Řešení úloh Fykosího fyziklání 2008

1. *dvacet metrů pod mořem*

Ponorka kapitána Nema, Nautilus, zamrzla v přírodní jeskyni v polárním oceánu, od volného moře ji dělí jen několik desítek metrů tlustá ledová zeď o tuhosti v průhybu $k = 1{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{N/m}$. Nautilus se rozjíždí na dráze $s = 50\,\mathrm{m}$ a jak postupně nabíhají všechny motory, zrychluje s konstantním zrychlením. Stěna pukne, pokud se prohne o více než jeden metr. Určete minimální výkon Nautilových motorů těsně před nárazem. ($y = 1\ \mathrm{m}$, $m = 40\ \mathrm{t}$, $S = 40\,\mathrm{m}^2$, $C = 0{,}2$.)

Captain Nemo's submarine, the Nautilus, got frozen in the natural cave in the polar ocean and only few meters of the ice separates her from the sea. The spring constant of the ice is $k = 1{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{N/m}$. Nautilus is accelerating with constant acceleration on the path $s = 50\,\mathrm{m}$ long. The ice will break, when it deflects more than 1m. Calculate the minimal wattage of the ship's engines just before she hits the iceberg. ($y = 1\ \mathrm{m}$, $m = 40\ \mathrm{t}$, $S = 40\,\mathrm{m}^2$, $C = 0{,}2$.)

Uvažujme o ledové stěně jako o harmonickém oscilátoru, pak platí $E = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}mv^2$, tedy $v = \sqrt{\frac{k}{m}}y$, kde v je rychlost ponorky v okamžiku nárazu. Pokud má ponorka rychlost v okamžiku rychlost v a rozjížděla se s konstantním zrychlením, pak pro velikost zrychlení platí $a = \frac{v^2}{2s}$, pro výkon motorů musí pak platit

$$P = vF = v\left(ma + \tfrac{1}{2}CSv^2\varrho_{\mathrm{H_2O}}\right) .$$

Výkon ještě vyjádříme v zadaných veličinách

$$P = \tfrac{1}{2}y^3\left(\frac{k}{m}\right)^{3/2}\left(\frac{m}{s} + CS\varrho_{\mathrm{H_2O}}\right) .$$

Po dosazení hodnot dostaneme minimální výkon motorů $P = 1{,}01\,\mathrm{MW}$.

2. *kombinační*

Jaké hodnoty odporu lze získat, máme-li k dispozici tři rezistory, každý o odporu $10\ \Omega$?

Which values of resistance can we obtain if we have only three resistors of resistivity $10\ \Omega$?

Kombinacemi paralelních a sériových zapojení lze získat hodnoty $3{,}3\,\Omega$, $5\,\Omega$, $6{,}7\,\Omega$, $10\,\Omega$, $15\,\Omega$, $20\,\Omega$ a $30\,\Omega$.

3. *čočkule*

Když na tenkou spojnou čočku dopadají paprsky rovnoběžné s optickou osou, střetávají se v místě ve vzdálenosti d od středu čočky. Jak daleko od tohoto místa střetu se protnou rovnoběžné paprsky, které svírají s optickou osou malý úhel α?

When rays parallel to optical axis go through thin burning glass, they focus in a point which is in distance d from the center of the len. How far from this point do the rays focus if they form a little angle α with the optical axis?

Příčné zvětšení je dáno $y' = ya'/a$. Můžeme si představit, že rovnoběžné paprsky produkuje velmi vzdálený bodový zdroj, pro nejž $y = \alpha a$. Proto $y' = a'\alpha = d\alpha$.

4. *gravitační frekvenční posuv*

Jak se posune první čára Balmerovy série vodíku (656,3 nm), kterou pozorujeme na Zemi, vinou gravitačního červeného posuvu? Potenciální energie fotonu s frekvencí ν v centrálním gravitačním poli je

$$V(r) = -\frac{Gh\nu M}{c^2 r}\,,$$

kde G je gravitační konstanta, M je hmotnost Slunce, h je Planckova konstanta a c je rychlost světla.

What is the spectral shift of a first line from Balmer's hydrogen series (656,3 nm) observed on the Earth, owing to gravitational redshift? The potential energy of a photon with frequency ν in central field is

$$V(r) = -\frac{Gh\nu M}{c^2 r}\,,$$

where G is gravitational constant, M is the Sun weight, h is Planck's constant and c is the speed of light.

Ač se jedná o relativistický efekt, úloha byla zadána v duchu Newtonovy teorie gravitace, a tak ji budeme rovněž řešit. Relativistický výsledek pro slabé gravitační potenciály[1] je totiž totožný s výsledkem plynoucím z Newtonovy teorie.

Při cestě ze Slunce na Zem potenciální energie fotonu vzroste o

$$\Delta V = -\frac{Gh\nu M}{c^2}\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R_\odot}\right),$$

kde $R_\odot$ je poloměr Slunce a R_Z je vzdálenost Země od Slunce. V důsledku toho „kinetická energie“ $h\nu$ klesne o stejnou hodnotu, tudíž

$$-h\Delta\nu = -\frac{Gh\nu M}{c^2}\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R_\odot}\right) \quad\Rightarrow\quad \Delta\nu = \frac{G\nu M}{c^2}\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R_\odot}\right).$$

Protože platí $\Delta\nu/\nu = -\Delta\lambda/\lambda$, dostaneme pro posun vlnové délky

$$\Delta\lambda = \frac{G\lambda M}{c^2}\left(\frac{1}{R_\odot} - \frac{1}{R_Z}\right).$$

Pro hodnoty $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$, $\lambda = 656{,}3\,\mathrm{nm}$, $M = 2{,}0\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$, $c = 3{,}0\cdot 10^{8}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $R_Z = 1{,}5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$, $R_\odot = 7{,}0\cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$ dostaneme $\Delta\lambda = 0{,}0014\,\mathrm{nm}$.

5. *Apollo*

Pod jakým úhlem viděli kosmonauti průměr Země z Měsíce?

What was the angle in which the astronauts observed the diameter of the Earth from the Moon?

Poloměr Země je $R = 6378\,\mathrm{km}$ a vzdálenost Měsíce $d = 384000\,\mathrm{km}$. Z pravoúhlého trojúhelníka máme $\mathrm{tg}\,(\alpha/2) = R/d$, tedy $\alpha = 1^\circ 54'$.

[1]) V okolí Slunce je skutečně gravitační potenciál slabý ve smyslu $GM/r \ll c^2$.

6. *adiabatický oscilátor*

Máme ležící válec, uvnitř kterého je volně pohyblivý píst. Stěny válce i píst jsou dokonale odizolovány. Průřez válce má obsah S, hmotnost pístu je m . Na počátku mají ideální plyny na obou stranách pístu stejný objem V i tlak p a teplotu T_1 na levé straně a T_2 na pravé straně. Vypočítejte úhlovou frekvenci kmitů pístu, pokud ho nepatrně vychýlíme z počáteční polohy.

Let's have a lying cylinder with a piston without friction. The walls of the cylinder and the piston are isolated. The cross-section of the cylinder is S, the weight of the piston is m. At the beginning, the ideal gases in both parts of the cylinder has the same volume V and pressure p. The temperatures are T_1 on the left side and T_2 on the right side. Calculate the oscillation frequence of the piston, if we deflect it a little bit.

Nechť je píst vychýlen o Δx směrem doprava. Jelikož jsou obě strany pístu dokonale odizolovány, budou následné děje adiabatické, které vystihuje rovnice pV^γ = konst, kde γ je Poissonova konstanta. Pro plyny na obou stranách pístu tedy platí

$$pV^\gamma = p_1(V + S\Delta x)^\gamma \,, \qquad pV^\gamma = p_2(V - S\Delta x)^\gamma \,.$$

Na píst začne působit síla $F = (p_2 - p_1)S$, která ho bude vracet do rovnovážné polohy. Rozdíl tlaků vypočteme z rozdílu předchozích rovnic

$$p_2 - p_1 = pV^\gamma \left(\frac{1}{(V - S\Delta x)^\gamma} - \frac{1}{(V + S\Delta x)^\gamma} \right) = p \left(\frac{1}{(1 - S/V \cdot \Delta x)^\gamma} - \frac{1}{(1 + S/V \cdot \Delta x)^\gamma} \right) .$$

V přiblížení pro malé $\xi \ll 1$ platí známá formulka $(1 + \xi)^\gamma \approx 1 + \gamma\xi$, v tomto případě tedy

$$p_2 - p_1 = p \left[\left(1 + \frac{\gamma S \Delta x}{V} \right) - \left(1 - \frac{\gamma S \Delta x}{V} \right) \right] = \frac{2p\gamma S\Delta x}{V} \,.$$

Pohybová rovnice pro píst zní

$$ma = -\frac{2p\gamma S^2 x}{V} \,,$$

což je rovnice harmonických kmitů s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{2p\gamma}{mV}}\, S \,.$$

7. *antireflexní vrstva*

Aby se maximálně omezily odrazy světla na optických rozhraních, pokrývají se někdy brýle vrstvičkou materiálu s nižším indexem lomu. Vypočtěte, jaký by měl tento index v ideálním případě být. Poměr intenzit odraženého a dopadajícího světla na jednom rozhraní je

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \,.$$

In order to maximally limit the light reflections on optical surfaces, the glasses are sometimes covered with thin layer of material with lower index of refraction. The ratio between intensity of reflected and incident light on one surface is

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \,.$$

Světlo není koherentní, a proto není potřeba uvažovat interferenci. V řešení budeme uvažovat dva nejintenzivnější paprsky:

1. Odrazí se od rozhraní vrstvy a vzduchu.
2. Projde rozhraním vrstvy a vzduchu, odrazí se od rozhraní vrstvy a skla brýlí a znovu projde rozhraním vrstvy a vzduchu.

Index lomu vzduchu je téměř jedna, index lomu antireflexní vrstvy označíme n a index lomu skla brýlí označíme N. Intenzita paprsku 1 a 2 bude

$$I_1 = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 ,$$

$$I_2 = \left[1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right]\left(\frac{N-n}{N+n}\right)^2\left[1 - \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right] \approx \left(\frac{N-n}{N+n}\right)^2 ,$$

kde jsme zanedbali členy úměrné vyšší než druhé mocnině rozdílu indexů lomu, neb předpokládáme $N \approx n \approx 1$.

Celková intenzita je $I = I_1 + I_2$. Za účelem nalezení maxima ji budeme derivovat podle n

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}n} = \frac{4(n-1)}{(n+1)^3} - \frac{4N(N-n)}{(N+n)^3} ,$$

výsledek položíme rovný nule

$$\frac{4(n-1)}{(n+1)^3} - \frac{4N(N-n)}{(N+n)^3} = 0 ,$$

$$(n-1)(N+n)^3 - N(N-n)(n+1)^3 = 0 ,$$

$$(n^2 - N)[n^2(N+1) - n(1 - 6N + N^2) + N(N+1)] = 0 .$$

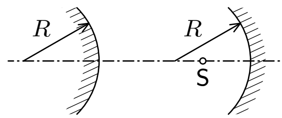
Dva kořeny tedy najdeme hned, jsou jimi čísla $\pm\sqrt{N}$. Snadno se přesvědčíme, že pro $n = \sqrt{N}$ nabývá intenzita minima

$$I = \left(\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}+1}\right)^2 + \left(\frac{N-\sqrt{N}}{N+\sqrt{N}}\right)^2 = 2\left(\frac{\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}+1}\right)^2 < \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 .$$

Poslední nerovnost platí pro všechna $N > 0$.

8. *zrcadla aneb, kdo je hezčí*

Vypuklé a duté zrcadla mají stejný poloměr křivosti R. Vzdálenost mezi vrcholy zrcadel je $2R$. V jaké vzdálenosti od vrcholu vypuklého zrcadla musíme umístit zdroj světla S *na optickou osu, aby po odrazu od dutého a vypuklého zrcadla splýval obraz bodu* S *se svým vzorem?*



Obr. 1. Vypuklé a duté zrcadlo

Both convex and concave mirrors have the same radius of curvature R. The distance between the vertices of mirrors is $2R$. Where on the optical axis should we place a light source S *so that the image of the point* S *after reflection would blend with its source?*

Zobrazovací rovnice kulového zrcadla je

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{2}{R}\,,$$

kde předmětovou a a obrazovou a' vzdálenost měříme kladně od vrcholu zrcadla. Poloměr křivosti zrcadla volíme kladný pro duté zrcadlo a záporný pro vypuklé zrcadlo.

Počátek souřadné osy umístíme v souladu se zadáním do vrcholu vypuklého zrcadla a polohu bodu S označíme x. Bod S zobrazený dutým zrcadlem bude mít polohu x' a dále zobrazený vypuklým zrcadlem má mít opět polohu x. Souřadnice splňují následující zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{2R-x} + \frac{1}{2R-x'} = \frac{2}{R}\,, \qquad \frac{1}{x'} + \frac{1}{x} = -\frac{2}{R}\,.$$

Vyjádříme x' z první rovnice

$$x' = R\,\frac{4R-3x}{3R-2x}$$

a dosadíme do druhé. Tak dospějeme ke kvadratické rovnici

$$2x^2 - 2Rx - R^2 = 0\,.$$

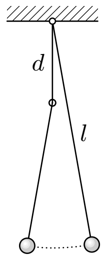
Jediný kořen je z intervalu $(0R, R)$ a to

$$x = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})R \doteq 1{,}37\,R\,.$$

9. *divné kyvadlo*

Určete doba kyvu matematického kyvadla znázorněného na obrázku 2. Celá délka niti je $l = 1{,}5$ m, vzdálenost mezi body závěsu a zarážkou je $d = 0{,}54$ m.

Find out the period of vibrations of the mathematical pendulum as shown on the picture. The total length of the strings is $l = 1{,}5$ m, the distance between the hanging point and the stop is $d = 0{,}54$ m.



Obr. 2

Jeden kyv kyvadla rozdělíme na dvě části, které dělí okamžik, kdy je kyvadlo v nejnižším bodě. Nejprve se kyvadlo otáčí kolem závěsu a délka kyvadla je l, poté přejde v otáčení kolem zarážky, kdy je délka kyvadla $l - d$. Každá část tvoří čtvrtinu doby kmitu příslušného matematického kyvadla. Celková doba kmitu „divného kyvadla“ tedy je

$$T = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{l}{g}} + \sqrt{\frac{l-d}{g}}\right) = 1{,}1\,\mathrm{s}\,.$$

Za tíhové zrychlení jsme dosadili $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

10. *kmitohrátky*

Jak závisí frekvence kmitání oscilačního obvodu na vzdálenosti desek kondenzátoru?

Try to find the frequency dependence on the distance of capacitor's desks in the LC circuit.

Protože kapacita kondenzátoru je nepřímo úměrná vzdálenosti desek ($C = \varepsilon S/d$) a frekvence LC obvodu je dána vztahem

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,,$$

dostáváme

$$f(d) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{d}{\varepsilon LS}}\,.$$

11. *tenisová úloha*

Cílem každého tenisty je poslat míček na druhou stranu tak, aby ho už soupeř nemohl vrátit. Z různých způsobů, jak toho docílit, je pro nás nejzajímavější tzv. „kraťas“ aneb poslat míček tak, aby ho soupeř nestačil doběhnout dříve, než míček podruhé spadne na zem.

Jakou rychlostí musíme poslat míček směrem k zemi, aby co nejdříve dopadl na tuto zem podruhé? Čas samozřejmě měříme od okamžiku vypuštění míčku.

Předpokládejme pro jednoduchost, že míček posíláme kolmo k zemi. Při volném pádu míček vyskočí po odrazu do jedné třetiny původní výšky ($\alpha = 1/3$), na počátku je míček ve výšce $h_0 = 1$ m. Dosazujte $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

The goal of every tennis player is to play the ball to the other side of the net so that the rival won't be able to return it. For example, he can do it by playing a so called short ball – the player tries to play the ball just behind the net with small energy so his opponent shouldn't get to it before it hits the ground again.

What velocity should we give to the ball, if we want to minimize the time between two bounces of the tennis ball? The time starts just after releasing the ball.

Let's assume that we release the ball just perpendicular to the surface. After hitting the ground the ball jumps to one third of his initial height ($\alpha = 1/3$), which is $h_0 = 1$ m. Calculate with $g = 10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Nejdříve poznamenejme, že udílet míčku rychlost směrem nahoru nemá pro dosažení co nejkratšího času k druhému dopadu smysl. (Důkaz ponecháme na čtenáři.)

Pohyb míčku se skládá ze tří částí: pád dolů, výskok nahoru a pád dolů. Druhý a třetí pohyb trvají stejnou dobu (jedná se o opačné pohyby), a proto $t_2 = t_3$. Pro dobu volného pádu z výšky h platí vztah

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Pokud ve výšce h_0 udělíme míčku rychlost v směrem dolů, tak to odpovídá situaci, jako by míček padal volným pádem z větší výšky, označme ji h a hned ji vypočítáme ze vztahu

$$v = \sqrt{2g(h - h_0)}\,. \tag{1}$$

Tento vztah umožňuje hledat h místo v, čehož využijeme, protože víme, že se míček odrazí do výšky $h_1 = \alpha h$. Nyní (již pomocí h) vyjádříme t_1, t_2 a t_3

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2(h - h_0)}{g}}\,, \quad t_2 = t_3 = \sqrt{\frac{2\alpha h}{g}}\,,$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{h} \cdot \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2\alpha} \right) - \sqrt{2(h - h_0)} \right) .$$

Hledáme tedy minimum posledního výrazu, což se nejsnáze provede pomocí derivace. Pokud t nabývá minima, pak jeho derivace $\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}h$ nabývá hodnoty 0.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{1}{2\sqrt{h}} \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2\alpha} \right) - \frac{1}{\sqrt{2(h - h_0)}} \right) = 0 .$$

Po vyřešení rovnice pro neznámou h a parametry h_0, α a g, resp. po úpravě pomocí vztahu (1) dostáváme konečný výsledek ($h_{\min}$, $v_{\min}$ označují h, v pro čas $t_{\min}$)

$$h_{\min} = h_0 \left(1 + \frac{1}{4\alpha + 4\sqrt{\alpha}} \right) , \qquad v_{\min} = \sqrt{\frac{h_0 g}{2\alpha + 2\sqrt{\alpha}}} .$$

Po dosazení zadaných hodnot

$$v_{\min} \doteq 2{,}34\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} .$$

Zajímavostí je rozhodně fakt, že i při 100% odrazivosti povrchu ($\alpha = 1$) je $v_{\min} > 0$. Z toho plyne poučení, že při tenisu se nesmíte ulejvat ani na tom nejlepším povrchu.

12. *expanze plynu*

Máme dvě stejné tepelně izolované nádoby objemu V; v jedné z nich se nachází 1 mol ideálního plynu (Poissonova konstanta plynu je $\varkappa$) o teplotě T_0, v druhé je vakuum. Nádoby jsou spojené malou trubkou s ventilem. Najednou otevřeme na chvíli ventil, takže se vyrovná tlak plynu v celé nádobě a pak ho zase zavřeme. Jaké bude množství plynu v jedné a druhé nádobě?

We have two identical thermally isolated vessels of the volume V, connected by small tube closed by the valve. In the first vessel there is 1 mol of ideal gas (Poisson constant of the gas is $\varkappa$) with the temperature T_0, in the second there is a vacuum. We open the valve for a small while, only for the pressure of the gases to balance an equilibrium, and then we close it. What is the amount of gas in the first and the second vessel?

Stavová rovnice ideálního plynu je $pV = nRT$. Energie ideálního plynu je úměrná jeho teplotě, takže je taky úměrná součinu pV. Označme p_1 tlak plynu v nádobách po vyrovnání tlaku. Celková energie plynu se nezměnila, tudíž platí

$$U = U_1 + U_2 , \qquad p_0 V = p_1 V + p_1 V .$$

takže $p_1 = p_0/2$, tlak klesne na polovinu. Co se stane s teplotou, třeba plynu v levé nádobě? Označme teplotu levého plynu po vyrovnání tlaků T_1. Plyn sa adiabaticky rozpíná (koná práci) a platí pro něj

$$pV^{\varkappa} = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad p^{1-\varkappa} T^{\varkappa} = \text{konst.}$$

$$p_0^{1-\varkappa} T_0^{\varkappa} = \left(\frac{p_0}{2} \right)^{1-\varkappa} T_1^{\varkappa}$$

a pro teplotu T_1 vychází

$$T_1 = T_0 \cdot 2^{(1-\varkappa)/\varkappa}$$

a pro počet molů plynu ze stavové rovnice

$$n_1 = \frac{p_0 V}{2RT_0 \cdot 2^{(1-\varkappa)/\varkappa}} = \frac{n}{2^{1/\varkappa}}\,,$$

$$n_2 = n - n_1 = n\frac{2^{1/\varkappa} - 1}{2^{1/\varkappa}}\,.$$

Poznamenejme, že není pravda, že by se teplota plynu nezměnila: plyn v levé části se roztahuje, koná práci a tudíž se ochladí. Protože energie plynů v obou nádobách jsou stejné, v levé nádobě ostane víc molekul plynu, než v pravé.

13. *bóje*

Na moři plave bóje tvaru koule poloměru $R = 0{,}5$ m, ponořená do jedné poloviny. Teď si na ni sedl pták, takže bóje začala kmitat. Jaká je její perioda kmitů?

The bouy in the shape of ball of radius $R = 0{,}5$ m is floating on the sea, immersed to the one half of its volume. Suddenly the bird had sat on it, so it started to oscillate. What is the period of its oscillations?

Využijeme faktu, že bóje je ponořena do jedné poloviny. Z Archimédova zákona víme, že platí

$$m = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{3}\pi R^3 \varrho\,,$$

kde ϱ je hustota vody. Když pták sedne na bóji, vychýlí ji o malou vzdálenost x směrem dolů a objem ponořené části se zvětší v prvním přiblížení o $\pi R^2 x$. Na bóji bude působit výsledná vztlaková síla

$$F_{\mathrm{vz}} = -\pi R^2 \varrho g x$$

úměrná vychýlení x, tedy jde o sílu analogickou síle pružiny, která je $-kx$. Tudíž máme $k = \pi R^2 \varrho g$. Perioda kmitů tělesa tedy je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\pi R^3 \varrho}{\pi R^2 \varrho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{3g}} = 1{,}2\,\mathrm{s}.$$

14. *nabitý prstýnek*

Jaká je intenzita elektrického pole uprostřed rovnoměrně nabitého kruhového prstence?

What is the intensity of electrical field in the middle of a charged ring?

Nulová, protože prstenec je nabitý rovnoměrně, tudíž se intenzity ze všech směrů vyrovnávají.

15. *elektron a cívka*

Máme válcovou cívku kruhového průřezu S a indukčnosti L, vedle ní ve vzdálenosti r od středu cívky sedí částice náboje q a hmotnosti m. Cívkou neprochází žádný proud. Najednou do cívky pustíme proud I. Jakou rychlost získá částice?

We have cylindric coil with the circular cross-section S and inductance L. Next to it there is a particle with the charge q and the mass m in the distance r form the center of the coil. There is no current in the coil. Suddenly we swich on the current I. What is the velocity the particle will gain?

Protože se v průběhu času Δt v cívce bude měnit magnetický tok, symetricky kolem cívky se utvoří elektrické pole $E(r)$ se siločarami ve tvaru kružnic takové, že součin intenzity a délky kružnice (elektromotorické napětí) bude roven časové změně magnetického toku LI (Faradayův zákon):

$$E(r) \cdot 2\pi r = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

a tudíž

$$E(r) = L\frac{\Delta I}{2\pi r \Delta t} .$$

Na náboj působí elektrická síla $F = qE(r)$, která se rovná změne hybnosti za jednotku času

$$qE(r) = qL\frac{\Delta I}{2\pi r\Delta t} = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

a z toho máme

$$v(r) = \frac{qLI}{2m\pi r} .$$

Ať je tedy částice kde chce a má jakoukoliv hmotnost, vždy získá stejný moment hybnosti $mv(r)r = (qLI)/(2\pi)$, který závisí jenom na náboji částice.

16. *gumová tyč*

Tuhost gumové tyče délky l je k, její hmotnost je M. Konce slepíme k sobě a uděláme z tyče obruč. Teď ji roztočíme na úhlovou rychlost ω. Jaký bude poloměr obruče? Jakou maximální úhlovou rychlostí se může obruč točit?

The force constant of the rubber pole of the length l is k, its mass is M. We stick the two ends together and make an rim from the pole. Now we spin up the rim to the angular velocity ω. What will the radius of the rim be? What is the maximum possible angular velocity of the rim?

Pokud je poloměr obruče v klidu $r = l/2\pi$ a při otáčení R, je síla napínající obruč úměrná prodloužení podle Hookova zákona

$$F = 2k\pi(R - r) .$$

Všimněme si malý kousek obruče vytnutý úhlem $\Delta\varphi$. Ten má hmotnost $(\Delta\varphi M)/(2\pi)$ a pohybuje se po kružnici rychlostí ωR tudíž na něj působí dostředivá síla

$$\Delta m\omega^2 R = 2F\frac{\Delta\varphi}{2} ,$$

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi}M\omega^2 R = 2k\pi(R - r) ,$$

což je rovnice pro neznámou R a její řešení je

$$R = \frac{4\pi^2 k}{4\pi^2 k - m\omega^2} r .$$

Vidíme, že jak se úhlová rychlost ω blíží hodnotě

$$\omega_\mathrm{m} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} ,$$

vzoreček pro R říká, že obruč se natahuje až do nekonečna. Ve skutečnosti obruč dříve praskne, než by se natáhla na nekonečný poloměr – kdy přesně, to záleží na její mezi pevnosti. Rychlost ω_m je tedy nedosažitelná horní hranice úhlové rychlosti, se kterou může obruč rotovat.

17. *loďka na Vltavě*

Řeka je široká $d = 150$ m. Rychlost vodního proudu v řece roste přímo úměrně se vzdáleností od břehu z nuly na $v_1 = 1{,}8$ m/s uprostřed řeky. Z jednoho břehu na druhý pluje člun tak, že vůči tekoucí vodě má stálou rycholost $v = 1{,}2$ m/s kolmo na směr toku řeky. Jak dlouho bude trvat než se dostane na druhou stranu? V jaké vzdálenosti po proudu od místa vyplutí přistane člun na druhém břehu?

The river is $d = 150$ m broad. The velocity of the water in the river rises constantly with distance from the bank (zero velocity) to $v_1 = 1{,}8$ m/s in the middle of the river. The boat travels across the river with constant velocity $v = 1{,}2$ m/s (relative to the running water and perpendicular to the river flow). What time does it take to get to the other bank? In what distance from the initial place (by the river) will the boat land?

Nejdřív spočítáme dobu, za kterou přeplujeme řeku. Protože je rychlost vůči vodě stále kolmá na směr proudu, bude nám to na druhou stranu trvat právě $t_1 = d/v$. Tedy pro konkrétní hodnoty

$$t_1 = \frac{d}{v} = 125\,\mathrm{s}\,.$$

Pohyb ve směru po proudu je ve skutečnosti složení rovnoměrně zrychleného a rovnoměrně zpomaleného pohybu (předěl mezi nimi je uprostřed řeky). Než dopluje loďka do poloviny řeky (bude jí to trvat $t_{1/2}$) bude zrychlovat se zrychlením

$$a_1 = \frac{v_1^2}{2d}\,.$$

Rychlost se totiž zvedá přímo úměrně se vzdáleností od břehu, tudíž můžeme zrychlení počítat jako v/t, kde $t = t_{1/2}$. Od poloviny řeky pak zpomaluje se zrychlením $a_2 = -a_{1/2}$. Dráha, kterou loďka urazí po proudu řeky tedy bude

$$s = s_1 + s_2 = \frac{1}{2}a_1\frac{t_1^2}{4} + v_1\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}a_2\frac{t_1^2}{4} = v_1\frac{t_1}{2} = \frac{v_1 d}{2v} = 112{,}5\,\mathrm{m}\,.$$

18. *počasíčko*

Proč se zpravidla před deštěm nebo sněžením oteplí?

Why there is usually a small warming before raining or snowing?

Vodní páry kondenzují na vodní kapky nebo krystalizují na sněhové vločky, čímž se uvolňuje skupenské teplo tání nebo sublimační teplo.

19. *velká bankovní loupež*

Bankovní lupič prchá v malém ukradeném autě před policií a k překročení hranice mu zbývá posledních 50 m. Náhle ovšem po zásahu policejním granátometem přijde o všechna čtyři kola. Určete, kolik zlatých cihel musí okamžitě vyhodit za sebe, aby se ještě dostal do bezpečí. Víte následující: rychlost auta po zásahu $v_0 = 120$ km/h, součinitel smykového tření mezi autem a vozovkou $f = 1{,}5$, hmotnost jedné cihly $m_0 = 17$ kg, maximální rychlost, kterou lupič dodá náruči cihel vůči autu $v_r = 20$ km/h (je to silák), hmotnost auta s lupičem $M = 500$ kg. Cihel má v kufru přesně třicet.

The bank robber is escaping the law in a small car and only 50 meters are left to cross the state border. Suddenly, after being hit by a police grenade launcher, he loses all his four *wheels. Find out how many golden bricks he has to instantly throw off the car, if he wants to get to the safety. You know, that the velocity of his car is $v_0 = 120\,\mathrm{km/h}$, the coeficient of kinetic friction between car and the road is $f = 1{,}5$, maximum velocity of the thrown bag of gold $v_\mathrm{r} = 20\,\mathrm{km/h}$ (he is very strong), weight of the car with the robber $M = 500\,\mathrm{kg}$. He has got 30 bricks.*

Brždění auta vlivem tření o vozovku bude rovnoměrně zpomalený pohyb, se zrychlením $a = -gf$ trvajícím časový úsek $t = -\frac{a}{v}$, kde v je počáteční rychlost auto (po odhození potřebného počtu zlatých cihel). Jestliže chceme, aby tímto způsobem auto urazilo vzdálenost s, tak pro minimální počáteční rychlost dostáváme $v_{\min} = \sqrt{2fgs}$.

Nyní spočítáme přírustek rychlosti způsobený odhozením cihel, vyjdeme ze zákona zachování hybnosti, tedy pro přírustek rychlosti dostaneme rovnici

$$\Delta v = \frac{km_0 v_\mathrm{r}}{M + (p - k)m_0}\,.$$

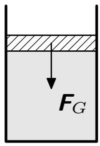
Kde k je počet odhozených cihel a p je původní počet cihel v kufru. Platí, že $v_{\min} = v_0 + \Delta v$. Tedy můžeme vyjádřit minimální počet odhozených cihel

$$k = \frac{(\sqrt{2fgs} - v_0)(M + pm_0)}{m_0(\sqrt{2fgs} - v_0 + v_\mathrm{r})}\,.$$

Po dosazení hodnot ze zadání úlohy zjistíme, že by lupič musel odhodit aspoň 29 zlatých cihel; tedy má šanci se zachránit, ale pouze za předpokladu, že nepřekračuje hranici mezi státy s dohodou o pronásledování zločinců.

20. *píst*

V nádobě uzavřené pohyblivým pístem je v rovnováze ideální plyn. Píst o hmotnosti m a ploše S stlačíme z jeho rovnovážné polohy h o malou vzdálenost $x \ll h$ a pak jej pustíme. Následný děj považujeme za izotermický. Píst bude vykonávat harmonické kmity kolem rovnovážné polohy; najděte jejich frekvenci. (Návod: Uvažte síly působící na píst a jejich analogii se silami působícími na hmotný bod zavěšený na pružině.)



Obr. 3

There is an ideal gas in equillibrium in a closed vessel with floating piston (weight m and area S). Find out the frequence of oscilations if we deflect the piston a bit. Consider the isothermic process.

Na píst působí tyto síly: tíhová ($F_G = mg$) a síly vyvolané tlakem atmosférickým ($F_\mathrm{a} = p_\mathrm{a}S$) a tlakem plynu v nádobě ($F_\mathrm{p} = pS$). Síly F_a a F_G jsou konstantní, s výchylkou se mění pouze F_p. Při vychýlení pístu pod rovnovážnou polohu převládne F_p, při výchylce na opačnou stranu převládne $F_G + F_\mathrm{a}$. Píst tedy bude nějak kmitat. V rovnovážné poloze platí $F_G + F_\mathrm{a} = F_\mathrm{p}$ a tlak plynu v ní bude $p_0 = mg/S + p_\mathrm{a}$. Za předpokladu, že jde o izotermický děj, platí $pV = $ konst a zřejmě také $V_0 = Sh$ a $V = S(h - x)$ (h je výška nádoby, x okamžitá výchylka). Pak tedy

$$pS(h - x) = p_0 Sh\,,$$

$$p = \frac{p_0 h}{h - x}\,.$$

Protože $h \gg x$, můžeme psát $(1 - x/h)^{-1} = 1 + x/h$. Potom síla působící na píst bude

$$F = \frac{-p_0 x S}{h}, \qquad \text{tzn.} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{p_0 S}{hm} x = 0\,,$$

což je rovnice popisující harmonické kmity s frekvencí

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{mg}{s} + p_\mathrm{a}\right) \frac{s}{hm}}\,.$$

21. *cesta z města*

Aleš jede domů z koleje po dálnici D1 a nemůže spát, protože autobus drncá na hranách panelů, ze kterých je dálnice vybudována. Jakou frekvenci drncání f si Aleš spočítá, když ví, že panely mají šířku d, autobus má rozvor r a jede rychlostí v? Řešte obecně a potom pro $d = 3\,\mathrm{m}$, $r = 9\,\mathrm{m}$ a $v = 100\,\mathrm{km/h}$.

Aleš travels home to Brno on the D1 highway. He can't sleep, because the highway is made of concrete panels and the bus grumbles on their edges. What frequence of grumbling Aleš experiences? The panels are d meters wide, the wheel base is r and the velocity is v. Find the equation and then substitute $d = 3\,\mathrm{m}$, $r = 9\,\mathrm{m}$ a $v = 100\,\mathrm{km/h}$.

Pokud rozvor autobusu není celočíselný násobek délky panelu, při jízdě po dálnici se budou ozývat nárazy vždy ve dvojicích. Hledáme periodu těchto jevů.

Uvažme, že rozvor autobusu je kratší než délka panelu. Pak první náraz bude od první nápravy najíždějící na nejbližší hranu panelu a druhý náraz od druhé nápravy o tutéž hranu. Je jasné, že situace se bude opakovat, když první náprava najede na další hranu. Tedy perioda bude zřejmě $T = \frac{d}{v}$ a frekvence $f = \frac{v}{d}$.

Pokud bude rozvor delší, po prvním nárazu (stejném jako v minulém případě) uslyšíme náraz od druhé nápravy (určitě v dobu prvního nárazu bude někde mezi panely a tedy jí bude trvat kratší čas, než se dostane k nejbližší hraně). Pak opět drncne první náprava a protože panely jsou všechny stejně velké, bude perioda stejná jako v předchozím případě $T = \frac{d}{v}$ a frekvence

$$f = \frac{v}{d} = 9{,}26\,\mathrm{Hz}\,.$$

22. *nová generace*

Vesmírná loď Enterprise dorazila do blízkosti neznámé planety, která měla podle prvních pozorování pevný povrch. Kapitán se rozhodl na planetě přistát a prozkoumat ji. Než jim z neznámých důvodů vypadly senzory, zjistili, že planeta má desetkrát větší průměr než Země a oblet nad povrchem planety v malé výšce jim trval $T = 1\,\mathrm{h}\ 16\,\mathrm{min}$. Určete průměrnou hustotu planety a odhadněte, jestli je dost velká na to, aby byla planeta pevná. Porovnejte tíhové zrychlení na povrchu planety s tíhovým zrychlením na zemi. Je výsadek pro posádku bezpečný?

The starship Enterprise reached an unknown planet with presumed solid surface. Captain decided to land and explore the planet. Just before the sensor array have collapsed, they found out that the planet is ten times greater in diameter than Earth and one orbit around the planet took them $T = 1\,\mathrm{h}\ 16\,\mathrm{min}$. Find out the average density of the planet. Estimate, whether it is enough for the solid matter. Compare the acceleration of gravity on the planet and on the Earth. Is it safe to land?

Z třetího Keplerova zákona víme, že pro poměr druhých mocnin dob oběhu a třetích mocnin hlavních poloos platí zajímavý vztah

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}\,,$$

tedy, že je konstantní (G je gravitační konstanta a M hmotnost planety). Průměrnou hustotu planety spočítáme ze známého vztahu $\varrho = \frac{M}{V}$. Planeta je samozřejmě koule s objemem $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Za hmotnost dosadíme z Keplerova zákona (loď obíhá v malé výšce, tudíž $R \approx a$) a po pár úpravách dostaneme vztah

$$\varrho = \frac{3\pi}{GT^2} \approx 6800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,,$$

Což odpovídá hustotě pevných látek. Tíhové zrychlení na povrchu planety spočteme z Newtonova gravitačního zákona.

$$a_\mathrm{g} = G\frac{M}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{40\pi^2 R_Z}{T^2}\,.$$

Po dosazení za $R_\mathrm{Z} = 6378\,\mathrm{km}$ vyjde výsledek $a_\mathrm{g} = 121{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, což je asi $12g$ a to by rozhodně výsadku ke zdraví neprospělo.

23. *oční*

Při kontrole u očního lékaře čte pacient písmena z tabule ve vzdálenosti 5 m. Náš lékař má však malou ordinaci a taková vzdálenost se u něj naměřit nedá. Poraďte mu.

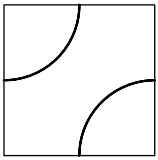
In ocularist's office patients have to read the letters written on the table 5 m far. But our doctor has only small ordination and so there is imposible to do that. Help him.

Pacient bude číst písmenka přes zrcadlo.

24. *zabedněné kostky*

Kolik různých kostek lze vytvořit ze šesti stejných stěn podle obrázku 4? Na každé stěně jsou nakreslené dvě čtvrtkružnice. Kostky jsou různé, pokud je na sebe nelze převést otáčením.

How many different cubes can we made using six identical squares shown on the picture 4? There are two quarter circles printed on the each square. Cubes are different if we can't convert them to another by rotating them.



Obr. 4

Kostek je osm, tečka.

25. *neděle v balóně*

Při testovacím letu své stíhací vzducholodě Karel ztroskotal hrabě von Zeppelin na pustém ostrově uprostřed Bodamského jezera. Z balonetů mu unikl všechen vodík, a jako náhradu nevymyslel nic lepšího než vzducholoď přestavět na horkovzdušný balón. Na kolik stupňů musí hrabě ohřát okolní vzduch, jehož teplota je 20°C, aby balón unesl aspoň 1/4 původní hmotnosti? Co byste mu poradili jako lepší řešení (nepovinné)?

Earl von Zeppelin has wrecked on the deserted island in the middle of the Badensee during the test flight of his armed airship Charles. He lost all his hydrogen from the ballonets and he *decided to rebuild the airship to a hot air baloon. What temperature should the air have so it could lift at least 1/4 of initial weight? Original temperature of the air was 20°C.*

Nejdříve by se hodilo vyjádřit objem balonetů. Víme, že naplněné vodíkem uzvednou právě hmotnost M. Z Archimédova zákona víme, že tíhovou sílu, která působí na vzducholoď musí přinejmenším vyrovnat vztlaková síla (ϱ_v je hustota vzduchu, ϱ_H hustota vodíku). Objem jiných částí vzducholodě zanedbáváme.

$$Mg + V\varrho_\mathrm{H} g = V\varrho_\mathrm{v} g\,, \qquad V = \frac{M}{\varrho_\mathrm{v} - \varrho_\mathrm{H}}\,.$$

Stejná rovnice vyplývající z Archimédova zákona musí platit i pro čtvrtinovou hmotnost a teplý vzduch hustoty ϱ_T

$$\tfrac{1}{4}Mg + V\varrho_T g = V\varrho_\mathrm{v} g\,, \qquad \varrho_T = \frac{V\varrho_\mathrm{v} - \frac{M}{4}}{V} = \varrho_\mathrm{v} - \tfrac{1}{4}(\varrho_\mathrm{v} - \varrho_\mathrm{H})\,.$$

Za hustotu vzduchu a vodíku dosadíme ze stavové rovnice ideálního plynu

$$\varrho_\mathrm{T} = \frac{pM_\mathrm{m}^\mathrm{v}}{RT}\,, \quad \varrho_\mathrm{v} = \frac{pM_\mathrm{m}^\mathrm{v}}{RT_0}\,, \quad \varrho_\mathrm{H} = \frac{pM_\mathrm{m}^\mathrm{H}}{RT}\,,$$

kde p je tlak vzduchu, T_0 jeho teplota, M_m je molární hmotnost vzduchu, resp. molekulárního vodíku a T je teplota, na kterou musíme ohřát vzduch v balónu.

$$\frac{pM_\mathrm{m}^\mathrm{v}}{RT} = \frac{3pM_\mathrm{m}^\mathrm{v}}{4RT_0} + \frac{pM_\mathrm{m}^\mathrm{H}}{4RT}\,,$$
$$b\left(\frac{1}{T} - \frac{3}{4T_0}\right) = \frac{1}{4T_0}\,,$$

kde b jsme označili poměr molární hmotnosti vzduchu a vodíku ($b = 14{,}5$). Rovnici lze upravit na tvar

$$b(T_0 - 3\Delta T) = T_0 + \Delta T\,,$$

kde jsme zavedli $\Delta T = T - T_0$. Zbývá vyjádřit ΔT

$$\Delta T = \frac{b-1}{3b+1}\,T_0 \doteq 89\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

26. *stvořte bublinu*

Jaká práce je zapotřebí k vyfouknutí mýdlové bubliny o poloměru 7 cm? Povrchové napětí příslušného roztoku je 0,040 N·m^{-1}.

Find out the work we need if we want to create a soap bubble of 7 cm in radius. Calculate with surface tension 0,040 N·m^{-1}.

Práce W je rovna povrchové energii bubliny. Je-li bublina ve vzduchu, má dva povrchy (vnitřní a vnější). Jejich plocha je $S = 8\pi r^2$. Tudíž povrchová energie (a tedy také potřebná práce) je $E = S\sigma = 8\pi r^2\sigma = 4{,}9\cdot 10^{-3}$ J.

27. *měděná koule*

Slunce vyzařuje přibližně jako absolutně černé těleso o teplotě $T = 5700\,K$. Budeme-li slunečním světlem ozařovat absolutně černou měděnou kouli umístěnou ve vzdálenosti 1 AU od Slunce, jaká se na ní ustaví rovnovážná teplota? (Slunce je ze Země viděno v úhlu $\alpha = 30'$.)

Sun emits aproximately like black body with temperature $T = 5700\,K$. We put spherical black body of copper 1 AU far from the Sun. What equilibrium temperature does it have? (The Sun is seen from the Earth in angle $\alpha = 30'$.)

Je-li R poloměr Slunce a R_S vzdálenost od Slunce, pak můžeme vyjádřit $R = R_S\alpha/2$. Vyzařuje-li Slunce s teplotou T, a na měděné kouli se díky dobré tepelné vodivosti ustaví všude teplota T', bude v tepelné rovnováze $\alpha^2T^4/4 = 4T'^4$, tedy $T' = \sqrt{\alpha}T/2$. Po dosazení dostaneme $T' = 266\,\mathrm{K}$.

28. *ladění varhan*

Jak bude znít varhanní píšťala prve naladěná na komorní A, jestli do tří čtvrtin její výšky vyvrtáme díru?

What tone will the organ pipe play, if we will drill a hole in 3/4 of its height? The pipe was tuned to the standard tuning frequency.

Jestliže vyvrtáme do píšťaly ve 3/4 díru, tak se zkrátí délka dutiny rezonátoru na 3/4, tedy bude vydávat zvuk o frekvenci $f = 586{,}67\,\mathrm{Hz}$.

29. *hopsadlo*

Neposedný Honza z výšky $h_0 = 1\,m$ pustil míček na zem. Míček každým odrazem ztrácí 36 % mechanické energie. Jak dlouho od vypuštění bude trvat, než míček úplně přestane skákat? (Odpor vzduchu zanedbejte, použijte $g = 9{,}81\,m{\cdot}s^{-2}$.)

Hyperactive Honza released the ball from height $h_0 = 1\,m$ and let it go to the ground. Ball loses 36 % of mechanical energy with each knock back. How long it will last from the release of the ball to the instant when the ball stops jumping? (Forget air-friction, use $g = 9{,}81\,m{\cdot}s^{-2}$)

Doba pádu z výšky h je $t = \sqrt{2h/g}$, doba mezi dvěma odrazy $t = 2\sqrt{2h/g}$. Jestliže q značí podíl energie, kterou si míček po odraze zachová a N dosavadní počet odrazů, pak platí $h = h_0q^N$ a $t = 2\sqrt{2h_0q^N/g}$ Celkový čas T je tedy

$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} + \sum_{N=1}^{\infty} 2\sqrt{\frac{2h_0q^N}{g}} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left(1 + 2\sum_{N=1}^{\infty}\sqrt{q}^N\right).$$

Zbývá sečíst nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $\sqrt{q}$ a dostaneme

$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left(\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}\right).$$

Pro konkrétní hodnoty vyjde $T = 1{,}8\,\mathrm{s}$.

30. *drtivý dopad*

Kus skály o hmotnosti m se nachází v klidu ve vzdálenosti R od planety o hmotnosti $M \gg m$. Spočítejte dobu, za kterou skála dopadne na planetu. Rozměry skály i planety považujte vzhledem ke vzdálenosti R za zanedbatelné.

A rock (weight m) is floating in the distance d from the planet ($M \gg m$). Calculate the time the rock needs to fall on the planet. Dimensions of the planet and rock are insignificant.

Problém budeme řešit trikem: víme, že při eliptickém pohybu lehkého tělíska okolo těžkého centrálního tělesa hmotnosti M (např. planeta okolo Slunce) platí pro periodu oběhu T a polosu elipsy a vztah (3. Keplerův zákon)

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

I když naše tělísko padá přesně doprostřed planety, můžeme si představit, že má malou složku rychlosti kolmou na průvodič (která neovlivní čas pádu), a tedy při svém pádu se pohybuje po velmi zúžené elipse s ohniskem v tělese M. V takovém případě je čas pádu t zřejmě rovný polovině periody pohybu $t = T/2$ a polosa elipsy je $R/2$, takže čas pádu je $t = \pi\sqrt{R^3/(8GM)}$.

31. *stlačování vzduchu*

Kájínek našel ve šrotu válec spalovacího motoru. Doma v pokojíčku (tlak 100 kPa, teplota 20 °C) do válce nasál 4 litry vzduchu, utěsnil a rychle stlačil vzduch na 1/10 původního objemu. Vypočtěte výslednou teplotu a tlak plynu ve válci. Nakonec odhadněte, jakou práci Karlík na stlačení vynaložil.

Charlie has found an combustion engine cylinder on the scrapheap. At home (pressure 100 kPa, temperature 20 °C) he sucked 4 litres of the air into the cylinder, he tightened in and quickly compressed it to 1/10 of initial volume. Calculate the temperature and pressure of the air after compression. Estimate the quantity of work he put forth.

Vzduch ve válci budeme považovat za ideální plyn s dvouatomovými molekulami, pro něž máme $\varkappa = 7/2$. Rychlé stlačení plynu můžeme považovat za adiabatický děj, pro který platí $p_1 V_1{}^{\varkappa} = p_2 V_2{}^{\varkappa}$. Z tohoto vztahu a stavové rovnice ideálního plynu dostaneme

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1}.$$

Pro adiabatický děj platí, že všechna práce vykonaná na systému se spotřebuje na změnu vnitřní energie plynu, a tedy

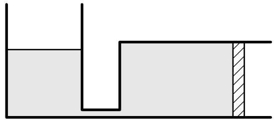
$$W = \tfrac{5}{2} nR(T_2 - T_1)\,.$$

Po dosazení ze stavové rovnice vyjde

$$W = \frac{5}{2} p_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

A máme hotovo, stačí dosadit do vzorečků, číselně $T_2 = 736\,\mathrm{K}$, $p = 2{,}51\,\mathrm{MPa}$, $W = 1510\,\mathrm{J}$.

32. *dva válce*



Obr. 5

Mějme soustavu skládající se z ležícího válce s volným pístem místo jednoho dna a stojícího nahoře otevřeného válce. Oba válce jsou spojeny úzkou trubičkou. Ležící válec je celý vyplněn vodou. Poloměr ležícího válce je r. Určete výšku hladiny h ve stojícím válci v rovnovážném stavu, tj. tehdy, když se volně pohyblivý píst nepohybuje.

Let's have a composition of cylinders according to the picture. The lying cylinder has a floating piston, the standing one is open. They are connected with a narrow pipe. The lying cylinder (radius r) is filled with water. Determine the height of the water level in standing table, if the system is in equilibrium (the piston stands still).

Předpokládejme, že systém je v rovnovážném stavu. Pak na píst působí zleva síla vyvolaná atmosférickým tlakem, zprava síla vyvolaná celkovým tlakem kapaliny. Z důvodu symetrie pístu lze nahradit proměnlivé silové účinky tlaku kapaliny silovými účinky konstantního tlaku, jehož velikost je průměr velikostí tlaku u dna a tlaku ve výšce $2r$ nade dnem položeného válce. Síly zprava a zleva se musí vyrovnat, tudíž průměrný tlak musí být roven tlaku atmosférickému. Jenomže skutečný tlak uprostřed pístu (tj. ve výšce r nade dnem) také nabývá hodnoty průměru tlaků. A protože jsou nádoby spojeny, musí stejný tlak být i ve výšce r nade dnem stojatého válce. To se ale může stát pouze v případě, že se tam bude nacházet volná hladina. Systém tedy bude v rovnováze, pokud hladina ve stojatém válci bude ve výšce r nade dnem.

33. *černá družice*

Malá družice kulovitého tvaru poloměru $r = 0{,}5$ m má absolutně černý dobře tepelně vodivý povrch a velmi rychle rotuje ve vzdálenosti $d_\mathrm{d} = 0{,}4$ AU od Slunce. Jaká je teplota na družici a jaký je výkon jejího tepelného záření? Víte, že zářivý výkon Slunce na Zemi, která je vzdálená $d_Z = 1$ AU od Slunce, je $j_z = 1400\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$ a konstanta $\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ \mathrm{J{\cdot}K^{-4}{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^{-1}}$.

A little spherical satellite with radius $r = 0{,}5$ m has an absolute black surface and is rotating wery quickly in the distance $d_\mathrm{d} = 0{,}4$ AU from the Sun. What is the temperature of the satellite and what is it's heat radiation energy output? You know that luminosity of the Sun on the Earth ($d_Z = 1$ AU) is $j_z = 1400\ \mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$ and constant $\sigma = 5{,}67.10^{-8}\ \mathrm{J{\cdot}K^{-4}{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^{-1}}$.

Celková energie vyzářená Sluncem se zachovává, výkon na jednotku plochy se tedy zmenšuje se vzdáleností od Slunce jako r^{-2}, protože plocha koule roste s r^2. Výkon slunečního záření na oběžné dráze družice tedy získáme ze vztahu $j_\mathrm{d} = j_\mathrm{z} d_\mathrm{z}^2 / d_\mathrm{d}^2$.

Výkon pohlcovaný družicí je pak součinem této hodnoty a průřezu družice S_p

$$P_\mathrm{p} = j_\mathrm{d} S_\mathrm{p} = j_\mathrm{d} \pi r^2 = j_\mathrm{z} \frac{d_\mathrm{z}^2}{d_\mathrm{d}^2} \pi r^2 \doteq 6870\,\mathrm{W}.$$

Předpokládáme, že družice rotuje dostatečně rychle na to, aby byla teplota na celém povrchu tělesa konstantní. Pak pro ni platí Stefanův-Boltzmannův zákon záření absolutně černého tělesa $j = \sigma T^4$, kde j je zářivý výkon tělesa na jednotku plochy a σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta.

V rovnovážném stavu družice vyzařuje stejné množství energie jako pohlcuje, tedy $P_\mathrm{p} = P_\mathrm{v}$. S použitím Stefanova-Boltzmannova zákona získáme pro teplotu družice vztah

$$T = \sqrt[4]{\frac{j}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{P_\mathrm{v}}{4\pi r^2 \sigma}} = 443\,\mathrm{K}.$$

34. *člověk na voru*

Člověk hmotnosti $m = 75$ kg v klidu stojí uprostřed voru délky $l = 6$ m a hmotnosti $M = 50$ kg na vodní hladině. Jak daleko od svojí současné pozice až může po voru dojít, než se dostane na kraj? Řešte nejdříve pro nulové tření mezi vorem a vodou, pak pro vor rovnoměrně bržděný odporovou silou $F_t = 10$ N.

A human (weight $m = 75$ kg) is standing still in the middle of a raft (length $l = 6$ m, weight $M = 50$ kg) on the water-table. How far can he go before reaching the rim of the raft? At first calculate with no friction between the water anf raft, then with constant drag force $F_t = 10$ N.

Člověk se při pohybu po voru ve vodorovném směru odráží nohama silou $\boldsymbol{F}$. Na vor působí reakce $-\boldsymbol{F}$. Ve výsledku musí platit zákon zachování hybnosti.

Čili člověk o hmotnosti m pohybující se po voru rychlostí v způsobí, že vor s hmotností M se bude pod ním pohybovat rychlostí u na opačnou stranu. Přitom bude platit $mv = Mu$. Pohyb člověka i voru bude ve skutečnosti zrychlený. Z druhého Newtonova zákona plyne, že toto zrychlení bude $a_v = F/m$ pro člověka a $a_u = -F/M$ pro vor. Když dojde na okraj voru za čas t, dosáhne člověk maximální rychlosti $v_{\max} = a_v F/m$ a průměrné rychlosti $v = v_{\max}/2$. Podobně průměrná rychlost voru bude $u = ta_u/2$. Člověk se bude ke kraji přibližovat rychlostí $(v+u)$, tedy k němu dojde za čas $t = l/(2(u+v))$, za který se dostane do vodorovné vzdálenosti $s = tv$ od své počáteční pozice. Dosadíme-li do tohto vztahu z předchozích, dostaneme po úpravách

$$s = \frac{l/2}{Ft/2 \cdot (1/m + 1/M)} \cdot \frac{Ft}{2m} = \frac{lM}{2(m+M)}\,.$$

Čili po dosazení hodnot z úlohy se člověk dostane do vzdálenosti 2 m.

Brzdnou sílu $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ pusobící na vor můžeme ve druhém případě pokládat za akci a na člověka v tom případě působí opačná reakce $-\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$. Ke zrychlení tedy přibyde

$$a_v = \frac{F}{m} + \frac{F_\mathrm{t}}{M}, \qquad a_u = \frac{F}{M} - \frac{F_\mathrm{t}}{M}.$$

Zbytek řešení je obdobný předchozímu případu a dostaneme

$$s = \frac{l/2}{t\left[(F+F_\mathrm{t})/m + (F-F_\mathrm{t})/M\right]} \cdot \frac{t.(F+F_\mathrm{t})}{2m} = \frac{lM}{2(m+M)} \cdot \frac{1}{F_\mathrm{t}/m + 2F_t/M} \doteq 4{,}3\,\mathrm{m}.$$

35. *meteoroid*

Meteoroid letící rychlostí $v_0 = 69\ \mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ se rozpadl na dvě stejné části. Každý kus se odchýlil od původního směru letu meteoroidu o úhel $\alpha = 30^\circ$ a oba kusy měly po rozpadu stejně velkou rychlost. Vypočítejte její velikost. Předpokládejte, že meteoroid ani jeho části nerotují.

Meteorite flying at velocity $v_0 = 69\ \mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ broke to two identical parts. Each one of them inflected from the initial direction with angle $\alpha = 30^\circ$ and both pieces had the same velocity after the decay. Calculate it. Assume that the meteorite and his parts are not rotating.

Pokud meteoroid ani jeho části nerotují kolem žádné osy, můžeme je považovat za hmotné body splňující zákony zachování hybnosti a také zákon zachování momentu hybnosti. Zachování momentu hybnosti při rozpadu v tomto případě znamená, že dráhy všech těles budou ležet v jedné rovině.

Označíme-li hmotnost původního meteoroidu m a jeho rychlost $\boldsymbol{v}_0$, platí pro jeho hybnost $\boldsymbol{p}_0 = m\boldsymbol{v}_0$. Podobně hybnosti a rychlosti obou polovin označíme $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{v}_1 \cdot m/2$ a $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{v}_2 \cdot m/2$. Po rozpadu meteoroidu by tedy mělo platit $\boldsymbol{p}_0 = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$, neboli po složkách v souřadné soustavě s osou x ve směru původního pohybu meteoroidu a osou y kolmou na ni

$$mv_{0x} = \frac{m}{2} \cdot (v_{1x} + v_{2x}) \qquad \frac{m}{2} \cdot (v_{1y} - v_{2y}) = 0\,.$$

Protože obě složky rychlostí v_{1x} a v_{2x} jsou co do velikosti stejné a navíc platí $v_{1x} = v_1 \cos\alpha$, můžeme psát $v_{0x} = v_1 \cos\alpha$, odkud

$$v_1 = v_2 = \frac{v_0}{\cos\alpha}\,.$$

Po dosazení hodnot ze zadání dostáváme $v_1 \doteq 80\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$.

36. *pavouk a moucha*

Na povrchu skleněné koule se nachází pavouk a moucha. Jaký musí být úhel průvodičů pavouka a mouchy (průvodič spojuje pavouka resp. mouchu se středem koule), aby ji pavouk nespatřil? Poloměr koule je mnohokrát větší než rozměry pavouka a mouchy. Index lomu skla je $n = 1{,}43$.

There is a spider and a fly on the surface of the glass sphere (index of refraction $n = 1{,}43$). Where should the fly be in order to not be seen by the spider? Calculate the minimal angle between the radius vectors of the insects (radius vector connects the centre of the spere with the point on its surface).

Pavouk vidí všechno na povrchu a uvnitř koule v kuželu o vrcholovém půlúhlu α_0, což je mezní úhel, který určíme z podmínky $\sin 90^\circ = n \sin\alpha_0$, tedy $\alpha_0 = \arcsin(1/n)$. (Pod větším dopadovým úhlem světlo neprojde do vzduchu, ale odrazí se zpátky do skla.) Proto pro vzájemný úhel průvodičů mouchy a pavouka musí platit $\varphi < 180^\circ - 2\arcsin(1/n) = 91{,}3^\circ$.

37. *podivná dioda*

Kutil Pavel si pořídil novou elektronickou součástku (takovou podivnou diodu) s následující voltamperovou charakteristikou. Při napětí do 1 V součástkou proud neteče vůbec, při napětí větším než 1 V je závislost proudu na napětí lineární, přičemž při nárůstu napětí o 1 V proud vzroste o 2 A. Tuto součástku připojil ke zdroji napětí 12 V a předřadil ji odpor 10 Ω. Jaký výkon se na součástce ztrácí?

Pavel bought new electronic component (something like a diod) with following voltamper characteristic. If the voltage is lower than 1 V, the component doesn't let current through. If the voltage is higher than 1 V, current increases linearily and 1 V increase of voltage means 2 A increase of current. Pavel connected the component to source together with serial resistor of 10 Ω. What's the performance (in watt) which loses on the component?

Napětí zdroje označme U_z, napětí na diodě U_d, napětí při kterém začína součástka vést U_0. R je předřazený odpor, α směrnice charakteristiky. Potom

$$RI + U_\mathrm{d} = U_\mathrm{z}\,, \qquad U_\mathrm{d} = \frac{I}{\alpha} + U_0\,.$$

Tedy

$$I = \frac{U_\mathrm{z} - U_0}{\frac{R+1}{\alpha}}\,, \qquad P = U_\mathrm{d} I\,.$$

Pro konkrétní hodnoty $P = 1{,}6\,\mathrm{W}$.

38. *infantilní*

Kulturista Zdeněk má doma místo akvária nádobu se rtutí a nad hladinou rtuti je ještě vrstva vody tloušťky $d = 10\,\mathrm{cm}$. K Vánocům dostal krychli o straně $a = 20\,\mathrm{cm}$ z neznámého materiálu. Když krychli ponořil do své nádoby, zjistil, že krychle vystupuje do výšky $h = 6{,}75\,\mathrm{cm}$ nad hladinu vody. Z jakého čistého prvku je krychle vyrobena?

Bodybuilder Zdenek has a basin with mercury in it and above the level of mercury is layer of water of depth $d = 10\,\mathrm{cm}$. He has a cube $20 \times 20 \times 20\,\mathrm{cm}$ made of unknown material. When he put it in his basin, he found out that the top of cube is $6{,}75\,\mathrm{cm}$ above water level. Which pure chemical element is it made of?

Dle Archimedova zákona v rovnováze platí

$$\varrho_x a = \varrho_{\mathrm{H_2O}} d + \varrho_{Hg}(a - d - h)\,.$$

Odtud snadno vyjádříme ϱ_x a pro konkrétní hodnoty vyjde $\varrho_x = 2700\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, což je hliník.

39. *skleněné destičky*

Z mnoha velmi tenkých destiček různého indexu lomu Aleš slepil silnější desku. Každá spodnější destička má vždy o něco větší index lomu než ta předchozí, a protože je destiček mnoho, můžeme index lomu uvnitř desky v závislosti na hloubce y zadané v metrech popsat funkcí $n = n_0 e^{2y}$. Nejvrchnější destička má index lomu 1,2 a deska má tloušťku $d = 0{,}1\,\mathrm{m}$. Na desku posvítíme paprskem, který s kolmicí na desku svírá malý úhel α. Jaký úhel bude svírat paprsek s kolmicí, když vystoupí na druhé straně?

Aleš sticked together many very thin plates of increasing index of refraction and made thick board. Index of refraction inside the board can be described by function $n = n_0 e^{2y}$, where y is depth of point in the board and $n_0 = 1{,}2$ is index of refraction of the top plate. The width of the board is $d = 0{,}1\,\mathrm{m}$. Ray which forms little angle α with normal to the board enters the board. What angle with normal does it form after it leaves the board?

Víme, že když paprsek projde skrz destičku s konstantím indexem lomu, vychází pod stejným úhlem, jako vstupoval. Když bychom tedy destičky neslepili, ale nechali mezi nimi malou vzduchovou mezeru, jistě se konečný výstupní úhel rovněž nezmění. Ukažme tedy, že přidáním takových vzduchových (nebo i jiných) vrstev se výsledný výstupní úhel nezmění. Vezměme si jen dvě destičky s indexy lomu n_1 a n_2 a přiložme je těsně k sobě. α_1,α_2 jsou po řadě úhly, které paprsek svírá s kolmicí při průchodu první destičkou a při průchodu druhou destičkou. Platí Snellův zákon

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)\,.$$

Vložme nyní mezi destičky vrstvu s indexem lomu n_3 a označme α_3 úhel paprsku při průchodu touto vrstvou. Potom jistě

$$n_1 \sin(\alpha_1) = n_3 \sin(\alpha_3)\,, \qquad n_3 \sin(\alpha_3) = n_2 \sin(\alpha_2)\,.$$

a zřejmě tedy stejně jako při těsném přiložení destiček $n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2)$. Proto když paprsek z desky vystoupí, bude svírat stejný úhel jako když do desky vstupoval, a to nejen pro malé úhly.

40. *baterka*

Radioamatér Tomáš si koupil baterii a dva rezistory velikosti R. Zjistil zajímavou věc. Když k baterii připojil oba rezistory sériově, naměřil na svorkách zdroje napětí U. Potom připojil oba rezistory paralelně a na svorkách zdroje naměřil poloviční napětí. Jaké změří napětí, když připojí pouze samotný odpor?

Radioamateur Tomas bought battery and two resistors of resistivity R. When he connected both resistors serially to the battery, the voltage on the connectors of the battery was U. When he connected them parallely, the voltage was twice as low. What the voltage will be if he connects only single resistor?

Zdroj se přibližně chová jako spojení ideálního zdroje a vnitřního odporu R_v. Napětí měřené na svorkách zdroje odpovídá napětí, které se ztrácí na připojeném odporu R. Napětí při seriovém spojení je dvojnásobné oproti paralelnímu spojení a platí

$$\frac{2R}{2R + R_\mathrm{v}} = 2\,\frac{R/2}{R_\mathrm{v} + R/2}\,.$$

Vyřešením dostáváme $R = R_\mathrm{v}$ a změřené napětí při zapojení samotného odporu je $U_1 = 3U/4$.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.