

**Milí řešitelé!**

FYKOSí XXII. ročník se dobral svého konce. Doufáme, že se vám líbil, bylo vám radostí řešit naše úlohy a že jste se také něčemu novému přiučili. Do budoucna se těšíme, až se s některými z vás, maturantů, budeme setkávat na chodbách naší fakulty a třeba i při organizování semináře. Ty mladší pak srdečně zveme do dalšího ročníku, jehož první sérii naleznete na konci sešitu. Budeme rádi, když zadání ukážete i kamarádům nejen ve škole, ale třeba i na nějakém fyzikálním soustředění, kam určitě přes prázdniny pojedete.

Obsahem této závěrečné brožurky jsou řešení 5. a 6. série včetně výsledkových listin. Ale pokud jste se neumístili tak vysoko, jak jste si v září představovali, rozhodně nesmutněte. Vězte, že není důležité vyhrát, ale zúčastnit se. A ve FYKOSu to platí dvojnásob. Vám všem patří naše gratulace za projevenou odvalu pustit se do toho. I nadále bychom byli rádi, kdybyste svůj zájem o fyziku rozvíjeli třeba řešením FYKOSu. A nestyďte se říct i kamarádům.

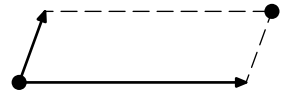
Během prázdnin připravíme ročenku právě končícího ročníku, v níž naleznete všechny úlohy včetně řešení, reportáže ze soustředění i Týdne s aplikovanou fyzikou.

Za všechny organizátory vám pěkné prázdniny přeje

*Tomáš Jirotko*

**Řešení V. série****Úloha V.1 ... otáčení koberce** (4 body; průměr 2,40; řešilo 15 studentů)

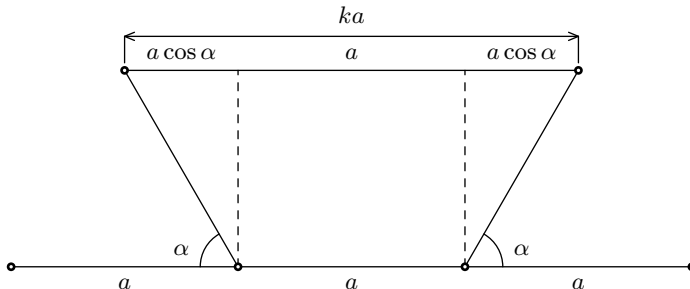
Pomocí dvou různých vektorů v rovině můžeme opakovaným posouváním počátečního bodu dostat nekonečnou mříž bodů (viz obr. 1). (Stejným způsobem vznikne krystal, jen místo bodu posouváme skupinu atomů.) Posunutím celé mříže o jeden z vektorů dostaneme stejnou mříž, tj. každý bod bude nahrazen jiným bodem. Stejně tak se může stát, že otočením celé mříže kolem jednoho bodu o nějaký úhel dostaneme stejnou mříž. Najděte všechny úhly, pro které je to možné, a nakreslete, jak vypadají mřížky s touto rotační symetrií.



Obr. 1

*Základní otázku krystalografie zadal Honza Prachař.*

Dostali jsme před sebe síť bodů (rovnoběžníků) a chtěli bychom zjistit, o jaký úhel můžeme celou mříž otočit (okolo vybraného bodu) tak, abychom po rotaci nepozorovali žádnou změnu.



Obr. 2. Otočení vektoru

Uvažme čtyři body ležící na přímce tak, že vzdálenost mezi dvěma sousedními je vždy  $a$ ; to ilustruje obrázek 2. Vzdálenost  $a$  bude velikost jednoho z vektorů, který definuje mřížku. První bod otočíme o úhel  $-\alpha$  okolo druhého bodu. Kolem třetího bodu pak otočíme o úhel  $+\alpha$  čtvrtý bod. Oba nově vzniklé body leží na rovnoběžce s původní přímkou. Aby ležely ve stejné mřížce jako původní čtyři body, musí být jeden z nových bodů posunutím druhého nového bodu o celočíselný násobek vektoru velikosti  $a$ . Tato vzdálenost se však dá vzhledem ke geometrii situace popsat i jiným způsobem. Podle obr. 2 platí

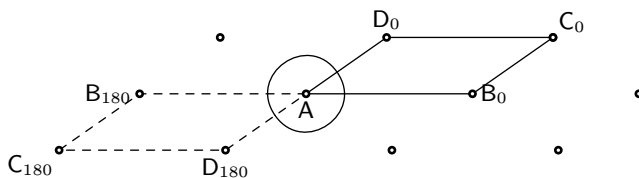
$$ka = a + 2a \cos \alpha ,$$

$$\frac{k-1}{2} = \cos \alpha .$$

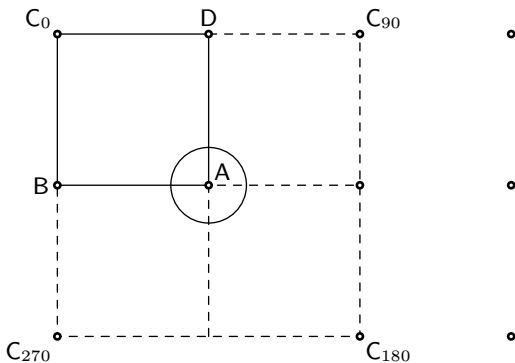
Jak dobře víme,  $\cos \alpha$  nabývá hodnot pouze od  $-1$  do  $1$ , a tak si všechny možné hodnoty shrňme do následující tabulky.

$k-1$	$\cos \alpha$	$\alpha$
-2	-1	$180^\circ$
-1	$-1/2$	$120^\circ$
0	0	$90^\circ$
1	$1/2$	$60^\circ$
2	1	$0^\circ$

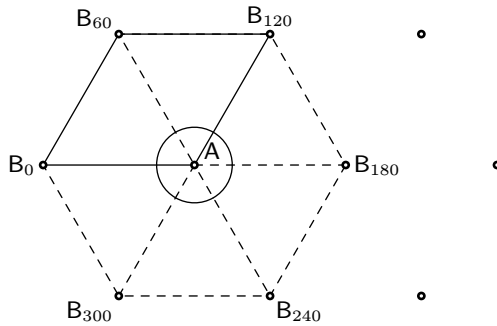
Jednotlivé hodnoty můžeme snadno ilustrovat stále na obr. 2. Rotace o  $180^\circ$  (jedná se o tzv. dvoučetnou osu) posune 1. bod na 3. a 4. vrátí na 2., jejich posunutí  $ka$  je opravdu ve smyslu zavedení  $-a$ . Při rotaci o  $120^\circ$  (okolo osy trojčetné) se body setkají uprostřed horní úsečky. Rotace o  $90^\circ$  (osa čtyřčetná) doplní čtverec a rotace  $60^\circ$  (šestičetná osa) je přímo na obr. 2.



Obr. 3. Rotace kolem dvoučetné osy



Obr. 4. Rotace kolem čtyřčetné osy



Obr. 5. Rotace kolem šestičetné osy

Všimněme si, že dvoučetná osa existuje vždy. Naopak na zbytek je potřeba specifikovat druhý vektor. Pro existenci čtyřčetné osy musí být oba vektory kolmé a mít stejnou velikost. Šestičetná osa vyžaduje taktéž vektory stejně dlouhé, musí ale svírat úhel  $60^\circ$ . Trojčetná osa je pak pouze speciálním případem osy šestičetné, stačí okolo ní otáčet dvakrát. Budeme-li mít pouze mříž bez tzv. hmotné báze, pak nenajdeme příklad, kdy by existovala osa trojčetná, ale neexistovala osa šestičetná. Pro shrnutí jsme připravili obrázky předvádějící jednotlivé příklady. Osa dvoučetná na obrázku 3, označené jsou všechny body před rotací i po ní. Na obrázku 4 rotujeme čtvercovou mříží, pro přehlednost budeme sledovat pouze bod C, rotujeme okolo bodu A. Poslední osa šestičetná je na obrázku 5.

**Kryštof Touška**

krystof@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha V.2 ... bitva o Británii (4 body; průměr 2,90; řešilo 10 studentů)

*K odhalování nalétávajících bombardérů se používají silné světlomety s úzkým paprskem světla. Jaká bude jeho odchylka od původního směru v závislosti na úhlu natočení zdroje po průchodu atmosférou? Uvažujte, že hodnota indexu lomu s výškou lineárně klesá.*

*Z archivu Honzy Jelínka.*

Snellův zákon říká, že při lomu na rovinném rozhraní mezi prostředími s indexy lomu  $N_k$  a  $N_{k+1}$ , přičemž dopadající paprsek svírá s kolmicí na rozhraní úhel o velikosti  $\vartheta_k$  a lomený paprsek úhel o velikosti  $\vartheta_{k+1}$ , platí

$$N_k \sin \vartheta_k = N_{k+1} \sin \vartheta_{k+1} .$$

Pokud máme rovnoběžných rovinných rozhraní několik, mezi prostředími  $N_0, N_1, \dots, N_n$ , pak platí

$$N_0 \sin \vartheta_0 = N_1 \sin \vartheta_1 = \dots = N_n \sin \vartheta_n ,$$

tedy za předpokladu, že na žádném z rozhraní nedojde k úplnému odrazu, závisí poměr mezi počáteční a výslednou odchylkou pouze na indexu lomu prvního a posledního prostředí, nezávisle na tom, kolik rozhraní se vyskytne. Atmosféru pak můžeme považovat za takovou řadu rovnoběžných rozhraní (přičemž  $n \rightarrow \infty$ , zakřivení atmosféry zanedbáváme). Že na žádném z těchto rozhraní k úplnému odrazu nedojde, plyne z podmínky, že pro libovolné místo s indexem lomu  $n_k$  v atmosféře platí

$$1 > \frac{N_0}{N_k} \sin \vartheta_0 ,$$

kde  $N_0$  a  $\vartheta_0$  jsou index lomu a odchylka paprsku při povrchu. V našem případě, kdy jde index lomu lineárně od  $N_0$  k jedné, to znamená

$$N_0 \sin \vartheta_0 < 1.$$

**Marek Nečada**

marekn@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha V.3 ... zeměkoule (4 body; průměr 2,83; řešilo 6 studentů)

*Jak rychle musela v době tuhnutí rotovat Země, aby se rovníkový poloměr lišil od polárního právě o tolik, o kolik se liší teď?*  
Honza Jelínek

Nuže prostá úvaha. Země byla kdysi tekutá a tuhla. Jak byla tekutá, tak její povrch tvořil ekvipotenciální plochu.<sup>1</sup> Země tedy ztuha v tvaru daném touto podmínkou a od té doby už se to příliš nezměnilo.

Potenciál pro gravitační pole koule známe, je to  $\varphi_G = -GM/r$ , pro odstředivou sílu je to již méně známé<sup>2</sup>  $\varphi_F = -\omega^2 r^2/2$ .

Označme rozdíl mezi rovníkovým a polárním poloměrem  $\Delta R$ . Roztáhněme kulovou Zemi na rovníku tak, že rovníkový poloměr bude  $R+x$ . Pokud se zachovává objem, musí platit

$$R^3 = (R+x)^2(R-y),$$

kde  $R-y$  je polární poloměr, tedy  $\Delta R = x+y$ . Z této rovnice dostaneme využitím aproximace  $(1+x)^n \approx 1+nx$  vztah  $y=2x$ , a tedy  $x = \Delta R/3$  a  $y = 2\Delta R/3$ .

Vypočítejme gravitační potenciál na rovníku elipsoidální Země jako potenciál v místě  $x$  nad rovníkem přesně kulové Země, tedy  $\varphi_1 = -GM/(R+x)$ . Oprávněnost této aproximace ponecháme na intuici čtenáře. Shodně potenciál na pólu bude  $\varphi_2 = -GM/(R-y)$ .

Z rovnosti  $\varphi_1 + \varphi_F = \varphi_2$  tak máme

$$-\frac{GM}{R-\frac{1}{3}\Delta R} - \frac{1}{2}\omega^2 R^2 = -\frac{GM}{R+\frac{2}{3}\Delta R}.$$

Využitím přibližného vztahu  $1/(1+x) \approx 1-x$  a několika algebraických úprav potom snadno dostaneme  $\omega = \sqrt{2g\Delta R}/R$ , neboť  $g = GM/R^2$ . Pro periodu tudíž platí

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{\sqrt{2g\Delta R}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{2g\Delta R}} \doteq 17 \text{ hod.}$$

Dodejme, že tento výsledek je rozumný, jelikož vychází řádově stejně jako dnešní perioda rotace a navíc je pravděpodobné, že se rotace Země v průběhu času zpomalovala.

**Jan Hermann**

honzah@fykos.mff.cuni.cz

<sup>1)</sup> Jinak by tekutina z místa s vyšší energií přetekla do míst s nižší.

<sup>2)</sup> Správnost si můžete ověřit zderivováním, dostanete známý vztah pro odstředivou sílu.

*Jiný způsob řešení*

V dávných dobách, kdy se zde místo Sluneční soustavy vyskytovalo jen a pouze rotující mračno plynu a prachu, se zrodila naše Země. Tento prapředek dnešní Země na ní zanechal poskvrnu, a to rotaci. Právě zemská rotace z dob, kdy Zemi tuhl plášť, způsobila rozdíl mezi rovníkovým a polárním poloměrem.

Předpokládáme-li, že si zemský povrch zachoval svůj tvar v nepříliš pozmeněné podobě dodnes, můžeme odhadnout periodu rotace v dávných dobách.

Úlohu řešme ve vztažné soustavě rotující úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Protože tato vztažná soustava není inerciální, působí na každý hmotný kousek, který je v klidu, kromě síly gravitační ještě síla odstředivá; pro obě známe příslušné potenciální energie podle definičního vztahu

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p. \quad (1)$$

Podle obecného principu mechaniky zaujme kapalina tvar s nejmenší potenciální energií. Uvažme dále, že povrch Země zaujímá ekvipotenciální plochu; abychom to dokázali, předpokládejme (pro spor) různé energie ve dvou různých bodech povrchu. Na křivce parametrizované  $t$ , která body spojuje, je energie spojitou funkcí  $t$  a podle věty o střední hodnotě zde existuje bod s nenulovou projekcí gradientu potenciální energie na plochu, což je z definice nenulová tečná síla, které odpovídá nenulové zrychlení. Tak bychom dostali spor s ustáleným stavem.

Vypočteme nejprve velikost gravitační síly na rovníku a na pólu. Zemi lze pro tento případ velmi dobře aproximovat elipsoidem s malým rozdílem velikostí poloos  $\Delta R$ .

Začneme zjištěním intenzity pole na pólu. Předpokládejme konstantní hustotu Země.

Nejprve vypočteme velikost intenzity gravitačního pole od kruhové desky (disku). Deska má tloušťku  $dh$ , je ve vzdálenosti  $h$  od pólu a má poloměr  $R$ . Písmeno  $r$  použijeme jako integrační proměnnou vyjadřující vzdálenost od středu disku. Hmotnost elementárního prstýnku je tedy

$$d^2M = 2\pi r \varrho dr dh.$$

Pro kolmou složku intenzity pole od prstýnku platí (rovnoběžné složky se vruší)

$$dK = \int_0^R 2\pi r \frac{G}{\zeta^2} \frac{h}{\zeta} \varrho dr dh = 2\pi Gh \varrho \int_0^R \frac{r dr}{\zeta^3} dh,$$

kde  $\zeta = \sqrt{h^2 + r^2}$  je vzdálenost elementu od pozorovatele. Integrál vypočteme podle první věty o substituci

$$dK = 2\pi Gh \varrho \int_0^R \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} dh = 2\pi G \varrho \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/h)^2}} \right) dh. \quad (2)$$

Abychom nyní zjistili velikost intenzity gravitačního pole na pólu, je potřeba tento výraz integrovat přes celou Zemi a dosadit za  $R$  správný poloměr. Předpokládáme-li, že Země má tvar elipsoidu s polárním poloměrem  $R_p$  a rovníkovým  $R_r$ , platí s ohledem na dřívější značení

$$\frac{(R_p - h)^2}{R_p^2} + \frac{R^2}{R_r^2} = 1. \quad (3)$$

Nyní můžeme položit  $R_p = R_r - \Delta R$ , kde  $\Delta R$  je malé vzhledem k  $R_p$  i  $R_r$ . Lze tedy používat přibližnou rovnost  $R_p^2 \approx R_r^2 - 2R_r\Delta R$ , s jejímž využitím lze (3) upravit do tvaru

$$1 + \frac{R^2}{h^2} = \frac{2R_r}{h} - 2\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{R_r}\right)\Delta R = \frac{2R_r}{h}(1 - \alpha\Delta R). \quad (4)$$

Zde jsme označili  $1/R_r - h/R_r^2 = \alpha$ .

Dosazením (4) do (2) a použitím aproximace  $(1+x)^n \approx 1+nx$  pro  $x$  blízké 0 dostáváme

$$\frac{1}{\sqrt{1+(R/h)^2}} = \sqrt{\frac{h}{2R_r}} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha\Delta R}} \approx \sqrt{\frac{h}{2R_r}} \left(1 + \frac{\alpha\Delta R}{2}\right),$$

$$dK \approx 2\pi G\rho \left(1 - \sqrt{\frac{h}{2R_r}} \left(1 + \frac{\alpha\Delta R}{2}\right)\right) dh. \quad (5)$$

Zajímá-li nás výsledné pole na zemském pólu, stačí výraz (5) integrovat přes celou Zemi.

$$K = 2\pi G\rho \int_0^{2R_p} \left(1 - \sqrt{\frac{h}{2R_r}} \left(1 + \frac{\alpha\Delta R}{2}\right)\right) dh = 2\pi G\rho R_p \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{15} \frac{\Delta R}{R_r}\right).$$

Vzpomeneme-li na objem elipsoidu  $V = 4\pi abc/3$  a položíme-li  $M = 4\pi\rho R_r^2 R_p/3$ , dostáváme

$$K_p = \frac{GM}{R_p^2} \left(1 - \frac{6}{5} \frac{\Delta R}{R_r}\right) \approx \frac{GM}{R_p^2} \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\Delta R}{R_p}\right) \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\Delta R}{R_p}\right).$$

Na posledním rozkladu na součin založíme novou hypotézu gravitačního pole elipsoidu: Konkrétně, měříme-li gravitační pole na vrcholu elipsoidu s poloosami  $a, b, c$ , tvrdíme, že gravitační pole u průsečíku poloosy  $a$  a povrchu elipsoidu má velikost

$$K_a = \frac{GM}{a^2} \left(1 - \frac{3}{5} \frac{b-a}{a}\right) \left(1 - \frac{3}{5} \frac{c-a}{a}\right).$$

Pro gravitační pole na rovníku proto platí

$$K_r = \frac{GM}{R_r^2} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{\Delta R}{R_r}\right)$$

Z definice (1) pak už nečiní potíže dopočítat potenciál

$$\varphi_r = -\frac{GM}{R_r} \left(1 + \frac{3}{10} \frac{\Delta R}{R_r}\right), \quad (6)$$

$$\varphi_p = -\frac{GM}{R_p} \left(1 - \frac{6}{10} \frac{\Delta R}{R_p}\right) \approx -\frac{GM}{R_r} \left(1 + \frac{4}{10} \frac{\Delta R}{R_r}\right). \quad (7)$$

Na pólu skutečně vychází menší gravitační potenciální energie, a proto musíme k větší potenciální energii na rovníku přičíst (zápornou) potenciální energii odstředivé síly, abychom uspokojili požadavek ekvipotenciální plochy, který jsme si rozmysleli v úvodu

$$\varphi_p = \varphi_r - \frac{1}{2} \Omega^2 R_r^2.$$

Odsud již vyjádříme kýženou úhlovou rychlost

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM\Delta R}{5R_r^4}} = \frac{\sqrt{\Delta R}}{5R_r} \sqrt{\frac{g}{R_r}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \doteq 54 \text{ hod.}$$

Výsledek vykazuje řádovou shodu se současnou periodou rotace. Odchylka je způsobena především velkou měrou aproximací, mimo jiné předpokladem hustoty nezávislé na vzdálenosti od středu.

Tato úloha nebyla jednoduchá, naše řešení se snažilo ukázat, jak lze šikovným způsobem využít linearizace závislosti k jednoduššímu řešení problémů.

Naprostá většina došlých řešení obsahovala správnou úvahu o tvaru Země. Avšak ne příliš řešitelů se dobralo správného výsledku. A když už získáme nějaký výsledek, je dobré zjistit, jak se chová v limitních případech, tedy v tomto případě například dosazením do výsledku  $\Delta R = 0$  s očekáváním nulové rychlosti rotace. Dále je dobré dosadit do *obecného* výsledku skutečné hodnoty a ověřit jeho reálnost.

**Lukáš Ledvína**

lukas1@fykos.mff.cuni.cz

**Jakub Michálek**

jmi@fykos.mff.cuni.cz

#### Úloha V.4 ... internetová (4 body; průměr 2,64; řešilo 11 studentů)

Mějme rovné optické vlákno. Světelný signál do něj vstupující může mít odchylku od přímého směru až  $\alpha$ . Jak nejméně dlouhá musí být časová délka jednoho pulzu, aby šlo určit, zda byl vyslán bit 1, nebo 0, tj. aby aspoň krátký časový úsek byla síla signálu minimální nebo maximální. Délka vlákna je  $d$ .  
Na schůzku donesl Honza Jelínek.

Paprsek, který jde přímo, musí urazit dráhu  $d$ , kterou proletí za čas

$$t_1 = \frac{d}{c_v},$$

kde  $c_v$  je rychlost šíření světla v optickém vlákně. Paprsek, který vstoupil s odchylkou  $\alpha$ , urazí vzdálenost  $d/\cos\alpha$  (vlákno je rovné a úhel dopadu je roven úhlu odrazu) za čas

$$t_2 = \frac{d}{c_v \cos\alpha}.$$

Pro úhly menší než  $90^\circ$  je tato funkce rostoucí. Protože odchýlení paprsku nemůže být větší (paprsek by letěl „zpět“), tak nejdelší dobu poletí paprsek odchýlený o maximální možný úhel. Signál tedy nabude maxima za dobu

$$t_d = t_2 - t_1 = \frac{d}{c_v \cos\alpha} - \frac{d}{c_v} = \frac{d(1 - \cos\alpha)}{c_v \cos\alpha}$$

od příchodu nejrychlejší části signálu.

Jestliže tedy nový bit pošleme po uplynutí doby větší než  $t_d$ , tak nejpomalejší část předchozího pulsu dorazí dříve než nejrychlejší část nového pulsu, čímž bude splněna podmínka ze

zadání, že alespoň malý okamžik má být hodnota přijímaného signálu rovna hodnotě vyslaného signálu. Časová délka jednoho pulsu  $t_p$  tedy musí být větší než  $t_d$ . Získáváme nerovnost

$$t_p > \frac{d(1 - \cos \alpha)}{c_v \cos \alpha}.$$

*Jan Jelínek*

[jjan@fykos.mff.cuni.cz](mailto:jjan@fykos.mff.cuni.cz)

### Úloha V. P ... rámus (4 body; průměr 3,08; řešilo 12 studentů)

*Pokuste se odhadnout, jakou energii přijme tělo návštěvníka rockového koncertu. Svůj odhad odůvodněte.*

*Kvalitní hudbu vám přináší Honza Jelínek.*

Upřesněme zadání a úvodem povězte, že budeme uvažovat příjem energie ze zvukových vln, ačkoli návštěvník koncertu ji zpravidla přijímá i jinými způsoby, například z energetických nápojů.

Předpokládejme, že prostor, ve kterém se koncert koná, je ozvučen aparaturou o celkovém výkonu  $P$ , od níž se nacházíme ve vzdálenosti  $r$ . Budeme uvažovat, že aparatura je dobře směřová, a tedy většinu energie vysílá před sebe, tj. směrem k posluchačům. Dalšího zjednodušení dosáhneme zanedbáním odražených zvukových vln. To je sice na první pohled velká nepřesnost, ale uvědomme si, že před i za námi stojí lidé, čili to, co se odrazí od těch za námi směrem na naše tělo, je zhruba srovnatelné, co nám odstíní návštěvníci, kteří přišli dříve a vytváří před námi stín. Čili se až tak velké chyby nedopouštíme. Navíc předpoklad, že se od ničeho žádný zvuk neodráží je dosti důležitý – tím, že se zvuk zcela pohltí z něj získáme energii, což se při odražení neděje. Dále označme  $S$  průmět plochy lidského těla do čelní roviny, což je trochu méně než polovina celkového povrchu.

Z teorie šíření akustických vln víme, že se zachovává celková přenášená energie, ale jak se od zdroje vzdalujeme, musí se rozdělovat do čím dál větší plochy, a tudíž zvukový výkon připadající na jednotku plochy je stále menší. Tento úbytek je zřejmě kvadratický vzhledem k  $r$ . Pro povrch sféry platí  $S_s = 4\pi r^2$ , ale my uvažujeme kvalitní reproduktory, takže budeme počítat jen s polovinou tohoto výrazu.

Výkon reproduktorů přepočtený na metr čtverečný se nazývá *intenzita zvuku* a platí  $I = P/S_s$ . Vynásobením plochou návštěvníka ihned získáme energii, kterou jeho tělo přijme během sekundy. Pokud hudba hraje celkem po dobu  $t$ , je situace již zcela jasná. Energie pohlcená člověkem na rockovém koncertě je

$$E = \frac{PSt}{\frac{1}{2}S_s} = \frac{PSt}{2\pi r^2}.$$

Nyní jej zkusme vypočítat i číselně. Dejme tomu, že výkon reproduktorů se pohybuje kolem 400 W, stojíme od nich 5 m daleko a koncert trvá  $10^4$  s, tedy necelé tři hodiny. Svou plochu nechť každý posoudí sám, ale my dosadíme  $0,7 \text{ m}^2$ . Vyjde

$$E \doteq 20 \text{ kJ}.$$

Vraťme se ještě k intenzitě zvuku, kterou mnoho řešitelů použilo ve svých výpočtech. Nejslabší zvuk, který lze slyšet, odpovídá svou intenzitou  $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  hranici slyšitelnosti.

Jestliže má zvuk intenzitu  $I$ , pak v logaritmické stupnici, jejíž jednotkou je decibel, vyjádříme hladinu intenzity

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}.$$

V našem případě by v okolí posluchače byla hladina intenzity zhruba 120 dB, což je poměrně hodně a odpovídá to hluku, který by slyšel člověk stojící těsně vedle startujícího letadla. Takový rámus by naše uši dlouhodobě snášely velmi těžko, ale tomu na koncertu zpravidla ani vystaveny nejsou, neboť ne vždy musejí být reproduktory zapnuty na plný výkon, ne vždy je jejich výkon kapelou využit a konečně i na koncertech se občas dělají krátké pauzy.

**Tomáš Jirotka**

byrot@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha V. E ... záchodová (8 bodů; průměr 5,67; řešilo 12 studentů)

Změřte, jak vysoko vystříkne voda při upuštění různých těles na vodní hladinu. Studujte závislost na výšce, tvaru a hmotnosti. Jaká část energie se využije na rozvlnění hladiny?

*Na oné místnosti zplodil Jakub Benda.*

Zadání úlohy dává značnou volnost v tom co měřit. Následující úvahy jsou snahou o pochopení závislosti výšky „cáknutí“ na rozměru  $d$ , hmotnosti  $m$  a tvaru (popsaném koeficientem obtékání  $w$ ) padajícího tělesa a výšky  $h$  bodu, ze kterého těleso uvolňujeme s nulovou počáteční rychlostí, nad hladinou vody.

#### Teorie

Zanedbáme-li odpor vzduchu, začne těleso volně padat s konstantním zrychlením  $g$ . Nad hladinou tak získá hybnost  $p = mv = m\sqrt{2gh}$ . Rozhodující pro výšku vystříknuvších kapek vody je jejich celková hybnost  $P$ , kterou získají prostřednictvím interakce s tělesem, a celkový objem  $V$ .

Hybnost  $P$  určuje úbytek hybnosti padajícího tělesa bezprostředně pod hladinou, řekněme do charakteristické hloubky dané rozměrem tělesa  $d$ . Úbytek hybnosti tělesa způsobuje odporová síla  $F_o$  vody (proti směru pohybu tělesa) – ta je (v nejsprostším modelu) pro laminární proudění přímo úměrná rychlosti a rozměru tělesa (Stokesův vztah), pro turbulentní proudění je úměrná kvadrátu rychlosti a kvadrátu rozměru (Newtonův vztah). Odporová síla přirozeně závisí i na tvaru tělesa. Charakter proudění určuje Reynoldsovo číslo (všimněte si, že je bezrozměrné)  $Re = vd\rho/\eta$ , kde  $v$  je rychlost tělesa,  $\rho$  je hustota vody a  $\eta$  její dynamická viskozita. S roustoucím Reynoldsovým číslem přechází laminární proudění v turbulentní, mezní hodnota je asi 1000. Úbytek hybnosti v časovém intervalu  $\Delta t$  je  $\Delta p = (F_n - F_o(w, dv))\Delta t$ , kde  $F_n$  je rozdíl tíhové a vztlakové síly působící na těleso. Časový interval, během kterého dochází k vystříkávání vody, si dovolíme jednoduše zvolit jako  $\Delta t = d/v$ .

Kromě odporové síly působí na těleso také povrchová síla  $F_p$ , která souvisí se změnou povrchové energie vody. Povrchová síla závisí přímo úměrně na povrchovém napětí a rozměru tělesa  $F_p \sim d$ .

Objem vystříknuté vody bude srovnatelný s objemem samotného tělesa, předpokládejme tedy, že  $V \sim d^3$ .

Pokud by všechna voda vystříkla do stejné výšky  $H$ , bylo by to

$$H = \frac{1}{2g} \left( \frac{P}{\rho V} \right)^2.$$

Dosazením za  $P$  a  $V$  z výsledků předchozích úvah, dospějeme k tvaru hledané závislosti (nepomínejme, že v tom nejhrušším přiblížení)

$$H \sim \left( \frac{F_o(w, d\sqrt{h}) + F_p(d) - F_n(d)}{d^2\sqrt{h}} \right)^2.$$

Za předpokladu dominantní odporové síly pro laminární proudění dostaneme

$$H \sim \frac{w^2}{d^2} + \Lambda_1 w - \Lambda_2 w d^2$$

a pro turbulentní

$$H \sim w^2 h + \Lambda_1 w d \sqrt{h} - \Lambda_2 w d^3 \sqrt{h}, \quad (8)$$

kde  $\Lambda_1$  je konstanta, která určuje vzájemný poměr velikosti povrchové a odporové síly (závisí tedy na povrchovém napětí),  $\Lambda_2$  určuje poměr velikosti síly  $F_n$  a odporové síly (závisí tedy na rozdílu hustoty tělesa a hustoty vody).

Zabývejme se dále turbulentním případem, protože s ním se typicky v našich experimentech setkáme. Laminární případ by nastal pro velice malá tělesa (menší než milimetr) a malé rychlosti.

Z výsledku (8) plyne:

- 1) Výška  $H$  vystříknuté vody je přibližně lineárně úměrná výšce  $h$ , ze které těleso uvolňujeme.
- 2) Výška  $H$  roste s rostoucím koeficientem obtékání  $w$ .
- 3) Výška  $H$  klesá s rostoucí hmotností tělesa (při ostatních parametrech nezměněných), neb hmotnost udává rozdíl hustoty tělesa a vody, na kterém závisí koeficient  $\Lambda_2$ .
- 4) Závislost výšky  $H$  na  $d$  (při konstantní hustotě tělesa) je komplikovanější. „Povrchový“ člen s rozměrem  $d$  roste, „tíhový“ člen klesá s  $d^3$ . Musí tedy existovat jistý rozměr tělesa, při kterém převládne tíhová síla nad silou povrchovou a odporovou a výška vystříknutí začne klesat až na nulu. Povrchová síla dominuje (pokud vůbec) při malých rozměrech a způsobuje lineární nárůst výšky  $H$ .

### Experiment a výsledky

Výsledky vás – našich řešitelů – potvrzují teoretické závěry v bodech 1) a 2). Tedy voda stříká více, házíme-li těleso z větší výšky či házíme-li krychli místo koule.

Experimentální důvtip vyžaduje ověření tvrzení 3). Například můžeme dutou nádobku postupně vyplňovat závažími.

V tomto „vzorovém řešení“ se pokusíme experimentálně doložit závěr v bodu 4). Zejména proto, že se o to žádný z řešitelů nepokusil. Zdůrazňujeme, že neočekáváme žádné exaktní závěry, proto příprava i provedení nedosahují takové preciznosti, jak by si řešení experimentální úlohy FYKOSu zasloužovalo.

Jako padající těleso použijeme gelových kuliček, které necháme nabobtnat ve vodě. Získáme tak sadu třiceti těles stejného tvaru, hustoty o málo větší než je hustota vody a rozměrů v rozmezí 1,5 mm až 10 mm. Počáteční výška  $h$  bude během experimentu konstantní.

Výstřik vody po dopadu tělesa na hladinu je velice dynamický jev, a je proto dosti obtížné výšku vystříknutí  $H$  měřit. Nejeftivnější (nikoliv nejpřesnější) je využití digitální kamery, jejíž záznam průběhu experimentu posléze vyhodnotíme.

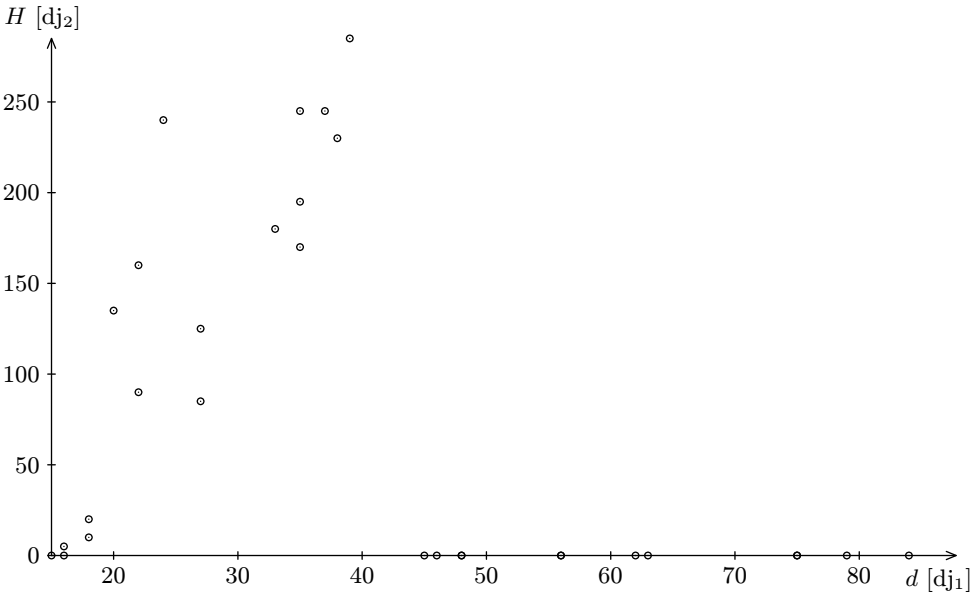
Pro každou velikost kuličky jsme provedli dvě měření, jejichž výsledky shrnuje následující tabulka.

Tabulka výsledků měření

$d$ [dj <sub>1</sub> ]	15	16	16	18	18	20	22	22	24	27	27	33	35	35	35
$H$ [dj <sub>2</sub> ]	0	0	5	10	20	135	160	90	240	85	125	180	170	195	245
$d$ [dj <sub>1</sub> ]	37	38	39	45	46	48	48	56	56	62	63	75	75	79	84
$H$ [dj <sub>2</sub> ]	245	230	285	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Jednotky dj<sub>1</sub> a dj<sub>2</sub> jsou *délkové jednotky*, které jsme si ad hoc definovali při odečítání rozměrů kuliček a výšky vystříknutí z digitální fotografie, resp. digitálního záznamu. Jelikož jsme na exaktní výsledky rezignovali, nemá smysl měření kalibrovat a převádět naměřené hodnoty do jednotek SI.

Pro názornost je nezbytné zobrazit data i graficky (obr. 6). Pak je vidět, že naše výsledky



Obr. 6. Graf výsledků měření

nejdou nijak ohromující. Zpočátku se dá vypořádat růstová tendence hodnot. Od rozměru kuličky asi  $d = 40$  dj<sub>1</sub> však vystříkování vody po dopadu naprosto ustalo. Kulička tedy dosáhla takových rozměrů (tj. hmotnosti), že její zbrzdění odporovou a povrchovou silou se blíží nule a nedochází tak k žádnému vystříknutí. Kulička projde hladinou naprosto hladce, bez pozorovatelného zpomalení. Tento jev je v našem experimentu zesílen tím, že koeficient obtékání je velice malý jednak díky tvaru a jednak díky hladkému a kluzkému povrchu kuličky.

Tímto je potvrzen závěr 4) teoretického úvodu.

Graf rovněž demonstruje obrovskou chybu měření a veliký vliv náhody na každé měření. K jejímu eliminování bychom potřebovali mnohem více trpělivosti a opakování pokusů.

### Závěr

V případě hydrodynamických fyzikálních jevů je velice obtížné vyvodit teoretické předpovědi a stejně tak provést reprezentativní a exaktní měření. V této úloze šlo tedy především

o kvalitativní experimentální analýzu jevu. Z tohoto úhlu pohledu jsou naše výsledky uspokojivé, ba co víc, došlo k jakési shodě s teoretickou predikcí.

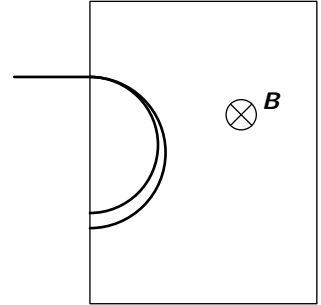
Velkou pochvalu zaslouží všichni řešitelé této úlohy. Drtivá většina z nich k experimentu přistoupila s chutí a odhodláním a dospěla tak k podrobným experimentálním závislostem vystříknutí na různých parametrech tělesa alias hovna.

**Honza Prachař**

honzik@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha V. S ... hrátky s elektrony (6 bodů; průměr 4,29; řešilo 7 studentů)

- a) Druhým způsobem, kterým měřil J. J. Thomson velikost měrného náboje elektronu, je právě studium vychylování katodového záření elektrickým polem. Uvažujte aparaturu podle obrázku z minulé kapitoly seriálu. Jak závisí odchylka paprsku, zaznamenaná na stínítku vpravo, na přiloženém napětí, rychlosti „corpuscules“ a geometrických vlastnostech aparatury?
- b) Jedním z problémů, se kterými se J. J. Thomson potýkal při stanovování měrného náboje elektronů, byl následující: Po vstupu paprsku katodového záření do magnetického pole se paprsek rozšířil do tvaru jakéhosi vějíře (viz obrázek). Tento rozptyl paprsku činí určování poloměru kružnice, kterou katodové záření vytvoří, značně nepřesné (Thomson hovořil o 20 %). Čím můžeme tento rozptyl vysvětlit? Pokud uvedete, jakým způsobem by bylo možno tuto nepřesnost zmenšit, vysloužíte si bonusový bod.
- c) Zpracováním dat z tabulky určete velikost náboje elektronu v případě, že by olej měl hustotu  $920 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , vzduch hustotu  $1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a viskozitu  $17,1 \cdot 10^{-7} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Užívali jsme elektrické pole o intenzitě  $250 \text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$ .



*S řešiteli si zašpásovali Jakub a Pavel.*

### Zase elektron

Označme  $U$  přiložené napětí,  $m_e$  hmotnost elektronu,  $e$  jeho náboj a  $v$  jeho rychlost. Co se týče aparatury, necht' vzdálenost mezi elektrodami je  $d$ , jejich délka  $s$ , vzdálenost mezi koncem elektrody a stínítkem (koncem baňky)  $l$ . Konečně odchylku svazku (vzdálenost bodu na stínítku od osy) označme  $y$ .

Přivedené napětí vytvoří v prostoru mezi elektrodami homogenní elektrické pole velikosti

$$E = \frac{U}{d}. \quad (9)$$

V tomto elektrickém poli působí na elektron konstantní elektrická síla, která mu uděluje zrychlení

$$a = \frac{eE}{m_e} = \frac{eU}{dm_e} \quad (10)$$

ve směru kolmém k ose baňky.

Průlet elektronu mezi elektrodami trvá dobu

$$T = \frac{s}{v}, \quad (11)$$

za tuto dobu se elektron vychýlí do vzdálenosti

$$y_1 = \frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2} \frac{eU}{dm_e} \frac{s^2}{v^2} \quad (12)$$

a získá příčnou rychlost

$$v_y = aT = \frac{eUs}{dm_e v}. \quad (13)$$

Za elektrodami je elektron volný a jeho rychlost se zachovává. Pohybuje se proto přímočaře, pod konstantním úhlem, daným složkami rychlosti  $v$ ,  $v_y$ , vzhledem k ose baňky. Z podobnosti trojúhelníků zjišťujeme, že odchylka  $y_2$ , kterou elektron získá během této fáze splňuje

$$\frac{y_2}{l} = \frac{v_y}{v}. \quad (14)$$

Když to všechno složíme dohromady, získáme celkovou odchylku elektronu

$$y = y_1 + y_2 = \frac{eUs}{dm_e v^2} \left( l + \frac{s}{2} \right). \quad (15)$$

### Vějířek

Jak většina řešitelů správně odhadla, problémem je nestejná rychlost elektronů. Podle vztahu, uvedeného v seriálu se začnou elektrony, urychlené na rychlost  $v$ , v magnetickém poli indukce  $B$  pohybovat po kružnici poloměru

$$\rho = \frac{m_e v}{eB}. \quad (16)$$

Protože náboj a hmotnost elektronu jsou konstanty a magnetické pole působí na všechny elektrony stejným způsobem (pole můžeme považovat za dostatečně homogenní), musíme vysvětlení hledat v rozdílné rychlosti.

Různou rychlost získávají elektrony již při svém výletu z anody vlivem různých povrchových podmínek (příměsi, ...) a termického pohybu částic.

Odfiltrování je možné v principu provést více způsoby. Za katodu můžeme například přidat dva otočné kotouče, ve kterých vyřízneme vzájemně pootočené štěrby. Při rotaci obou kotoučů stejnou úhlovou rychlostí propustí aparatura pouze částice, které mají rychlost právě nutnou k překonání vzdálenosti mezi kotouči v době, kterou kotouče potřebují k pootočení druhé štěrby na místo první. O tomto systému jste již jistě slyšeli v souvislosti s prvními měřeními rychlosti molekul.

Další možností je vložit před rozdělovací magnetické pole kombinaci magnetického a elektrického pole takovou, že obě intenzity jsou vzájemně kolmé. Toto pole odchyluje všechny částice kromě těch, které mají rychlost právě nutnou k vyrovnání elektrické a magnetické síly. Po průchodu dostatečně dlouhým takovým polem dostaneme poměrně přesné svazek elektronů, které budou mít rychlosti pouze málo rozptýlené. Po průchodu takto připraveného svazku samotným magnetickým polem tak dostaneme poměrně dobrý obraz.

*Data processing*

Autor textu pátého dílu seriálu se omlouvá všem řešitelům seriálu, neboť díky jeho chybě byla data uvedená v tabulce přiložené k seriálu nesmyslná. Při výpočtech pak vycházely výsledky, které nekorespondovaly s textem uvedeným za tabulkou (nábojem neseným jednotlivými kapkami). Uvedme proto alespoň pro úplnost, jak by se příklad počítal v případě správně zadaných dat, a výsledek výpočtů provedený na zadaných datech.

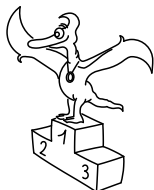
Pomocí vztahu uvedeného v zadání seriálu můžeme vypočítat náboj, který nesou jednotlivé kapičky. O každé kapičce „víme“, jaký nese elementární náboj, proto můžeme z dat pro každou kapičku vypočítat velikost elementárního náboje. Výslednou hodnotu pak získáme jako průměr hodnot pro všechny kapičky nesoucí nenulový náboj. Po zpracování zadaných dat získáme výsledek

$$e \sim 1,50 \cdot 10^{-19} \text{ C},$$

kteřý uvádíme pouze pro orientaci.

*Pavel Motloch*

pavel@fykos.mff.cuni.cz



## Pořadí řešitelů po V. sérii



### Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	6	<b>34</b>	<i>100</i>	<b>164</b>
<b>1.</b> Peter Kosec	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	3	–	2	4	3	–	<b>16</b>	<i>61</i>	<b>64</b>
<b>2.</b> Patrik Švančara	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	3	–	4	–	<b>9</b>	<i>58</i>	<b>60</b>
<b>3.</b> Stanislav Fořt	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>44</i>	<b>25</b>
<b>4.</b> Tomáš Trégner	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>28</i>	<b>14</b>
<b>5.</b> Ondřej Beneš	SPŠ, Hronov	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>57</i>	<b>8</b>
<b>6.</b> Lubomír Grund	G Zábřeh	2	–	2	–	3	–	–	<b>7</b>	<i>58</i>	<b>7</b>
<b>7.–8.</b> Alena Harlenderová	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>100</i>	<b>6</b>
<i>Adam Chlapečka</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>86</i>	<b>6</b>
<b>9.–10.</b> Martina Štarhová	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>45</i>	<b>5</b>
<i>Markéta Švecová</i>	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>50</i>	<b>5</b>

## Kategorie druhých ročníků

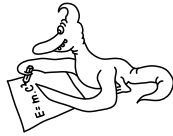
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	6	34	100	164
1. <i>Barbora Drozdová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	0	2	2	–	1	–	7	48	56
2. <i>Ondřej Maslíkiewicz</i>	SPŠ, Hronov	2	3	–	–	–	8	–	13	60	40
3. <i>Anna Chejnovská</i>	G B. Němcové, Hradec Králov	2	–	–	–	3	–	–	5	67	35
4. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	4	–	–	4	4	8	–	20	88	30
5. <i>Zuzana Bogárová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	44	28
6. <i>Jiří Nárožný</i>	G, Boskovice	1	3	–	2	–	–	–	6	70	21
7. <i>Domínika Kalasová</i>	G, Boskovice	–	–	–	2	–	8	–	10	80	12
8. <i>Nurullah Karakoc</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	60	9
9. <i>Barbora Janů</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	38	3

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	6	34	100	164
1. <i>Petr Ryšavý</i>	G J. Heyrovského, Praha	3	4	4	4	4	8	4	31	74	106
2. <i>Miroslav Rapčák</i>	G, Orlová	–	–	–	4	4	7	5	20	62	91
3. <i>Zuzana Dočekalová</i>	G, F. Hajdy, Ostrava	4	–	–	–	–	10	–	14	75	75
4. <i>Veronika Paštyková</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	2	3	2	–	3	6	5	21	52	73
5. <i>Ján Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	72	66
6. <i>Jakub Klemsa</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	2	3	4	–	2	–	6	17	70	52
7. <i>Jana Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	3	4	–	7	61	46
8. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	–	–	–	–	–	–	–	0	82	41
9.–10. <i>Kateřina Honzáková</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	73	30
<i>Petra Kňázková</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	43	30
11. <i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	59	29
12. <i>Petr Cagaš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	47	26
13. <i>Lada Peksová</i>	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	67	24
14. <i>Pavel Novotný</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	3	–	–	3	65	20
15. <i>Michal Husek</i>	G, Bučovice	2	–	–	–	–	–	–	2	29	17
16. <i>Stanislav Paláček</i>	G M. Kopernika, Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	0	62	16
17.–18. <i>Jan Hodic</i>	G J. Ressela, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	0	31	10
<i>Viktor Jamrich</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10
19. <i>Michal Müller</i>	G, Jevíčko	–	–	–	–	–	–	–	0	55	6
20. <i>Jan Nevorál</i>	G, Jana Masaryka, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
21. <i>Martin Chudjak</i>	SPŠ Martin	–	–	–	–	–	–	–	0	44	4
22.–23. <i>Vojtěch Dziewicki</i>	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
<i>Jiří Keresteš</i>	VOŠ a SPŠ elektrotech., Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
24. <i>Jaroslav Pavela</i>	G F. Palackého, Val. Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	0	67	2

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	8	6	34	100	164
1. <i>Lukáš Labor</i>	G, Třinec	–	3	–	–	–	–	7	10	70	67
2. <i>Karel Kolář</i>	G, Špitálská, Praha	2	–	–	1	3	–	–	6	57	52
3. <i>Tereza Zábajníková</i>	G, Uherské Hradiště	2	4	3	4	–	–	2	15	57	50
4. <i>Pavel Malý</i>	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	–	3	–	–	–	–	–	3	74	43
5. <i>Lukáš Cimpl</i>	G, Frenštát pod Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	0	65	42
6.–7. <i>Mária Kieferová</i>	G Sv. Františka, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	0	78	35
<i>Prabhat Rao Pinnaka</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	80	35
8. <i>Alžběta Pechová</i>	SPŠ strojnická, Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	0	44	27
9. <i>Martin Výška</i>	G, Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	96	26
10.–12. <i>Jana Figulová</i>	G Ludovita Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	53	20
<i>Michael Hakl</i>	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	67	20
<i>Jakub Töpfer</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	59	20
13. <i>Jan Humplík</i>	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	0	73	19
14. <i>Hana Šustková</i>	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	0	39	18
15. <i>Katarína Bazová</i>	G Ludovita Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	58	11
16. <i>Michal Koutný</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	0	100	10
17. <i>Martin Polačko</i>	G, Alejová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	0	60	9
18. <i>Václav Obrázek</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	70	7
19. <i>Barbora Hanáková</i>		–	–	–	1	1	1	1	4	17	5
20.–21. <i>Eva Hašková</i>	G a SOŠ, Úpice	–	–	–	–	–	–	–	0	25	4
<i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	80	4
22.–23. <i>Dana Suhomelová</i>	G Ludovita Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
<i>Martina Vaváčková</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
24. <i>Peter Vanya</i>	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	0	17	1



## Řešení VI. série

**Úloha VI.1 ... odpor je marný** (4 body; průměr 4,44; řešilo 9 studentů)

Vypočítejte odpor  $n$ -rozměrné krychle mezi dvěma nejvzdálenějšími vrcholy (ty o souřadnicích  $(0, 0, \dots, 0)$  a  $(1, 1, \dots, 1)$ ). Zkuste začít od trojrozměrné a použijte stejný postup.

Přednesl Lukáš Ledvina.

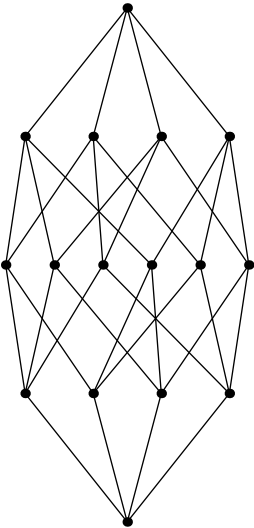
0. vrstva

1. vrstva

2. vrstva

3. vrstva

4. vrstva



Obr. 7. Čtyřrozměrná krychle

V této úloze bylo asi nejtěžší si celou situaci správně představit. K tomu je dobré nakreslit si obrázek.

V zadání nebylo řečeno, že se krychle sestává pouze z hran. Pokud bychom však uvažovali plnou krychli z materiálu o konstantní rezistivitě, tak by měla mezi libovolnými dvěma vrcholy nekonečný odpor. V okolí vrcholu se dají očekávat jisté ekvipotenciální roviny. Zde je potřeba si uvědomit, že vyskytujeme-li se v  $n$ -rozměrném prostoru, tak oblasti se stejným potenciálem jsou variety o  $n - 1$  rozměrech. Přivedeme-li do nějakého vrcholu elektrický proud, tak ve vzdálenosti  $d$  od vrcholu je „plocha“ ekvipotenciály úměrná  $d^{n-1}$ . Zajímá-li nás odpor až do vzdálenosti  $d_0$ , platí

$$R_{d_0} = \int_0^{d_0} \frac{\rho dl}{S}, \quad (17)$$

kde však  $S$  značí plochu výše zmíněné ekvipotenciály, tedy  $S \approx l^{n-1}$ . Dosazením do (17) dostáváme pro  $n \geq 2$

$$R_{d_0} \approx \rho \int_0^{d_0} l^{1-n} dl = +\infty.$$

Je vidět, že odpor více než jednorozměrné krychle, což je úsečka, je vůči libovolným dvěma různým vrcholům nekonečný. Proto se budeme dále zabývat odporem  $n$ -rozměrné krychle složené z hran, každá o odporu  $R$ .

V této úloze budeme značit souřadnice vrcholů  $(x^1, \dots, x^n)$ ,  $x^i \in \{0, 1\}$ . Vzhledem k symetrii úlohy lze předpokládat jisté ekvipotenciální plochy. Na  $k$ -té ekvipotenciální ploše leží vrcholy ležící v  $(n - 1)$ -rozměrném prostoru kolmém na tělesovou úhlopříčku. Tato plocha splňuje rovnici

$$\sum_{i=1}^n x^i = k \quad \text{pro } 0 \leq k \leq n. \quad (18)$$

Pokud se snažíme vypočítat odpor trojrozměrné krychle, tak nalezneme tyto, dvě ekvipotenciální plochy a „sečteme“ odpory, které jsou zapojené mezi nimi, dále pak již řešíme „pouze“ sériové spojování odporů mezi jednotlivými vrstvami. Máme-li však krychli  $n$ -rozměrnou, již nebudeme mít pouze tyto dvě ekvipotenciální plochy pro krychli, ale bude jich  $n - 1$ , kde  $n$  je dimenze.

Předpokládejme nyní tedy toto pásové uspořádání. Z každého vrcholu vychází právě  $n$  vodičů; do každého směru  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  jeden.<sup>3</sup> Nejdříve vypočítáme, kolik vrcholů je ve které vrstvě. Všechny vrcholy ležící v  $k$ -té vrstvě jednak splňují rovnici (18), dále jejich souřadnice  $x^i \in \{0, 1\}$ . Z tohoto je již vidět, že počet uzlů ve vrstvě je

$$N_k = \binom{n}{k}. \quad (19)$$

Najdeme nyní vztah mezi koeficienty binomického rozvoje.

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \cdot \frac{m+1}{n-m} = \binom{n}{m+1} \cdot \frac{m+1}{n-m}. \quad (20)$$

Vodičů z vrstvy 0 do vrstvy 1 jde  $nN_0$ , tedy součin počtu uzlů a dimenze.

Z první vrstvy vychází opět  $nN_1$  vodičů, neboť dva sousedé nemohou ležet v téže vrstvě. Avšak vodičů, které se propojují první a druhou vrstvou je jen

$$G_{12} = nN_1 - nN_0. \quad (21)$$

Označíme-li  $G_{xy}$  počet vodičů spojujících vrstvu  $x$  s vrstvou  $y$ , v našem případě bude platit  $|x - y| = 1$ , můžeme upravit výraz (21) užitím identity (20) do tvaru

$$G_{12} = n \binom{n}{1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = (n-1)N_1.$$

Z tohoto výrazu je vidět, že z každého uzlu první vrstvy vychází jeden vodič do nulté vrstvy a  $n-1$  vodičů do druhé vrstvy.

Zformulujme nyní domněnku: nacházíme-li se v  $k$ -té vrstvě, tak z jednoho uzlu vychází  $n-k$  vodičů do  $(k-1)$ -vé vrstvy a  $k$  vodičů do  $(k+1)$ -vé vrstvy. Matematicky zapsáno

$$G_{k(k+1)} = (n-k)N_k. \quad (22)$$

Důkaz provedeme indukci. Pro  $k=0$  jsme ověřili výše. Nyní předpokládejme, že

$$G_{(k-1)k} = (n-k-1) \binom{n}{k-1}.$$

Toto znamená, že vrstvy  $k-1$  a  $k$  spojuje  $G_{(k-1)k}$  vodičů. Dále však víme, že z vrstvy  $k$  celkově vychází  $n \binom{n}{k}$  vodičů, dále však není žádná hrana rovnoběžná s tělesovou úhlopříčkou, což jasně implikuje

$$G_{k(k+1)} = n \binom{n}{k} - G_{(k-1)k}.$$

Úpravou výrazu, použitím identity (20) dostáváme

$$G_{k(k+1)} = n \binom{n}{k} - (n-k-1) \binom{n}{k-1} = n \binom{n}{k} - (n-k-1) \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n-k-1} = (n-k)N_k.$$

<sup>3</sup> Vektory  $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  mající jedničku na  $i$ -té pozici tvoří *kanonickou bázi*  $n$ -rozměrného prostoru. Každý z nich má délku 1 a je kolmý na všechny ostatní.

Tímto jsme dokázali domněnku (22).

Chceme-li nyní vypočítat odpor celé krychle mezi vrcholy  $(0, \dots, 0)$  a  $(1, \dots, 1)$ , stačí vypočítat odpor mezi jednotlivými vrstvami; celkový odpor je součtem těchto parciálních odporů. Protože jsou všechny odpory stejně veliké, platí

$$R_{k(k+1)} = \frac{R}{G_{k(k+1)}}.$$

Pro odpor celé krychle platí

$$R_{0n} = \sum_{i=0}^{n-1} R_{i(i+1)} = R \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-i) \binom{n}{i}} = R \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \binom{n}{k}}.$$

Toto je výraz pro celkový odpor krychle složené z hran o odporu  $R$  v  $n$ -dimenzionálním prostoru mezi nejvzdálenějšími vrcholy.

Ještě je zajímavé vypočítat, jak se vyvíjí odpor v závislosti na dimenzi, když  $n \rightarrow \infty$ .

$$R_{0n} = R \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n} \right) \approx \frac{2R}{n} \rightarrow 0.$$

Je vidět, že odpor klesá jako převrácená hodnota dimenze.

*Lukáš Ledvina*

lukas1@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha VI.2 ... útěk z koule (5 bodů; průměr 3,00; řešili 3 studenti)

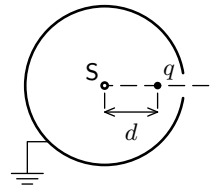
V uzemněné kouli z vodivého materiálu je vyvrtán malý otvor, tak akorát, že ním projde malá nabitá částice. Umístíme ji do vzdálenosti  $d$  od středu koule na spojnici jejího středu a otvoru (viz obrázek 8). Náboj pustíme. Jak daleko z koule vyletí ven? Zkuste využít metodu zrcadlového potenciálu.

*Nad koulemi rozjímal Pavel M.*

Náboj uvnitř koule na ni přitáhne ze země náboj opačný a ten se na ní určitým způsobem rozprostře. Vlastností vodičů a tedy i naší koule je, že jejich povrch má všude stejný potenciál, pro určitost si ho zvolíme jako nulový.<sup>4</sup>

Nyní si odmysleme velkou kouli a přimysleme naopak nějaký druhý bodový náboj. Předpokládejme, že v celkovém poli původního a nového se nachází plocha nulového potenciálu, která přesně kopíruje původní kouli. Potom je zřejmě pole těchto dvou nábojů ekvivalentní s původním polem náboje a koule.<sup>5</sup>

Kam zrcadlový náboj umístit a jak bude velký? Ze symetrie bude zřejmě ležet na ose částice a otvoru. Situaci budeme popisovat v řezu procházejícím touto osou, s počátkem ve středu koule a osou  $x$  mířící k otvoru. Označme  $r$  poloměr koule,  $Q$  zrcadlový náboj a  $D$  jeho



Obr. 8. Koule s částicí

<sup>4</sup> Pokud by všude stejný nebyl, elektrony by se pohybovaly ve směru jeho spádu.

<sup>5</sup> Tato úvaha je, řekněme, klasická a v zadání na ni bylo odkazováno pod názvem metoda zrcadlového potenciálu. Pro obsírnější vysvětlení odkazujeme na 2. díl Feynmanových přednášek, část 6.7.

vzdálenost od počátku. Potom zřejmě v bodech  $(-r, 0)$ ,  $(r, 0)$  vyžadujeme nulový potenciál, tedy

$$\frac{q}{r-d} + \frac{Q}{D-r} = 0, \quad \frac{q}{r+d} + \frac{Q}{D+r} = 0.$$

Vynásobením jmenovateli a sečtením, resp. odečtením, rovnic dostaneme

$$Q = -q\frac{r}{d}, \quad D = \frac{r^2}{d}.$$

Nyní ověříme, že plocha o nulovém potenciálu je skutečně vyžadovaná koule. Tedy pokusíme se rovnici

$$0 = \frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x-D)^2 + y^2}}$$

upravit na tvar  $x^2 + y^2 = r^2$ . A skutečně, několika elementárními algebraickými úpravami a využitím vztahů pro  $Q$  a  $D$  se nám to povede. Použití zrcadlového náboje je tedy oprávněné a potenciál v místě částice, než se začala pohybovat, je

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{D-d} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^2-d^2}.$$

Co dál? Částice se začne působením náboje na kouli pohybovat ven z koule a s ní zrcadlový náboj naopak směrem ke kouli. Ve chvíli, kdy částice kouli opustí, na ni ale začne působit tato síla v opačném směru a částice se po čase zastaví. V tu chvíli bude mít zřejmě stejnou potenciální energii jako na začátku.

Označme  $l$ , resp.  $L$ , vzdálenost částice, resp. zrcadlového náboje  $Q'$ , od počátku v situaci, kdy je částice venku a zrcadlový náboj uvnitř. Potom zřejmě  $Q' = -qr/l$  a  $L = r^2/l$  jako v prvním případě. Pro potenciál v místě částice tedy máme

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{l-L} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{l^2-r^2}.$$

Z rovnice  $\varphi_1 = \varphi_2$  potom už jednoduše vyjádříme  $l = \sqrt{2r^2 - d^2}$  a vzdálenost částice od koule, na kterou se ptala úloha, tedy bude  $\sqrt{2r^2 - d^2} - r$ .

*Jan Hermann*

honzah@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha VI.3 ... relativistická koule (4 body; průměr 2,00; řešilo 5 studentů)

Při pohybu rychlostí srovnatelnou s rychlostí světla dochází ke kontrakci délek, ale zároveň se nám předmět zdá delší než ve skutečnosti je (zkuste sledovat paprsky světla vyslané z bližšího a vzdálenějšího konce tělesa). Vypočítejte, jestli se u relativistické koule tyto efekty nevyruší.

*Z Cambridge donesl Dalimil.*

Správné řešení této úlohy se nám bohužel do uzávěrky tohoto čísla nepodařilo zajistit. Vzorové řešení bude v příštích dnech dostupné na našich internetových stránkách. Přijměte naši omluvu.

*Tomáš Jirotko*

**Úloha VI.4 ... kámen na pístu** (5 bodů; průměr 2,88; řešilo 8 studentů)

Marek má píst o rozměru  $S$  s ideálním plynem v rovnovážném stavu ( $p$ ,  $V$  a  $T$ ). Na tento píst z výšky  $h$  pustí kámen o hmotnosti  $m$  (viz obr. 9). Píst se stlačí a opět vrátí do nějaké polohy zpět. Jak závisí tato poloha na hmotnosti kamene a výšce, ze které byl upuštěn? Je možné, že se píst ustálí ve vyšší poloze než byl prve? Jak se změní teplota plynu v pístu?

*Napadlo Máru při vymýšlení perpetua mobile.*

Pokusme se uvažovat takový fyzikální model, který aspoň trochu odpovídá realitě a zároveň je dostatečně jednoduchý.

Předpokládejme, že válec je umístěn v atmosféře o tlaku  $p_a$ , přičemž přestup tepla mezi plynem uvnitř válce a vnější atmosférou je velmi malý, jako je tomu třeba u termosky, která má tepelně izolovanou vnitřní a vnější stěnu. Vnitřní stěna válce je v tepelné rovnováze s plynem uvnitř a vnější stěna je v rovnováze s vnější atmosférou. Pokud ohřejeme vnější stěny válce, teplo nebude proudit dovnitř a naopak. Označme hmotnost pístu  $M$ . Tepelnou kapacitu  $C$  vnitřní stěny válce uvažujme nejprve nulovou, na konci se k tomu vrátíme.

Při řešení úlohy vyjdeme ze zákona zachování energie. Součet mechanické energie systému a „tepelné“ energie systému musí být na začátku i na konci děje shodné.

Během nepružné srážky kamene a pístu se část kinetické energie kamene přemění v teplo  $Q$ , které ohřeje jednak kámen a jednak vnější stěnu pístu. Rychlost kamene těsně před srážkou je  $v_0 = \sqrt{2gh}$ , rychlost pístu s kamenem po nepružné srážce je rovna  $v_1 = mv_0/(m + M)$ , jak plyne ze zachování hybnosti, a jeho kinetická energie

$$E_{k,1} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m + M)} = \frac{m^2 gh}{m + M}. \quad (23)$$

Předpokládejme, že uvolněné teplo  $Q$  unikne do atmosféry a nebude hrát roli v námi zkoumané energetické bilanci.

Stav v okamžiku srážky kamene a pístu berme za počáteční, vertikální poloha a potenciální energie kamene a pístu budiž v tomto okamžiku zvolena jako nulová. Veličiny vztahující se k počátečnímu, resp. koncovému stavu budeme značit indexem 1, resp. 2. Vnitřní energie ideálního plynu je dána

$$U = \alpha N k_B T = \alpha p V,$$

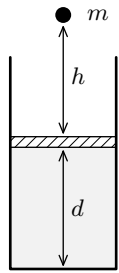
přičemž druhá rovnost plyne ze stavové rovnice. Zde  $N$  značí počet molekul,  $k_B$  Boltzmannovu konstantu a  $\alpha = 5/2$  pro dvouatomový plyn (např. dusík, kyslík). Celková energie počátečního stavu je

$$E_1 = E_{k,1} + U_1 = E_{k,1} + \alpha p_1 V_1.$$

V počátečním a koncovém stavu je výsledná síla působící na píst nulová a platí tedy rovnosti

$$\begin{aligned} p_1 &= p_a + Mg/S \\ p_2 &= p_1 + mg/S, \end{aligned} \quad (24)$$

kde  $S$  je plocha pístu. Píst je v koncovém stavu v klidu, musel tedy nutně být brzděn třením, jinak by totiž stále osciloval kolem rovnovážné polohy. Při tření vzniká teplo na vnitřní stěně válce, které přechází do uzavřeného plynu. Energie zůstává v systému.



Obr. 9.  
Píst před dopadem kamene

Celková energie koncového stavu je

$$E_2 = E_{p,2} + U_2 = (m + M)gs + \alpha p_2 V_2,$$

kde  $s$  je výška pístu oproti počáteční. Tlak  $p_2$  je dán rovnicí (24) a zároveň  $V_2 = V_1 + Ss$ . Díky rovnosti  $E_1 = E_2$  potom platí

$$E_{k,1} + \alpha p_1 V_1 = (m + M)gs + \alpha(p_1 + mg/S)(V_1 + Ss).$$

Zvednutí pístu  $s$  odtud poté vyjádříme

$$s = \frac{E_{k,1} - \alpha mgd}{(1 + \alpha)g(m + M) + \alpha p_a S}.$$

Závislost energie  $E_{k,1}$  na  $h, m, M$  je dána vztahem (23).

Z vyjádření  $s$  je patrné, že píst vystoupí výše, než byl původně, v případě, že  $E_{k,1} > \alpha mgd$ .

Pokud by veškeré teplo  $Q$  přešlo zpět do systému a nikoli do okolí nebo pokud  $m \gg M$ , podmínka pro zvednutí pístu je  $mgh > \alpha mgd$ , a tedy pro dvouatomový plyn  $h > 5d/2$ .

Když píst stoupne a ještě ke všemu nese větší zátěž než původně, je zřejmé, že teplota plynu vzrostla mezi počátečním a koncovým stavem. Teplota samozřejmě vzroste ve všech případech, protože když naopak píst klesne, kinetická energie i rozdíl potenciální energie mezi počátečním a koncovým stavem se uloží do vnitřní energie plynu.

Učinili jsme celkem neoprávněný předpoklad o nulovosti vlastní tepelné kapacity  $C$  vnitřní stěny válce. Všimněme si ale, že kapacitu  $C$  lze do provedených výpočtů snadno započítat zvětšením konstanty  $\alpha$ . Tudíž  $C$  zahrneme přímo do tepelné kapacity plynu.

Někteří z vás považovali celý děj za adiabatický, tedy bez přenosu tepla mezi vnějškem a systémem. V případě klasického adiabatického děje by výslednému většímu tlaku jistě musel odpovídat menší objem. Nulový přenos tepla mezi vnějškem a systémem jsme předpokládali také, ale je třeba si uvědomit, že teplo vznikne třením při brzdění pístu.

**Marek Scholz**

mara@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha VI. P ... lidští ptáci (4 body; průměr 3,31; řešilo 13 studentů)

*Titan – družice Saturnu – je mrazivý svět (povrchová teplota asi 94 K) s mohutnou dusíkovou atmosférou, s ledovým povrchem a uhlovodíkovými jezery. Průměr Titanu je 5150 km, hmotnost je 1/45 hmotnosti Země, tloušťka jeho atmosféry je 200 km a tlak na jeho povrchu je 1,5 atmosféry.*

*Na základě předložených údajů určete gravitační zrychlení na povrchu a odhadněte hustotu atmosféry. Srovnáním s parametry ptáků v pozemských podmínkách rozhodněte, zda by opeřený člověk mohl na Titanu létat.*

*Létat se zachtělo Honzovi P.*

Gravitační zákon ve tvaru  $a = \varkappa m/r^2$ , kde  $a$  označuje zrychlení,  $\varkappa$  gravitační konstantu,  $m$  hmotnost planety a  $r$  vzdálenost od středu, platí jak pro hmotné body, tak pro libovolně kulově symetrické rozložení hmoty (analogie mezi gravitací a elektrostatikou). Dodejme, že pro tíhové zrychlení na Zemi platí  $g = \varkappa M/R^2$  a z poměru obou rovnic dostaneme

$$a = \frac{m}{M} \left( \frac{R}{r} \right)^2 g = 1,34 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Co se v zadání míní tloušťkou atmosféry? Hustota atmosféry s výškou klesá přibližně exponenciálně, což vyjadřuje barometrická formule (totéž pro tlak)

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{Agh}{RT}\right),$$

v níž  $A$  označuje molární hmotnost,  $g$  zrychlení,  $h$  výšku nad povrchem,  $R$  plynovou konstantu a  $T$  termodynamickou teplotu. Všimněte si, že v čitateli stojí potenciální energie jednoho molu v homogenním tíhovém poli, takže tento vztah je jednoduchým důsledkem vztahu Boltzmannova. V grafu se závislost hustoty (logaritmické měřítko) na výšce (lineární měřítko) podobá klesající přímce. V určité výšce pozorujeme malý „zhup“ podobný skelnému přechodu. V této výšce také začíná růst teplota. Tloušťku atmosféry definujeme jako konec tohoto přechodu; v zemské atmosféře mu odpovídá výška  $h = 110$  km a hustota  $\rho = 10^{-8}$  kg·m<sup>-3</sup>. Lze teď postupovat obráceně a z definice tloušťky atmosféry jako výšky, kde hustota nabývá  $10^{-8}$  násobku hustoty na povrchu, odvodit tloušťku atmosféry? Pokud považujeme tíhové zrychlení za konstantu, nikoliv. Z výšky atmosféry totiž odvodíme pouze rychlost poklesu, ale tlak bude vždy přímo úměrný celkové hmotnosti atmosféry.<sup>6</sup>

Pokud bychom (mechanicky) vycházeli ze vzorce pro hydrostatický tlak  $p = h\rho a$ , dostali bychom nesmyslně nízkou (v atmosféře konstantní) hustotu  $\rho = 0,57$  kg·m<sup>-3</sup>. Tento model totiž uvažuje kapalnou atmosféru.

Vhodněji atmosféru popíšeme modelem ideálního plynu, který předpokládá platnost stavové rovnice  $pM = \rho RT$ . Z ní plyne hustota dusíku ( $M = 0,028$  kg·mol<sup>-1</sup>)  $\rho = 5,4$  kg·m<sup>-3</sup>; rovnice van der Waalsova dává hustotu  $\rho = 5,6$  kg·m<sup>-3</sup>. Pro danou teplotu a tlak jsou podmínky platnosti rovnic splněny.

Mohl by na Titanu opeřený člověk létat? Za létání považujeme jednak aktivní třepetání křídelky jako vtulník, jednak pasivní nadnášení díky profilu křídel jako u rogalu. Vyšetřujeme podmínky aktivního letu. V našem řádovém odhadu označíme charakteristickou délku  $R$  a frekvenci  $f$ : K zemi „letouna“ táhne tíhová síla  $F \sim R^3 \rho_1 a$  (vztlak zanedbatelný), zatímco k věčným ideálům míří síla odporová turbulentního proudění  $F \sim \rho R^4 f^2$  (odporovou sílu při pohybu křídel nahoru lze díky nízké rychlosti zanedbat). Podmínka rovnováhy dává pro člověka stejné velikosti jako orel úměru

$$\frac{f_o}{f_1} = \sqrt{\frac{\rho_o}{\rho_1}} \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\frac{p_T}{p_z}} \sqrt{\frac{T_z}{T_T}} \doteq 5,$$

kde jsme odhadli orlí hustotu asi na  $0,7$  g·m<sup>-3</sup> (možná jste si všimli, že někteří ptáčci mají nižší hustotu než voda, a tedy plavou). Na druhou stranu takový model počítá s hmotností ptáka asi  $50$  kg, což dost nesedí, tedy přesnost tohoto odhadu je asi jeden řád. Vypočítejme ještě potřebný výkon

$$P = FRf \sim \rho R^5 f^3.$$

Výkon výrazně závisí na charakteristickém rozměru a na frekvenci. Pro metrového orla vychází na zemi řádově desítky wattů. Pro člověka s dvoumetrovými křídly na Titanu řádově stovka

<sup>6)</sup> Pokud bychom místo homogenního tíhového pole uvažovali tíhové pole planety, v němž je potenciální energie  $E_p = -\kappa Mm/x$ , objevil by se problém. Hustota by totiž se vzrůstající vzdáleností konvergovala k nenulové konstantě. To by znamenalo nekonečnou celkovou hmotnost, čímž by byl porušen předpoklad, že pole způsobuje pouze masa Titanu. Navíc bychom u takto nekonečného tělesa těžko mohli těžko mluvit o tepelné rovnováze.

wattů. Zkoušeli jste někdy šplhat na laně bez nohou? Borci výkonu řádově stovky wattů dosáhnou.

Závěrem tedy konstatujeme, že díky vyšší hustotě a nižšímu tíhovému zrychlení by opeřený člověk nejspíš mohl létat, ale musel by se pěkně ohánět.

**Jakub Michálek**

jmi@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha VI. E ... vratné lahve (8 bodů; průměr 4,64; řešilo 14 studentů)

Kupte si standardní skleněnou lahev od piva nebo minerálky a změřte, jak závisí výška tónu vydaného po fouknutí na hrdlo na výšce vodní hladiny v lahvi.

*Vymysleli organizátoři na pravidelné schůzi.*

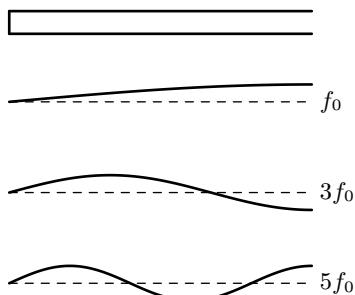
#### Teorie

Nejdříve se zamyslíme nad tím, jaký tón z lahve po fouknutí na hrdlo uslyšíme. Musíme ovšem udělat nějaká přiblížení, abychom se k rozumnému výsledku vůbec dopracovali. Tím hlavním bude tvar lahve, budeme ji považovat za úzký dutý válec s jedním koncem otevřeným, druhým uzavřeným (viz obr. 10).

V lahvi pak vzniká stojaté vlnění, které má na uzavřené straně uzel, na otevřené kmitnu. Nejmenší (základní) frekvence, která tuto podmínku splňuje, je

$$f_0 = \frac{c}{4l}, \quad (25)$$

kde  $c$  je rychlost zvuku ve vzduchu,  $l$  je vzdálenost od vodní hladiny k hrdlu. Ta je v tomto případě právě čtvrtinou vlnové délky vzniklé vlny (obr. 10 nahoře).



Obr. 10. Vlny vznikající v klarinetu

Na obrázku 10 vidíme ještě další možné stojaté vlny, jsou to vyšší harmonické frekvence, v těchto situacích je  $l$  rovno třem, pěti, sedmi, ... čtvrtinám vlnové délky vzniklé vlny a odpovídající frekvence jsou  $3f_0$ ,  $5f_0$ ,  $7f_0$ , ...

Co s takto vypočtenými frekvencemi udělá zúžení hrdla? Lahev od piva není totiž ničím jiným než Helmholtzovým rezonátorem<sup>7</sup>. Můžeme si jej představit jako kouli s válcovým hrdlem. Při fouknutí na ústí lahve dochází ke zvětšení tlaku v hrdle a jeho obsah tlačí na vzduch

<sup>7</sup>) O Helmholtzově rezonátoru si můžete v angličtině počítat například na internetové adrese <http://phys.unsw.edu.au/jw/Helmholtz.html>, včetně odvození rezonanční frekvence.

v dutině lahve – ten potom funguje jako pružina a vrátí vzduch zpět. Tyto periodické změny potom vydávají zvuk o frekvenci

$$f_H = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{VL}}, \quad (26)$$

kde  $c$  je rychlost zvuku,  $S$  plocha hrdla,  $L$  jeho délka a  $V$  objem dutiny lahve.

Protože námi použitá lahev bude mít poměr průměru hrdla a dna poměrně malý (asi 1/3), můžeme očekávat, že v naměřeném spektru budou zastoupeny jak frekvence vznikající rezonancí celého vzduchového sloupce, tak i ty vzniklé rezonancí vzduchu v hrdle.

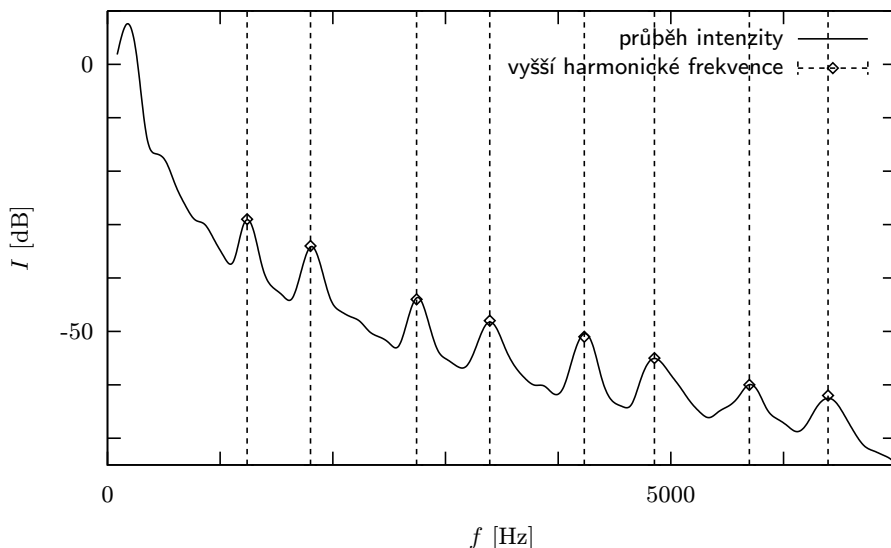
### Experiment

Ke měření jsme použili pivní lahev nejmenované starobrněnské značky, vodu, pravítko a počítač s mikrofonom. Pokusy jsme nahrávali do programu Audacity<sup>8</sup>, kde jsme potom provedli spektrální analýzu.

Jak jsme předpokládali, zúžení hrdla se projevilo zvláště na základní frekvenci, která byla úplně přehlušena frekvencí Helmholtzovou. Jak ji tedy můžeme najít? Naštěstí se nám v záznamu ukázaly výrazné píky u hodnot vyšších, které odpovídají druhé až sedmé harmonické frekvenci, jak vidíme na obrázku 11. Protože pro  $n$ -tou frekvenci platí

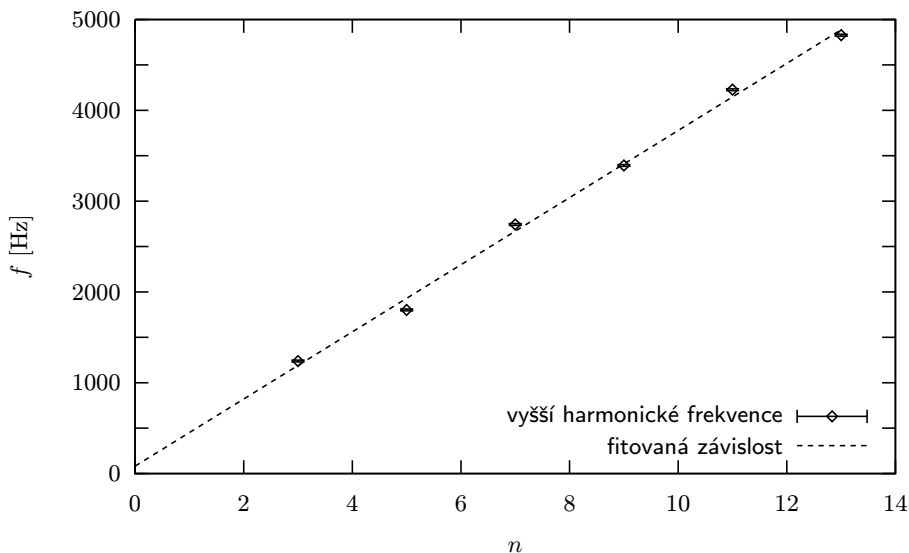
$$f_n = (2n - 1)f_0, \quad (27)$$

dokážeme lineárním fitem určit hodnotu  $f_0$ .



Obr. 11. Typický průběh intenzity

<sup>8)</sup> <http://audacity.sourceforge.net/>

Obr. 12. Příklad fitu pro zjištění  $f_0$ 

Na obrázku 12 vidíme příklad fitu ke zjištění frekvence. Fitujeme přímou úměrou popsanou rovnicí (27). Odečtené hodnoty z grafů intenzit naleznete v tabulce.

Tabulka výsledků měření

$l$ [cm]	$f_H$ [Hz]	$3f_0$ [Hz]	$5f_0$ [Hz]	$7f_0$ [Hz]	$9f_0$ [Hz]	$11f_0$ [Hz]	$13f_0$ [Hz]
14	268	1687	3008	4124	5143	6377	n/a
15	237	1619	2870	3786	4868	5948	6834
16	221	1582	2666	3519	4636	5643	6439
17	214	1529	2454	3344	4406	5309	6174
18	209	1496	2258	3206	4175	4977	5943
19	199	1435	2106	3103	3936	4756	5650
20	189	1365	1967	2995	3694	4578	5307
21	187	1317	1880	2894	3517	4436	5121
22	168	1239	1802	2743	3393	4228	4828
23	160	1180	1752	2622	3262	4052	4736
24	148	1102	1696	2471	3163	3822	4527

Tedy už zbývá jenom zpracovat nalezené základní frekvence. Tyto hodnoty jsou spolu s fitem vztahu (25) zaneseny v grafu 13. Fitovaná konstanta  $c$  má význam rychlosti zvuku a její hodnota vychází

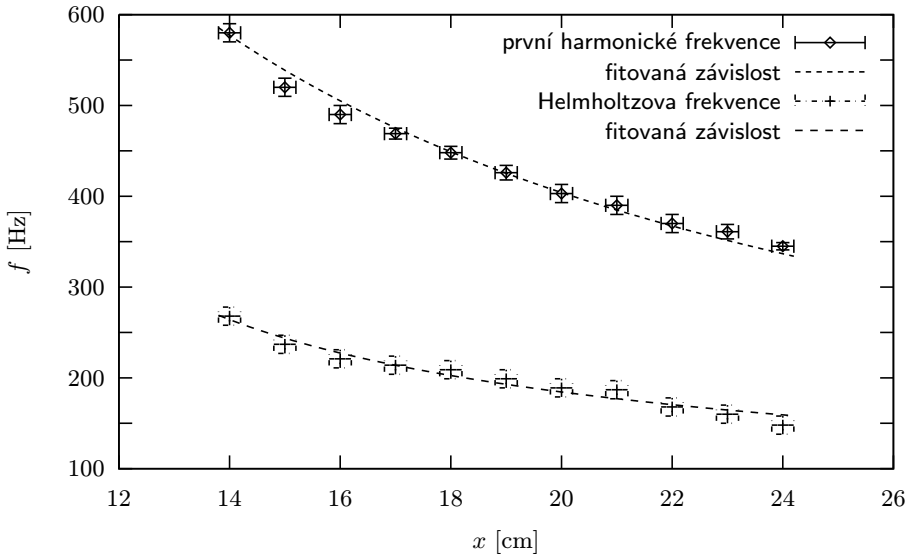
$$c = (323 \pm 2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Odečtení Helmholtzovy frekvence není takový problém, jde vždy o nejvýraznější pik z celého spektra. Její velikosti jsou opět v tabulce. Protože lahev nemá zrovna lehce určitelné rozměry hrdla (je oblá a hrdlo přechází v tělo lahve plynu), konstanty v rovnici (26) neumíme změřit.

Upravíme ji tedy do tvaru

$$f_H = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V_0 + (x - 0,14) S_L}}, \quad (28)$$

kde konstanta  $A = S/L$  parametrizuje hrdlo,  $V_0$  určuje objem vzduchu v oblé části lahve a  $S_L$  je průřez dna. Proměnná  $x$  stejně jako v minulém případě reprezentuje vzdálenost hladiny od ústí hrdla. Pokud tímto předpisem fitujeme získaná data, obdržíme hodnoty:  $A \approx 3 \text{ mm}$ ,  $V_0 \approx 149 \text{ cm}^3$  a  $S_L \approx 26 \text{ cm}^2$ , což jsou vcelku reálné údaje. Naměřená data spolu s fitovanou závislostí (28) najdete v grafu na obr. 13.



Obr. 13. Konečné výsledky měření

### Diskuse

Z výsledků grafického zpracování vyplývá, že se naměřené hodnoty dobře shodují s teorií. Rychlost zvuku je sice pro teplotu asi  $20^\circ\text{C}$  rovna přibližně  $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , ale tento rozdíl je pravděpodobně způsoben tvarem lahve a to jsme čekali.

Jak je vidět, u menších vzdáleností hladiny od ústí hrdla je frekvence nižší než očekávaná – to je způsobeno pravděpodobně tím, že zúžení lahve je již nepříjemně blízko. Kdyby byla lahev dostatečně velká, nemuseli bychom se pravděpodobně vůbec jejím tvarem zaobírat.

Výsledky fitu Helmholtzových frekvencí potvrzují, že se lahev opravdu chová jako Helmholtzův rezonátor. Jejich intenzita je největší a s přehledem přehlušují frekvence vzniklé rezonancí celého sloupce.

### Poznámky k řešení

Téměř všichni řešitelé dospěli ke správnému hyperbolickému grafu. Bylo ale vhodné měřit vzdálenost od hladiny k ústí (jak vyplývá z teorie), ne ode dna. Výsledky se potom dají lépe porovnat a navíc takto závislost někteří mylně považovali za exponenciálu. Za pěkné zpracování

jsme chtěli pochválit Karla Koláře, ale ten svoje řešení poslal tak pozdě, že si nic nezaslouží.

*Aleš Podolník*

ales@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha VI. S ... atomové modely a Rutherfordův experiment** (6 bodů; průměr 3,00; řešil 1 student)

- Rozhodněte, zda stabilita (popř. rozměr) saturnského atomového modelu závisí na atomovém čísle  $Z$ .
- Upravte vzorec (vztah 12 ze šesté kapitoly) pro pravděpodobnost rozptylu  $\alpha$ -částice pod velkým úhlem  $\phi$  tak, abyste dostali praktičtější vztah pro pravděpodobnost dopadu na jednotku plochy scintilátoru, a uvažte, jak byste ho využili k určení materiálu ostřelovaného vzorku. Dále odhadněte, jak by se vzorec změnil, pokud bychom neuvažovali centrální náboj  $Ze$ , nýbrž  $Z$  rozptýlených elementárních nábojů  $e$  jako třeba v Lenardově modelu.
- V roce 1896 objevil astronom E. C. Pickering ve světle hvězdy  $\zeta$  Puppis čáry, které splňovaly Rydbergerův vztah (vzorec 7 v šesté kapitole) pro  $n = 2$  a  $m = 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; \dots$ , tedy i pro polocelá čísla! Vysvětlete tuto zdánlivou nesrovnalost s Borhovým modelem.

*S řešitelem si zašpásovali autoři seriálu.*

### Saturnský model

V šestém díle seriálu byl představen Nagaokův saturnský model atomu takto: jedná se o kladně nabitě jádro (nábojem  $Ze$ , tedy prvek má atomové číslo  $Z$ ) a prstenec z elektronů kroužících okolo. Má-li být taková soustava stabilní, musí existovat rychlost obíhání, při které se vyváží všechny síly působící na každý jednotlivý elektron, totiž síla přitažlivá k jádru, odpudivá od ostatních elektronů a síla odstředivá. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že elektrony jsou rozestavené ve vrcholech pravidelného mnohoúhelníku se středem v jádře. Vzdálenost mezi jádrem a elektronem označme  $r$ ; to je vlastně hledaný poloměr atomu.

Je-li mnohoúhelník  $Z$ -úhelníkem, svírají průvodiče nultého a  $n$ -tého elektronu úhel

$$\alpha_n = \frac{2\pi n}{Z}.$$

Stejný úhel je mezi odpudivou silou působící mezi těmito elektrony a tečnou k prstenci v místě každého z obou elektronů.  $Z$  odpudivé síly se tak uplatní jen složka daná faktorem  $\sin(\alpha_n/2)$ . Vzdálenost mezi nultým a  $n$ -tým elektronem je z kosinové věty  $r_n^2 = 2r^2(1 - \cos \alpha_n)$ , tedy

$$r_n = 2r \sin \frac{\alpha_n}{2}.$$

Odpudivá síla působící na nultý elektron je pak součet odpudivých sil od všech ostatních elektronů, prvního až  $(Z - 1)$ -ho;

$$F_{\text{odp}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{Z-1} \frac{1}{r_n^2} \sin \frac{\alpha_n}{2} = \frac{1}{4} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^{Z-1} \frac{1}{\sin(\alpha_n/2)}.$$

Přitažlivá síla je jasná,

$$F_{\text{př}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{r^2},$$

takže pro rovnováhu musí být

$$F_{\text{při}} = F_{\text{odp}} + \frac{mv^2}{r},$$

což po dosazení a přeskupení dá

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( Z - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{Z-1} \frac{1}{\sin \frac{n\pi}{Z}} \right) = mrv^2. \quad (29)$$

Závorka je vždycky kladná a pro myslitelná  $Z$  je řádu  $10^1$ , takže vždy je možné vhodnou rychlostí docílit stabilního oběhu. Odpověď na druhou otázku v zadání není úplně jednoznačná – poloměr prstence (atomu), jak vidíme v (29), závisí mnohem silněji na rychlosti, s jakou elektrony obíhají kolem jádra, než na atomovém čísle.

### Rozptyl částic

Prouzek plochy detektoru úhlové šířky  $d\phi$ , který lze zasáhnout  $\alpha$ -částicemi rozptýlenými při odstřelování pod úhlem  $\phi$ , má obsah

$$dS = 2\pi r^2 \sin \phi d\phi = 2\pi r^2 \sin(\pi - \phi) d\phi.$$

Vydělíme-li elementem plochy rovnici ze zadání, dostaneme

$$\frac{dp}{dS} \sim \frac{1}{2\pi r^2} R_m^2 \frac{\pi - \phi}{\sin(\pi - \phi)},$$

kde pro připomenutí

$$R_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZeQ}{\frac{1}{2}mv_0^2}.$$

Jelikož  $\phi$  je blízke  $\pi$ , je i  $\sin(\pi - \phi)$  blízke  $\pi - \phi$ , a tak můžeme jejich podíl nahradit jedničkou. Konstanty zatratíme v úměrnosti a zbude jen

$$\frac{dp}{dS} \sim R_m^2 \sim (Ze)^2. \quad (30)$$

Pokud budeme porovnávat počty dopadů na stejnou plošku při rozptylech na různých materiálech, měly by tudíž vyjít v poměru  $Z_1^2/Z_2^2$ . Známe-li jeden materiál, jsme z experimentu schopni určit atomové číslo druhého a tedy i jeho složení. (Oba materiály musí být samozřejmě čisté prvky).

Jestliže by jádra nebyla koncentrovaná v jednom bodě a místo toho by bylo  $Z$  jader o náboji  $e$  rozmístěno po atomu, dostali bychom pro každé jádro rovnici (30), kde by bylo  $Z = 1$ . Jelikož jader máme tentokrát více, každé by přispívalo k četnosti dopadů podobným způsobem a výsledný efekt by mohl být přibližně popsáný úměrností

$$\frac{dp}{dS} \sim Z \cdot R_m^2 \Big|_{Z=1} \sim Ze^2.$$

Pak by poměr pro různé prvky byl pouze  $Z_1/Z_2$ , což lze snadno ověřit.

*Hvězdné čáry*

Jak bylo uvedeno v seriálu, Rydbergova formule zní

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 k^2 m Z^2 e^4}{h^3 c} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (31)$$

kde  $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ . Všimněme si, že když vynásobíme polocelé číslo dvěma, dostaneme celé číslo. Ve vzorci (31) se vyskytují druhé mocniny, takže ty bude potřeba vynásobit čtyřmi,

$$\frac{1}{\lambda} = 4R_{Z=1} \left( \frac{1}{(2n)^2} - \frac{1}{(2m)^2} \right).$$

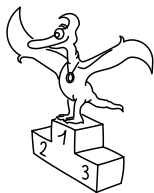
Kam nyní se čtyřkou, která v (31) není? Jediná veličina, která není přírodní konstanta, je atomové číslo  $Z$ . Máme tedy

$$\frac{1}{\lambda} = R_{Z=2} \left( \frac{1}{\tilde{n}^2} - \frac{1}{\tilde{m}^2} \right).$$

Astronom Pickering tudíž nepozoroval atomární vodík, ale jednou ionizované atomy helia  ${}^2\text{He}^+$ , které se chovají úplně stejně jako vodík, jen mají dvojnásobný jaderný náboj.

**Jakub Benda**

`jakub@fykos.mff.cuni.cz`



## Pořadí řešitelů po VI. sérii



### Závěrečné pořadí

#### Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	4	5	4	8	6	<b>36</b>	<i>100</i>	<b>200</b>
1. <i>Peter Kosec</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	0	2	5	5	–	<b>12</b>	<i>60</i>	<b>76</b>
2. <i>Patrik Švančara</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	1	3	4	6	–	<b>14</b>	<i>60</i>	<b>74</b>
3. <i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>44</i>	<b>25</b>
4. <i>Tomáš Trégnér</i>	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	3	1	–	<b>4</b>	<i>29</i>	<b>18</b>
5. <i>Martina Štarhová</i>	G, Šumperk	–	2	–	2	1	1	–	<b>6</b>	<i>33</i>	<b>11</b>
6. <i>Ondřej Beneš</i>	SPŠ, Hronov	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>57</i>	<b>8</b>
7. <i>Lubomír Grund</i>	G Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>58</i>	<b>7</b>
8.–9. <i>Alena Harlenderová</i>	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>100</i>	<b>6</b>
<i>Adam Chlapečka</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>86</i>	<b>6</b>
10. <i>Markéta Švecová</i>	G, Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>50</i>	<b>5</b>

#### Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	5	4	5	4	8	6	<b>36</b>	<i>100</i>	<b>200</b>
1. <i>Barbora Drozdová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	1	1	–	–	<b>4</b>	<i>46</i>	<b>60</b>
2. <i>Ondřej Maslikiewicz</i>	SPŠ, Hronov	3	–	–	–	–	4	–	<b>7</b>	<i>59</i>	<b>47</b>
3. <i>Anna Chejnovská</i>	G B. Němcové, Hradec Králov	4	–	–	–	–	5	–	<b>9</b>	<i>69</i>	<b>44</b>
4. <i>Jiří Nárožný</i>	G, Boskovice	6	–	4	5	3	–	–	<b>18</b>	<i>83</i>	<b>39</b>
5. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	6	–	<b>6</b>	<i>86</i>	<b>36</b>
6. <i>Zuzana Bogárová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>44</i>	<b>28</b>
7. <i>Dominika Kalasová</i>	G, Boskovice	3	–	–	–	3	4	–	<b>10</b>	<i>71</i>	<b>22</b>
8. <i>Nurullah Karakoc</i>		–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>60</i>	<b>9</b>
9. <i>Barbora Janů</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>38</i>	<b>3</b>

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	4	5	4	5	4	8	6	36	100	200
1. Petr Ryšavý	G J. Heyrovského, Praha	6	–	3	5	4	6	–	24	77	130
2. Miroslav Rapčák	G, Orlová	4	2	–	–	4	4	–	14	63	105
3. Veronika Paštyková	G J. Ortena, Kutná Hora	–	–	2	2	4	4	3	15	53	88
4. Zuzana Dočekalová	G, F. Hajdy, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	0	75	75
5. Ján Bogár	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	72	66
6. Jakub Klemsa	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	0	70	52
7. Kateřina Honzáková	G Jana Keplera, Praha	6	5	–	–	4	5	–	20	81	50
8. Jana Bazová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	61	46
9. Tereza Jeřábková	SPŠ a SOU Letohrad	–	–	–	–	–	–	–	0	82	41
10. Petra Kňážeková	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	43	30
11. Tereza Steinhartová	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	59	29
12. Petr Cagaš	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	47	26
13. Lada Peksová	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	67	24
14. Pavel Novotný	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	3	–	–	3	66	23
15. Michal Husek	G, Bučovice	–	–	–	–	–	–	–	0	29	17
16. Stanislav Paláček	G M. Kopernika, Bilovec	–	–	–	–	–	–	–	0	62	16
17.–18. Jan Hodic	G J. Ressela, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	0	31	10
Viktor Jamrich	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	63	10
19. Michal Müller	G, Jevíčko	–	–	–	–	–	–	–	0	55	6
20. Jan Nevoral	G, Jana Masaryka, Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	0	45	5
21. Martin Chudjak	SPŠ Martin	–	–	–	–	–	–	–	0	44	4
22.–23. Vojtěch Dziewicki	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
Jiří Keresteš	VOŠ a SPŠ elektrotech., Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
24. Jaroslav Pavela	G F. Palackého, Val. Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	0	67	2

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
		4	5	4	5	4	8	6	36	100	200
1. <i>Karel Kolář</i>	G, Špitálská, Praha	6	–	–	3	4	9	–	22	66	74
2. <i>Lukáš Labor</i>	G, Třinec	–	–	–	–	–	–	–	0	70	67
3. <i>Tereza Zábajníková</i>	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	0	57	50
4. <i>Pavel Malý</i>	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	74	43
5. <i>Lukáš Čimpl</i>	G, Frenštát pod Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	0	65	42
6. <i>Prabhat Rao Pinnaka</i>		–	–	–	–	–	5	–	5	77	40
7. <i>Mária Kiefferová</i>	G Sv. Františka, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	0	78	35
8. <i>Alžběta Pechová</i>	SPŠ strojnická, Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	0	44	27
9. <i>Martin Výška</i>	G, Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	96	26
10.–12. <i>Jana Figulová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	53	20
<i>Michael Hakl</i>	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	67	20
<i>Jakub Töpfer</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	59	20
13. <i>Jan Humplík</i>	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	0	73	19
14. <i>Hana Šustková</i>	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	0	39	18
15. <i>Katarína Baxová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	58	11
16. <i>Michal Koutný</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	0	100	10
17. <i>Martin Polačko</i>	G, Alejová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	0	60	9
18. <i>Václav Obrázek</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	70	7
19. <i>Barbora Hanáková</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	17	5
20.–21. <i>Eva Hašková</i>	G a SOŠ, Úpice	–	–	–	–	–	–	–	0	25	4
<i>Petr Motloch</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	0	80	4
22.–23. <i>Dana Suhomelová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
<i>Martina Vaváčková</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
24. <i>Peter Vanya</i>	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	0	17	1



## Zadání I. série



Termín odeslání:

### Úloha I. 1 ... skrolování v metru

Informační systém v pražském metru má jednu zajímavou vlastnost. Při skrolování textu směrem doleva se písmo *nakloní*. Jak je možno jednoduchým způsobem „hardwarově“ docílit tohoto efektu a jaký vliv má tato úprava pro text, který skroluje vertikálně? Poznamenejme, že světelný panel se skládá z LED diod rozmístěných v pravotočném rastru.

### Úloha I. 2 ... lano na klínech

Na dvou klínech (viz obrázek) je položeno lano tak, že se uprostřed nedotýká podložky. Situace je osově souměrná. Vypočítejte, jaká jeho maximální část může takto viset ve statické rovnováze. Bonus: pro jaký úhel nakloněných rovin je tento poměr největší?

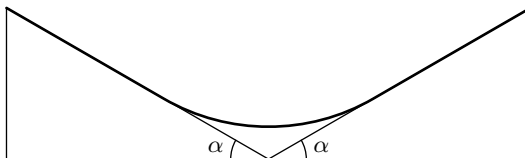
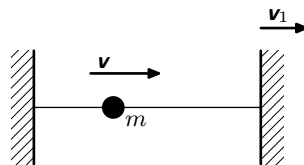


Schéma symetrické situace

### Úloha I. 3 ... adiabatický invariant

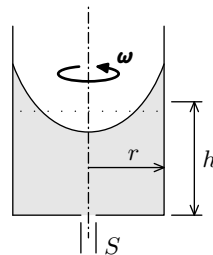
Mezi dvěma zarážkami se po přímce rovnoměrně pohybuje hmotný bod o hmotnosti  $m$  rychlostí  $v$ . Jednu ze zarážek začneme oddalovat rychlostí  $v_1 \ll v$ . Jak se změní energie hmotného bodu?



Míček mezi stěnami

### Úloha I. 4 ... vypouštění odstředivky

Máme dostatečně vysokou válcovou nádobu s vodou (poloměr  $r$ , výška hladiny vody  $h$ ) a roztočíme ji úhlovou rychlostí  $\omega$ . Do středu dna uděláme malou díрку plochy  $S$ , přičemž nádoba stále rotuje. Kolik vody z nádoby vyteče ven?



Rotující odstředivka

### Úloha I. P ... teploměr

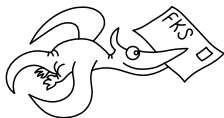
Kapilára lékařského rtuťového teploměru je pod stupnicí zaškrčená, aby se rtuť nemohla vracet do baňky a my mohli v klidu odečíst změřenou teplotu. Jak jistě víte, od června je zakázán prodej rtuťových teploměrů. Při této historické příležitosti se zamyslete, proč je zúžené místo pro rtuť průchodné pouze jedním směrem při ohřívání a proč se stejným způsobem nemůže rtuť při ochlazení zase samovolně vrátit do baňky.

**Úloha I. E ... fridex**

Organizátoři jedou na severní pól. Mají motorové saně a i přes třeskuté mrazy okolo točny musí lít do chladiče Fridex. Poradte jim, jakou mají volit směs alkoholu s vodou, to znamená, určete, jaká je závislost teploty tuhnutí směsi alkoholu s vodou na jeho koncentraci. Nemáte-li dostatečně výkonný mrazák, změřte, při jaké koncentraci směs zmrzne při nějaké pevně dané teplotě.

**Úloha I. S ... petřínská**

- Co uvidí člověk stojící mezi dvěma spojenými na sebe kolmými zrcadly, jejichž spojnice je svislá?
- Mějme rovinné zrcadlo skloněné pod úhlem  $45^\circ$ , pohybující se zleva doprava rychlostí  $v$ . Zprava na něj dopadá paprsek světla rychlostí  $c$  (úhel dopadu je tedy  $45^\circ$ ) a odrazí se zhruba nahoru. Pomocí Huygensova principu určete úhel mezi dopadajícím a odraženým paprskem, tedy vlastně opravte zákon odrazu a dopadu pro pohybující se zrcadlo.

**FYKOS****UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta****Ústav teoretické fyziky****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8**www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: [fykos-solutions@mff.cuni.cz](mailto:fykos-solutions@mff.cuni.cz)e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)