

**Milí řešitelé!**

I v novém kalendářním roce jsme pro vás připravili autorská řešení úloh druhé série, která právě dostáváte do rukou společně se svými opravenými úlohami. Na konci brožurky se pak můžete potěšit pohledem na aktualizovanou výsledkovou listinu.

Na konec ledna (konkrétně 30. ledna) pro vás chystáme již druhý ročník *FYKOSiho fyziklání* a budeme velmi potěšeni, zúčastníte-li se jej i vy se svými spolužáky či spolužačkami. Podrobnější informace, pravidla soutěže a zpravodaj z loňského ročníku najdete na našich webových stránkách.

Pro příznivce tradičního setkání pod názvem *Jeden den s fyzikou* však máme špatnou zprávu. Letošní ročník se z provozních důvodů odkládá až na 29. září. Podrobnosti najdete na stránkách naší fakulty [www.mff.cuni.cz](http://www.mff.cuni.cz).

Abyste však nepřišli zkrátka, v průběhu jara opět proběhne putovní soustředění *Týden s aplikovanou fyzikou*, jehož součástí bude i letos *Den s experimentální fyzikou*, kam můžete přijít i se svými kamarády, sourozenci nebo dokonce se svým fyzikářem.

*Vaši organizátoři*



## Zadání IV. série



*Termín odeslání: 25. února 2008*

### Úloha IV. 1 ... *znají včely geometrii?*

Jestliže jste někdy viděli včelí plást, jistě vás upoutala pravidelnost, s jakou je vybudován. V podélném řezu tvoří stěny buňky pravidelný šestiúhelník a buňky jsou k sobě seskupeny tak, že pokrývají celou rovinu plástu.

Proč mají včelí buňky tvar právě šestiúhelníků, a ne například obdélníků nebo pětiúhelníků?



### Úloha IV. 2 ... *zahřívání koule*

V této úloze budeme studovat vliv teploty na moment setrvačnosti kovového tělesa. Pro tento účel necháme tělesem procházet pevnou osu, kolem které se bude otáčet. Jak se změní moment setrvačnosti  $J$  tělesa při zvýšení jeho teploty o  $\Delta T$ , je-li koeficient teplotní roztažnosti kovu  $\alpha$ . Pokud si nevíte rady, zkuste uvažovat kouli nebo válec.

Obr. 1. Včelka Mája a Vilík

### Úloha IV. 3 ... *sopka buráci*

Nedávno v televizi proběhl dokument o výbuchu sopky Krakatoa v srpnu 1883. Pozoruhodné je, že rachot výbuchu dočasně ohlušil lidi (nějakou dobu nic neslyšeli) ve vzdálenosti 50 km od vulkánu. Dokonce byl slyšet jako vzdálené hřmění ve městě Alice Springs v centrální Austrálii, tj. asi 5 000 km (slovy pět tisíc) od sopky.

Jaká byla hodnota akustického tlaku v dB v místě výbuchu? Můžeme předpokládat, že platí zákon úbytku intenzity se čtvercem vzdálenosti, či jaký zákon úbytku intenzity bude platit pro tento případ?

**Úloha IV.4 ... zachraňte ledvinu**

ÚOOZ<sup>1</sup> zjistil, že mafie disponuje mobilními válečnými lasery, které jsou všechny řízeny z centrály v horském pohraničním sídle Oberniederdorf, vzdáleném od zbraní maximálně 50 km (ve větší vzdálenosti je signál už slabý a nespolehlivý). Z centrály sledují dění v podsvětí v Karlových Varech, na které všechny lasery míří, aby udeřily v pravý čas.

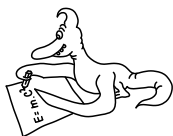
Pomozte nevinným obyvatelům Karlových Varů nalézt vhodný tvar, příp. i umístění spojitě zrcadlové plochy, která by pokud možno všechny laserové paprsky odrazila nejlépe na řídicí centrálu! Problém můžete řešit v rovině, ale zejména oceníme prostorové řešení, pokud existuje. Samozřejmě je požadován důkaz, aby Karlovarští peníze neinvestovali zbytečně.

**Úloha IV. P ... projekt 5**

Navrhněte spravedlivou (či co nejvíce spravedlivou) pětistěnnou kostku. Přesněji máme na mysli takové pětistěnné těleso, které se při hodu na podložce zastaví na každé své stěně se stejnou pravděpodobností.

**Úloha IV. E ... valivý odpor**

Pečlivě experimentálně prověřte, zda valivý odpor válce závisí na jeho poloměru či ne.

**Řešení II. série****Úloha II.1 ... flusanec (4 body; průměr 2,33; řešilo 39 studentů)**

Představte si, že jedete rychlíkem. Díváte se ven z otevřeného okna a sledujete okolní krajinu. O tři okna dál po směru jízdy nějaký zákeřný lump vyplivne žvýkačku. Kolik času máte, abyste stihli uhnout? Samozřejmě předpokládáme, že žvýkačka je dokonalá koule a z okna nebyla vyhozena, nýbrž vlastně položena do proudu vzduchu. *Zažil Roman Fiala.*

Zadání této úlohy se sice jeví poměrně jednoduché, ale k úplnému řešení vede poměrně dlouhá cesta plná odhadů a zanedbání.

První problém je proudění okolo vagónu. Vzhledem k tomu, že vlak s sebou strhává okolní vzduch, nebude rychlost vzduchu vůči lidem ve vagóně přesně rovna rychlosti vlaku, ale bude menší. Nicméně tento i další jevy při řešení zanedbáme a při řešení se omezíme na popis pohybu malé kuličky v proudu plynu známých parametrů. Budeme uvažovat turbulentní proudění a tudíž i Newtonův vzorec pro výpočet velikosti odporové síly

$$F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2 = \frac{1}{2}CS\rho\dot{x}^2,$$

kde  $C$  je součinitel odporu a  $S$  průřez kolmý k rychlosti  $v$  ( $\dot{x}$ , tečka představuje první derivaci podle času).

Pro jednodušší popis budeme uvažovat vztažnou soustavu spojenou s jedoucím vagónem. Označíme-li  $v_0$  rychlost vlaku, pak Newtonovy pohybové rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{1}{2}CS\rho(v_0 - \dot{x})\sqrt{(v_0 - \dot{x})^2 + \dot{y}^2}, \\ m\ddot{y} &= -g - \frac{1}{2}CS\rho|\dot{y}|\sqrt{(v_0 - \dot{x})^2 + \dot{y}^2}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Útvar pro odhalování organizovaného zločinu

To jsou sice pěkné rovnice, ale s jejich řešením už je to těžší. Uvážíme-li, že oproti velkým rychlostem ve vodorovném směru se svislá rychlost mění jen minimálně (doba letu bude určitě v řádech sekund, spíš desetin sekundy) a navíc bude tak malá, že se odporová síla téměř neprojeví, můžeme soustavu rovnic přepsat do podoby

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{1}{2}CS\rho(v_0 - \dot{x})^2, \\ m\ddot{y} &= -g, \end{aligned}$$

kteřá je již snazší pro řešení. Začneme první rovnicí, druhou si ponecháme jenom jako kontrolu provedených aproximací až na konec.

Nejdřív se substitucí zbavíme druhé derivace na levé straně a vyšetříme časový průběh rychlosti (konstantu  $CS\rho/2m$  označíme jako  $K$ ) a rovnicí

$$\dot{v} = K(v_0 - v)^2$$

řešíme metodou separace proměnných. Tedy musíme vypočítat integrály

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{(v_0 - v)^2} &= \int K dt, \\ \frac{-1}{v - v_0} &= C + Kt. \end{aligned}$$

Konstantu  $C$  určíme z počátečních podmínek ( $t = 0, v = 0$ ). Výsledek

$$v = \frac{Kv_0^2 t}{1 + Kv_0 t}$$

je kupodivu další diferenciální rovnice, kterou je třeba vyřešit, protože  $v$  je jen derivace polohy podle času ( $\dot{x}$ ). Postup je jasný – opět separace proměnných, tj.

$$\int x dx = \int \frac{Kv_0^2 t}{1 + Kv_0 t} dt.$$

Výsledek už je potom hledaná závislost polohy žvýkačky na čase (integrační konstanta z předchozího vztahu vyjde nulová, neboť z počáteční podmínky  $t = 0$  opět dostáváme  $x = 0$ )

$$x = v_0 t - \frac{1}{K} \ln(1 + Kv_0 t).$$

Protože počítáme v soustavě spojené s vlakem, stačí dosadit za  $x$  vzdálenost tří oken  $d$  a dořešit rovnici vůči  $t$ . Ale to bohužel analyticky nejde, a tak se musíme uchýlit k nějakému úhybnému manévru. Vzhledem k tomu, že letošní seriál se zabývá počítačovou fyzikou, není pro nás problém použít k dořešení poslední rovnice aspoň tabulkového procesoru. Budeme-li uvažovat parametry  $C = 0,5$ ,  $r = 0,5$  cm,  $\rho = 1,2$  kg·m<sup>-3</sup>,  $m = 1,4$  g,  $v_0 = 140$  km·h<sup>-1</sup> a  $d = 6$  m, vyjde  $t = 0,79$  s.

Nyní je na čase se pozastavit nad druhou rovnicí – volným pádem žvýkačky. Dosadíme-li výsledný čas  $t$  do známého vztahu pro dráhu uraženou padajícím tělesem,  $s = gt^2/2$ , dospějeme k závěru, že žvýkačka za tuto dobu urazí asi 3 metry svisle dolů, tudíž nás vůbec nezasáhne.

Přesnější výsledek bychom dostali, kdybychom vyšli hned z první soustavy diferenciálních rovnic a simulovali rovnou ji; uvažují totiž odporovou sílu tak, jak ve skutečnosti působí – proti směru pohybu žvýkačky. Při použití stejných parametrů jako v předchozím výpočtu pak obdržíme čas  $t$  lišící se pouze o desetiny procent. Přesná hodnota poklesu však pro nás není tolik zajímavá, neboť by žvýkačka stále klesala tak rychle, že zásah by byl vyloučen.

Další možná aproximace spočívá v zanedbání změny horizontální rychlosti žvýkačky, tzn. flusanec se bude pohybovat rovnoměrně zrychleně (vůči vlaku). Výhodou je, že lze výsledek vypočítat přesně, ale bude mírně nadsazený, nicméně pokud se bude od skutečného lišit maximálně o polovinu reakční doby člověka, lze jej prohlásit za použitelný. Platí vztah

$$t = \sqrt{\frac{2d}{Kv^2}}.$$

Dosadíme-li opět stejné hodnoty, nám  $t = 0,69$  s, což vyhovuje výše uvedeným podmínkám, ale stejně jako v předchozích případech žvýkačka dřív spadne na zem.

Posílali jste i řešení, kde jste místo Newtonova vzorce použili Stokesův pro laminární proudění; toto řešení je sice přesnější než naposledy zmíněné, ale jak správně ukzala *Tereza Steinharťová*, jde opravdu o proudění turbulentní.

Vaše řešení byla většinou shodná s prvním nebo třetím způsobem výpočtu (ale někteří nenapsali, proč si mohou dovolit počítat pouze s rovnoměrně zrychleným pohybem). Nejčastější chybou bylo úplné opomenutí volného pádu. Bohužel se našli i tací, kteří tvrdili, že po vyplivnutí z vlaku se žvýkačka okamžitě vůči zemi zastaví. Nakonec pár z vás (jako třeba *Tereza Jeřábková*) zkoušelo úlohu řešit experimentálně a tím, že jim žvýkačka spadla, potvrdili teoretický výsledek.

**Aleš Podolník**

ales@fykos.mff.cuni.cz

## Úloha II. 2 ... zmoštěné autíčko (3 body; průměr 1,71; řešilo 24 studentů)

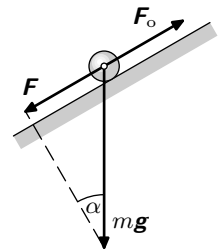
Navrhněte sklon a tvar předního skla automobilu tak, aby z něj kapky dešťové vody při rychlosti auta 80 km/h nestékaly dolů, ale do stran. Ověřte, zda váš výsledek odpovídá skutečnosti. Co dalšího určuje sklon čelního skla?

*Nad problémem se zamýšlel Honza Prachař při jízdě autem během průtrže.*

Než se vrheme na počítání, podívejme se, jaké aproximace během našich výpočtů použijeme. Budeme se zabývat pouze „velkými“ kapkami. Drobné kapičky ze skla vůbec nestékají. To je způsobeno adhezními silami na rozhraní voda–sklo. Pro větší kapky na mokřím skle nebudeme tyto síly uvažovat.

Dále pro určení některých vztahů a tabelovaných konstant budeme kapku považovat za kouli. To je sice nemalé zjednodušení, ale tvar větších kapek se kouli vzdáleně blíží.

Největší problém je stanovení rychlosti vzduchu v těsném okolí předního skla. Proudění tekutin podél tak složitých tvarů, jako jsou karoserie aut, je velice složitý problém, který se nedá řešit analyticky. Měření ukazují, že v blízkosti skla je velikost rychlosti vzduchu menší než velikost rychlosti auta. Směr proudění vzduchu samozřejmě kopíruje tvar skla. Budeme předpokládat lineární závislost rychlosti vzduchu na rychlosti auta (což je ve shodě s experimentem), tedy  $v_{vz} = kv$ , kde  $v_{vz}$  je velikost rychlosti vzduchu vůči kape,  $v$  je rychlost



Obr. 2. Síly působící na kapičku

auta a  $k$  je empirický koeficient. Ten obecně závisí i na sklonu předního skla. Aby naše úloha byla řešitelná, považujeme ostatní vlivy za rozhodující a berme  $k$  nezávislé na sklonu čelního skla  $\alpha$ .

Když jsme si vyjasnili použité aproximace, podívejme se na problém samotný. Aby kapky nestékaly po skle dolů, musí být síla, která u stojícího auta stékání způsobuje (tedy gravitace), vyrovnána silou opačného směru, vznikající při pohybu auta (odpor vzduchu)

$$F = F_o . \quad (1)$$

Složka tíhové síly, která působí rovnoběžně se sklem, má tvar

$$F = mg \sin \alpha . \quad (2)$$

Pro hmotnost kapky  $m$  platí  $m = \rho_v V$ , kde  $\rho_v$  je hustota vody a  $V$  je objem kapky.

Odporovou sílu vypočteme použitím Newtonova vzorce pro odpor prostředí (v našem případě vzduchu)

$$F_o = \frac{1}{2} C S \rho_{vz} v_{vz}^2 = \frac{1}{2} C S \rho_{vz} (vk)^2 , \quad (3)$$

kde  $C$  je součinitel odporu,  $S$  průřez vystavený proudění a  $\rho_{vz}$  hustota vzduchu. Nyní dosadíme z (2) a (3) do rovnice (1) a upravíme

$$\sin \alpha = \frac{C S \rho_{vz} (vk)^2}{2g \rho_v V} .$$

Nyní využijeme dříve ospravedlněné vztahy pro kouli  $S = \pi r^2$  a  $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ . Tím dostaneme

$$\sin \alpha = \frac{3C \rho_{vz} (vk)^2}{8g \rho_v r} .$$

Pro hodnoty  $C = 0,48$ ,  $v = 22,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $k = 0,5$ ,  $\rho_{vz} = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $r = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  (takovýto poloměr kapky si zvolilo i velké množství řešitelů),  $\rho_v = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  dostáváme  $\alpha \doteq 36^\circ$ . To by odpovídalo skutečnému sklonu předního skla u aut. Tento výsledek jsme dostali, protože jsme vzali  $k = 0,5$ . O tomto koeficientu ve skutečnosti nic nevíme, takže jde jen o náhodu. Vzhledem k tomu, kolik zanedbání a přibližných vztahů jsme použili, nemůžeme žádné konkrétní výsledky považovat za věrohodné.

Nakonec se podívejme na druhou část úlohy. Aby kapky stékaly do stran, musí být přední sklo vypouklé. Odporová síla, vyvolaná proudem vzduchu, bude působit i do stran. Na úhlu  $\alpha$  a tvaru (především zaoblenosti hran) předního skla závisí též součinitel odporu celého auta. Fyzikální vlastnosti však nejsou jediným hlediskem při návrzích karosérií. Významnou (často určující) roli hrají též designéři automobilových koncernů.

*Daniel Šimsa*

daniel@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha II. 3 ... víno teče proudem** (4 body; průměr 2,08; řešilo 38 studentů)

Vinaři a řidiči kamionu dobře znají šikvné přelévání kapalin z těžkých nádob. Vinař Ignác chce stočit víno z jednoho demižonu do druhého. Nejprve položí prázdný demižon na zem a plný do výšky  $\Delta$ . Potom demižony propojí hadičkou a trochu z ní zespodu potáhne. Víno začne samovolně proudit do spodního demižonu. Za jak dlouho bude všechno víno stočeno? Předpokládejte, že demižony jsou stejné válce poloměru  $R$  a výšky  $H$ .

*Vymyslel vinař Jano Lalinský.*

Předvedeme řešení úlohy s použitím integrálního počtu, ale i bez něj. Přidržíme se značení ze zadání. Navíc plošný průřez demižonu neboli plochu podstavy označme  $S_D$ , plošný průřez hadičky  $S_H$ . Aktuální výšku hladiny ve spodním demižonu nazvěme  $x$ ; výška hladiny oproti dnu ve vrchním demižonu pak je  $H - x$ .

Na počátku přepouštění umístíme spodní konec hadičky co nejnižší až na dno spodního demižonu a dále budeme tento konec držet ponořený pod úroveň hladiny. Každodenní zkušenost se stáčením vína nám říká, že rychlost přecherpávání by měla záviset na okamžitém rozdílu výšky hladin v demižonech, který je dán  $h = \Delta + H - 2x$ . Zároveň pokud budou oba konce hadičky ponořené, nebude záviset na tom, zda jsou u dna nebo těsně u hladiny. Tyto postřehy však vyplnou z Bernoulliho rovnice, kterou použijeme k popisu problému. Bernoulliho rovnice v podstatě popisuje proudění tekutiny v trubici, která mění svůj průřez a výšku nad zemí, a svým způsobem vyjadřuje zákon zachování energie pro kapalinu v tomto systému. I naše sudy spolu s hadičkou tvoří takovou trubici která mění svůj průřez a výšku nad zemí. Rovnice v uvedeném tvaru platí za předpokladu, že proudění je ustálené, laminární a kapalina není viskózní, tedy energie se neztrácí třením. Blíže se o těchto předpokladech zmíníme na závěr. Podle Bernoulliho rovnice pro libovolná dvě místa v trubici platí

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + p_2, \quad (4)$$

kde  $\rho$  je hustota kapaliny. Po řadě  $v$ ,  $h$ ,  $p$  jsou rychlost kapaliny, výška nad zemí a tlak v příslušném místě trubice. Nás nyní zajímá rychlost průtoku vína hadičkou. Předpokládejme na chvíli, že ústí hadičky ve spodním sudu je těsně u dna. Za první místo si zvolíme bod přesně na hladině vrchního sudu a druhé místo bude bod v hadičce těsně před ústím ve spodním sudu, tedy ve výšce nula. Víno se nestlačuje a objem protéký hadičkou je tedy zřejmě stejný jako objem vyteklý ze sudu, z čehož plyne  $S_D v_1 = S_H v_2$  a pro přehlednost

$$v_1 = kv_2, \quad k = \frac{S_H}{S_D}. \quad (5)$$

Dosazením do (4) získáme

$$\frac{1}{2}\rho(kv_2)^2 + \rho g(\Delta + H - x) + p_a = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_a + \rho gx, \quad (6)$$

kde  $p_a$  je atmosférický tlak, který je však nad hladinou obou sudů v podstatě stejný, a odečte se tedy. Můžeme si zde povšimnout, že rovnost vyjde na chlup stejná, ať už jsou konce hadičky u dna či těsně u hladiny, a nesejde na tom, jak je vysoko nejvyšší bod hadičky. Rovnost podělíme hustotou  $\rho$  a vyjádříme rychlost vína v hadičce jako

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g(\Delta + H - 2x)}{1 - k^2}} \quad (7)$$

a rychlost  $v_1$ , jakou se posouvá hladina v demizoňu, je

$$v_1 = \dot{x} = \sqrt{\frac{2g(\Delta + H - 2x)k^2}{1 - k^2}}. \quad (8)$$

Zápis  $\dot{x}$  znamená derivaci  $x$  podle času. Pokud máme velký demizoň a tenkou hadičku, je faktor  $k$  velmi blízký nule a výraz  $1 - k^2$  velmi blízký jedničce a (7) potom přechází ve známý vztah pro výtakovou rychlost uváděný ve tvaru  $v = \sqrt{2gh}$ . Tomu se samozřejmě nedivíme, protože při umístění spodního konce hadičky do vzduchu těsně nad hladinu můžeme hovořit o volném vytékání kapaliny otvorem, který je v hloubce  $h = \Delta + H - 2x$  pod hladinou ve vrchním demizoňu. Všimněme si však jedné zrády. Pokud bude  $S_H/S_D = k = 1$ , pak podle (7) vyjde rychlost  $v_2$  nekonečná! To ale není možné, protože rychlost padajícího sloupce kapaliny bude odpovídat rychlosti při volném pádu. Problém je v tom, že Bernoulliho rovnice v jednoduchém použitím tvaru platí pouze pro ustálené proudění, tedy takové, že se rychlost v čase nemění. Jak se hladiny přibližují, bude se rychlost proudění měnit každopádně, avšak pokud je  $S_D$  výrazně větší než  $S_H$ , rychlost se v čase mění jen velmi pomalu a Bernoulliho rovnici lze použít.

Víme tedy, jak závisí rychlost vína v hadičce na výšce hladiny  $x$  ve spodním demizoňu, a vidíme, že skutečně závisí na rozdílu výšky hladin mezi demizoňy. Ještě zdůrazněme, že v rovnici (7) se  $v_2$  a  $x$  v čase mění! Obecně tedy není možné vypočítat čas stočení tak, že objem vína vydělíme objemovým průtokem.

Uvedeme si hned dva způsoby, jak ze znalosti vztahu (7) vypočítat celkovou dobu  $T$ , za kterou všechno víno přeteče z vrchního sudu do spodního. První způsob nevyžaduje integrování.

Podívejme se pozorněji na vztah (8). Vidíme, že rychlost snižování hladiny je hrubě řečeno úměrná odmocnině výšky hladiny. Pro obvyčejný rovnoměrně zrychlený pohyb platí, že rychlost roste hrubě řečeno s první mocninou času a dráha roste s druhou mocninou času a rychlost je tedy také svým způsobem úměrná odmocnině uražené dráhy. Uvažujme nyní obecný rovnoměrně zrychlený (zpomalený) pohyb se zrychlením  $a$ . Potom platí

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

což je kvadratická rovnice pro čas  $t$ , který vyjádříme pomocí známého vzorečku

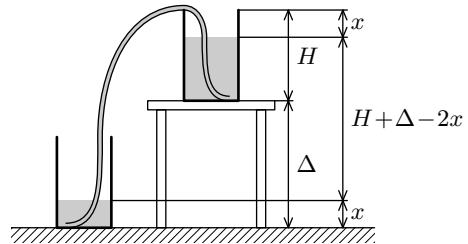
$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}}{a}.$$

Dosazením za  $t$  do vztahu  $v = v_0 + at$  a položením  $x_0 = 0$  dostáváme

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ax}. \quad (9)$$

To je ale velmi podobné vztahu (8). Porovnáním (8) a (9) jistě najdeme takové hodnoty  $v_0$  a  $a$ , že dosáhneme rovnosti mezi (8) a (9) a nějaký rovnoměrně zrychlený vývoj výšky  $x$  tedy vyhovuje rovnici (8). Konkrétně

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g(\Delta + H)k^2}{1 - k^2}}, \quad a = -2g \frac{k^2}{1 - k^2}.$$



Obr. 3. Schéma pokusu

Jediné, co víme o vývoji hladiny v sudu je právě vztah (8) a fakt, že  $x(t=0) = 0$ . Našli jsme tudíž takový časový vývoj hladiny, že jsou splněny právě tyto dvě podmínky, a proto je tento časový vývoj ten skutečně realizovaný.

Výška hladiny se mění rovnoměrně zpomaleně a dobu přetečení  $T$  určíme snadno. Automobil jedoucí rovnoměrně zrychleně ujede určitou dráhu za stejnou dobu jako automobil jedoucí celou dobu rychlostí rovnou průměrné rychlosti prvního auta<sup>2</sup>. To snadno ověříme třeba tak, že si nakreslíme graf závislosti rychlosti na čase a uvědomíme si, že uražená dráha je rovna obsahu plochy v grafu pod touto závislostí. Co platí pro auto, platí i pro přelévání vína. Na počátku  $x = 0$ , na konci, když je sud plný,  $x = H$ . Ze vztahu (8) snadno určíme počáteční a koncovou rychlost, průměrná rychlost je pak jejich aritmetický průměr a pro dobu  $T$  tudíž platí

$$T = \frac{2H}{\sqrt{\frac{2g(\Delta+H)k^2}{1-k^2}} - \sqrt{\frac{2g(\Delta-H)k^2}{1-k^2}}} = \sqrt{\frac{1-k^2}{k^2}} \frac{1}{\sqrt{2g}} \left( \sqrt{\Delta+H} - \sqrt{\Delta-H} \right).$$

Jak jsme řekli, použitý postup řešení je korektní pouze pro  $k \ll 1$  a bez strachu z velké nepřesnosti můžeme psát

$$T = \frac{S_D}{S_H} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \left( \sqrt{\Delta+H} - \sqrt{\Delta-H} \right).$$

*Druhý způsob.* Je třeba se vypořádat s tím, že jak se hladiny přibližují, přetečení určitého objemu vody trvá postupně déle a déle. Čas  $T$  lze dostat tak, že vždy vezmeme malý kousek objemu  $dV$  a spočteme dobu  $dT$ , za kterou tento malý kousek přeteče z jednoho sudu do druhého. Přetečením objemu  $dV$  se výška hladiny změní o malý kousek  $dx$ . Příští kousek objemu  $dV$  už bude tedy vytékat trošičku pomaleji než předchozí. Celkový čas  $T$  pak dostaneme součtem jednotlivých  $dT$ . Protože jsme dílčí objemy  $dV$  volili libovolně malé, suma přechází v integrál ( $dV$  je tak malý, abychom mohli předpokládat, že během jeho protékání se rychlost průtoku vlastně nemění). Zároveň patrně  $dV = S_D dx$ , na počátku je  $x = 0$ , na konci  $x = H$  a objemový průtok hadičkou  $Q = S_H v_2$ . Konečně tedy můžeme psát integrál a aplikovat na něj klasickou matematickou mašinerii

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T dt = \int_0^V \frac{dV}{Q} = \int_0^H \frac{S_D dx}{S_H \sqrt{2g(\Delta+H-2x)/(1-k^2)}} = \\ &= \frac{S_D}{S_H} \sqrt{\frac{1-k^2}{2g}} \int_0^H \frac{dx}{\sqrt{\Delta+H-2x}}. \end{aligned}$$

Integrál vypočteme užitím lineární substituce  $z = \Delta + H - 2x$ . Nové meze integrálu dostaneme dosazením původních mezí do vztahu pro  $z$ , tedy

$$\int_0^H \frac{dx}{\sqrt{\Delta+H-2x}} = \int_{\Delta+H}^{\Delta-H} \frac{dz}{2\sqrt{z}} = [\sqrt{z}]_{\Delta-H}^{\Delta+H} = \sqrt{\Delta+H} - \sqrt{\Delta-H}$$

a celkový čas vychází

$$T = \frac{S_D}{S_H} \sqrt{\frac{1-k^2}{2g}} \left( \sqrt{\Delta+H} - \sqrt{\Delta-H} \right).$$

<sup>2)</sup> Varování: uvedené platí skutečně jen pro rovnoměrně zrychlený pohyb.



Pokud  $\Delta < H$ , víno nepřeteče všechno a spodní sud se naplní jen do výšky  $x = (\Delta + H)/2$ . Dobu přetékání pak dostaneme jednoduše záměnou horní meze integrálu za  $x = (\Delta + H)/2$ .

Nakonec ještě sestavme diferenciální rovnici popisující časový vývoj výšky hladiny  $x$ . Umocněním (8) máme

$$\dot{x}^2 = \frac{2g(\Delta + H - 2x)k^2}{1 - k^2}.$$

Tedy obě strany rovnice zderivujeme podle času. Je třeba si uvědomit, že  $\dot{x}^2$  je složená funkce, jejíž časová derivace je  $2\dot{x}\ddot{x}$ . Máme proto

$$2\dot{x}\ddot{x} = -\frac{4g\dot{x}k^2}{1 - k^2},$$

což podělíme  $\dot{x}$ , lehce upravíme a dostáváme výraz pro zrychlení výšky hladiny  $x$  v sudu

$$\ddot{x} = -2g \frac{k^2}{1 - k^2}.$$

To je ale evidentně konstanta, čímž jsme potvrdili úvahu provedenou během prvního způsobu řešení. Dobu přečerpání  $T$  lze tedy určit již uvedeným způsobem. Mohla by nás třeba ještě zajímat přímo závislost  $x$  na čase. Jediná funkce, jejíž druhá derivace je konstantní, je obecná kvadratická funkce  $x(t) = At^2 + Bt + C$ . Je třeba jen dopočítat koeficienty  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Avšak jistě platí  $\ddot{x} = 2A$ ,  $\dot{x}(t=0) = B$ ,  $x(t=0) = C = 0$ .

Vraťme se k předpokladům Bernoulliho rovnice. Otázku ustáleného proudění jsme již probírali. Velice silným předpokladem je nulová viskozita vína. Viskozita hrubě řečeno vyjadřuje, jak velké je tření mezi dvěma různě rychlými vrstvami tekutiny. Při průtoku vína hadičkou se víno tře o stěny hadičky a navíc proudění je při stěně hadičky pomalejší než uprostřed a pomyslné vrstvy kapaliny se třou i mezi sebou. Třením vzniká teplo, a proto v hadičce dochází ke ztrátě energie a Bernoulliova rovnice přestává platit. Čím je proudění rychlejší, tím jsou tření a ztráty energie větší.

Kupříkladu když jsme zkoušeli přelévát vodu z výšky půl metru tenkou hadičkou průměru půl centimetru, pak doba přelévání byla pro hadičku dlouhou jeden metr o polovinu delší než pro půlmetrovou hadičku. Rozdíl je tedy velice výrazný, a vypočtený čas  $T$  je proto jakýmsi nedosažitelným minimem. Mým osobním názorem je, že by možná šla provést korekce ve vztahu (6) přidáním na pravou stranu členu  $\alpha v_1^2/r$ , který vyjadřuje ztrátu energie v hadičce délky  $l$  a poloměru  $r$ , přičemž  $\alpha$  je nějaká konstanta odpovídající konkrétní kapalině. Uvědomme si také, že i při vstupu kapaliny do spodního demižonu v důsledku tření dojde k jejímu zbrzdění na rychlost  $v_1$  a mechanická energie se nevyhnutelně ztrácí.

Zkusme si také rozmyslet, kdy je proudění v hadičce nevířivé. Při popisu proudění se zavádí takzvané *Reynoldsovo číslo*, definované

$$\mathcal{R}e = \frac{vr\rho}{\eta},$$

kde  $v$  je střední rychlost proudění,  $r$  poloměr trubice a  $\eta$  dynamická viskozita. Ze zkušenosti víme, že pokud rychlost vody v trubici vzroste natolik, že  $\mathcal{R}e$  je přibližně větší než 1000, proudění přejde v turbulentní. Dosazením konkrétních hodnot zjistíme, že se to při přelévání vína klidně může stát. Uvědomme si, že při přelévání demižonů je rychlost v trubici v ideálním případě nezávislá na poloměru a k vířivému proudění dojde spíše při použití širší hadičky.

Závěrem bych pro vás měl jeden námět k přemýšlení. Uvádí se, že kapalina se při vstupu do širší části trubice zbrzdí v důsledku většího tlaku v této širší části. Je tedy správné uvažovat tlak na konci trubičky ve spodním demížonu  $p_2 = \rho g x$ ?

**Marek Scholz**

mara@fykos.mff.cuni.cz

#### Úloha II.4 ... nabitá anténa (5 bodů; průměr 1,64; řešilo 22 studentů)

Dva stejné náboje umístíme na oba konce tuhé nevodivé tyčky. Jaký výkon budeme potřebovat na otáčení tyčky konstantní úhlovou rychlostí kolem osy procházející středem tyčky? Tření zanedbejte. *Úlohu vymyslel Martin Výška.*

V průběhu řešení užíváme následující symboly:  $R$  označuje polovinu délky tyčky, a tedy poloměr kružnice, po které se oba náboje pohybují,  $\omega$  značí úhlovou rychlost otáčení tyče,  $q$  budeme značit velikost obou nábojů. Co se týče fundamentálních konstant, volíme tradičně  $c$  jako velikost rychlosti světla ve vakuu a  $\varepsilon_0$  permitivitu vakua.

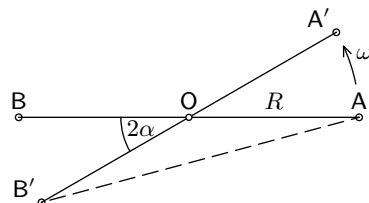
Jak bylo uvedeno v zadání, tyčka spojující oba náboje je nevodivá a nehmotná. To znamená, že se v příkladu projevuje pouze jako mechanismus udržující náboje na kruhové trajektorii a nijak ji do našich úvah nemusíme zahrnovat. Tato idealizace byla zvolena proto, abychom se nemuseli zabývat konkrétními detaily souvisejícími s realizací takového uskupení, ale mohli se soustředit zcela na elektromagnetickou stránku věci. To bychom měli pár slov na úvod, vrhneme se na řešení!

Jak nás učí teorie relativity, žádný „reálný objekt“ se nemůže v prostoru pohybovat rychlostí větší, než je rychlost světla ve vakuu. Pro řešení úlohy stačí vědět, že elektromagnetické pole takovým objektem je (např. proto, že nese energii a hybnost).

Uvažujme nyní následující model silového působení mezi dvěma náboji. Každý z nábojů vysílá v každém okamžiku do prostoru informaci o své poloze a rychlosti (signál) a tato informace se prostorem šíří konečnou rychlostí. Když potom jeden náboj zachytí signál pocházející od druhého náboje, tak si jej „zpracuje“ a na základě informací v tomto signálu obsažených se začne pohybovat (jak, o tom za chvíli). Tento model má své zjevné „mouchy“, ale v základě správně vystihuje podstatu probíraného působení, především tu následující.

Každou informaci, kterou jeden náboj vyšle, přijme vzhledem ke konečné rychlosti šíření signálu druhý náboj se zpožděním. Protože se ale během doby, kdy signál putoval prostorem, mohl zdrojový náboj pohybovat, jsou informace, které má cílový náboj k dispozici, „zastaralé“. Jinak řečeno, cílový náboj se chová tak, jako by se zdrojový náboj v okamžiku příjmu signálu nenacházel tam, kde se skutečně nachází, ale tam, kde se nacházel v okamžiku vyslání signálu<sup>3</sup>.

Síla působící na náboj není kolmá k jeho rychlosti, neboť jak jsme ukázali, než se jeden náboj dozví o tom, že na něj z toho a toho místa působí druhý náboj silou, tak se celá soustava stihne během šíření signálu ještě o kousek pootočit. Tím se nepatrně změní úhel mezi působící silou a rychlostí náboje, vektory síly a rychlosti potom již nejsou kolmé a výsledný výkon není nulový.



Obr. 4. Otočení tyčky během šíření signálu

<sup>3</sup>) Toto je místo, kde udělala chybu velká část řešitelů, neboť předpokládali, že se silové působení mezi náboji přenáší nekonečně velkou rychlostí. V takovém případě by byla síla působící na náboj kolmá k jeho rychlosti a výsledný výkon elektrických sil by byl nulový.

První věcí, kterou ve svém řešení musíme zjistit, je velikost úhlu  $2\alpha$ , o který se celá soustava otočí v době mezi vysláním signálu z prvního náboje a zpracováním signálu druhým nábojem. Pro lepší názornost si celou situaci znázorníme graficky (viz obr. 4). Vodorovná pozice tyčky odpovídá okamžiku vyslání signálu, šikmá okamžiku příjmu signálu.

Jelikož se celá soustava otáčí rovnoměrně, bude se signál šířit po čas  $2\alpha/\omega$ . V tomto čase urazí signál rychlostí  $c$  vzdálenost mezi místy vyslání a příjmu signálu; tato místa jsou na obrázku znázorněna body  $A$  a  $B'$ . Z obrázku je patrné, že se jedná o délku základny rovnoramenného trojúhelníka o ramenech délky  $R$  a s vrcholovým úhlem  $\pi - 2\alpha$ , tedy o vzdálenost  $2R \cos \alpha$ . Srovnáním obou časů dospíváme k rovnici o jedné neznámé  $\alpha$ ,

$$\frac{2\alpha}{\omega} = \frac{2R \cos \alpha}{c}.$$

Pro tuto rovnici bohužel nedokážeme najít obecné řešení (rozuměj funkci několika proměnných, do které bychom dosadili hodnoty parametrů  $v$ ,  $c$  a získali bychom řešení). To by v případě komplikovanějších navazujících výpočtů mohlo představovat problém, nicméně v tomto případě získaná rovnice plně postačuje. Pokud by nás totiž zajímala hodnota řešení pro nějaký konkrétní případ, můžeme do dané rovnice dosadit a vyřešit ji numericky nebo pomocí mocninového rozvoje (pro malé rychlosti otáčení můžeme funkci kosinus rozvinout do několika prvních členů Taylorova polynomu, čímž obdržíme přijatelnou polynomiální rovnici). Nám bude plně postačovat, že tato rovnice v každém případě řešení má, že toto řešení je jediné (rozmyslete si proč) a že jej v principu umíme nalézt. Označme si toto jediné řešení naší rovnice  $\alpha_0$ .

Zopakujme nyní ještě jednou, co jsme zatím zjistili. Silové působení mezi oběma náboji neprobíhá tak, jako by oba náboje odděloval úhel  $\pi$ , ale jako by jejich vzájemná úhlová vzdálenost byla pouze  $\pi - 2\alpha_0$ .

Nyní je konečně na čase říci si, jak probíhá „zpracovávání“ signálů, které si mezi sebou náboje posílají. Podívejme se tedy do knihy Feynmanovy přednášky z fyziky<sup>4</sup>, kde se objevuje vzorec

$$\mathbf{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{e}_{r'}}{dt^2} \right].$$

Tento vzorec říká, že když se náboj prostřednictvím signálu dozví, že na místě popsaném polohovým vektorem  $\mathbf{r}'$  (s počátkem pevně fixovaným v místě, kde se nachází náboj přijímající signál) a odpovídajícím jednotkovým vektorem  $\mathbf{e}_{r'}$  se nachází náboj velikosti  $q$ , má se chovat stejně, jako by byl v elektrickém poli o intenzitě  $\mathbf{E}$  dané uvedeným vzorcem. Čárky se v uvedeném vzorci vyskytují proto, abychom měli na paměti, že máme dosazovat pozici zdrojového náboje v okamžiku vyslání signálu, nikoli jeho příjmu.

Zde je možno upozornit na jednu „mouchu“ modelu, který jsme uvedli v prvních odstavcích. Aby byl náš model konzistentní s teorií relativity, potřebovali bychom, aby polohový vektor, kterým se zabýváme, neměl pevný počátek, ale aby se jednalo o vektor vzájemné polohy obou nábojů, a aby tak silové působení nebylo závislé na volbě inerciální soustavy. V praxi se tento problém překlene tím, že si vzájemné působení většinou představujeme pomocí vektorových polí, s vektorem intenzity jako funkcí polohy v prostoru. Tento model je nicméně na první seznámení s předmětem možná až příliš složitý, proto jsme užili sice ne zcela správného, ale názornějšího modelu.

Abychom mohli užít uvedeného vztahu, je třeba zjistit, jak se s časem mění vektor polohy zdrojového náboje vůči místu příjmutí signálu (vůči bodu  $B'$ ). Užijeme proto oblíbenou

<sup>4)</sup> Feynman, Leighton, Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky I*. Fragment, 2000, str. 372.

fyzikální fintu: necháme čas, aby se posunul o malou hodnotu  $dt$ , a budeme sledovat, jak se celá situace změní. Během této krátké doby se úhlová vzdálenost zdrojového náboje a bodu  $\mathbf{B}'$  změní z hodnoty  $\pi - 2\alpha$  na hodnotu  $\pi - 2\alpha + \omega dt$ . Tím se rovnoramenný trojúhelník osa otáčení–zdrojový náboj–bod  $\mathbf{B}'$  trochu zploští a úhel při jeho základně se zmenší o polovinu toho, o co se zvětší vrcholový úhel,

$$d\alpha = -\frac{\omega dt}{2},$$

což je zároveň úhel, o který se pootočí jednotkový vektor  $\mathbf{e}_{r'}$  okolo bodu  $\mathbf{B}'$ . Je užitečné si povšimnout, že velikost této změny není závislá na čase, což lze interpretovat tak, že se vektor  $\mathbf{e}_{r'}$  otáčí kolem bodu  $\mathbf{B}'$  rovnoměrnou úhlovou rychlostí  $\omega/2$ . Jak známo, vektory rychlosti a zrychlení takového pohybu jsou

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_{r'}}{dt} &= \frac{\omega}{2} \mathbf{f}_{r'}, \\ \frac{d^2\mathbf{e}_{r'}}{dt^2} &= -\frac{\omega^2}{4} \mathbf{e}_{r'}.\end{aligned}$$

Zde jsme označili  $\mathbf{f}_{r'}$  jednotkový vektor kolmý k  $\mathbf{e}_{r'}$  (vektor  $\mathbf{e}_{r'}$  otočený o  $\pi/2$  proti směru hodinových ručiček).

S pootočením vektoru  $\mathbf{r}'$  souvisí i změna jeho velikosti

$$r' = 2R \cos \alpha$$

o hodnotu (opět užitíme rozvoj do Taylorova polynomu, tentokrát stačí do prvního řádu)

$$dr' = -2R \sin \alpha d\alpha = \omega R \sin \alpha dt.$$

Pro přehlednění zápisu si dopředu vypočtíme veličinu

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \mathbf{e}_{r'} \cdot \frac{1}{r'^2} \right) = \frac{d\mathbf{e}_{r'}}{dt} \cdot \frac{1}{r'^2} + \mathbf{e}_{r'} \cdot \left( -\frac{2}{r'^3} \frac{dr'}{dt} \right) = \\ &= \frac{\mathbf{f}_{r'} \omega R \cos \alpha_0 - 2\mathbf{e}_{r'} R \omega \sin \alpha_0}{(2R \cos \alpha_0)^3} = \frac{\omega}{8R^2 \cos^3 \alpha_0} (\mathbf{f}_{r'} \cos \alpha_0 - 2\mathbf{e}_{r'} \sin \alpha_0).\end{aligned}$$

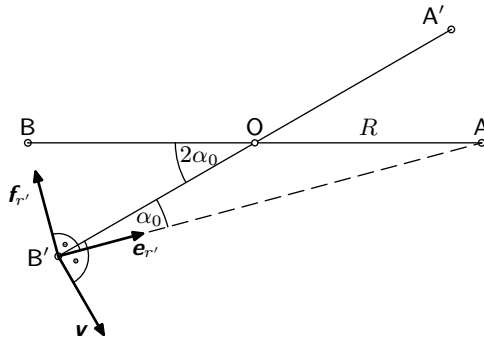
Nyní již stačí dosadit získané hodnoty do uvedeného vzorce a dostáváme velikost elektrické intenzity v bodě  $\mathbf{B}'$  jako

$$\mathbf{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{e}_{r'}}{(2R \cos \alpha_0)^2} + \frac{2R \cos \alpha_0}{c} \cdot \frac{\omega}{8R^2 \cos^3 \alpha_0} (\mathbf{f}_{r'} \cos \alpha_0 - 2\mathbf{e}_{r'} \sin \alpha_0) - \frac{\omega^2}{4c^2} \mathbf{e}_{r'} \right].$$

Elektrická síla působící na každý náboj je potom z Lorentzova vztahu rovna

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \mathbf{e}_{r'} \left( \frac{1}{4R^2 \cos^2 \alpha_0} - \frac{\omega \sin \alpha_0}{2Rc \cos^2 \alpha_0} - \frac{\omega^2}{4c^2} \right) + \mathbf{f}_{r'} \left( \frac{\omega}{4Rc \cos \alpha_0} \right) \right].$$

Abychom mohli vypočítat výkon, se kterým koná tato síla práci, potřebujeme určit úhel, který svírají vektory síly a rychlosti. Vektor rychlosti každého náboje je tečný ke kružnici, po které náboje obíhají, celá situace tedy vypadá stejně jako na obrázku 5. Z něho vidíme, že velikost úhlu mezi vektory  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{e}_{r'}$  je rovna  $\pi/2 - \alpha_0$  a úhel mezi vektory  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{f}_{r'}$  je roven  $\pi - \alpha_0$ .



Obr. 5. Vzájemné postavení vektorů

Výkon, kterým konají práci elektrické síly působící na každý náboj, je potom dán skalárním součinem

$$P_1 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{-q^2 \omega R}{4\pi \varepsilon_0} \left[ \sin \alpha_0 \left( \frac{1}{4R^2 \cos^2 \alpha_0} - \frac{\omega \sin \alpha_0}{2Rc \cos^2 \alpha_0} - \frac{\omega^2}{4c^2} \right) - \cos \alpha_0 \left( \frac{\omega}{4Rc \cos \alpha_0} \right) \right].$$

To však ještě není všechno. Výkon, vypočtený z uvedeného vzorce je kladný. Protože máme zanedbat tření a magnetická síla práci nekoná (je kolmá k pohybu), tedy pokud by vše bylo tak, jak jsme to doposud uvažovali, energie soustavy by se sama od sebe zvyšovala, náboje by se navzájem urychlovaly a měli bychom co do činění s perpetuem mobile! Tento rozpor se dá našťástí poměrně lehce vyřešit.

Zatím jsme totiž neuvvažovali energii, kterou s sebou nese elektromagnetické pole. Hustota energie skryté v elektrickém poli je úměrná druhé mocnině velikosti vektoru elektrické intenzity a rovna  $\varrho = \varepsilon_0 E^2/2$ . Pokud sem dosadíme za vektor elektrické intenzity výše odvozený vztah a vypočteme výkon, s jakým každý náboj vyzařuje do prostoru, dostaneme pro nerelativistické rychlosti nábojů vztah

$$P_2 = \frac{q^2 \omega^4 R^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3}.$$

Případné zájemce o odvození tohoto vztahu odkážeme na již citované Feynmanovy přednášky z fyziky, neboť se jedná o poněkud delší výpočet. Je důležité, že se tímto způsobem vyzaří více energie, než kolik získají náboje vzájemnou interakcí, ve výsledku tedy vyšetřovaná soustava jako celek energii ztrácí a k žádnému rozporu zde nedochází.

Uvedené dva způsoby jsou jedinými cestami, kterými naše soustava může získávat nebo ztrácet energii. Celkový výkon, který soustava spotřebovává a který jí musíme dodávat, abychom ji udrželi v rovnoměrné rotaci, je tedy součtem obou výkonů přes oba náboje

$$P_{\text{total}} = 2(P_2 - P_1),$$

kde velikosti jednotlivých výkonů jsou uvedeny výše. Upozorňujeme ještě jednou, že odvozené řešení je platné pouze pro nerelativistické rychlosti nábojů.

Uveďme nyní ve stručnosti, jak bychom příklad řešili v případě, že bychom se zajímali o malé rychlosti obou nábojů. Pro malé hodnoty argumentu  $x$  získáme Taylorovým rozvojem

$$\begin{aligned} \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, & \sin x &\approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \\ (1-x)^a &\approx 1 - ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 - \frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3. \end{aligned}$$

Důležité je, že pokud místo daných funkcí použijeme uvedené polynomy, dopustíme se chyby, která je řádově rovna první zanedbané mocnině  $\omega$ , čili pro malá  $\omega$  se užitím přibližných vzorců dopustíme pouze malé chyby.

Nyní můžeme s těmito přibližnými vztahy vyřešit (alespoň přibližně pro malé rychlosti) tu ošklivou rovnici pro  $\alpha_0$ , se kterou jsme neuměli hnout,

$$\alpha_0 = \frac{\omega R}{c} \cos \alpha_0.$$

Předpokládejme, že můžeme řešení naší rovnice vyjádřit ve tvaru

$$\alpha_0 = A + B \cdot \frac{\omega R}{c} + C \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^3,$$

a podívejme se, zdali nám tento předpoklad přinese nějaký užitek. Rozvoj jsme dělali do třetího řádu, protože se v dalších úpravách dostaneme na úroveň mocniny vyzařovacího členu. Dosadíme

$$\begin{aligned} A + B \cdot \frac{\omega R}{c} + C \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^3 &= \\ &= \frac{\omega R}{c} - \frac{\omega R}{2c} \left( A + B \cdot \frac{\omega R}{c} + C \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^3 \right)^2 + \\ &\quad + \frac{\omega R}{24c} \left( A + B \cdot \frac{\omega R}{c} + C \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^3 \right)^4. \end{aligned}$$

Aby byla námi navržená hodnota skutečně řešením, musí se na obou dvou stranách rovnice rovnat koeficienty u nejnižších mocnin. Srovnáním koeficientů u těchto mocnin  $\omega$  (nejprve u nulté, pak u první až u třetí) dostáváme pro hodnoty koeficientů postupně

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{2}.$$

Řešení rovnice je tedy přibližně

$$\alpha_0 \approx \frac{\omega R}{c} - \frac{1}{2} \frac{\omega^3 R^3}{c^3}.$$

Doufám, že vás již tato krátká ukáзка přesvědčila o tom, že výše uvedené přibližné vzorce jsou velice užitečné a že díky nim dokážeme zjednodušit mnohé ošklivé vztahy. Pokud jste tyto přibližné vzorce ještě nikdy neviděli, tak vám vřele doporučujeme, abyste si je dobře zapamatovali, jelikož vám mnohdy pomohou a jistě se s nimi ještě setkáte.

Nyní počítejme všechny členy, které nás zajímají (vzhledem k dalšímu postupu musíme každý člen určit do řádu  $\omega^3$ , abychom se dostali na úroveň vyzařovacího členu):

$$\begin{aligned} \sin \alpha_0 &\approx \alpha_0 - \frac{\alpha_0^3}{6} \approx \frac{\omega R}{c} - \frac{2}{3} \left(\frac{\omega R}{c}\right)^3, \\ \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} &= (1 - \sin^2 \alpha_0)^{-1} \approx 1 + \sin^2 \alpha_0 \approx 1 + \alpha_0^2 \approx 1 + \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2, \\ \frac{\sin \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} &= \sin \alpha_0 \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} \approx \left(\alpha_0 - \frac{\alpha_0^3}{6}\right) \cdot (1 + \alpha_0^2) \approx \frac{\omega R}{c} + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega R}{c}\right)^3, \\ \frac{1}{\cos \alpha_0} &= (1 - \sin^2 \alpha_0)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\sin^2 \alpha_0}{2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2. \end{aligned}$$

Tyto výrazy můžeme dosadit do odvozeného vztahu pro výkon  $P_1$  a dostaneme

$$\begin{aligned}
 P_1 &\approx \frac{-q^2 \omega R}{4\pi \varepsilon_0} \left( \left( \frac{\omega R}{c} - \frac{2}{3} \left( \frac{\omega R}{c} \right)^3 \right) \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \left[ \frac{1}{4R^2} \cdot \left( 1 + \left( \frac{\omega R}{c} \right)^2 \right) - \frac{\omega}{2Rc} \cdot \left( \frac{\omega R}{c} + \frac{1}{3} \left( \frac{\omega R}{c} \right)^3 \right) - \frac{\omega^2}{4c^2} \right] - \left( \frac{\omega}{4Rc} \right) \Big) \approx \\
 &\approx \frac{-q^2 \omega R}{4\pi \varepsilon_0} \left( \left( \frac{\omega R}{c} - \frac{2}{3} \left( \frac{\omega R}{c} \right)^3 \right) \left[ \frac{1}{4R^2} - \frac{\omega^2}{2c^2} \right] - \left( \frac{\omega}{4Rc} \right) \right) \approx \\
 &\approx \frac{-q^2 \omega R}{4\pi \varepsilon_0} \left( -\frac{2\omega^3 R}{3c^3} \right) \approx \frac{1}{6\pi \varepsilon_0} \frac{q^2 \omega^4 R^2}{c^3}.
 \end{aligned}$$

Tento výsledek nás dostal do pěkných potíží! Říká nám totiž, že energie, kterou náboje získají vzájemnou interakcí je s přesností do řádu  $\omega^4$  stejně velká, jako energie, kterou náboje vyzáří. Tyto dva příspěvky se vzájemně vyruší, takže celkový výkon, který musíme nábojům dodávat, je úměrný nejméně páté mocnině úhlové rychlosti otáčení. Což je jistě zajímavý výsledek sám o sobě, nicméně pokud bychom chtěli i konstantu úměrnosti, museli bychom právě uvedený postup opakovat s tím, že bychom museli všechny členy určovat s přesností do páté mocniny  $\omega$ . Jak jistě tušíte, výpočet je to poměrně zdlouhavý a ani na něj zde nemáme místo. Proto zde uvedeme pouze výsledek, ke kterému mohou zájemci dojít zcela analogickým postupem, jaký jsme zde právě uvedli. Výkon spotřebovaný jedním nábojem v důsledku vzájemné interakce je potom přibližně

$$P_1 = \frac{28}{60} \cdot \frac{\omega^6 R^4}{\pi \varepsilon_0 c^5}.$$

Tím jsme se však dostali do jiného problému. Tak malé odchylky již na úrovni relativistických korekcí vztahu pro vyzářovaný výkon. Provedeme-li totiž výpočet výkonu vyzářeného zrychlující částicí relativisticky, dostaneme se ke vztahu

$$P_2 = \frac{q^2 \omega^4 R^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \approx \frac{q^2 \omega^4 R^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \left(1 + 3 \frac{v^2}{c^2}\right),$$

platnému snad již obecně. Zájemci jej naleznou třeba v knize D. J. Griffitha: *Introduction to Electrodynamics*.

Sečtením dvou posledních vztahů potom dostáváme pro výkon nutný k udržení rovnoměrné rotace soustavy výraz

$$P_{\text{total}} = \frac{29}{15} \cdot \frac{\omega^6 R^4}{\pi \varepsilon_0 c^5}.$$

Závěrem bychom chtěli vyzdvihnout *Dalimila Mazáče*, který měl jako jediný skoro správně řešení a zaslouží si za to prémii.

**Pavel Motloch**

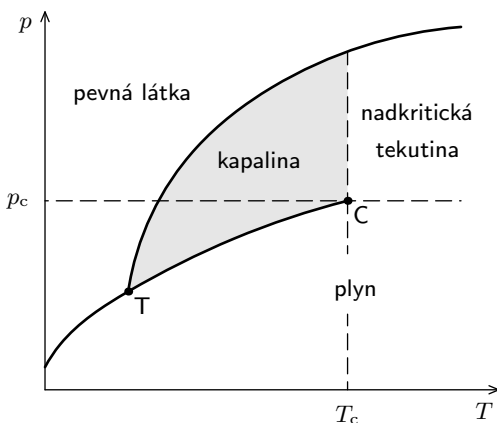
pavel@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha II. P ... zachraňte bublinu?** (4 body; průměr 2,32; řešilo 22 studentů)

Batyskaf Trieste se ponořil do velké hloubky Mariánského příkopu a vypustil bublinu, která začala stoupat... Když však podle stavové rovnice ideálního plynu vypočítáte hustotu vzduchu v bublině, zjistíte, že je bublina těžší než voda. Je to možné?

Pokud souhlasíte, vysvětlete svoji odpověď. Pokud nesouhlasíte, vypočítejte, jaké budou parametry bubliny (především hustota).  
Úlohu navrhla Lenka Zdeborová.

Vzpomeňme nejprve, čím je charakteristický dobře známý model ideálního plynu. Rovnice popisující jeho stav je odvozená čistě z kinetických vlastností molekul, jež ho tvoří, nutně tedy zanedbává jejich vzájemné ovlivňování. Ale závislost potenciální energie dvou molekul na jejich vzdálenosti lze aproximovat konstantou (nulou) jen pro velké vzdálenosti částic – tj. pro plyn o nízké hustotě, tedy za nízkých tlaků či při energiích molekul podstatně vyšších než příslušná potenciální energie, tedy při velkých teplotách. Druhá idealizace spočívá v představě nulového rozměru částic. Ve skutečné látce existuje mez, za kterou už prostě stlačit nejde (mají-li zůstat zachovány elektronové obaly). Velikost vzájemné interakce charakterizujeme konstantou  $a$  a minimální objem označme  $b$ . Pak můžeme následujícím způsobem vylepšit stavovou rovnici ideálního plynu na tzv. van der Waalsovu rovnici



Obr. 6. Fázový diagram

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT.$$

Pro známé (resp. dohledatelné) hodnoty  $p = h_{\rho} g \doteq 1100 \text{ atm}$ ,  $T \approx 4^\circ\text{C}$  (teplota nejhustší vody),  $a = 0,136 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{mol}^{-1}$  a  $b = 3,64 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3\cdot\text{mol}^{-1}$  dostáváme kubickou rovnici pro molární objem  $V_m$ , již lze numericky řešit. Vezmeme-li v úvahu  $\rho = M_m/V_m$ , kde  $M_m$  je molární hmotnost vzduchu ( $29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ), dostaneme

$$\rho \doteq 580 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

To je docela hodně (přestože méně než cca  $1400 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , které dává stavová rovnice pro ideální plyn) a na místě je otázka, nakolik v pořádku je představa o zachování plynosti takto komprimované bubliny. Běžná zkušenost s reálným plynem říká, že při dostatečném tlaku začne kondenzovat na kapalinu<sup>5</sup>.

Na obrázku je znázorněn typický fázový diagram plynu i pro hodně vysoké teploty a tlaky. Je-li teplota vyšší než kritická teplota ( $T_c$ ), plyn při stlačování nikdy neprotne křivku rovnováhy mezi kapalinou a plynem, nikdy tedy nezkondenzuje, pouze se dostaneme do zajímavé oblasti „nadkritické tekutiny“, v níž při žádném tlaku nenastane rovnováha mezi kapalinou a její sytou párou (tj. nevytvoří se nikdy něco jako kapičky, natož pak hladina). V tabulkách se lze dočíst,

<sup>5)</sup> Viz také diskuze k úloze II.E v XIX. ročníku.



že kritická teplota vzduchu je  $T_c = -140,7^\circ\text{C} \ll 4^\circ\text{C}$ . Jsme tedy hluboko v nadkritické oblasti a rovnici lze použít, byť s určitou nepřesností – podle NIST<sup>6</sup> je hustota pro uvedené hodnoty asi  $615\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Lepší shody bychom dosáhli s lepší stavovou rovnicí, ty pak ale vyžadují více informací o popisovaném plynu.

Jak už bylo řečeno výše, od určitých tlaků je plyn takřka nestlačitelný kvůli nenulovému rozměru částic – stane se z něj pevná látka<sup>7</sup>.

A konečně na úplný závěr této dvojdílné úlohy podotkneme, jak někteří z vás připomněli, že při těchto tlacích se bublina ve vodě rozpustí ještě než uplave zlomek potřebné dráhy.

**Jakub Benda**

[jakub@fykos.mff.cuni.cz](mailto:jakub@fykos.mff.cuni.cz)

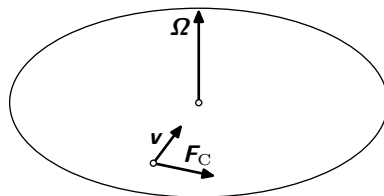
## Úloha II. E ... bubo bubo (7 bodů; průměr 3,50; řešilo 20 studentů)

Experimentálně proveďte tvrzení, že vinnou rotace Země se na severní (jižní) polokouli vír vody vypouštěné otáčí doprava (doleva). Mají-li mít vaše závěry váhu, musíte provést dostatečný počet měření v různých podmínkách.

*Během návštěvy Austrálie vymyslel Honza Prachař.*

### Teorie

Hned na začátku opravme zadání úlohy, které je špatně. Kvůli rotaci Země by se měl vír otáčet *doleva* na severní polokouli, tj. ve směru rotace Země! Proč tomu tak je? Nejdříve se podívejme, co by se s vodou dělo, kdyby nebyla rotace Země. Tehdy je to jednoduché – voda ze všech stran v blízkosti otvoru prostě směřuje do otvoru a propadá jím dolů. Protože žádný směr otáčení není lepší než ten opačný, voda by měla bez virů prostě propadnout otvorem. Naproti tomu často vír při vytékání vidíme. Co když stačí jenom malý nepostřehnutelný vír, který rozhodne směr, a voda už si vyvine mohutnější vír v tomto směru? Při pozorování takového víru se často zdá, jako by se vír roztočil a získal na síle. Ale není to tak. Faktem je, že celkový moment hybnosti vody v nádobě musí *klesat* (třením o povrch nádoby a vytékáním rotující vody), a tak se malý vír utlumí dříve, než voda stihne vytéct. Proto není možné, aby z libovolně malého víru vznikl velký – voda nemá odkud získat moment hybnosti. Pokud ve vodě vidíme vír, už na začátku musel ve vodě být. Zdánlivé zesílení víru je způsobeno poklesem a přiblížením vody ke středu nádoby (efekt krasobruslařky).



Obr. 7. Coriolisova síla

Jak do hry vstoupí rotace Země? Pro zjednodušení si představme, že na severním pólu máme mísu s vodou a otvorem a my ji pozorujeme shora z inerciální soustavy, která se neotáčí. Pokud je otvor uzavřen, voda je klidná a rotuje spolu se Zemí doleva rychlostí jedna otočka za 24 hodin. Když teď otevřeme otvor, voda začne vytékat dolů. Přitom voda proudí také směrem od obvodu ke středu nádoby a dochází k efektu krasobruslařky – rychlost proudící vody se

<sup>6</sup>) National Institut of Standards and Technology; <http://webbook.nist.gov/chemistry/fluid>

<sup>7</sup>) Vzpomeňme jádro Jupitera z kovového vodíku podle A. C. Clarka. Jaký tlak je potřeba k tomuto „zmrazení“ vzduchové bubliny, se mi bohužel zjistit nepodařilo, ale dá se očekávat, že bude vyšší než ten na dně moře; např. pro oxid uhličitý se jedná cca o tři tisíce atmosfér.

zvyšuje, a voda tedy předbíhá normálně rotující vodu. Na Zemi se zdá, že se voda odklání od původního směru doprava, a tedy celý vír se otáčí *doleva* (viz obr. 8).

Z hlediska pozorovatele na Zemi vysvětlíme jev tak, že Země rotuje úhlovou rychlostí<sup>8</sup>  $\Omega$  a na každé těleso, které se vzhledem k ní pohybuje rychlostí  $\mathbf{v}$ , působí v soustavě Země *Coriolisova síla*

$$\mathbf{F}_C = -2m\Omega \times \mathbf{v},$$

kteřá ho odklání na severní polokouli doprava; vzhledem ke středu víru má tato síla moment roztáčející vodu proti směru hodinových ručiček, tj. *doleva*.

Zemská rotace má tendenci stáčet vír doleva, otázkou však je, zda je tato tendence dostatečně silná. Abychom získali aspoň nějakou představu o velikosti tohoto vlivu, odhadněme úhlovou rychlost, na jakou by Coriolisova síla roztočila vodu ve válcové míse poloměru  $R$ , výšky  $H$  a s otvorem poloměru  $a$ . Použijeme druhou impulsovou větu: časový účinek momentu Coriolisovy síly se rovná změně momentu hybnosti kapaliny. Z takové mísy bude voda vytékat rychlostí (Torricelliho vzorec)

$$v_{\downarrow} \sim \sqrt{Hg}$$

po dobu

$$t \sim \frac{V}{v_{\downarrow} S} \sim \frac{HR^2}{\sqrt{Hga^2}} \sim \frac{R^2}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Během vytékání na vodu působí celkový moment Coriolisovy síly, který odhadneme jako

$$M_C \sim F_C R \sim m v_t \Omega R,$$

kde  $m$  je hmotnost vody a  $v_t$  typická dostředivá rychlost vody; na začátku je voda ve vzdálenosti  $R$ , na konci je všechna voda ve středu, tudíž platí

$$v_t \sim \frac{R}{t}.$$

Potřebujeme ještě určit změnu momentu hybnosti – ať se na konci vytékání kapalina na okraji nádoby otáčí úhlovou rychlostí  $\omega$  – pak je moment hybnosti kapaliny

$$L \sim mR^2\omega.$$

Tyto odhady jsou jenom řádové, protože nedokážeme přesně vypočítat, kde má kapalina jakou rychlost. Postačí ale pro řádový odhad úhlové rychlosti, kterou získá voda<sup>9</sup>.

Nyní použijeme druhou impulsovou větu a postupně dosadíme předchozí výsledky

$$\begin{aligned} M_C t &\sim L, \\ m \frac{R}{t} \Omega R t &\sim m R^2 \omega, \\ \omega &\sim \Omega. \end{aligned}$$

<sup>8)</sup> V dalším textu budeme pracovat s úhlovou rychlostí jako se skalárem, a proto ji budeme značit pouze  $\Omega = |\Omega|$ .

<sup>9)</sup> Můžete si zkusit udělat přesnější model vytékání a pohybu kapaliny v nádobě a porovnat získané výsledky. Měli by vyjít řádově stejně bez ohledu na model – to je pěkné na řádových odhadech a rozměrové analýze.

Dostáváme zajímavý výsledek, že Coriolisova síla dokáže roztočit vodu nanejvýš na úhlovou rychlost Země! Jde ale samozřejmě jen o řádový odhad. Aby bylo možné vír zpozorovat, musí se voda otočit o nějaký znatelný úhel, např.  $2\pi$ ; k tomu je zapotřebí čas

$$t = \frac{2\pi}{\Omega} = T.$$

Tedy zhruba jeden den. To je ohromně mnoho času pro náš vír v misce, ale ne až tak moc pro 100km vír vzduchu v atmosféře. Proto můžeme vidět na družicových snímcích víry roztočené Coriolisovou silou (a taky ty ostatní) – než vzduchové masy projdou k centru tlakové níže, uplyne hodně času a síla má čas působit. Abychom mohli pozorovat stočení víru i v naší misce, potřebujeme tedy prodloužit čas vytékání  $t$  – a to jediné zvětšením rozměrů naší misky. Pro námi uvažovanou válcovitou misku platí

$$T \sim \frac{R^2}{a^2} \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Pokud budeme chtít misku s proporcemi  $H = R = 100a$ , pak by její poloměr měl být

$$R \sim \frac{gT^2}{100^4} \sim 1 \text{ km}.$$

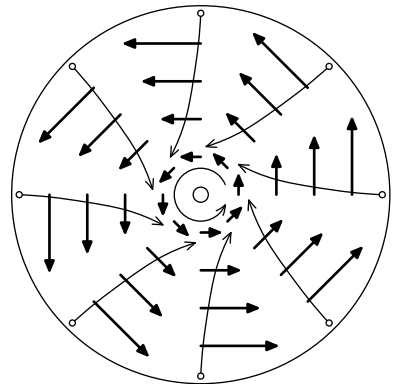
Ale to už berme s velkou rezervou.

#### Provedení experimentu

Každou teorii je třeba prověřit v praxi – experiment jsme děláli v koupelně s malou mističkou, lívkem a rotačním paraboloidem (zrcátko ze svítilny). Výtokový otvor jsme uzavírali a otevírali kouskem plastelíny. Na hladinu vody jsme nasypali trochu mouky na zviditelnění jejího pohybu, pak jsme ji nechali uklidnit a otevřeli otvor. *Ve všech případech* voda opakovaně vytekla bez jakékoli rotace. Malé víry, které v ní třeba i zůstaly po nalití vody, byly nemilosrdně utlumeny viskozitou vody. Zkoušeli jsme také vodu roztočit v obou směrech a sledovat, jestli se bude točit v daném směru, nebo dojde k onomu záhadnému „obrácení víru“, který někteří z vás popisovali ve svých řešeních. Voda si ale dostatečně silné roztočení bez problémů udrží, žádné otočení víru se nekoná. To je jasné potvrzení našich pochybností – rotace Země má vskutku zanedbatelně malý vliv na směr víru. Na směr výsledného víru má vliv kdeco, třeba i způsob, jakým vytáhneme špunt, zbytkové víry, tvar nádoby, ...

#### Komentář k došlým řešením

Ve vašich řešeních se často objevil nesprávný předpoklad, že vír by se měl točit doprava, který následně velká část z vás experimentálně „dokázala“. Je nemožné říci přesně, proč jste dostali takové podivné výsledky (třeba 100% pravotočivých vírů), myslím si však, že to je vinou špatného postupu měření – část z vás vytahovala špunt z umyvadla nebo vany, což



Obr. 8. Stáčení vodního víru

rozvíří vodu úplně nepředpovědatelným směrem a efekt Coriolisovy síly úplně překryje. Dalším zdrojem chyb bylo pravděpodobně nedostatečné ustálení vody. Zajímavý byl nápad některých z vás, že na rotaci víru má vliv magnetické pole Země. Není mi znám žádný mechanismus, jakým by se to mohlo dít, v každém případě tento efekt bude mnohem menší než působení Coriolisovy síly – voda je nemagnetická a nenabitá! Tento pokus je pro nás skvělým příkladem, jak lidi rádi přijímají různá líbivá vysvětlení a také jak lehké je přesvědčit samého sebe a udělat experiment a jeho interpretaci úplně špatně. Pozor na to!

*Ján Lalinský*

jano@fykos.mff.cuni.cz

## Úloha II. S ... porcování divokých rovin (6 bodů; průměr 4,00; řešilo 7 studentů)

### Skladování uranu

Palčivá otázka jaderné energetiky je skladování vyhořelého radioaktivního paliva. Většinou se skladuje ve válcových člancích ponořených ve vodní lázni, která drží jejich povrch na konstantní teplotě asi  $20^\circ\text{C}$ . Na vás je nyní zjistit, jaké bude rozložení teploty v člancích tvaru kvádrů se čtvercovou podstavou o hraně délky 20 cm. Článek bude poměrně vysoký, a proto nás zajímá rozložení teplot v příčném řezu. Uran bude zaujímat koncentrický kvádr se čtvercovou podstavou o hraně 5 cm. Ze zkušenosti s válcovými kapslemi víme, že bude mít konstantní teplotu okolo  $200^\circ\text{C}$ .

### Zahřívající se drát

Máme velmi dlouhý drát kruhového průřezu o poloměru  $r$  z materiálu o tepelné vodivosti  $\lambda$  a měrné elektrické vodivosti  $\sigma$ . Přiložíme na něj konstantní elektrické napětí. Necht' je intenzita elektrického pole (tj. napěťový spád) uvnitř drátu konstantní, rovnoběžná s jeho osou a její velikost buď  $E$ . Pak drátem bude procházet proud o plošné hustotě  $j = \sigma E$  a bude se vytvářet jouleovské teplo s objemovým výkonem  $p = \sigma E^2$ .

Protože materiál drátu má nenulovou tepelnou vodivost, vytvoří se v něm jisté rovnovážné rozložení teploty, které – jak víme – splňuje Poissonovu rovnici  $\lambda \nabla^2 T = -p$ . Předpokládáme, že okraj drátu udržujeme na dané teplotě  $T_0$ . Tím máme danou okrajovou podmínku potřebnou k vyřešení rovnice. Vzhledem k symetrii problému se můžeme omezit na její řešení pouze ve dvou rozměrech – na průřezu vodiče (teplota jistě nebude záviset na posunutí podél osy vodiče). Nyní by již bylo jednoduché problém vyřešit popsánými metodami.

My si však situaci maličko zkomplikujeme a budeme předpokládat (zcela oprávněně), že měrná elektrická vodivost  $\sigma$  závisí na teplotě. Budeme tedy mít rovnici typu  $\nabla^2 T = f(T)$ .

Pokuste se tuto rovnici numericky vyřešit pro nějakou danou závislost vodivosti na teplotě (můžete si ji najít v literatuře, na internetu nebo si klidně nějakou vymyslet) a najít tak rozložení teploty na průřezu drátu. Můžete se pokusit měnit intenzitu elektrického pole  $E$  a nakreslit voltampérovou charakteristiku drátu, vyzkoušet více druhů závislostí  $\sigma(T)$  (třeba pro polovodič, jehož vodivost s rostoucí teplotou na rozdíl od obyčejného kovu roste) atd.

### Kapacita krychle

Vypočítejte kapacitu dokonale vodivé krychle o straně délky  $2a$ . Pokud se budete nudit, můžete zkusit kvádr (a třeba závislost kapacity na délkách jednotlivých stran), případně jiné geometrické objekty.

*Nápověda.* Kapacita je poměr náboje na krychli rozmístěného ku potenciálu povrchu krychle (za předpokladu, že potenciál v nekonečnu je nulový). Problém tedy lze řešit tak, že si zvolíme libovolně potenciál krychle, vyřešíme Laplaceovu rovnici  $\nabla^2 \varphi = 0$  vně krychle a vypočítáme

celkový náboj na krychli užitím Gaussova zákona (tj. určením intenzity elektrického pole derivováním potenciálu a výpočtem jeho toku vhodně zvolenou plochou obklopující krychli).

Zadali autoři seriálu Marek Pechal a Lukáš Strítěcký.

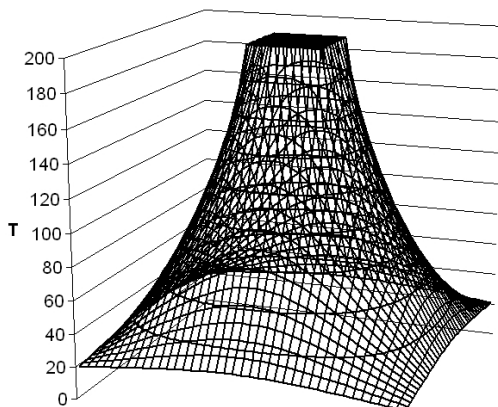
### Skladování uranu

Rovnovážné rozložení teploty  $T$  určíme vyřešením statické rovnice vedení tepla bez objemových tepelných zdrojů, tedy Laplaceovy rovnice

$$\nabla^2 T = 0.$$

S touto se vypořádáme pomocí jednoduché iterační metody<sup>10</sup>. Pro jednoduchost jsme i tentokrát k řešení použili Excel, programování v Pascalu si necháme na zbylé dvě úlohy.

Pouhým jednoduchým zkonstruováním vhodné tabulky jsme tak téměř bez práce získali následující graf.



Obr. 9. Rozložení teploty v článku

### Zahřívající se drát

Rovnovážné rozložení teploty v materiálu o tepelné vodivosti<sup>11</sup>  $\lambda$  se opět řídí rovnicí vedení tepla, tentokrát však včetně členu představujícího objemové tepelné zdroje<sup>12</sup>

$$\lambda \nabla^2 T = -p,$$

kde  $p$  značí objemovou hustotu tepelného výkonu. V našem případě můžeme využít translační symetrie problému podél osy drátu  $z$ , a stačí tedy řešit příslušný dvourozměrný problém v rovině  $xy$  (teplota vůbec nebude záviset na  $z$ ).

<sup>10)</sup> Viz excelovský „program“ `uran.xls` na našich webových stránkách.

<sup>11)</sup> Budeme pro jednoduchost předpokládat, že tepelná vodivost se nemění s teplotou.

<sup>12)</sup> Omlouváme se za chybu v zadání, kde se nám zaběhlo znaménko minus před  $p$ .

Pokud je napěťový spád v drátu roven  $E$ , je proudová hustota v každém jeho bodě rovna  $\sigma E$ , přičemž konstanta úměrnosti  $\sigma$  je měrná elektrická vodivost materiálu drátu. Pro hustotu tepelného výkonu tedy platí vztah

$$p = \sigma E^2.$$

Dosažením tak dostáváme PDR, kterou musíme řešit,

$$\nabla^2 T = -\frac{E^2}{\lambda} \sigma(T).$$

Okrajová podmínka je dána udržováním teploty povrchu drátu na dané konstantní teplotě  $T_0$ , tedy musí platit  $T = T_0$  na okraji průřezu drátu.

Úloha se kromě translační symetrie vyznačuje také rotační symetrií kolem osy drátu. Toho bychom mohli využít a hledat  $T$  jako funkci pouze vzdálenosti od osy. Neuděláme to ze dvou důvodů. Jednak si chceme procvičit řešení PDR a také by se nám při přechodu k axiálním souřadnicím objevil místo laplaciánu výraz  $T''(R) + \frac{1}{R}T'(R)$ , který by působil potíže při malých hodnotách  $R$  (které se vyskytuje ve jmenovateli).

Vytvoříme si tedy pole uzlových bodů pokrývajících celý kruhový průřez drátu. Rozmístíme je pro jednoduchost do pravoúhlé sítě. Souřadnice jednotlivých bodů budou  $[iR/N, jR/N]$ , kde  $N \in \mathbb{N}$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}$  a  $i^2 + j^2 < N^2$ . Teplotu v uzlovém bodě o souřadnicích  $[iR/N, jR/N]$  označme  $T_{ij}$ .

Laplacián teploty diskretizujeme obvyklým způsobem jako

$$\nabla^2 T_{ij} \sim \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{ij}}{h^2},$$

přičemž pro  $i^2 + j^2 \geq N$  pokládáme  $T_{ij} = T_0$  kvůli okrajovým podmínkám.

Možná vás napadá, že jsme okrajové podmínky poněkud odbyli, protože jsme vlastně kruhový okraj oblasti nahradili „něčím kostrbatým“. To je samozřejmě pravda. Pokud vás dosažená úroveň přesnosti neuspokojuje, můžete do svého programu implementovat algoritmus, který bude v okrajových bodech sítě (tj. v těch, které mají méně než čtyři sousedy) zohledňovat fakt, že vzdálenost jednotlivých uzlových bodů od okraje není vždy rovna  $h$  (viz obrázek 10).

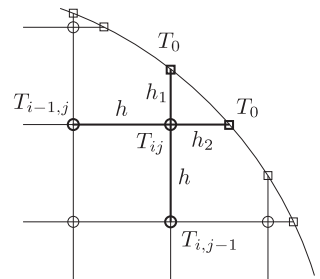
Je ovšem třeba si trochu pohrát s diskretními aproximacemi příslušných druhých derivací a odvodit správný výraz pro laplacián, což zde nebudeme provádět. Pro inspiraci však můžete nahlédnout do hotového demonstračního programu<sup>13</sup>.

Jestliže uvažujeme lineární závislost měrného odporu na teplotě, tedy pro vodivost platí

$$\sigma(T) = \frac{\sigma_0}{1 + \alpha(T - T_0)},$$

bude mít iterační vztah tvar

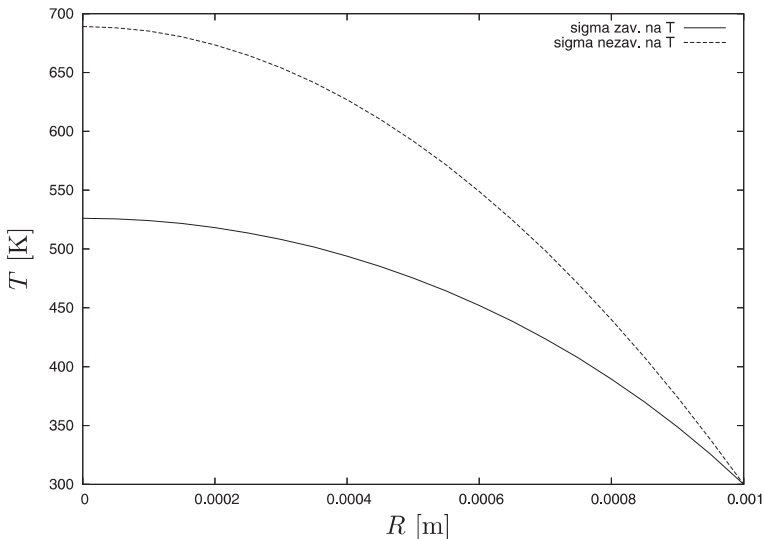
$$T_{ij} = \frac{1}{4} \left( T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + \frac{h^2 E^2 \sigma_0}{\lambda(1 + \alpha(T_{ij} - T_0))} \right).$$



Obr. 10. Odlišné kroky mezi uzlovými body na okraji sítě

<sup>13</sup>) Viz `drat.pas` na našem webu.

V demonstračním programu jsme položili  $N = 20$  a počítali jsme s konstantami  $\sigma_0$ ,  $\lambda$  a  $\alpha$  pro měď. Pro srovnání jsme do grafu vynesli teplotní rozložení v závislosti na vzdálenosti od osy drátu vypočítané pro  $E = 1000 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$  a  $R = 1 \text{ mm}$  společně s tímž rozložením bez zohlednění závislosti vodivosti na teplotě (tedy vlastně pro  $\alpha = 0$ ).



Obr. 11. Závislost teploty na vzdálenosti od osy drátu se započítáním závislosti vodivosti na teplotě a bez něj

V grafu je na první pohled vidět, že závislost vodivosti na teplotě se skutečně při vyšších proudech nezanedbatelně projevuje (lépe by možná bylo mluvit o extrémně vysokých proudech – při pohledu na parametry výpočtu je vám nejspíš jasné, že vlastně zkratujeme napětí 1000 V drátem dlouhým jeden metr).

Dále jsme do grafu naobrázku 12 vykreslili voltampérovou charakteristiku měděného drátu (opět pro  $R = 1 \text{ mm}$ ), která ovšem není kvůli závislosti vodivosti na teplotě lineární.

Není snad však třeba zdůrazňovat, že vypočtená nelinearita se v praxi při „rozumných“ proudech neprojeví.

Také je dobré si uvědomit, že jestliže se podle našeho výpočtu při připojení napětí 1000 V na metr dlouhý měděný drát o průřezu 1 mm teplota uvnitř drátu zvýší o cca  $250 \text{ }^\circ\text{C}$ , v žádném případě to neznamená, že tomu tak bude i v reálné situaci. Předně jsme předpokládali, že se povrch drátu udržuje na teplotě okolí. To ovšem při tak vysokém tepelném výkonu, s jakým bychom měli v uvedené situaci co do činění, určitě nelze provést bez vydatné pomoci nějakého chladicího zařízení. Odvádění tepla z drátu v praxi také dosti ztěžuje izolace, kvůli níž také nesmí teplota povrchu příliš stoupnout.

Jak vidíte, má náš model jisté vady, které by asi bránily jeho praktickému použití, ale jako cvičení na PDR snad posloužil dobře.

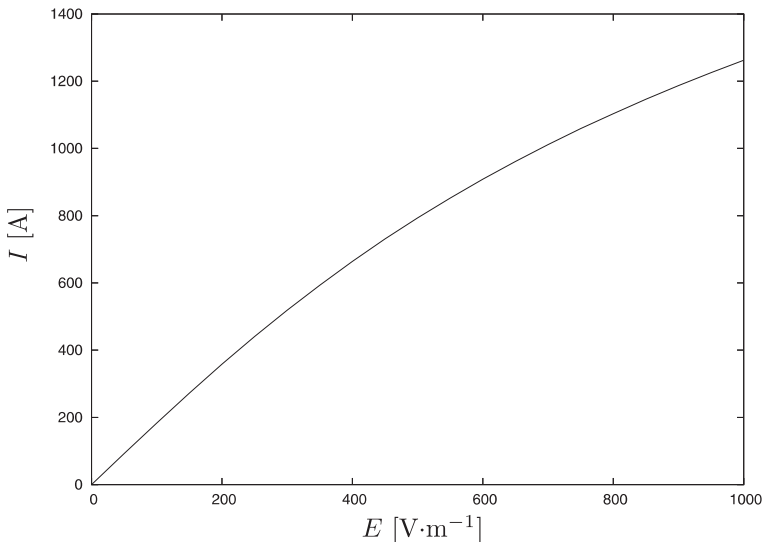
## Kapacita krychle

Určení kapacity krychle není v principu příliš obtížný problém. Stačí pouze vyřešit Laplaceovu rovnici

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

pro potenciál  $\varphi$  s příslušnými okrajovými podmínkami, vypočtením toku intenzity elektrického pole určit náboj a dopočítat kapacitu z definičního vztahu  $C = Q/U$  (viz návod v zadání úlohy).

Na potíže však narazíme, jakmile se dostaneme k psaní vlastního algoritmu. Jelikož jde o třírozměrnou úlohu, roste počet uzlových bodů jako  $N^3$ , kde  $N$  je počet bodů v jednom směru. Pokud tedy zjemníme dělení sítě desetkrát, zvýší se paměťová náročnost algoritmu tisíckrát stejně jako počet kroků potřebný k dosažení určité dané přesnosti (pro jednoduchou relaxační metodu popsanou např. ve studijním textu je potřebný počet iterací přibližně úměrný počtu uzlových bodů). Protože však každý krok vyžaduje zpracování hodnot potenciálu v každém z uzlových bodů, zvýší se počet „elementárních“ operací dokonce milionkrát.



Obr. 12. Voltampérová charakteristika Cu drátu o poloměru 1 mm

Zřejmě bychom si tedy s jednoduchou relaxační metodou mohli troufnout jen na  $N$  v řádu několika (málo) desítek. Musíme se proto uchýlit k několika užitečným trikům a trochu upravit použitou metodu.

Na začátek však trochu teorie. Je známo, že potenciál konečného nabitého tělesa se dá zapsat ve sférických souřadnicích  $r, \vartheta, \varphi$  pomocí tzv. kulových funkcí  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ , kde  $l \in \mathbb{N}_0$  a  $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$ , jako

$$\varphi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

kde  $q_{lm}$  jsou vhodné komplexní konstanty. Přitom  $q_{00}$  je rovno celkovému náboji zdroje  $Q$ , koeficienty  $q_{1m}$  souvisejí s jeho tzv. dipólovým momentem,  $q_{2m}$  s kvadrupólovými momenty,  $q_{3m}$  s oktapólovými atd.



Vzhledem k symetrii krychle jsou první nenulové koeficienty  $q_{lm}$  po  $q_{00}$  až ty odpovídající oktapólovému momentu. Jejich příspěvek ovšem s rostoucím  $r$  klesá jako  $r^{-4}$ , další členy pak ještě rychleji. Můžeme tedy odhadnout, že ve vzdálenosti  $ka$  od středu krychle o straně  $2a$  je příspěvek vyšších momentů asi  $k^4$ -krát menší než člen  $Q/4\pi\epsilon_0 r$ .

Jestliže tedy oblast, v níž budeme řešit Laplaceovu rovnici, omezíme zvnější kulovou plochou o poloměru  $r_0 = k_0 a$ , na níž budeme předpokládat konstantní nulový potenciál, dopustíme se relativní chyby cca  $k_0^{-4}$  (v jistém vágním smyslu, který nebudeme blíže zkoumat). Zároveň ovšem musíme vzít v úvahu, že jsme takto posunuli hladinu nulového potenciálu z nekonečné do konečné vzdálenosti. Potenciál tedy bude mít asymptotický tvar

$$\varphi(r) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Po numerickém vyřešení Laplaceovy rovnice v popsané oblasti si můžeme dosazením určitého  $r = r_1$  menšího než  $r_0$  (ale ne příliš, abychom stále mohli využívat výše uvedený asymptotický tvar) vyjádřit

$$Q = 4\pi\epsilon_0 \varphi(r_1) \frac{r_0 r_1}{r_0 - r_1}.$$

Nyní by ovšem bylo vhodnější odhadnout chybu takto získaného výsledku jako  $k_1^{-4}$ , kde  $r_1 = k_1 a$ . Přesnost by bylo možno poněkud zvýšit, pokud bychom místo hodnoty potenciálu v jednom konkrétním bodě ve vzdálenosti  $r_1$  od počátku za  $\varphi(r_1)$  vzali hodnotu zprůměrovanou přes celou kulovou plochu o poloměru  $r_1$ . Není to však příliš nutné, pokud je  $k_1$  dostatečně velké.

Kapacitu krychle pak získáme vydělením náboje  $Q$  napětím  $U$  mezi jejím povrchem a nekonečnem, které je rovno

$$U = \varphi_0 - \varphi(\infty) = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \varphi_0 + \varphi(r_1) \frac{r_1}{r_0 - r_1},$$

kde  $\varphi_0$  je potenciál na povrchu krychle. Tak dostaneme

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{\varphi(r_1) r_0 r_1}{(r_0 - r_1) \varphi_0 + r_1 \varphi(r_1)}.$$

Při samotném numerickém řešení Laplaceovy rovnice můžeme s výhodou využít symetrie problému vzhledem k zrcadlení podle souřadnicových rovin (tj. vzhledem k záměně typu  $x \rightarrow -x$ ) a vzhledem k libovolné permutaci souřadnic (tj. např. záměně  $(x, y, z) \rightarrow (y, x, z)$ ). Stačí tedy při výpočtu v paměti držet pouze hodnoty  $\varphi_{ijk} = \varphi(ih, jh, kh)$  pro  $0 \leq i \leq j \leq k$ . Těch je proti všem možným trojicím  $i, j, k$  pouze dvanáctina. Toto opatření tedy jednoduše snižuje paměťovou náročnost dvanáctkrát (a časovou náročnost při použití jednoduché relaxační metody více než stokrát). V demonstračním programu<sup>14</sup> jej však využíváme jen částečně, a to pro urychlení výpočtu. Možnost ušetřit paměť oželíme, protože by to zdrojový kód zbytečně komplikovalo.

Dalším vylepšením, které zavedeme do našeho výpočtu, bude použití metody zvané *successive overrelaxation* (SOR). Ta odstraňuje nevýhodu obyčejné relaxační metody v podobě příliš pomalé konvergence. Místo nahrazení hodnot  $\varphi$  hodnotami  $\tilde{\varphi}$  získanými vyjádřením z diskretizované verze laplaciánu nahradíme  $\varphi$  novou hodnotou  $\varphi + (\tilde{\varphi} - \varphi)\omega$ , kde  $\omega$  je tzv. *overrelaxation*

<sup>14)</sup> Viz **krychle.pas** na našich internetových stránkách.

*parameter*. Jeho optimální hodnota je obvykle větší než 1, proto tato metoda mění hodnoty  $\varphi$  více než obyčejná relaxační metoda (odtud název).

Metoda SOR také někdy využívá rozdělení uzlové sítě na „černé“ a „bílé“ uzly (podobně jako políčka na šachovnici), přičemž iterace hodnot se provádí střídavě na těchto podsítích. Zároveň lze použít dalšího důmyslného triku zvaného *Chebyshev acceleration*, který spočívá v postupné změně parametru  $\omega$  v průběhu výpočtu. Na začátku se položí  $\omega = 1$ , následně se při každé iteraci jedné z podsítí jeho hodnota změní na  $1/(1 - \varrho^2\omega/4)$  (s výjimkou prvního kroku, kdy se použije výraz  $1/(1 - \varrho^2\omega/2)$ ). Zde  $\varrho$  je tzv. *spektrální poloměr* iterační matice a je charakteristický pro danou úlohu a uzlovou síť. Hodnotu  $\varrho$  lze najít zkusmo, pro některé jednoduché tvary sítí ji lze odvodit analyticky.

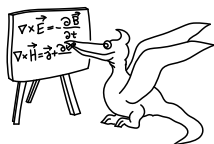
Při výpočtu v demonstračním programu jsme použili síť o velikosti  $N = 100$ . Přitom samotná krychle o hraně délky dvou jednotek zabírala uzly  $(i, j, k)$  pro  $i, j, k \leq M$ , kde  $M$  jsme volili přibližně desetkrát menší než  $N$ . Po dosažení dostatečné přesnosti jsme z hodnoty potenciálu v bodě  $(N - p, 0, 0)$  pro vhodné  $p$  (volili jsme přibližně  $p = 20$ ) vypočítali podle výše odvozeného vztahu kapacitu krychle o hraně  $2a$  (která je jednoduše  $a$ -násobkem kapacity krychle o hraně 2). Vyzkoušením několika různých nastavení parametrů výpočtu a srovnáním získaných výsledků jsme odhadli relativní chybu na řádově jedno procento.

Finální výsledek našeho snažení zní

$$\frac{C}{4\pi\epsilon_0 a} = 1,33 \pm 0,02.$$

*Marek Pechal*

marek@fykos.mff.cuni.cz



## Seriál na pokračování

### Kapitola 4: Kvantová mechanika

V této kapitole seriálu zabrousíme do vod kvantové mechaniky a zopakujeme si řešení parciálních diferenciálních rovnic<sup>15</sup>. Tentokrát se však na rozdíl od druhého dílu neomezíme na stacionární problémy, ale budeme již modelovat časový vývoj.

Budeme řešit známou Schrödingerovu rovnici, která má pro jednorozměrný případ bezstrukturní částice pohybující se v potenciálu daném funkcí  $V(x)$  tvar

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t),$$

kde  $\hbar$  je jedna ze dvou inkarnací slavné Planckovy konstanty,  $m$  je hmotnost uvažované částice,  $i$  je imaginární jednotka (tedy  $\sqrt{-1}$ ) a  $\psi$  je vlnová funkce, popisující stav částice. Kvadrát její absolutní hodnoty (jde o komplexní funkci) určuje hustotu pravděpodobnosti nalezení částice v čase  $t$  v bodě  $x$ .

Někteří z vás možná nejsou úplně kovaní v počítání s komplexními čísly, a tak si dovolíme Schrödingerovu rovnici přepsat na soustavu dvou PDR pro reálnou a imaginární část vlnové funkce. Ty už jsou normálními reálnými funkcemi, tedy nic nového pod sluncem<sup>16</sup>. Jestliže tedy zapíšeme vlnovou funkci jako

$$\psi(x, t) = \psi_R(x, t) + i\psi_I(x, t),$$

můžeme Schrödingerovu rovnici zapsat jako soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_R(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi_I(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\hbar} V(x)\psi_I(x, t), \\ \frac{\partial \psi_I(x, t)}{\partial t} &= \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi_R(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\hbar} V(x)\psi_R(x, t). \end{aligned}$$

V této kapitole se blíže podíváme na částici v poli harmonického oscilátoru, tedy na potenciál  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ , kde  $k$  je „tuhost“ oscilátoru. Dosadíme tedy a zároveň přejdeme od souřadnice  $x$  a času  $t$  k bezrozměrné souřadnici  $X$  a času  $\tau$  definovaným vztahy

$$x = X\sqrt{\frac{\hbar^2}{4mk}}, \quad \tau = t\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Dostaneme tak po úpravě

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_R(X, \tau)}{\partial \tau} &= -\frac{\partial^2 \psi_I(X, \tau)}{\partial X^2} + \frac{1}{4}X^2\psi_I(X, \tau), \\ \frac{\partial \psi_I(X, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \psi_R(X, \tau)}{\partial X^2} - \frac{1}{4}X^2\psi_R(X, \tau). \end{aligned}$$

<sup>15)</sup> Pro výklad této problematiky viz druhý díl seriálu či studijní text Úvod do programování dostupný na FYKOSim webu.

<sup>16)</sup> Pokud jste se alespoň trochu seznámili s naším studijním textem Úvod do programování – jestliže ne, pak vám to vřele doporučujeme.

Snadno se můžete přesvědčit, že tuto soustavu řeší například funkce

$$\begin{aligned}\psi_R(X, \tau) &= \exp\left(-\frac{X^2}{4}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right), \\ \psi_I(X, \tau) &= -\exp\left(-\frac{X^2}{4}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

Ty představují stacionární gaussovský vlnový balík se středem v počátku souřadnic (hustota pravděpodobnosti je  $P(X, \tau) = |\psi_R(X, \tau)|^2 + |\psi_I(X, \tau)|^2 = \exp(-X^2/2)$ ).

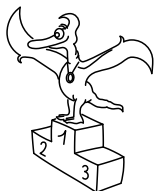
#### Úloha IV. S ... kvantový harmonický oscilátor

Modelujte časový vývoj vlnové funkce částice, kterou umístíme do potenciálu  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$  a která je v čase  $\tau = 0$  popsána vlnovou funkcí

$$\begin{aligned}\psi_R(X, 0) &= \exp\left(-\frac{(X - X_0)^2}{4}\right), \\ \psi_I(X, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Jedná se tedy o vlnový balík se středem mimo počátek. Prozradíme vám, že jde o tzv. *koherentní stav harmonického oscilátoru* a vlnový balík by měl harmonicky kmitat kolem počátku s úhlovou frekvencí  $\sqrt{k/m}$  stejně jako klasická částice.

Pokud se vám toto podaří namodelovat, můžete vyzkoušet, jak se budou chovat vlnové balíky o jiné šířce (tedy se jmenovatelem v exponenciále odlišným od čtyř), případně jak bude situace vypadat při jiném průběhu potenciálu.



## Pořadí řešitelů po II. sérii



### Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	5	5	7	6	<b>34</b>	<b>100</b>	<b>67</b>
1. <i>Airidas Korolkovas</i>		4	4	2	2	4	-	5	<b>21</b>	<b>87</b>	<b>46</b>
2. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	-	-	4	3	4	-	3	<b>14</b>	<b>90</b>	<b>38</b>
3.-4. <i>Lukáš Ledvina</i>	PČG Karlovy Vary	4	2	4	3	-	6	5	<b>24</b>	<b>83</b>	<b>34</b>
<i>Jakub Michálek</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	4	-	-	-	<b>4</b>	<b>89</b>	<b>34</b>
5. <i>Peter Ondáč</i>	G Humenné	1	1	2	-	1	-	-	<b>5</b>	<b>56</b>	<b>20</b>
6. <i>Juraj Hartman</i>	Jiráskovo G Náchod	3	-	2	-	-	-	-	<b>5</b>	<b>68</b>	<b>17</b>
7. <i>Prabhat Rao Pinnaka</i>		0	0	1	-	1	1	-	<b>3</b>	<b>28</b>	<b>11</b>
8.-9. <i>Lukáš Drápal</i>	G Ch. Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<b>88</b>	<b>7</b>
<i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	7	-	-	-	<b>7</b>	<b>140</b>	<b>7</b>
10. <i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	-	-	-	1	-	-	3	<b>4</b>	<b>36</b>	<b>4</b>

### Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	II	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	5	4	7	6	<b>33</b>	<b>100</b>	<b>66</b>
1. <i>Zuzana Dočekalová</i>	G Ostrava - Hrabůvka	1	1	3	1	4	4	-	<b>14</b>	<b>70</b>	<b>42</b>
2. <i>Petr Ryšavý</i>	G J. Heyrovského Praha	2	2	4	1	2	3	-	<b>14</b>	<b>68</b>	<b>41</b>
3. <i>Petr Cagaš</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	-	2	3	1	1	2	4	<b>13</b>	<b>65</b>	<b>40</b>
4. <i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	4	1	4	2	3	6	-	<b>20</b>	<b>77</b>	<b>33</b>
5. <i>Ján Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	-	3	1	2	2	-	<b>11</b>	<b>61</b>	<b>27</b>
6. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	3	-	2	-	4	6	-	<b>15</b>	<b>79</b>	<b>26</b>
7. <i>Kateřina Honzáková</i>	G Jana Keplera, Praha	4	3	-	-	-	-	-	<b>7</b>	<b>84</b>	<b>21</b>
8. <i>Veronika Paštyková</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	0	1	2	0	1	2	-	<b>6</b>	<b>36</b>	<b>17</b>
9.-12. <i>Jana Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	-	1	-	-	1	-	<b>4</b>	<b>45</b>	<b>13</b>
<i>Martin Chudjak</i>	SPŠ Martin	0	-	1	-	-	-	-	<b>1</b>	<b>37</b>	<b>13</b>
<i>Michal Müller</i>	G Jevíčko	3	3	1	-	-	-	-	<b>7</b>	<b>72</b>	<b>13</b>
<i>Lada Peksová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	2	-	2	-	-	-	-	<b>4</b>	<b>68</b>	<b>13</b>
13. <i>František Šteinhäuser</i>	G Dačice	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<b>50</b>	<b>10</b>
14.-15. <i>Jakub Klemsa</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<b>82</b>	<b>9</b>
<i>Lukáš Kripner</i>	G T. G. Masaryka, Litvínov	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<b>82</b>	<b>9</b>
16. <i>Adam Mohammad</i>	Ist Internat. School, Ostrava	1	0	1	0	-	-	-	<b>2</b>	<b>26</b>	<b>7</b>
17.-18. <i>Michal Španko</i>	G Havlíčkův Brod	2	-	1	-	-	-	-	<b>3</b>	<b>38</b>	<b>5</b>
<i>Anna Vacířová</i>	VOŠ a SPŠ G Evropská Praha	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<b>25</b>	<b>5</b>
19. <i>Irena Pavličková</i>	G a SOŠ Frýdek-Místek	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<b>100</b>	<b>3</b>
20.-21. <i>Michal Bajcar</i>	G F. Živného, Bohumín	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<b>67</b>	<b>2</b>
<i>Simona Laňková</i>	G Havlíčkův Brod	-	-	-	-	-	-	-	<b>0</b>	<b>17</b>	<b>2</b>

## Kategorie třetích ročníků

<b>jméno</b>	<b>škola</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>S</b>	<b>II</b>	<b>%</b>	<b>Σ</b>
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	5	5	7	6	<b>34</b>	<b>100</b>	<b>67</b>
<b>1.</b> Pavel Malý	G Ch. Dopplera, Praha	4	3	–	1	3	6	–	<b>17</b>	<b>85</b>	<b>44</b>
<b>2.</b> Hana Šustková	G Trutnov	3	2	2	1	3	7	3	<b>21</b>	<b>64</b>	<b>43</b>
<b>3.</b> Karel Kolář	G Špitálská, Praha	2	3	2	1	4	4	–	<b>16</b>	<b>73</b>	<b>38</b>
<b>4.</b> Michal Maizner	G Žilina - Vlčince	3	–	1	–	2	–	–	<b>6</b>	<b>70</b>	<b>32</b>
<b>5.–7.</b> Michael Hahl	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	4	–	–	–	5	<b>9</b>	<b>84</b>	<b>31</b>
Michal Koutný	G Masarykovo nám., Třebíč	4	–	–	3	4	–	–	<b>11</b>	<b>76</b>	<b>31</b>
Peter Vanya	G Jura Hronca	5	3	–	–	1	2	–	<b>11</b>	<b>67</b>	<b>31</b>
<b>8.</b> Alžběta Pechová	SPŠ strojnická Vsetín	3	–	2	–	–	3	–	<b>8</b>	<b>56</b>	<b>27</b>
<b>9.</b> Martin Výška	G Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<b>88</b>	<b>23</b>
<b>10.</b> Zuzana Chlebounová	G M. Koperníka, Bílovec	2	–	–	–	–	6	–	<b>8</b>	<b>77</b>	<b>20</b>
<b>11.</b> Alžběta Kadlecová	G Jana Keplera, Praha	–	–	2	–	–	4	–	<b>6</b>	<b>60</b>	<b>18</b>
<b>12.</b> Jakub Töpfer	G Jana Keplera, Praha	–	–	1	1	1	–	–	<b>3</b>	<b>53</b>	<b>16</b>
<b>13.</b> Martin Zahradník	G Třeboň	2	2	–	–	–	–	–	<b>4</b>	<b>65</b>	<b>15</b>
<b>14.</b> Katarína Bazová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	2	–	–	–	–	<b>5</b>	<b>52</b>	<b>14</b>
<b>15.</b> Lukáš Čimpl	G Frenštát pod Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<b>52</b>	<b>12</b>
<b>16.–18.</b> Jana Figulová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	2	–	–	–	–	<b>4</b>	<b>73</b>	<b>11</b>
Dana Suchomelová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	3	–	–	–	–	<b>6</b>	<b>73</b>	<b>11</b>
Josef Tkadlec	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<b>69</b>	<b>11</b>
<b>19.</b> Václav Obrázek	G Jana Keplera, Praha	3	–	1	–	–	–	–	<b>4</b>	<b>67</b>	<b>10</b>
<b>20.–21.</b> Eva Hašková	G a SOŠ Úpice	1	1	1	1	–	–	–	<b>4</b>	<b>29</b>	<b>8</b>
Vojtěch Tuma	G Roudnice nad Labem	–	–	–	–	4	–	–	<b>4</b>	<b>62</b>	<b>8</b>
<b>22.–23.</b> Richard Polma	G Mladá Boleslav	2	–	3	–	1	–	–	<b>6</b>	<b>46</b>	<b>6</b>
Ondřej Růžička	G a SOŠ Hořice	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<b>38</b>	<b>6</b>
<b>24.</b> Miroslav Klímoš	G M. Koperníka, Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<b>83</b>	<b>5</b>
<b>25.</b> Petr Motloch	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	1	–	–	–	<b>1</b>	<b>20</b>	<b>1</b>

## Kategorie prvních ročníků

<b>jméno</b>	<b>škola</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>P</b>	<b>E</b>	<b>S</b>	<b>II</b>	<b>%</b>	<b>Σ</b>
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	5	5	7	6	<b>34</b>	<b>100</b>	<b>67</b>
<b>1.</b> Stanislav Fořt	G P. de Coubertina, Tábor	2	2	2	1	1	3	–	<b>11</b>	<b>44</b>	<b>27</b>
<b>2.–3.</b> Zuzana Bogárová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	1	2	–	–	–	–	<b>5</b>	<b>59</b>	<b>13</b>
Tomáš Volf	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<b>65</b>	<b>13</b>
<b>4.</b> Ji-Hong Min	1st Internat. School, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<b>44</b>	<b>12</b>
<b>5.–6.</b> Petra Křažeková	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<b>55</b>	<b>11</b>
Ondřej Maslikiewicz	SPŠ Hronov	1	2	1	–	–	–	–	<b>4</b>	<b>48</b>	<b>11</b>
<b>7.–8.</b> Tomáš Bartoněk	G O. Havlové, Ostrava - Poruba	2	0	1	0	0	1	–	<b>4</b>	<b>17</b>	<b>7</b>
Barbora Veselková	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<b>44</b>	<b>7</b>
<b>9.</b> Barbora Drozdová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	1	3	–	–	–	–	<b>6</b>	<b>55</b>	<b>6</b>
<b>10.–11.</b> Michal Gallovič	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	1	1	–	–	1	–	<b>4</b>	<b>22</b>	<b>4</b>
Michal Pokorný	G Děčín	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<b>67</b>	<b>4</b>
<b>12.</b> Ondřej Palla	SPŠ Hronov	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<b>17</b>	<b>3</b>

**FYKOS**

*UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta  
Ústav teoretické fyziky  
V Holečovičkách 2  
180 00 Praha 8*

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: [fykos-solutions@mff.cuni.cz](mailto:fykos-solutions@mff.cuni.cz)

e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.