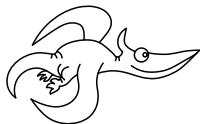


Milí řešitelé!

Po dlouhých útrapách se k vám dostává pátá brožurka XIII. ročníku FYKOSu. Bohužel stále není úplná; čtenáři seriálu zde nenajdou vzorové řešení úlohy ze III. série. Všem postiženým se omlouváme a slibujeme, že nejspozději do konce letošního ročníku vám chybějící text dodáme.

Nenechte se odradit touto mrzutostí a pusťte se do řešení nových úloh!

Vaši organizátoři

**Zadání V. série**

Termín odeslání: 26. dubna 2010

Úloha V.1 ... fotonová fontána

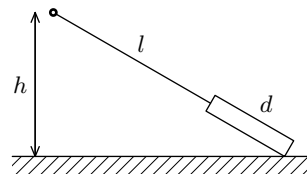
Honza není spokojen se současným standardem postelí, a proto začal testovat levitaci na laseru. Koupil si malou kuličku s dokonale vyleštěným zrcadlovým povrchem o hmotnosti m , poloměru r a položil ji na zem. Podlaha se rozzářila lasery o vlnové délce λ a plošném výkonu P . V jaké výšce nad zemí se kulička ustálila? Za bonusové body můžete vyřešit situaci, kdy je kulička skleněná. V obou případech uvažujeme, že ji laser neroztaví a že se experiment odehrává v homogenním gravitačním poli.

Úloha V.2 ... Lukášovo péro

Ve starém gauči našel Lukáš pružinu o tuhosti k , poloměru závitu r , délky l a počtu závitů n . Protože se nudil, připojil ji ke stabilnímu zdroji elektrického proudu I . Jak se změnila její tuhost?

Úloha V.3 ... vozík

Na pevném závěsu ve výšce $h = 1$ m nad zemí je upevněn provázek délky $l = 1,5$ m. Na konci provázku je přivázána deska délky $d = 0,5$ m tak, že provázek je napnut a spolu s deskou leží v jedné přímce (viz obrázek). Když soustavu uvolníme, deska nejprve po hraně klouže bez tření, dokud nedopadne celou svou délkou na zem. Potom se pohybuje proti třecí síle s koeficientem smykového tření f . Spočítejte, jaká musí být jeho hodnota, aby deska svým bližším koncem doklouzala přesně pod závěs.



Obr. 1. Závěs s tyčí

Úloha V.4 ... dřtivý odpad

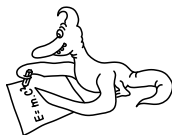
Všichni dobře víme, že se 21. prosince 2012 se na své cestě ke Slunci srazí se Zemí asteroid (pohybuje se ve stejné rovině jako Země). Uvažme, že se pohybuje po protáhlé eliptické dráze s hlavní poloosou délky 4 AU a excentricitou 0,2 AU. Lidstvo bylo moc zaneprázdněno, a tak se problém začal řešit až 1. prosince 2012. Po jaké dráze musí udatná světová autorita vystřelit raketu s jadernou hlavicí, aby včas odvrátila konec světa?

Úloha V . P ... tunelářská

Kryštof se vydal na cestu vlakem a spokojeně usnul. Když se probudil v tunelu, cítil, že jej nějaká síla táhne směrem na jednu stranu. Ve vlaku bylo sice světlo, ale ven neviděl. Vzpomněl si, že je v zatáčkách trať klopená a uvědomil si, že i když si pamatuje původní směr jízdy, vůbec neví, na kterou stranu vlak zatáčí. Nepozná totiž rozdíl mezi stavem, kdy vlevo zatáčející vlak jede dostatečně pomalu a výsledná síla míří směrem do zatáčky, a situací, kdy je vlak dostatečně rychlý, zatáčí vpravo a síla směřuje ven ze zatáčky. Navrhněte experiment, který Kryštofovi pomůže tuto situaci vyřešit. Čím víc variant, tím lepší bodové hodnocení.

Úloha V . E ... ozvěna

Když stojíte v malém prostoru a zahučíte správný tón, můžete objevit jeho rezonanční frekvenci. Protože rezonanční frekvence přímo souvisí s rozměry rezonátoru, umíme je z její znalosti určit. Vyhlédněte si doma vhodnou místnost (ideální jsou malé rozměry a holé stěny; třeba toaleta), tímto způsobem ji změřte a porovnejte výsledky se skutečností.

**Řešení III. série****Úloha III . 1 ... na potkání nejsme k rozeznání (4 body; průměr 2,86; řešilo 22 studentů)**

Jak nejdále od sebe mohou být dva lidé, aby je nikdo třetí na Zemi nerozeznal, kdykoliv jsou viditelní? Nezapomeňte, že lidé jsou bodové světelné zdroje ve výšce 2 m a Země je koule. Špatně vidí Jakub Michálek.

Při řešení použijeme Rayleighova kritéria, které udává vztah mezi vlnovou délkou světla λ , průměrem šterbiny čočky D a úhlovým rozlišením ϑ .

$$\sin \vartheta = 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

Stačí se zabývat pouze situacemi, kdy má pozorovatel k oběma osobám stejně daleko – v ostatních případech stejně vzdáleného pozorovatele bude porovnaný úhel vždy menší. Dále, vzhledem k poměrům mezi λ a D , můžeme využít aproximace $\sin \alpha \approx \alpha$ a získáme

$$\frac{d}{2l} = \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{\sin \vartheta}{2} \Rightarrow d = 1,22 \frac{\lambda l}{D}.$$

Hledáme maximum d ; to je zřejmě lineárně závislé na l . Tedy čím blíže třetí osoba bude, tím menší hodnotu získáme. Zde narážíme na omezení lidského oka, které je schopno zaostřit až od určité minimální vzdálenosti (předpokládejme, že na bližší vzdálenost je lepší teoretické rozlišení kompenzováno díky neschopnosti zaostřit). Pro dosažení minima musíme také dosadit minimální vlnovou délku viditelného světla a maximální možnou šířku zornice.

$$d_0 = 1,22 \cdot 0,05 \cdot \frac{400 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 10^{-3}} = 4,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Maximální možná vzdálenost dvou nerozlišitelných lidí tedy je přibližně čtyři mikrometry.

Jan Jelínek

jjan@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. 2 ... hlučný dav kol mého prahu (3 body; průměr 2,18; řešilo 17 studentů)

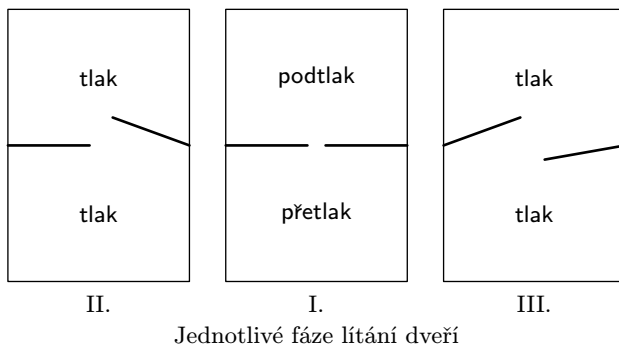
Uvažujte dvoukřídle dveře do budovy, mezi nimiž je i v zavřené poloze mezírka, kterou může proudit vzduch. Každé křídlo má pružinu, která ho vrací do výchozí zavřené polohy. Jedno křídlo vychýlíme a pustíme z klidu. Co se bude dít, třeba s druhým křídlem?

Zadal právník Jakub.

Zkusíme se zamyslet nad soustavou dvou dveří. Jak se bude chovat jedno křídlo a jak se budou chovat křídla dvě. Obě křídla mají pružinky a jsou ve vzduchu. To znamená, že po vychýlení začnou kmitat tam a zpět. Kmitání bude díky odporu prostředí tlumené, takže za určitou dobu ustane. Ale tak by se chovalo i jen jedno křídlo dveří. Jakmile máme křídla dvě, bude zajímavé sledovat, jak vychýlení jednoho křídla ovlivní křídlo druhé. Zde je třeba si uvědomit vliv prostředí. Dveře jsou totiž obklopeny vzduchem, který nemůžeme zanedbat.

Dveře představují přepážku mezi dvěma místnostmi, ve kterých jsou stejné tlaky, všechno je v rovnováze. Pokud bychom uměli zařídit, že otevírání jednoho křídla dveří je rovnovážné (tedy dostatečně pomalé, kdy zavření je sled rovnovážných poloh), nic zajímavého by se nedělo, protože tlak v obou místnostech by se pořád vyrovnával. Běžné otevření dveří však rovnovážné není a způsobuje proudění vzduchu.

Dveře vychýlíme a pustíme. Dveře vženou do místnosti za nimi vzduch a zde vznikne přetlak (můžeme si říct, že za stejné teploty se zmenšil objem místnosti, zatímco teplota zůstala stejná). Směle tedy můžeme předpokládat, že před nimi vznikne podtlak. Jediná šance, jak tyto dva tlaky vyrovnat je zvětšit mezeru mezi dveřmi, což jde zařídit tak, že mezeru mezi dveřmi zvětšíme. Druhé křídlo se v důsledku toho pohne proti prvnímu.



Efekt pootevření druhého křídla dveří v opačném směru závisí na tom, jak velký je prostor za dveřmi, hmotnosti dveří, velikosti mezery mezi dveřmi a síle pružiny dveře držící.

Jana Poledníková

janap@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. 3 ... Hospodine, pomiluj ny! (4 body; průměr 1,44; řešilo 16 studentů)

Jak roste hlasitost (definujte si sami) sboru s počtem jeho členů? Co z toho plyne? Členy sboru uvažujte jako bodové zdroje zvuku stejné amplitudy a frekvence, ale posunuté o náhodnou fázi. Všichni bodoví zpěváci se nacházejí v jednom místě.

Na notu soborového zpěvu se naladil Jakub.

Jako „definici hlasitosti“ budeme používat intenzitu zvuku I – ta je rovna střední hodnotě akustického plošného výkonu. Co nás však vede k této volbě především, je jednoduchý vztah

k akustickému tlaku p (za běžných podmínek): $I \sim \langle p^2 \rangle$, tedy je úměrná střední hodnotě čtverce akustického tlaku. To je podstatně především z toho důvodu, že akustický tlak se chová vcelku lineárně, takže je možné v libovolném okamžiku vypočítat akustický tlak pouhým sečtením příspěvků všech zpěváků.

Míníme-li navíc „stejnou amplitudu“, nejspíš máme na mysli právě amplitudu akustického tlaku.

Vyšetřujme tedy akustický tlak v čase pro různý počet zpěváků. Budeme předpokládat, že průběh příspěvku p_i od jednoho (i -tého) zpěváka bude kosinový (komu se to zdá jako přílišné zjednodušení, necht si proveďte příslušný rozklad do Fourierovy řady – z kolmosti jednotlivých členů řady pak vyplyne, že výsledná intenzita poroste stejně) s náhodnou počáteční fází φ_i a úhlovou frekvencí $\omega = 2\pi/T$, kde T je perioda. Tedy

$$p_i(t) = A \cos(\omega t + \varphi_i)$$

a pro N zpěváků máme celkový akustický tlak

$$p(t) = \sum_{i=1}^N A \cos(\omega t + \varphi_i).$$

Příslušnou zvukovou intenzitu vypočteme jako integrál čtverce akustického tlaku přes celou periodu, tedy

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T c p(t)^2 dt = c \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_i\right) \right)^2 dt,$$

kde c zahrnuje všechny možné multiplikační konstanty (závisící na prostředí, vzdálenosti od chóru, ...). Je vidět, že intenzita se může v závislosti na fázovém posunu pohybovat od 0 (každý zpěvák má druhá zpívajícího v protifázi) do $N^2 c A^2$ (všichni zpěváci mají fázi stejnou).

Naší snahou bude dále nalézt střední hodnotu intenzity pro všechny možné fázové posuny (vůči prvnímu zpěvákovi). Předpokládáme, že tyto posuny jsou zcela rovnoměrně rozděleny, tudíž budeme hledat střední hodnotu v $(N-1)$ -rozměrném intervalu $(0, 2\pi)^{N-1}$,

$$\langle I \rangle = c A^2 \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int_{(0, 2\pi)^{N-1}} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N A \cos(\omega t + \varphi_i) \right)^2 dt d\mathbf{U};$$

kde $dU = d\varphi_2 d\varphi_3 \dots d\varphi_N$ je element objemu v $(0, 2\pi)^{N-1}$. Uvědomme si však, jak počítáme intenzitu – počítáme střední hodnotu funkce $\cos^2 x$ přes periodu v čase. Zřejmě se nic nestane, když místo času budeme integrovat přes bezrozměrnou fázi

$$\frac{1}{T} \int_0^T f\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi_0) d\varphi_0,$$

a vzhledem k tomu, že integrovaná funkce je podél všech φ_i periodická, můžeme si libovolně (pevně) posunout počáteční fázi a dostáváme

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \frac{c A^2}{(2\pi)^N} \int_{(0, 2\pi)^N} \left(\sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \right)^2 d\boldsymbol{\varphi} = \\ &= \frac{c A^2}{(2\pi)^N} \int_{(0, 2\pi)^N} \left(\sum_{i=1}^N \cos^2 \varphi_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \cos \varphi_i \cos \varphi_j \right) d\boldsymbol{\varphi}, \end{aligned}$$

přičemž nyní integrujeme již přes všechny $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$.

Každý člen první sumy dá po zintegrování $2^{N-1} \pi^N$, neboť

$$\int_{(0,2\pi)^N} \cos^2 \varphi_i \, dV = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi_i \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \dots d\varphi_i \dots d\varphi_N,$$

při integraci podél daného fázového posunu dostáváme $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi_i \, d\varphi_i = \pi$, podél ostatních fázových posunu se výraz chová jako konstanta a při každé integraci tak pouze přibude činitel rovný délce intervalu, tj. 2π . Integrál z druhé sumy dá nulu, protože $\int_0^{2\pi} \cos \varphi_i \cos \varphi_j \, d\varphi_i = 0$, $i \neq j$.

Celkem tedy dostáváme

$$\langle I \rangle = \frac{NcA^2}{2},$$

zvuková intenzita je tedy (v průměru) přímo úměrná počtu pěvců, což není překvapivé – dalo se očekávat, že každý zpěvák bude dodávat konstantní výkon nezávisle na jejich počtu.

Z lineární závislosti intenzity na N pak dále plyne, že průměrná velikost akustického tlaku poroste přímo úměrně s \sqrt{N} .

Někteří se pokoušeli řešit úlohu pomocí fázorů. Pokud dílčí příspěvek jednoho zpěváka k akustickému tlaku vyjádříme pomocí komplexní exponenciály $p_j = A_j \cos(\omega t + \varphi_j) = \Re(A_j e^{i(\omega t + \varphi_j)})$, celkový akustický tlak je potom

$$p = \sum_j p_j = \sum_j \Re(A_j e^{i(\omega t + \varphi_j)}) = \Re \left(e^{i\omega t} \sum_j A_j e^{i\varphi_j} \right).$$

Pokud tedy dávají jednotliví zpěváci harmonický příspěvek k akustickému tlaku se stejnou frekvencí, celkový akustický tlak bude mít také harmonický průběh (s touž frekvencí), a to i při různých dílčích amplitudách. Celková amplituda je pak dána výrazem $\left| \sum_j A_j e^{i\varphi_j} \right|$. Ve fázorovém diagramu bude každému členu $A_j e^{i\varphi_j}$ příslušet vektor o velikosti A_j natočený o příslušný úhel φ_j .

Pokud budou všechny $A_j = A$ stejné a všechny fázové posuny φ zcela náhodné, výsledná amplituda bude dána vzdáleností od počátečního bodu při náhodné procházce při kroku délky A . Tato vzdálenost je v průměru přímo úměrná druhé odmocnině počtu kroků, takže amplituda akustického tlaku bude taktéž přímo úměrná druhé odmocnině počtu zpěváků

$$\left\langle \left| \sum_{j=1}^N A e^{i\varphi_j} \right| \right\rangle \sim \sqrt{N},$$

což souhlasí s naším výsledkem výše.

Marek Nečada

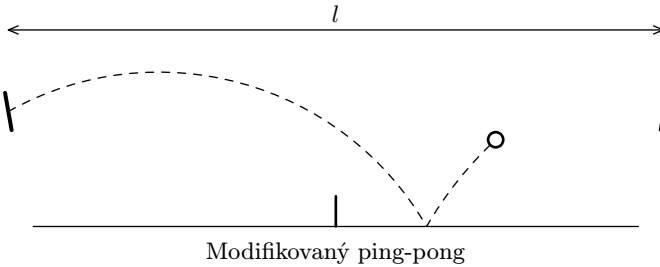
marekn@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III.4 ... pane Wurfl, ale na Měsíci (4 body; průměr 3,38; řešilo 8 studentů)

Pana Broučka při měsíční příhodě pronásledovala Etherea, kterou lze připodobnit hmotnému bodu. Pan Brouček ale, potom co si objednal vepřové se zelím, se jí zbavil tím, že ji uvěznil mezi dvěma pevně uchopenými pálkami ve vzdálenosti l , které jsou každá natočena o nějaký úhel, a Etherea mezi nimi skákala jako pingpongový míč tak, že se odrazila vždy ve

stejně výšce. Aby ji potrápil strachem, vložil doprostřed síť výšky h . Pan Brouček je důmyslný šibal, a tak chtěl, aby (stejně jako v ping-pongu) na každé polovině spadla aspoň jednou na zem. Vypočtete, s jakou frekvencí v závislosti na všemožných parametrech (natočení pálek, počáteční rychlost míčku, úhel, ...) Etherea létá, a kdy je tato frekvence nejvyšší. Předpokládejte, že pohyb je rovinný a při odrazu od překážky (od Měsíce nebo od pátky) se akorát mění rychlost na opačnou; celý pohyb probíhá ve vakuu.

Lukáš cestou na schůzku rád hraje ping-pong.



Při řešení úlohy využijeme převážně symetrii úlohy a dále zákonů zachování.

Jak ze zadání víme, Etherea se odráží vždy ve stejné výšce. Dále víme, že při odrazu na zemi se nemění vodorovná složka rychlosti. Z první podmínky použitím zákona zachování energie vidíme, že velikost rychlosti je stejná pro každý odraz. Z druhé, víme-li, že se nemění celková velikost rychlosti při odrazu, plyne, že se nemění ani velikost svislé složky rychlosti.

Z této úvahy plyne, že během jednoho přeletu se zachovávají velikosti vodorovné i svislé složky rychlosti.

Studujme nyní pohyb Etherey geometricky. Pohybuje se mezi pátkami po parabole, resp. dvou shodných parabolách vzájemně posunutých.

Pokud by Etherea začínala svůj pohyb směrem dolů a dopadla až za sítkou, tak by vzdálenost průsečíku paraboly s osou x od x -ové souřadnice vrcholu byla větší než $l/2$, potom by ale již nestihla vystoupit do dostatečné výšky pro odraz od druhé pátky.

Etherea se musí tedy začít pohybovat vzhůru. Pokud by však k druhé páлке přiletěla shora, znamenalo by to, že se Etherea odrazila v polovině „stolu“, kde je síťka.

Nyní již víme: Etherea začíná svůj pohyb směrem vzhůru, k páлке přiletěla zdola, velikosti vodorovné i svislé složky se během letu nemění.

Z obrázku v zadání je vidět, že část trajektorie „po odrazu od země“ a „před odrazem od pátky“ jsou shodné. Označíme-li dobu letu zleva doprava T , v_{x0} , v_{y0} velikost vodorovné, resp. svislé složky rychlosti v okamžiku odrazu od stolu, g velikost gravitačního zrychlení na povrchu měsíce a E celkovou energii Etherey platí

$$v_{x0} = \frac{l}{T}, \quad (1)$$

$$v_{y0} = g \frac{T}{2}, \quad (2)$$

$$\frac{2E}{m} = v_{x0}^2 + v_{y0}^2 = \frac{1}{4}g^2T^2 + l^2T^{-2}. \quad (3)$$

Nezávislými parametry úlohy jsou l , E , m a g . Zavedeme nyní redukovanou energii $\tilde{E} = E/(mg^2)$ a redukovanou délku $\tilde{l} = 2l/g$. Dobu pohybu T můžeme vyjádřit úpravou rov-

nice (3) jako

$$T_{1,2} = \sqrt{\tilde{E} \pm \sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{l}^2}},$$

jak je vidět, pro jednu počáteční rychlost existují i dvě trajektorie mezi pálkami splňující zadání. Počáteční energie také musí splňovat podmínku $\tilde{E} > \tilde{l}$, jinak by došlo k více než jednomu odrazu od měšice, a to my nechceme.

Etherea se může pohybovat po libovolné (první, nebo druhé) trajektorii tam a po libovolné zpět. Z této volby plynou také úhly natočení pálek. Zajímá-li nás maximální frekvence pohybu musí pohyb probíhat stejný čas tam i zpět (pokud pro rychlejší trajektorii přeskočí Etherea sítku cestou tam, zdolá ji i cestou zpět).

Pro toto nastavení se nemění velikost vodorovné složky rychlosti a svislá složka se změní na opačnou, a tedy páčky musí být nastaveny svisle.

Abyste byla frekvence pinkání co nejvyšší, musíme maximalizovat vodorovnou složku rychlosti v_{x0} . Čím bude vyšší vodorovná složka rychlosti, tím musí být podle vztahů (1) a (2) menší výška, do které se Etherea během pohybu dostane. Možná trajektorie je však díky sítky omezená ze spodu. Proto by měla Etherea, aby byla co nejvyděšenější, při svém pohybu míjet sítku co nejbližší.

Uvažujme nyní situaci na obrázku, páčka je ve výšce p nad stolem. Pro trajektorii mezi minutím sítky a dopadem na stůl platí první výraz níže. Studujeme-li trajektorii mezi odrazem od země a dopadem na páčku platí druhý výraz níže. Vzdálenost mezi sítkou a místem dopadu značíme x , proto platí, že vzdálenost mezi bodem dopadu a koncem stolu je $l/2 - x$. Za výraz $v_{x0}v_{y0}$ dosazujeme z (1) a (2).

$$hv_{x0}^2 = \frac{gl}{2}x - \frac{g}{2}x^2,$$

$$pv_{x0}^2 = \frac{gl}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2.$$

Odečtením těchto dvou rovnic od sebe, následným vyjádřením x a dosazením do první z nich, použitím $f = v_{x0}/(2l)$, dostáváme pro periodu pohybu Etherey

$$f_{\max} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{(h+p) + 2\sqrt{h^2 - hp + p^2}}{(h-p)^2} \right)}.$$

Pokud se však budeme ptát na nejvyšší možnou frekvenci, ideální trajektorií je parabola, která protíná osu x na okrajích stolu a vrchol je totožný s horním okrajem sítky.

Lukáš Ledvína

lukas1@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. P ... aljeja, niti! Jsou shnilé (3 body; průměr 2,20; řešilo 5 studentů)

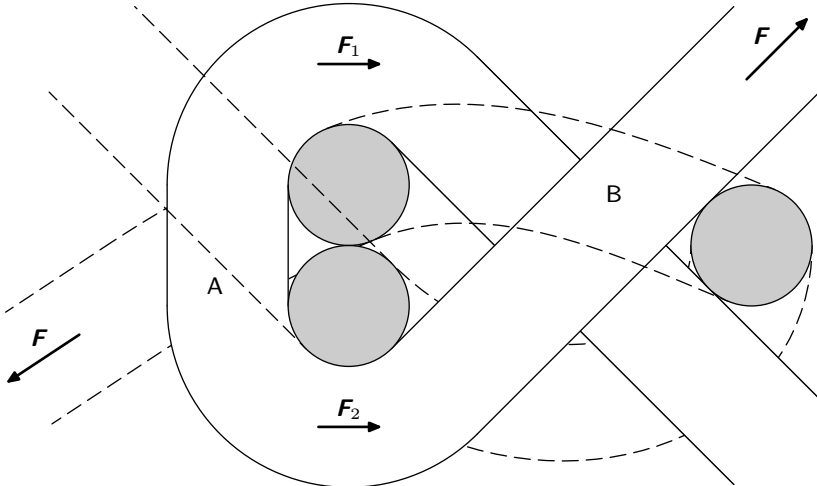
Zkoumejte dvojitý uzel, kterým jsou spojena dvě vlákna o poloměru r a součiniteli klidového tření f . Jakou silou musíme tahat za konce vláken, aby se uzel „proklouzl“? Dosadte typické hodnoty pro nitky a zjistěte, zda se přitom nepřetrhne vlákno.

V uzlech se ukáží Jakob.



Uvažovaný uzel

Nejprve si ujasněme, za jaké konce uzlu budeme tahat. Předpokládejme, že uzel už je utažený. Pak, budeme-li tahat za horní dva konce (dle obrázku v zadání) nebo za spodní dva, uzel bude prokluzovat o poznání lépe, než když budeme tahat za levý horní a pravý dolní konec (levý dolní a pravý horní). Je to tím, že se smyčky po lanu mohou odvalovat a valivý odpor je obecně menší než smykové tření. (Vyzkoušejte si, lana se vám budou v ruce kroutit, což je způsobeno tím odvalováním.) Budeme-li tahat za levé (respektive pravé) konce, uzel se jen přesmykne, a protože taháme za konce stejného provazu, budeme tahat tak dlouho, až provaz přeškubneme.



Obr. 2. Podrobný náčrt uzlu

Pojďme se zabývat tím případem, kdy se lana po sobě nevalí, ale jen se smýkají.

- Tření v místě A: Aby klouzal bílý provázek po čárkovaném, musí síly F_1 a F_2 splňovat rovnici vláknového tření

$$F_2 > F_1 e^{\varphi f},$$

kde φ je úhel opásání (vnitřní úhel oblouku, na kterém se dotýká vlákno druhého vlákna). V našem případě je φ přibližně rovno 2π . Tedy

$$F_2 > F_1 e^{2\pi f}.$$

- Tření v místě B: Lanka bílé smyčky jsou v tomto místě překřížena a šedou smyčkou jsou tlačena k sobě. Problém smyček je symetrický, takže síla, která bílá lanka tlačí k sobě je rovna $F_1 + F_2 = F$ (uvažte si uzel a zjistíte, že lanka jsou v místě B téměř rovnoběžná). Lanka se třou jednak o sebe navzájem a pak ještě o lanka šedé smyčky, takže třecí síla připadající na jedno z nich je $F_t = Ff$.

Potřebujeme dopočítat síly F_1 a F_2 . Z obrázku je vidět, že

$$F_1 = F_t = Ff,$$

$$F_2 = F - F_t = F(1 - f).$$

Dosadíme do podmínky klouzání smyčky z bodu A, kde se pak vykrátí tažná síla F a po úpravě dostaneme rovnici

$$\frac{1 - f}{e^{2\pi f}} - 1 > 0.$$

Z výsledného vzorce je vidět, že klouzání nezávisí na tažné síle, protože ona sama zbůsobuje tlak, který způsobuje tření, jakožto i tah, který ho musí překonat. Výsledná podmínka si klade nároky tedy pouze na koeficient tření. Tato podmínka bude splněna, pokud f bude z intervalu 0 až zhruba 0,25. To vše ovšem platí, zanedbáme-li schopnost uzlu udržet nějaké napětí, které vznikne, když uzel utáhneme. Ve skutečnosti ale toto napětí existuje a proto se proklouznutí uzlu jeví jako hraniční záležitost, která má určitou limitní sílu, za kterou začne uzel proklouzávat. Na určení této hraniční síly by bylo potřeba znát Youngův modul pružnosti nitě v obou směrech a Poissonův poměr, abychom určili napětí uzlem držené. Uzel totiž začne proklouzávat, až tažná síla překročí sílu odpovídající zadrženému napětí.

Tereza Zábajková

terka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. E ... kroky (8 bodů; průměr 5,45; řešilo 20 studentů)

Postavte dlouhé domino a hurá do toho! Změřte rychlost padání pro známé rozměry kvádrů a proměnnou vzdálenost mezi nimi. Ustálí se vůbec rychlost?

Vzpomínka na pád Berlínské zdi.

Teorie

V následujícím textu načrtneme odvození exaktního vztahu pro rychlost šíření čela vlny, jak jej uvádí literatura. Zájemci o hlubší studium doporučujeme si článek přečíst; není ani příliš dlouhý, ani nějak zásadně náročný.

Předem ale zkusme použít intuici. Po šfouchnutí do první kostičky bude nejprve nějakou dobu trvat, než se rychlost šíření vlny ustálí. Předpokládejme tedy, že jsme již v ustálené situaci, kdy je rychlost padání konstantní, a zamysleme se, na čem všem tato rychlost závisí. Rozhodující roli hraje poměr výšky kostky a vzdáleností mezi nimi. Očekáváme, že čím je tato vzdálenost větší, tím bude rychlost menší, neboť padající kostička narazí do následující v nižší poloze a předá jí menší hybnost.

Abychom získali konkrétnější teoretickou představu o tom, jak hledaná závislost vypadá, potřebujeme nejprve úlohu formalizovat a zjednodušit. Označme d a h po řadě tloušťku a výšku jedné dominové kostičky a necht m je její hmotnost. Předpokládejme, že jde o homogenní kvádr s těžištěm v geometrickém středu. Rovněž si dovolíme předpokládat, že kostky po podložce nekloužou, a tedy v úvahu stačí brát pouze rotační pohyb. Vzdálenost mezi kostičkami značme s a písmeno n použijme k označení jejich počtu.

Podívejme se nejprve na situaci po celém ději, kdy jsou již všechny kostky popadané. Z této polohy lze vyčíst úhly ϑ_i , které svírají kostky se svislým směrem. Zjevně $\vartheta_n = \pi/2$ a pro $i < n$ je možné z goniometrie situace vyjádřit ϑ_i jako funkci ϑ_n , což se hodí pro zpětnou rekonstrukci pohybu. Jelikož nás zajímá především experimentální řešení úlohy a protože tato fáze je velmi

pracná, omezíme se pouze s tímto pozorováním a faktem, že předposlední domino je na konci pokusu v poloze $\vartheta_{n-1} = \arctg(s/d)$, kterou budeme pro zjednodušení situace považovat za shodnou pro všechny kvádříky.

Úhlovou rychlost rotace padajícího i -tého domina označme ω_i . Jejím přesným analytickým vyjádřením se zde zabývat nebudeme, neboť je lze nalézt v literatuře.

Zaměříme se nyní na energii padajících kostek. Jistě platí zákon zachování energie, který tudíž hojně využijeme. Na začátku má soustava potenciální energii $nmg h/2$, jejíž část (těžiště mají na konci děje nenulovou výšku nad povrchem podložky; v souladu s naší aproximací je to $h' = d(h+s)/2\sqrt{d^2 + h^2}$) se postupně proměňuje v energii rotační a nakonec se ztrácí v podobě tepla do okolního prostředí. Pro energii rotačního pohybu známe vztah

$$E_r = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

kde I je dobře známá konstanta – moment setrvačnosti

$$I = \frac{1}{3} m (h^2 + d^2),$$

vzhledem k poloze osy rotace.

Nyní ještě uvedme, že doba pádu i -té kostičky se dá vypočítat jako integrál, známe-li průběh úhlové rychlosti a počáteční a koncovou polohu.

Z těchto všech údajů, které jsme zde pouze nastínili, lze odvodit asymptotickou rychlost (tj. pro $n \rightarrow \infty$ a po ustálení děje) šíření čela vlny

$$v = \sqrt{gh \left(\frac{3}{1 + \frac{d^2}{h^2}} \right)} \frac{s+h}{h} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{t_i}. \quad (4)$$

V této formulce vystupující proměnná t_i se odvolává na dobu pádu i -té kostičky z předchozího odstavce a počítá se jako bezrozměrná veličina.

Literatura

Náš text vychází z článku J. M. J. van Leeuwen, The Domino Effect, 2004, který lze volně stáhnout na adrese <http://www.ilorentz.org/~jmjvanl/domino.pdf>.

Experiment

Záhy se ukázalo, že doba pádu standardních 28 kostiček domina je velmi krátká a že bude nutné použít sofistikovanější metodu měření času nežli pouhé stopky. Vzhledem k faktu, že padající domino způsobuje hluk, rozhodli jsme se pro měření pomocí mikrofону a software pro zpracování zvuku (konkrétně Audacity). Naše dominové kostičky měly hmotnost $m = (4,5 \pm 0,1)$ g a rozměry $h = (45 \pm 1)$ mm a $d = (21 \pm 1)$ mm. Postupně jsme je rozestavovali ve vzdálenostech odpovídajících násobkům jejich tloušťky, neboť tak šlo poměrně rychle a přesně i tak časově náročnou výstavbu provést.

Pro každou hodnotu s jsme provedli tři různá měření, jejichž výsledky jsou zaneseny v tabulce. Časové údaje jsou v milisekundách a znamenají, jak dlouho trval pád celého hada.

Tabulka výsledků měření

měření / s [mm]	7	14	21	28	35
celková vzdál. ns [mm]	385	574	763	952	1141
t_1 [ms]	840	790	1160	1854	2585
t_2 [ms]	790	827	1111	1649	2393
t_3 [ms]	655	889	1114	1630	2294
\bar{t} [ms]	761	835	1128	1711	2424
$\sigma_{\bar{t}}$ [ms]	96	50	28	125	148
absolutní rychl. [$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$]	$0,51 \pm 0,13$	$0,69 \pm 0,06$	$0,68 \pm 0,03$	$0,56 \pm 0,08$	$0,47 \pm 0,07$

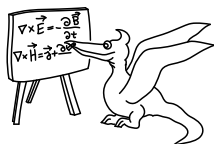
Závěr

Z našich měření je evidentní, že se zvětšující se vzdáleností klesá rychlost šíření vlny, měříme-li ji relativně jako počet spadlých domin za jednotku času. Ovšem, uvědomíme-li si, že jednotlivé bloky jsou od sebe zároveň dál, situace tak jednoznačná není. Dokazuje to řádek „absolutní rychlost“ výsledné tabulky. Ten naznačuje, že maximální rychlost šíření se dosahuje při vzdálenosti mezi kostkami zhruba 14 mm. Tento náš závěr je ve shodě i s výsledky některých řešitelů.

Měli bychom ještě vystětlit, proč máme v měření tak velkou chybu. Především je třeba ji přičíst nepřesnostem při stavbě domina a hlavně při odečítání dat z Audacity. Během padání vznikaly různé ozvěny a dozvuky, a tudíž ne vždy se podařilo naměřit „čistou“ dobu padání.

Tomáš Jírotka

byrot@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 5: Interakce světla s látkou

Úvod

V předchozím díle našeho seriálu jsme vybuodovali teorii světla jako elektromagnetického vlnění, ale zatím ji aplikovali jen na pár jednoduchých příkladů, vesměs na světlo šířící se ve vakuu. Naproti tomu v běžném životě se sotva setkáme se světlem ve vakuu – ve dne se k nám sluneční světlo šíří skrz atmosféru sestávající z molekul vzduchu, se kterými složitě interaguje a dává tak vzniknout modré barvě oblohy, nebo jindy, když prší, můžeme díky odlišnému chování světla v kapkách vody pozorovat duhu.

Ať už venku nebo v laboratoři, většina zajímavých efektů nastává, když světelná vlna prochází materiálem s elektromagnetickými vlastnostmi, tedy prakticky čímkoli, neboť každý atom obsahuje záporně nabitě elektrony a kladně nabitě protony. Zhruba řečeno je mechanismus interakce světla s látkou následující: oscilace elektromagnetického vlnění rozkmitají elektrony¹

¹) Kromě elektronů může světlo rozkmitávat i molekuly jako celek (díky tomu funguje mikrovlnná trouba), anebo interagovat s jádry atomů.

v látce, již světlo prochází, a ty získanou energii vyzařují, přičemž vyzářené pole se pak skládá s polem původním.

Protože různé látky mají elektrony v atomech uloženy různým způsobem, budou se i jejich optické vlastnosti lišit. Relativně přesné předpovědi kupodivu dostaneme, pokud si představíme, že daný elektron je k jádru poután podobně jako závaží na pružině, tedy silou přímo úměrnou vzdálenosti od jádra. Stejně jako harmonický oscilátor tedy bude mít jistou přirozenou (rezonanční) frekvenci kmitání a daná látka bude vykazovat silné optické vlastnosti právě v okolí této frekvence. Jelikož v oblasti viditelného světla je frekvence totéž co barva, máme před sebou přibližný důvod, proč různé látky mají různou barvu.

Rezonanční frekvence elektronů v atomech nám umožňuje vypočítat kvantová mechanika – na této úrovni už klasické Newtonovy zákony neplatí. Teoreticky se tak dají přesně vypočítat optické vlastnosti, tedy především barva, libovolné látky. Pozoruhodným zjištěním je, že pro většinu materiálů, které jsou běžně k nalezení v přírodě, se rezonanční frekvence pohybují v oblasti viditelného světla. Kdybychom tedy měli k dispozici brýle umožňující vidění v libovolné části spektra, od rádiových vln $\lambda \approx 1 \text{ km}$ až po gamma paprsky $\lambda \approx 1 \text{ pm}$, svět by se nám jevil zajímavý jen v úzké oblasti $400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$, tedy přesně v regionu, na který jsou naladěné naše oči. Jak asi toto souvisí s evolucí barevného vidění?

V našem seriálu bohužel není dost místa pro odvození optických vlastností jednoduchých látek ze základních principů, v následující části se proto omezíme na případ, kdy elektrony v atomech reagují na elektromagnetické pole lineárně. Jak již bylo zmíněno, pro většinu materiálů je tento model velmi blízký realitě. Uvidíme, že z tohoto jednoduchého předpokladu za použití Maxwellových rovnic vyplývá vlastnost látek, se kterou jsme se již setkali – index lomu. V přírodě ale existují látky, pro které náš zjednodušující „lineární“ předpoklad neplatí a ve kterých elektrony odpovídají budícímu poli složitějším (kvadratickým, kubickým, atd.) způsobem. Při průchodu světla těmito materiály se můžeme setkat se skutečně zajímavými jevy – index lomu závisí nejen na frekvenci světla, ale i na jeho intenzitě (viz seriálová úloha), může docházet ke generování vln s několikanásobnou frekvencí, efektivnímu zesilování paprsků a spoustě dalších pozoruhodných úkazů. Těmito látkami se zabývá obor *nelineární optika* a na internetu se o něm můžete dozvědět mnohem víc než z předcházejících řádků.

Dipólový moment

Jak můžeme výše zmíněné myšlenky zabudovat do naší teorie elektromagnetického vlnění? Rádi bychom měli veličinu, která popisuje, jak daná látka elektricky reaguje na přiložené pole. Protože ale budujeme makroskopickou teorii², nezajímáme se už o jednotlivé atomy a jejich elektrony, ale o veličiny zprůměrované přes objem mnohem větší než je objem elementárních částic. Vložíme-li kus nevodivého materiálu do elektrického pole, elektrony se vůči jádru mírně posunou. Celkový náboj se ale nezmění, protože máme pořád stejný počet protonů a elektronů. Co se ale změní, je takzvaný *elektrický dipólový moment*, což je vektorová veličina, která nám říká, jaké je průměrné vzájemné posunutí kladného a záporného náboje.

Máme-li v prostoru jeden kladný a jeden záporný náboj $+q$ a $-q$ (celkový náboj je tedy nula), přičemž $+q$ je oproti $-q$ posunutý o vektor \mathbf{d} , vypočítáme dipólový moment \mathbf{p} tohoto páru jako

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}.$$

Podobně, můžeme definovat hustotu dipólového momentu \mathbf{P} v daném místě jako celkový dipólový moment na jednotku objemu. Máme-li tedy v prostoru v jednom metru krychlovém n

²) Tedy teorii, která se nestará, co se děje na mikroskopických vzdálenostech.

párů $+q$, $-q$ z předchozího příkladu, bude průměrný dipólový moment

$$\mathbf{P} = nq\mathbf{d}.$$

Smysl veličiny \mathbf{P} je v tom, že v našem přiblížení velice jednoduše souvisí s elektrickým polem \mathbf{E} , jak uvidíme za chvíli. Přesnou závislost $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ by nám správně měla poskytnout kvantově-mechanická teorie chování elektronů v atomech při nenulovém vnějším elektrickém poli, takže zatím žádný konkrétní předpis nepředpokládáme a lineární vztah použijme až později.

Pokud přiložené elektrické pole závisí na poloze, bude i vektor \mathbf{P} záviset na poloze a nahromaděné posunuté elektrony tak v daném místě způsobí nenulovou nábojovou hustotu ϱ , kterou můžeme z \mathbf{P} vypočítat jako

$$\varrho = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (5)$$

Pro pochopení tohoto vztahu si představte malou krychličku v prostoru. Náboj, který z ní díky měnícímu se \mathbf{P} vystoupí, je $(\nabla \cdot \mathbf{P})V$, kde V je objem krychličky, a protože se celkový náboj zachovává, dostaneme náboj v krychličce jako $-(\nabla \cdot \mathbf{P})V$, odtud (5).

Podobně, když se bude použité elektrické pole měnit s časem (a ve světle se rozhodně s časem mění), bude se měnit i \mathbf{P} , a posunující se náboje v atomech se budou zdálky jevit jako proudy. Takto způsobenou proudovou hustotu \mathbf{j} v daném místě vypočítáme jako (promyslete proč)

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (6)$$

Maxwellovy rovnice v látce

Nyní bychom rádi našli rovnice popisující světlo při průchodu látkou. V minulé kapitole jsme uvedli rovnice, kterými se vždy řídí elektromagnetické pole za přítomnosti libovolných nábojů a proudů. Protože jediné náboje a proudy v našem materiálu pocházejí z posunujících se elektronů a protonů, můžeme vzít Maxwellovy rovnice z předchozího dílu a dosadit do nich ϱ a \mathbf{j} ze vztahů (5) a (6). Přeskupením členů tak dostaneme

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) &= 0, \end{aligned}$$

které představují Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické pole v látce. Vidíme, že vypadají téměř jako Maxwellovy rovnice ve vakuu z minulého dílu, s tím rozdílem, že v Gaussově a Ampérově zákoně se místo \mathbf{E} objevuje nová veličina $\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0$. Abychom mohli tyto rovnice vyřešit, musíme vědět, jakým způsobem souvisí \mathbf{P} a \mathbf{E} . Jak už jsme několikrát zmínili, ve velkém množství případů je vztah mezi nimi lineární

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (7)$$

kde konstanta³ χ se nazývá *elektrická susceptibilita*⁴; z praktických důvodů se faktor úměrnosti píše ve tvaru $\varepsilon_0\chi$, neboť nová veličina z Gaussova a Ampérova zákona pak nabude tvaru $(1 + \chi)\mathbf{E}$. Dosazením (7) do Maxwellových rovnic v látce dostaneme novou sadu rovnic

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1 + \chi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0,\end{aligned}$$

kteřá je identická s Maxwellovými rovnicemi ve vakuu s novou „rychlostí světla“

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi}}. \quad (8)$$

Dostali jsme tedy pozoruhodnou předpověď – celá složitá záležitost s interakcí původního oscilujícího pole a atomových elektronů má za následek “pouze” to, že se bude světlo látkou šířit odlišnou fázovou rychlostí. Naše teorie tedy předpovídá index lomu! Vztah (8) nám říká, že index lomu v daném materiálu bude

$$n = \sqrt{1 + \chi}.$$

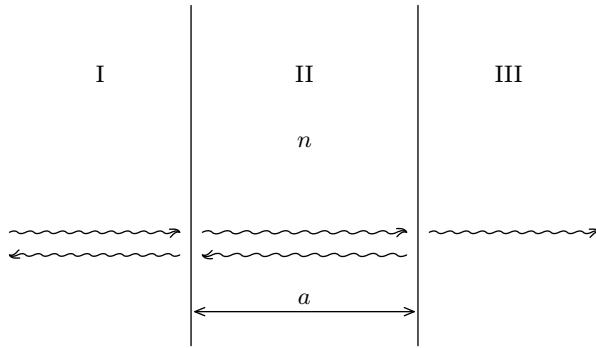
Získali jsme ale vůbec nějaký nový poznatek? Ano, kromě ospravedlnění námi dříve používaného modelu geometrické optiky teď můžeme teoreticky začít od základů a z elektronové struktury odvodit vzorec pro χ , a tedy i pro n v daném materiálu. Teorie indexu lomu se zároveň stala mnohem bohatší – ukazuje se, že $n = \sqrt{1 + \chi}$ může záviset na frekvenci, může být menší než jedna (pro záporné χ), a co teprve, když $\chi < -1$. Na podrobnější rozbor různých zajímavých situací zde ale není dost místa, a tak se v následujících částech omezíme na případ $\chi > -1$.

Odraz a lom na tenké vrstvě

Použijme nyní získané výsledky na vyřešení následující úlohy: mějme světlo dané úhlové frekvence ω dopadající kolmo na desku tloušťky a vyrobené z materiálu (skla) o indexu lomu n , kde a může být srovnatelné s vlnovou délkou světla (viz obrázek 3). Předpokládejme, že mimo desku je index lomu rovný jedné (vzduch). Jaká bude intenzita a fázový posun odraženého o propustěného světla v závislosti na uvedených parametrech? Pro řešení potřebujeme ještě jednu ingredienci, kterou jsou takzvané okrajové podmínky na hranici mezi látkami s různou susceptibilitou (indexem lomu). Vyše sepsané rovnice s konstantním χ nám poví řešení v každé oblasti zvlášť, a tato jednotlivá řešení pak musíme v souladu s Maxwellovými rovnicemi na rozhraních správně “sešít” právě pomocí okrajových podmínek.

³) Vůbec ne konstanta, χ obecně závisí na frekvenci ozařujícího světla, ale může být funkcí prakticky cehokoli od intenzity až po vnější magnetické pole.

⁴) Anglicky *susceptible* = náchylný, citlivý.



Obr. 3. Světlo dopadající na tenkou vrstvu

Okrajové podmínky jsou obecně odlišné pro složky \mathbf{E} a \mathbf{B} tečné a kolmé na rozhraní, a můžete je najít ve standardních učebnicích elektromagnetismu. V naší jednoduché situaci jsou ale vektory pole rovnoběžné s rozhraním (jehož normálový vektor zvolíme ve směru z) a souřadný systém si tedy můžeme otočit tak, aby \mathbf{E} mělo složku jen ve směru x : $\mathbf{E} = (E(z, t), 0, 0)$. Okrajové podmínky na obou rozhraních pak nabudou jednoduchého tvaru

- $E(z, t)$ spojitě na rozhraní,
- $dE(z, t)/dz$ spojitě na rozhraní.

Obě podmínky se dají odvodit z Maxwellových rovnic aplikovaných na rozhraní, první s nich vyplývá z Faradayova zákona a druhá z Ampérova zákona, zkuste vymyslet přesné zdůvodnění.

Nyní už máme vše potřebné pro vyřešení naší úlohy. Označme si oblasti vzduch – sklo – vzduch po řadě I a II. Pro popis nám stačí elektrické pole, protože magnetické pole je jím plně určené (viz čtvrtá kapitola). Úhlová frekvence ω bude stejná ve všech oblastech, neboť dopadající světlo o frekvenci ω rozkmitává elektrony právě touto frekvencí a elektrony pak na stejné frekvenci vyzařují. Všechny veličiny v naší úloze tedy musejí záviset na čase jako $e^{-i\omega t}$. Jestliže je vlnové číslo dopadajícího světla ve vzduchu $k = \omega/c$, bude odpovídající vlnové číslo ve skle nk . V každé oblasti jsou možná dvě řešení – vlna jdoucí v kladném a záporném směru osy z , přičemž v oblasti III chceme jen propuštěnou vlnu, záporně jdoucí složka je tedy nulová. Máme potom

$$\begin{aligned} E_I(z, t) &= E_I e^{i(kz - \omega t)} \\ E'_I(z, t) &= E'_I e^{i(-kz - \omega t)} \\ E_{II}(z, t) &= E_{II} e^{i(nkz - \omega t)} \\ E'_{II}(z, t) &= E'_{II} e^{i(-nkz - \omega t)} \\ E_{III}(z, t) &= E_{III} e^{i(k(z-a) - \omega t)}, \end{aligned}$$

kde indexy odpovídají jednotlivým oblastem a celková pole dostaneme jako $E_I(z, t) + E'_I(z, t)$, $E_{II}(z, t) + E'_{II}(z, t)$ a $E_{III}(z, t)$. Předpokládáme, že známe amplitudu E_I dopadajícího světla a snažíme se vypočítat zbylé amplitudy, zejména odraženou E'_I a propuštěnou E_{III} , hledáme tedy čtyři komplexní čísla. Na každém rozhraní musí platit okrajová podmínka pro E a jeho derivaci, dohromady tedy čtyři rovnice, čili přesně počet, který potřebujeme. Tyto rovnice po

úpravě zní

$$\begin{aligned} E_I + E'_I &= E_{II} + E'_{II} \\ E_I - E'_I &= n(E_{II} - E'_{II}) \\ E_{II}e^{i(nka)} + E'_{II}e^{-i(nka)} &= E_{III} \\ n(E_{II}e^{i(nka)} - E'_{II}e^{-i(nka)}) &= E_{III}. \end{aligned}$$

Jejich vyřešením pro neznámé E'_I , E_{II} , E'_{II} a E_{III} dostaneme⁵

$$\begin{aligned} E'_I &= -\frac{\left(n - \frac{1}{n}\right) \sin(kna)}{\left(n + \frac{1}{n}\right) \sin(kna) + 2i \cos(kna)} E_I, \\ E_{III} &= \frac{2i}{\left(n + \frac{1}{n}\right) \sin(kna) + 2i \cos(kna)} E_I. \end{aligned}$$

Druhá mocnina absolutní hodnoty těchto komplexních čísel reprezentuje intenzitu odraženého, resp. propuštěného světla, a jejich obecně nenulová imaginární část pak fázový posun oproti dopadajícímu světlu. Sami se přesvědčte, že $|E'_I|^2 + |E_{III}|^2 = |E_I|^2$, jak očekáváme ze zákona zachování energie. Můžeme se ptát, za jakých okolností všechno světlo projde a žádné se neodrazí, tedy kdy $E'_I = 0$. Dostaneme tak podmínku

$$\left(n - \frac{1}{n}\right) \sin(kna) = 0,$$

tedy buď $n = 1$ a žádná deska světlu v cestě nestojí, nebo $kna = m\pi$, pro $m \in \mathbf{N}$. Pro dobře zvolené tloušťky desky a tedy budeme pozorovat rezonanční efekt, kdy všechno světlo deskou prochází.

Tento rezonanční jev je zodpovědný za to, že olejové skvrny na loužích se často jeví duhové. Dochází zde k odrazu slunečního světla na dvou rozhraních vzduch – olej – voda, a protože olejová vrstva nemá všude přesně stejnou tloušťku, bude se i rezonanční (v tomto případě maximálně odrazivá) frekvence měnit od místa k místu. Pro olejové vrstvy s řádovou tloušťkou stovek nanometrů pak pozorujeme výsledný efekt zahrnující celé viditelné spektrum.

Metoda transferových matic

Pro náročnější čtenáře ještě na závěr popíšeme elegantní matematickou metodu usnadňující výpočet chování světla při průchodu větším množstvím vrstev s obecnými tloušťkami a indexy lomu. V předcházející části jsme elektrické pole v oblasti II popisovali pomocí amplitud E_{II} a E'_{II} pravo- a levojdoucích vlny. To ale v obecném případě není moc praktické, neboť tyto amplitudy se na rozhraních mění nespojitě. Okrajové podmínky naproti tomu zaručují, že celkové E a jeho prostorová derivace se na rozhraní nikdy nezmění. Proto bude výhodné elektrické pole na každém rozhraní popisovat jako vektor

$$\begin{pmatrix} E \\ dE/dz \end{pmatrix}.$$

⁵⁾ Amplitudy elektrického pole uvnitř skla neuvádíme.

Průchodu světla každou vrstvou pak bude odpovídat násobení tohoto vektoru maticí přiřazenou dané vrstvě. Nacházíme-li se v oblasti s indexem lomu n a naše světlo má vlnové číslo k , tak přechod mezi popisem (pravojdoucí, levojdoucí) a $(E, dE/dz)$ zajišťují navzájem inverzní matice

$$\begin{pmatrix} E \\ dE/dz \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} E^{\rightarrow} \\ E^{\leftarrow} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E^{\rightarrow} \\ E^{\leftarrow} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} E \\ dE/dz \end{pmatrix}.$$

kde

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ikn & -ikn \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i/kn \\ 1 & i/kn \end{pmatrix}.$$

Pravojdoucí a levojdoucí amplitudy E^{\rightarrow} a E^{\leftarrow} se při průchodu vrstvou tloušťky a a indexu lomu n změní na $E^{\rightarrow}e^{ikna}$ a $E^{\leftarrow}e^{-ikna}$, a vektor $(E, dE/dz)$ se tedy efektivně násobí maticí $A(a, n)$ připsanou dané vrstvě

$$A(a, n) = T \begin{pmatrix} e^{ikna} & 0 \\ 0 & e^{-ikna} \end{pmatrix} T^{-1}, \quad A(a, n) = \begin{pmatrix} \cos(kna) & \sin(kna)/kn \\ -kn \sin(kna) & \cos(kna) \end{pmatrix}.$$

Dopadá-li nyní světlo kolmo na sérii N vrstev o tloušťkách a_j a indexech lomu n_j ($j = 1, \dots, N$), kdy každá vrstva je popsána maticí $A_j = A(a_j, n_j)$, obdržíme výsledný vztah mezi amplitudami E_d , E_o a E_p po řadě dopadajícího, odraženého a procházejícího světla

$$\begin{pmatrix} E_p \\ 0 \end{pmatrix} = T^{-1} A_N A_{N-1} \dots A_2 A_1 T \begin{pmatrix} E_d \\ E_o \end{pmatrix}.$$

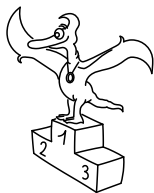
Ačkoli tento výsledek může vypadat poněkud hrozně, pracuje se s ním mnohem lépe, než se soustavou $2N + 2$ rovnic, které bychom dostali aplikací okrajových podmínek na všech $N + 1$ rozhraní. Pokud se navíc vrstvy periodicky opakují, můžeme součin $A_N A_{N-1} \dots A_2 A_1$ často vypočítat přesně. Podobně jako v předcházející části se pak dá výsledek použít pro výpočet rezonančních frekvencí a dalších vlastností složené optické soustavy.

Úloha V. S ... světlo v látce

- Index lomu v nelineárním materiálu závisí na intenzitě světla I jako $n = n_1 + n_2 I$, kde n_1 a n_2 jsou konstanty větší než nula. Zamyslete se, co se bude dít s paprskem světla dané šířky, který tímto materiálem prochází. Předpokládejte, že intenzita paprsku klesá se vzdáleností od jeho středu. (Stačí kvalitativní úvaha, odvážnější se mohou pokusit vybudovat analytický model.)
- Deska tloušťky a sestává z $2N$ stejně širokých rovnoběžných destiček ze dvou materiálů o indexech lomu n_1 a n_2 poskládaných „na střídačku“. Světelná vlna dopadá kolmo na čelní destičku. Jaký bude efektivní index lomu této smíchané desky pro $N \rightarrow \infty$? Napadá vás proč? (Nápověda: pro libovolnou matici A platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{A}{N} \right)^N = \exp(A),$$

kde I je jednotková matice a $\exp(A) = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \dots$)



Pořadí řešitelů po III. sérii



Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	3	8	6	32	<i>100</i>	95
1. <i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	3	2	1	4	2	7	–	19	<i>69</i>	55
2. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	4	–	–	4	–	8	–	16	<i>83</i>	33
3. <i>Lubomír Grund</i>	G Zábřeh	4	1	–	3	–	–	–	8	<i>74</i>	23
4. <i>Vladan Glončák</i>	G Ludovita Štúra, Trenčín	3	1	–	–	0	4	–	8	<i>44</i>	17
5. <i>Vladimír Macko</i>	G L. Štúra, Zvolen	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>50</i>	14
6. <i>Klaudia Mráziková</i>	G Ludovita Štúra, Trenčín	2	–	–	–	–	4	–	6	<i>52</i>	12
7. <i>Lukáš Timko</i>	G P. de Coubertina, Tábor	3	–	2	–	–	–	–	5	<i>53</i>	10
8. <i>Samuel Puček</i>	G Ludovita Štúra, Trenčín	3	1	–	–	–	–	–	4	<i>19</i>	9

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	3	8	6	32	<i>100</i>	95
1. <i>Jakub Vošmera</i>	G Matyáše Lercha, Brno	3	3	3	–	4	5	–	18	<i>87</i>	67
2. <i>Peter Kosec</i>	G Ludovita Štúra, Trenčín	3	–	1	–	–	6	–	10	<i>65</i>	31
3. <i>Patrik Švančara</i>	G Ludovita Štúra, Trenčín	4	–	–	–	–	5	–	9	<i>68</i>	26
4. <i>Gabija Maršalkaite</i>		2	–	–	–	–	5	–	7	<i>56</i>	19
5. <i>Kristína Nešporová</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	6	–	6	<i>73</i>	11
6. <i>Jan Bydžovský</i>	G J. Heyrovského, Praha	–	–	1	–	–	–	–	1	<i>69</i>	9
7. <i>Samuel Havadej</i>	G J. A. Raymana, Prešov	3	–	1	2	–	1	–	7	<i>35</i>	7
8. <i>Lucia Filová</i>	Hotelová akadémia, Brezno	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>40</i>	6
9.–11. <i>Jan Česal</i>	SPŠ Otrokovice	–	–	–	–	–	3	–	3	<i>38</i>	3
<i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	<i>75</i>	3
<i>Martin Pitřík</i>	SPŠ elektrotechnická, Havířov	2	1	0	–	–	–	–	3	<i>27</i>	3

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	3	8	6	32	100	95
1. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	4	3	2	4	2	8	–	23	81	69
2. <i>Anna Chejnovská</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	2	1	–	–	7	–	10	72	54
3. <i>Domínika Kalasová</i>	G, Boskovice	2	1	0	5	–	7	–	15	55	45
4. <i>Martin Bucháček</i>	G Lučka Pika, Plzeň	5	3	2	–	–	–	–	10	91	40
5. <i>Stefan Badza</i>	Mat. gymnázium, Bělehrad	1	3	1	2	–	–	–	7	51	38
6. <i>David Krška</i>	G J. V. Jirsika, Č. Budějovice	2	–	3	–	–	–	–	5	69	22
7. <i>Jiří Nárožný</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	0	88	21
8. <i>Zoltan Jehn</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	80	20
9. <i>Barbora Drozdová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	–	–	5	–	8	49	18
10.–11. <i>Jiří Jelínek</i>	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	70	16
<i>Ondřej Maslikiewicz</i>	SPŠ, Hronov	–	1	–	–	–	4	–	5	41	16
12. <i>Stefan Stanojevic</i>	Mat. gymnázium, Bělehrad	–	–	–	–	–	–	–	0	48	10
13. <i>Kateřina Jiráková</i>	G J. Pivečky, Slavičín	–	2	–	–	–	–	–	2	60	9
14.–15. <i>Mustafa Cevizci</i>	Yamanlar College, Izmir	–	–	–	–	–	–	–	0	47	8
<i>Jarier Wannos</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	–	–	–	6	–	8	67	8
16. <i>Jiří Táborský</i>	G, Palackého 191, Ml. Boleslav	–	–	–	–	–	–	–	0	41	7
17. <i>Zuzana Bogárová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	III	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	3	8	6	32	100	95
1. <i>Petr Ryšavý</i>	G J. Heyrovského, Praha	3	4	1	3	3	5	–	19	82	73
2. <i>Jakub Klemsa</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	–	3	3	–	–	–	–	6	73	45
3. <i>Štěpán Poláček</i>	G F. Palackého, Val. Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	0	78	43
4. <i>Zdeněk Novák</i>	G, Česká Kamenice	–	–	–	–	–	–	–	0	63	30
5. <i>Ján Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	74	29
6. <i>Zuzana Dočekalová</i>	G, F. Hajdy, Ostrava	–	–	–	–	–	7	–	7	84	26
7. <i>Karel Král</i>	G, Most	–	–	–	–	–	–	–	0	67	18
8.–9. <i>Jana Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	3	–	–	–	6	–	9	61	17
<i>Lada Peksová</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	77	17
10.–11. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	–	–	–	–	–	–	–	0	76	16
<i>Michal Zanaška</i>	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	0	100	16
12.–13. <i>Petr Cagaš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	65	13
<i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	87	13
14. <i>Jan Hodic</i>	G J. Ressela, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	0	48	10
15. <i>Nurullah Karakoc</i>	Yamanlar College, Izmir	–	–	–	–	–	–	–	0	31	9
16.–17. <i>Pavel Novotný</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	1	–	–	–	–	1	29	4
<i>Kristýna Onderková</i>	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
18. <i>Barbora Hanáková</i>		–	3	–	–	–	–	–	3	100	3
19. <i>Petra Vahalová</i>	G, Plasy	2	–	–	–	–	–	–	2	50	2
20.–21. <i>Martin Bachratý</i>	G Velká okružná, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
<i>Michal Husek</i>	G, Bučovice	–	–	–	–	–	–	–	0	13	1

**FYKOS**

*UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8*

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.