, která má na začátku stejnou rychlost, jakou se pohybují hvězdy obíhající, a rovněž sdílí i jejich hmotnost. Počítačově nasimulujte, co se bude dít.

Jako řešení obou úloh nám prosím zašlete obrázky s bohatým komentářem. Uveďte alespoň stručné vysvětlení, co to na těch obrázcích je. Dále, jakým způsobem jste při výpočtu postupovali a pomocí kterého výpočetního systému jste jej provedli.

¹³⁾ Všechny dokumenty týkající se seriálu se na stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz> objeví během léta.

Zdá-li se vám, že vás podceňujeme a dáváme jen lehké a podbízivé úlohy, možná vás o opaku přesvědčí druhá úloha. Je zajímavá a už o něco složitější. Na druhou stranu ne příliš těžká, abyste to nezvládli. S chutí do ní! Výhodou numerického simulování je totiž to, že ať už počítáte planet deset nebo sto, tak je počítáte stále stejným způsobem, jen jich tam prostě započítáte více. Takže ač program budete psát jen o trochu déle, mnohem déle se bude provádět jeho výpočet. Avšak matematická náročnost úlohy se nám nezmění.

**FYKOS****UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8**www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Fyzikální korespondenční seminář MFF UK



FYKOS

jsme tu již 21 let

Přemýšlíte nad fyzikálními problémy, i když jsou na první pohled obtížné?
Chcete místo školy strávit dva týdny s těmi, kdo mají stejné zájmy jako vy?



Chybí vám argument pro koupi výkonnějšího počítače?

Hledáte přátelství na celý život?

Obětovali byste svůj volný čas, abyste si četli náš seriál?

Chcete mít ze sebe radost?

Chcete potkat a poznat naše zahraniční řešitele?

Chcete vědět, kdo jsme?

Už se nechcete nudit ve školních lavicích?

Zajímá vás, co se děje v českých fyzikálních laboratořích a jak to tam vypadá?

Řešte naše úlohy a pomozte nám vysvobodit ptáka FYKOSáka!

<http://fykos.mff.cuni.cz>