



Zadání VI. série



Termín odeslání: 31. května 2010

Úloha VI. 1 ... husitská

Na nakloněné rovině s úhlem sklonu α stojí směrem po spádnicí vozová hradba. Vozy jsou stejně těžké, mezi sousedními dvěma je vzdálenost s , celkem jich je N . Na počátku jsou všechny zabrzděné. Mazaný bratr Žižka odbrzdí horní z nich a ten se začne pohybovat směrem dolů a bere s sebou další vozy (hned po nárazu se nabouraný vůz odbrzdí a pokračuje dolů spolu s tím, který do něj narazil). Vypočítejte, jakou rychlost bude mít celá vozová hradba po posledním nárazu. Jako bonus můžete určit, jaké by měly být hmotnosti vozů tak, aby se rychlost hradby mezi dvěma nárazy nezměnila.

Úloha VI. 2 ... šmírák Honza

Honza stojí na Žižkovské věži a hledí lidem do oken. Okna jsou všechna namířena k němu, mají stejnou velikost a jsou ve stejné výšce od země. V jak vzdáleném okruhu mají nejméně soukromí? Honza nemá dalekohled.

Úloha VI. 3 ... atomový kondenzátor

Lukáš si koupil uranový atom a nenapadlo jej nic lepšího, než z něj postupně odebírat elektrony. Když odebral n -tý, s údivem zjistil, že se hmotnost atomu zvětšila. Co způsobilo tento jev? Jaké bylo ono n ?

Úloha VI. 4 ... podkritické polokoule

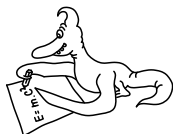
Když Lukáše přestala bavit ionizace jednotlivých atomů, objednal si uranu víc. Doručili mu dvě přesné polokoule, každou o hmotnosti m (splňující $m_k/2 < m < m_k$, kde m_k je kritická hmotnost). Lukáš je nastavil rovnými stranami k sobě a začal je přibližovat. V jaké vzdálenosti d mezi koulemi byl jeho pokus přerušen zažehnutím řetězové reakce?

Úloha VI. 5 ... tora tora tora

Japonský pilot za druhé světové války dostal ve výšce 5 km nad zemí žízeň. Zjistil však, že mu dali jen láhve s limonádou. Co má dělat?

Úloha VI. P ... kapička

V této úloze budeme zkoumat kapičku vody jakožto optickou čočku. Nanesete-li kapičku vody na nějakou tenkou skleněnou nebo průhlednou umělohmotnou destičku, dostanete improvizovanou lupu – spojnou čočku. Zkoumejte ohniskovou vzdálenost a maximální zvětšení „kapkové lupy“ v závislosti na jejich rozměrech a porovnejte s teorií. Všimněte si různých zobrazovacích vad kapky. Speciálně prozkoumejte, co se děje, když naší lupu přiblížíme např. k barevnému displeji počítače.



Řešení IV. série

Úloha IV. 1 ... modrá nebo zelená? (4 body; průměr 2,56; řešilo 18 studentů)

Hlavním zdrojem atmosférického kyslíku jsou fotosyntetizující rostliny. Představte si, že dojde k jejich masovému vymření. Na jak dlouho vystačí světové zásoby kyslíku, předpokládáme-li, že lidstvo a zbytek planety nijak nezmění svou spotřebu. Potřebné údaje určitě najdete na internetu. *Začal se dusit Aleš.*

Než začneme počítat, musíme si promyslet, co vlastně počítáme a co všechno je tedy nutné zahrnout. Zásoby kyslíku považujeme za dostatečné, dokud budeme schopni dýchat, a tedy přežít. Na druhou stranu nebudeme rozebírat problematiku potravních řetězců, které jsou zcela jistě taktéž závislé na kyslíku a jsou pro náš život nezbytné. Nebudeme také uvažovat žádné další zdroje kyslíku než rostliny ze zadání, objem průmyslové produkce kyslíku (100 milionů tun ročně) je totiž v porovnání se spotřebou zanedbatelný (méně než jedno procento). Nakonec musíme zvážit všechny významné konzumenty zásob kyslíku. Ty rozebereme podrobněji dále.

Nejprve se věnujme zásobám kyslíku. V atmosféře je 23 hmotnostních procent kyslíku. Vypočteme hmotnost atmosféry m_{atm} . Dobrým odhadem je výpočet pomocí atmosférického tlaku p při aproximaci Země koulí o poloměru $r = 6378$ km. Vyjde

$$m_{\text{atm}} = \frac{4\pi r^2 p}{g},$$

Dosadíme-li hodnoty $p = 101,3$ kPa a $g = 9,81$ m·s⁻², zjistíme, že celá atmosféra váží $5,3 \cdot 10^{18}$ kg.¹ Hmotnost atmosférického kyslíku tedy můžeme odhadnout hodnotou $m_{\text{O}_2} = 1,2 \cdot 10^{18}$ kg. Nemůžeme jej však spotřebovat do poslední molekuly, běžně se uvádí, že člověk potřebuje obsah kyslíku v dýchaném vzduchu 10 až 12 %. Jeho koncentrace tedy může klesnout přibližně na polovinu, k dispozici máme $6 \cdot 10^{17}$ kg kyslíku.

Poněkud složitější otázkou je množství spotřebovávaného kyslíku. Opomeneme-li rostliny, pak naprostou většinu kyslíku spotřebovávají lidé a ostatní živočichové při dýchání a lidé pro spalování. Udává se, že člověk spotřebovuje asi 360 litrů kyslíku za den. Roční spotřebu 6,8 miliardy lidí odtud snadno určíme jako $1,3 \cdot 10^{12}$ kg.

Dále se pokusme odhadnout spotřebu kyslíku hořením v důsledku lidské činnosti. Při spalování uhlí spotřebujeme 32 kg kyslíku při vzniku 44 kg oxidu uhličitého. Tyto roční emise oxidu uhličitého odhaduje [Marland, 2006] na $2,7 \cdot 10^{13}$ kg, což hrubě odpovídá roční spotřebě $2,0 \cdot 10^{13}$ kg kyslíku. Spotřebu kyslíku živočichy odhadl před deseti lety řešitel FYKOSu Jan Kunc² na $8,5 \cdot 10^{12}$ kg. Sečteme-li tyto tři hlavní faktory spotřeby kyslíku, dostáváme odhad roční spotřeby kyslíku na Zemi $3 \cdot 10^{13}$ kg. Porovnáním se zásobami kyslíku se dostáváme k odhadu 20 000 let. Toto je jistě velice dlouhá doba, navíc v atmosféře je pouze 0,36 % všeho kyslíku vyskytujícího se na Zemi, a tak by jeho případná produkce z oxidů byla možná.

Kryštof Touška

krystof@fykos.mff.cuni.cz

¹⁾ Ve skutečnosti je to asi o 2,5 % méně. Nepřesnost je způsobena nepravidelností zemského povrchu.

²⁾ Viz úloha XIII.VI.3.

Úloha IV.2 ... horečka (4 body; průměr 3,32; řešilo 22 studentů)

Janap šla domů z hvězdárny a při pohledu na východ Slunce ji napadlo, jak by asi jednoduše šla spočítat jeho teplota. Prozradíme vám, že Země je absolutně černé těleso s teplotou 0°C .

Na přednášce ze statistické fyziky nevyřešila Janap.

Ze zadání víme, že Země se chová jako absolutně černé těleso o teplotě 0°C , tedy $T = 273\text{K}$. To znamená, že stejnou energii, kterou Země přijme, musí i vyzářit. Na pomoc si vezmeme Stefan-Boltzmanův zákon, který říká, jak se k sobě mají zářivý výkon (energie) a efektivní teplota tělesa.

$$\frac{L}{S} = \sigma T^4,$$

kde σ je Stefanova konstanta, L zářivý výkon a T je termodynamická teplota.

Indexy Z a S budeme značit hodnoty příslušející Zemi, resp. Slunci. Plochu Země, kterou zachytává sluneční svit, známe, takže vztah pro zářivý výkon můžeme vyjádřit rovnicí

$$L = 4\pi R_Z^2 \sigma T^4.$$

Zamyslíme se nad tím, jak vypadá intenzita slunečního záření ve vzdálenosti jedné astronomické jednotky (poloměr dráhy označme r_d), tedy na Zemi. Intenzita záření je nepřímě úměrná čtverci vzdálenosti. V našem případě budeme počítat s kruhovou drahou Země, neboť excentricita elipsy, po které Země Slunce obíhá je minimální a náš výsledek příliš neovlivní. Intenzitu záření označme I . Platí

$$I = \frac{L}{4\pi r_d^2} = \frac{R_S^2 \sigma T^4}{r_d^2}.$$

Následně musíme vzít v úvahu, že velikost Slunce a Země je odlišná, tedy spočteme pouze energii, resp. zářivý výkon, který dopadne na povrch Země. Zářivý výkon, který dopadne na Zemi indexujeme písmenkem Z, tedy

$$L_Z = I\pi R_Z^2 = \frac{\pi R_Z^2 R_S^2 \sigma T^4}{r_d^2}.$$

V tuto chvíli můžeme opět použít Stefan-Boltzmanův zákon, ale tentokrát pro Zemi,

$$L_Z = 4\pi R_Z^2 \sigma T_Z^4.$$

Nyní využijeme toho, že efektivní teplotu Země známe ze zadání. Protože v našich úvahách uvažujeme, že Země je absolutně černým tělesem, není nutné počítat s žádnou další interakcí. Položíme rovny oba výrazy pro L_Z .

$$4\pi R_Z^2 \sigma T_Z^4 = \frac{\pi R_Z^2 R_S^2 \sigma T^4}{r_d^2}.$$

Hledaná efektivní teplota Slunce je

$$T = T_Z \sqrt{\frac{2r_d}{R_S}}.$$

Poměr poloměru Slunce a vzdálenosti Země od Slunce je úhlový poloměr Slunce (udávaná hodnota je půl stupně). Po dosazení vychází teplota okolo 5600K . Tato hodnota se velmi blíží běžně udávaným 5778K .

Jana Poledniková

janap@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... smrtící kolotoč (4 body; průměr 2,80; řešilo 10 studentů)

Na kůl o poloměru r zabodnutý do země je lanem délky l přivázané závaží hmotnosti m . Lano je napnuté a závaží leží na zemi. Lukáš se rozběhne a nakopne závaží kolmo na lano tak, že bude mít rychlost v . Lano se po tomto rázu začne navíjet na kůl. Spočítejte, jak se musí měnit koeficient smykového tření mezi závažím a zemí v závislosti na vzdálenosti od kůlu, aby při navíjení zůstala rychlost závaží konstantní.

Vymyslel Lukáš během zvracení na Matějské.

S komplexními čísly se pracuje jako s reálnými čísly, pokud definujeme $i^2 = -1$. Obyčejné násobení komplexních čísel značíme bez tečky, skalární součin dvou komplexních čísel značíme s tečkou. V této úloze si vystačíme s tím, že dvě komplexní čísla jsou na sebe kolmá, pokud se liší o násobek imaginární jednotky (násobení imaginární jednotkou má totiž u komplexních čísel názorný význam otočení o pravý úhel). Značíme stručně derivace podle času tečkou a podle úhlu čárkou, velikost komplexního čísla $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Potom zapisujeme komplexní číslo ve tvaru $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$. Označíme body podle obrázku 1 a φ orientovaný úhel natočení, $l_0 = l(0)$ počáteční délku provázku.

Bod dotyku T leží vždy na kružnici poloměru r a v komplexní symbolice ho plně určuje úhel φ , takže platí

$$OT = re^{i\varphi}.$$

Provázek TP je vždy kolmý na OT, takže jeho směr určíme jako násobek $ie^{i\varphi}$. Tím máme ošetřen směr; velikost ovšem určitě bude délka nenavinutého provázku $0 < l(\varphi) = l_0 - r\varphi$, $l' = -r$, takže celkem

$$TP = ile^{i\varphi}.$$

Proto lze polohu vyjádřit

$$z = OP = OT + TP = e^{i\varphi}(r + il).$$

Tím jsme získali množinu bodů v \mathbf{C} , po níž se závaží musí pohybovat – řešíme úlohu s vazbou. Spočítejme první derivaci, která určuje směr tečný k trajektorii

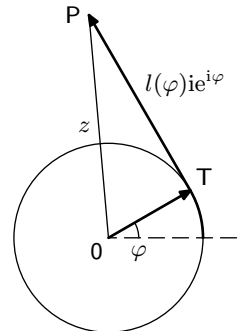
$$z' = \frac{dz}{d\varphi} = ie^{i\varphi}(r + il) - e^{i\varphi}ir = -e^{i\varphi}l.$$

Tak jsme ověřili první předpoklad, který většina řešitelů nezdůvodnila, že TP a z' jsou navzájem kolmé. Dále využijeme toho, že \dot{z} a z' mají stejný argument:

$$v = \frac{dz}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = z' \dot{\varphi} = |v| e^{i\varphi},$$

kde jsme rozepsali komplexní rychlost na velikost $|v| = \dot{\varphi}l = \text{konst}$ a argument (velikost rychlosti je konstantní).

Teď přichází na řadu fyzika: Použijeme Newtonův druhý zákon jen ve směru pohybu, tj. z' , protože ve směru kolmém na směr pohybu se přeci kvůli vazbě těleso pohybovat nemůže (dostali



Obr. 1. Komplexní symbolika

bychom jen napětí vlákna, které nás nezajímá). Pro projekci do směru pohybu z' platí podle Newtonova zákona

$$m\ddot{z} \cdot z' = mgf(\varrho) \frac{\dot{z}}{|\dot{z}|} \cdot z',$$

protože třecí síla je dána výrazem $mgf(\varrho)$ ve směru jednotkového vektoru rychlosti $\dot{z}/|\dot{z}| = z'/|z'|$ a $\varrho = |z|$. Tím se vztah zjednoduší na explicitně vyjádřenou závislost

$$f(\varrho) = \frac{1}{g} \frac{\dot{z} \cdot z'}{|z'|}.$$

Nakonec vypočteme zrychlení

$$\dot{z} = \dot{v} = \ddot{z} = -|v|e^{i\varphi}i\dot{\varphi}.$$

Teď již vidíme, že komplexní čísla \dot{z} a z' jsou na sebe kolmá (protože se liší o násobek imaginární jednotky), takže platí $f(r) = 0$. Správná řešení poslali jen *Kristýna Kohoutová*, *Tomáš Pikálek* a *Jakub Klemsa*. Fyzikální podstatu, pro kterou jsme v tomto řešení připravili matematický model použitelný i pro složitější závislosti, shrneme: Hmotný bod se pohybuje po vazebné křivce a vazebná síla je kolmá na vazebnou křivku, takže nekoná práci. Aby se energie, zcela tvořená pohybovou energií, zachovávala, nesmí ji bod ztrácet třením.

Jakub Michálek

jmi@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 ... Terka skáče (4 body; průměr 3,13; řešilo 8 studentů)

Terka skáče z metrové zidky. Na začátku má ruce natažené zvednuté nad hlavu, během pádu ruce ale spouští. O kolik takto zmenší svou rychlost při dopadu? Kvalifikovaně odhadněte hmotnost, zrychlení a rychlost Terčiných rukou, jakožto i další potřebné parametry jejího těla, a úlohu vyřešte.

Honilo se hlavou Terce při seskoku padákem.

Bez ohledu na to, zda Terka hýbe či nehýbe rukama, její těžiště se pohybuje směrem dolů se zrychlením g , protože gravitace je jedinou vnější silou (odpor vzduchu jako tradičně zanedbáváme). Pohybem rukou dolů způsobíme, že se trup i nohy pohybují směrem vzhůru vůči těžišti těla a dopad je tak zmírněn.

Zkoumejme Terku ve volně padající soustavě S' . V této soustavě nepozorujeme žádné vnější síly a situace se jeví jako v beztížném stavu. Poloha těžiště vůči S' je proto stálá a platí

$$m_r v_r' + m_z v_z' = 0,$$

kde v_r' a v_z' jsou po řadě rychlosti těžiště rukou a zbytku těla v S' a m_r , m_z hmotnosti rukou a zbytku těla. Rychlost rukou v_r' budeme pro jednoduchost považovat za konstantní. Odtud máme

$$v_z' = -\frac{m_r}{m_z} v_r',$$

příčměž polohová souřadnice přibývá ve směru pádu.

Rychlost těžiště celého těla v momentě dopadu na zem je

$$v_T = \sqrt{2g(h + \Delta)},$$

kde h je výška zídky a Δ je rozdíl polohy těžiště před skokem a po dopadu vyplývající ze spuštění rukou.

Rychlost v_z zbytku těla bez rukou, v soustavě spojené se zemí, je dána vztahem

$$v_z = v_T + v'_z = \sqrt{2g(h + \Delta)} - \frac{m_r}{m_z} v'_r.$$

Poměr rukama „ztlumené“ rychlosti dopadu vůči neztlumené rychlosti $v_n = \sqrt{2gh}$ je po malých úpravách

$$\frac{v_z}{v_n} = \sqrt{1 + \frac{\Delta}{h}} - \frac{m_r v'_r}{m_z \sqrt{2gh}}$$

Nyní již stačí dosadit vhodné realistické hodnoty, například $h = 1$ m, $v'_r = 3$ m·s⁻¹, $m_r/m_z = 0,1$. Vzdálenost Δ odhadneme z poměru hmotností, uvážíme-li, že ruce váží desetinu hmotnosti těla, jako $\Delta = 5$ cm. Vyjde

$$\frac{v_z}{v_n} \approx 0,95.$$

Zbrždění není úplně zanedbatelné. Pro ztlumení nárazu je výhodné minimalizovat Δ a maximalizovat v'_r , tedy krátce a rychle mávnout rukama ve chvíli dopadu. Většina řešitelů uvádí řádově podobné hodnoty zpomalení, které samozřejmě silně závisí na zvolených parametrech.

Marek Scholz

mara@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.5 ... úleva u ohradníku (5 bodů; průměr 2,91; řešilo 11 studentů)

Zamyslete se nad tím, jak je to s odporem tekoucího elektrolytu. Je jeho velikost závislá na tom, jestli teče po směru elektrického proudu v něm, nebo naopak? Zkuste odhadnout rozdíl, je-li.

Ránu dostal Grepe.

Elektrolyt je jakákoli látka obsahující volné ionty, které mohou vést elektrický proud. Moč je vodný roztok obsahující velké množství různých organických i anorganických látek, z nichž některé disociují na ionty, tedy je to elektrolyt. Abychom si úvahu zjednodušili, budeme místo o moči uvažovat o vodném roztoku kuchyňské soli. Co se stane, když do něj vložíme dvě elektrody?

Na anodě probíhá děj, při kterém chloridový anion odevzdá elektron a vybublá ven z roztoku jako elementární chlor. Na katodě přijímá molekula vody elektron a rozkládá se na hydroxidový anion a elementární vodík, který opět uniká. Když se podíváme na celý proces na větším časovém měřítku, vidíme, která v okolí anody ubývají chloridové anionty a v okolí katody vznikají hydroxidové anionty. To vede ke vzniku kladné nábojové hustoty v okolí anody a záporné v okolí katody, následkem čehož vzroste odpor elektrolytu (snížením koncentrace chloridových iontů kolem anody) a dochází k redistribuci iontů v prostoru.

Bylo by ovšem mylné si představovat nějaký proud jednotlivých částic. Chaotický tepelný pohyb je hlavním motivem! Ionty se k elektrodám „stahují“ z celého objemu elektrolytu. V nejjednodušším přiblížení si můžeme elektrody představit jako bodové náboje a za předpokladu lineárního chování celého jevu se potom ionty pohybují ve smělu siločar dipólu.

Z výše uvedeného snad už jasně plyne, že elektrolyza jsou spíše dva oddělené jevy, které spolu příliš nesouvisí. Proudění elektrolytu kterýmkoli směrem (tedy i prosté míchání roztoku) bude mít za následek zachování homogenity elektrolytu, tedy stavu před spuštěním elektrolyzy.

Tím bude odpor pravděpodobně o něco menší, než pokud bychom elektrolyt nechali v klidu. Provedení jakéhokoli kvantitativního odhadu je mimo možnosti fykosího řešení a pravděpodobně i pisatele tohoto textu. Zakončit snad můžeme tím, že unikání bublinek vodíku a chloru má reálně za následek taktéž promíchávání elektrolytu, a tak je celá diskuze dosti akademická, měřitelné efekty budou minimální.

Jan Hermann

honzah@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.P ... MacGyver a teploměr (8 bodů; průměr 7,50; řešilo 12 studentů)

Z materiálů, které máte doma k dispozici, zkonstruuje funkční teploměr a pomoci vhodných známých teplot nakalibruje jeho stupnici. Nezapomeňte nám poslat fotografii výsledku vašeho snažení.

Organizátoři se usnesli, že konstrukční úloha dlouho nebyla.

Teorie

Pro měření teploty můžeme využít mnoho jednoduchých principů. V běžném životě se nejčastěji setkáte s teploměry využívajícími roztažnost kapalin a dnes čím dál tím rozšířenějšími elektronickými teploměry. Méně obvyklé, ale také využívané, jsou bimetalové teploměry. V tomto řešení zkonstruuje jeden z možných elektronických teploměrů, který bude využívat závislosti velikosti schodku napětí na PN přechodu křemikové diody na teplotě.

Přiložíme-li k sobě dva polovodiče s různou vodivostí, vytvoříme tzv. PN-přechod. Ustaví se na něm rovnováha v difuzních tocích nosičů náboje, jejímž výsledkem je skok napětí v oblasti přechodu. Protože difuze je teplotně závislá, bude na teplotě záviset i velikost schodku napětí.

Experiment

Pro provedení kalibrace teploměru nepotřebujeme příliš mnoho vybavení. Stačí vhodná dioda (v našem případě přechod báze-emitor tranzistoru 2N2222A, který se dodává v provedení s kovovým pouzdem, což je pro naši aplikaci výhodné – přenos tepla je efektivnější a budoucí teploměr bude mít rychlejší odezvu), pár spojovacích drátů, voltmetr a teploměr. Voltmetr přepneme do režimu zkoušečky diod, kdy měří přímo napěťový schodek na PN-přechodu.

Pomocí vařící vody a kostek ledu si dokážeme namíchat libovolnou teplotu z rozsahu 0–100 °C. Teplotu vzniklé směsi měříme rtuťovým teploměrem se stejným rozsahem. Musíme dávat pouze pozor na to, aby se nám kvůli teplotě vzduchu v okolí směs neohřívala či nechladila příliš rychle, důležité je také měřit oběma měřidly přibližně ve stejné oblasti. Naměříme tak několik bodů kalibrační závislosti, které najdete v tabulce. Chybu měření odhadujeme na 1 °C, resp. 1 mV.

Tabulka výsledků měření

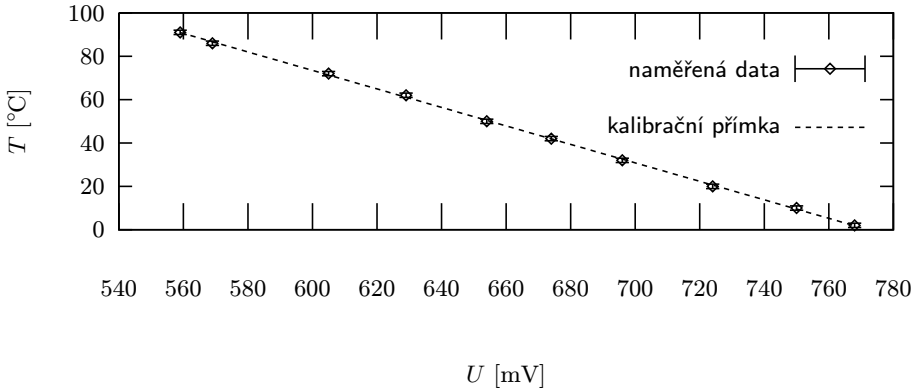
T [°C]	2	10	20	32	42	50	62	72	86	91
U [mV]	768	750	724	696	674	654	629	605	569	559

Po vynesení do grafu (obr. 2) vidíme, že kalibrační závislostí bude přímka popsaná závislostí $T(U) = -aU + b$, kde a a b jsou konstanty a U napětí na PN přechodu. Fitováním v programu gnuplot³ získáme hodnoty konstant a a b . Výsledek je

$$T(U) = (-0,426U + 329) \text{ } ^\circ\text{C},$$

³⁾ Návod najdete např. na našich stránkách v Sekci experimentů.

příčemž za napětí U dosazujeme v milivoltech. Přesnost kalibrace je dána zejména přesností kalibračního teploměru, bude tedy přibližně 1°C .



Obr. 2. Fitovaný graf závislosti napětí na teplotě

Poznámky k řešením

Většina vypracovaných řešení byla velmi pěkná (sešlo se mnoho různých teploměrů, od klasických kapalinových, přes bimetalové po diody a termočlánky) a bylo vidět, že jste si na experimentu dali záležet. Nejčastější chybou bylo zamlčení toho, jak jste kalibrovali – pokud jste používali jiný teploměr na zjištění hodnot, bylo vhodné napsat jaký a s jakou chybou měřil. Výsledek založený na odhadu nemá příliš velký význam.

Aleš Podolník

ales@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV. E ... maxwellobrání !!! chybí statistiky !!!

- Co se stane, když do krystalu kalcitu kolmo posvítíme kruhově polarizovaným světlem?
- Představte si, že je právě čas $t = 0$, široko daleko není žádný náboj ($\rho = \mathbf{j} = 0$), a my známe počáteční elektromagnetické pole v celém prostoru $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$ a $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$. Z třetí a čtvrté Maxwellovy rovnice tedy můžeme vyjádřit časové derivace $\partial\mathbf{B}/\partial t$ a $\partial\mathbf{E}/\partial t$ pomocí prostorových a vypočítat tak \mathbf{E} a \mathbf{B} v následujícím okamžiku. Tento postup můžeme iterativně opakovat a dostat tak celý časový vývoj pole pro $t > 0$. Jak je možné, že vůbec nemusíme použít první a druhou Maxwellovu rovnici?
- Uvažujte náboj velikosti q , který je v klidu pro $t < 0$, a v čase $t = 0$ na něj začne dopadat rovinná světelná vlna. Jak se bude náboj následně pohybovat, když světlo je polarizované (i) lineárně (ii) kruhově? Promyslete nejprve kvalitativně, přesný výpočet, případně počítačová simulace obdrží bonus.

Vyrobily MD-závody-s-časem.

Kalcit

Jak jsme ukázali v seriálu, kruhově polarizované světlo si můžeme představit jako superpozici (součet) paprsků polarizovaných v řádném a mimořádném směru, s fázovým rozdílem $\pi/2$

$$\begin{pmatrix} \cos(kz - ct) \\ \sin(kz - ct) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kz - ct) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(kz - ct) \end{pmatrix}.$$

Protože Maxwellovy rovnice jsou lineární, a součet řešení je tedy opět řešením, můžeme se na každou složku dívat zvlášť. První z nich pokračuje krystalem beze změny, a druhá se zlomí. Výsledkem tedy bude původní paprsek rozdělený na dvě lineárně polarizované složky s výše uvedeným fázovým rozdílem.

Zbytečné rovnice?

Na numerický výpočet časového vývoje elektromagnetického (EM) pole v tomto případě skutečně stačí pouze Faradayův a Ampérův zákon (s $\mathbf{j} = 0$). Zbylé dvě Maxwellovy rovnice (Gaussův zákon a neexistence magnetických monopolů) jsou důležité, protože stanovují podmínku pro počáteční EM pole. Ne každá volba $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ totiž splňuje

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

Trič je v tom, že pokud tyto rovnice platí v čase $t = 0$, budou automaticky platit i v libovolném budoucím okamžiku. Předpokládejme, že jsme $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ vypočítali podle algoritmu uvedeného v zadání a podívejme se na časové derivace levých stran v (1)

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}}, \quad \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = \nabla \cdot \dot{\mathbf{B}},$$

kde jsme prohodili pořadí časového a prostorového derivování. Nyní můžeme vyjádřit $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{E}}$ z Faradayova a Ampérova zákona s nulovým proudem

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \nabla \times \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E},$$

čili

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \quad \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}).$$

Pro čtenáře seriálu není novinkou fakt, že divergence rotace libovolného vektorového pole je nula, z čehož vyplývá

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = 0,$$

neboli platí-li podmínka (1) v čase $t = 0$, náš algoritmus zaručuje její platnost i v každém pozdějším čase.

Můžete se zkusit zamyslet nad obecnějším případem, kdy máme zadané nenulové počáteční náboje a proudy a EM pole, které splňuje Gaussův zákon a neexistenci magnetických monopolů. Nestací pro nalezení časového vývoje použít opět jen Faradayův a Ampérův zákon, ten druhý tentokrát s nenulovým \mathbf{j} ? K čemu jsou potom zbylé Maxwellovy rovnice a v čem se tento případ liší od naší původní úlohy? Poradíme vám, že řešení souvisí se zákonem zachování náboje.

Vykutálený náboj

Původním cílem této úlohy bylo demonstrovat pojmy hybnost a moment hybnosti světla. Fyzika si ale s námi zahrála a místo očekávaného dobře srozumitelného pohybu vyváděla s nábojem psí kusy. Nejprve nastíníme kvalitativní odhad pohybu a jeho souvislost s hybností a momentem hybnosti světla.

Je známo, že světlo se skládá z oscilujícího elektrického a magnetického pole, které jsou vzájemně kolmé a zároveň kolmé na směr pohybu, přičemž $B = E/c$. Zkoumejme nejprve

případ lineárně polarizovaného světla šířícího se ve směru z s elektrickým polem ve směru x a magnetickým ve směru y . EM pole působí na náboj q silou

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Dopadne-li tedy naše vlna na náboj v klidu, očekáváme, že ho elektrické pole rozkmitá ve směru x . Tím ale náboj získá nenulovou rychlost v tomto směru a magnetické pole bude skrze druhý člen působit silou ve směru z , což je právě směr pohybu světla. Výsledný pohyb náboje by tedy mohl vypadat jako oscilace ve směru x složené s posouváním ve směru z . Zjistili jsme, že aby platil zákon zachování celkové hybnosti, musíme světlu připsat něco jako hybnost, kterou může předávat nábojům, na něž působí. V kvantové mechanice se světlo skládá z fotonů, což jsou částice s hybností $p_z = \hbar\omega/c$, kde \hbar je Plankova konstanta a ω úhlová frekvence světla. Kvalitativně jsme nastínili, že klasická teorie elektromagnetism může kvantový model částečně reprodukovat.

Co se děje v případě kruhově polarizovaného světla? Tentokrát vektory elektrického a magnetického pole nemění velikost, ale otáčí se konstantní rychlostí. Elektrické pole nejprve roztočí náboj v rovině xy , a síla z magnetického pole ho bude opět tlačit ve směru pohybu světla. Kruhově polarizovanému světlu tedy musíme přiřadit nejen hybnost, ale také moment hybnosti, neboť kroužící náboj bude mít větší moment hybnosti, než když byl v klidu. Analogicky předchozímu případu mohou kvanta světla nést také moment hybnosti, který nabývá hodnot $L_z = \pm\hbar$. Pro foton levotočivě polarizovaného světla frekvence ω tedy platí $p_z = \omega L_z/c$.

Jestliže věříme kvantovému modelu, očekáváme, že změny z -ových složek hybnosti a momentu hybnosti, zprůměrované přes jednu periodu spolu souvisí vztahem

$$\left\langle \frac{dp_z}{dt} \right\rangle = \frac{\omega}{c} \left\langle \frac{dL_z}{dt} \right\rangle, \quad (2)$$

neboť hybnost náboje může stoupnout jen absorpcí fotonu. Absorbováním fotonu ale náboj nevyhnutelně získá i jeho moment hybnosti a tyto veličiny jdou ruku v ruce.

Doufali jsme, že numerické, nebo poruchové⁴ analytické řešení našeho problému potvrdí výše uvedené výsledky, což se ale podařilo jen částečně.

Výpočty jsou relativně zdlouhavé a nemá cenu je zde reprodukovat, jde o to použít druhý Newtonův zákon pro zadané EM pole. Tvar řešení je určen bezrozměrným parametrem

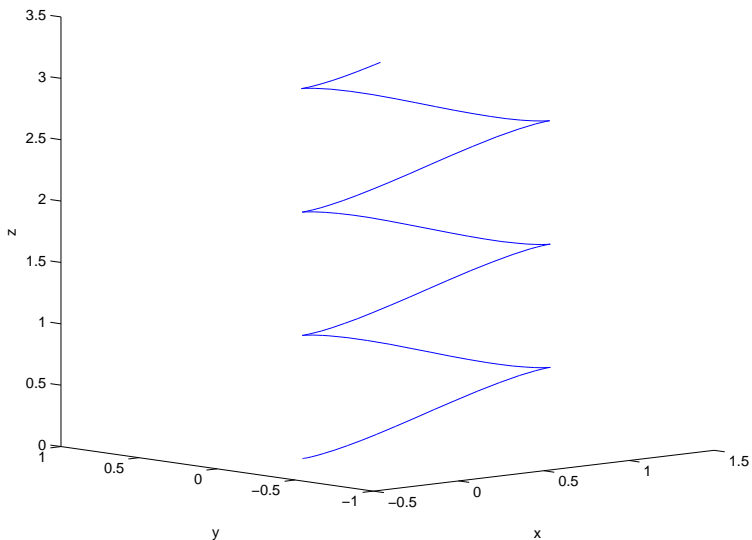
$$\lambda = \frac{qE}{m\omega c},$$

který nám říká, jak velkou roli hraje magnetické pole. Pro $\lambda \approx 1$ a větší je třeba použít relativistickou podobu Newtonova zákona.

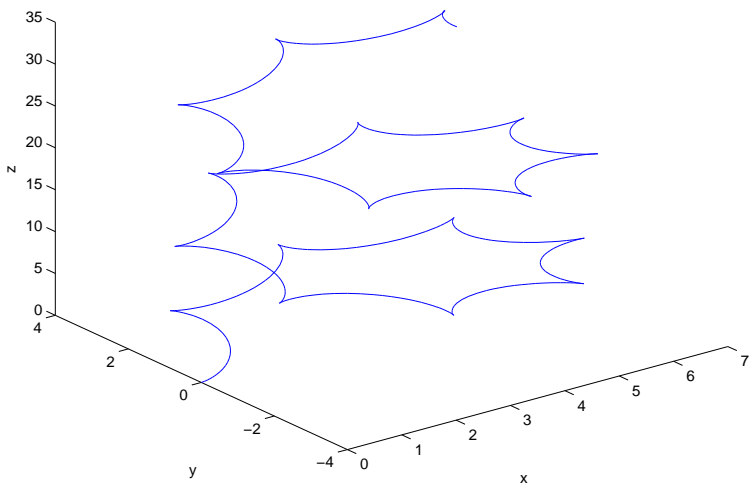
Obrázky 3 a 4 ukazují numericky získanou trajektorii náboje v relativistickém režimu $\lambda = 1$ pro lineárně a kruhově polarizované světlo. Jak očekáváme, trajektorie při lineárně polarizovaném světle leží v rovině xz , a stejně jako ta při kruhově polarizovaném světle vykazuje drift ve směru pohybu světla. Část hybnosti se tedy skutečně náboji předá. Překvapením ale je rotační chování náboje na druhém obrázku. V elementárních kouscích trajektorie se sice pohybuje po pravotočivých částech kružnice, celkově ale opisuje levotočivou spirálu. Jeho průměrný moment

⁴) V nultém přiblížení zanedbáme magnetické pole a provedeme poruchový rozvoj trajektorie v koeficientu $\lambda = qE/m\omega c$ pro $\lambda \ll 1$.

hybnosti je tudíž opačný, než jaký bychom očekávali z rovnice (2). Vysvětlení nám není známo a stojí za zamyšlení.



Obr. 3. Trajektorie při lineárně polarizovaném světle a $\lambda = 1$

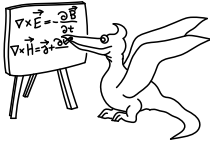


Obr. 4. Trajektorie při kruhově polarizovaném světle a $\lambda = 1$

Neočekávané chování možná souvisí s faktem, že díváme-li se na náboj a foton jako na klasické pevné částice, ze zákonů relativistické kinematiky vyplývá, že volný náboj nemůže nikdy absorbovat foton (můžete si zkusit odvodit ze zákonů zachování hybnosti a energie). Jednoduchý předpoklad o absorbování hybnosti a momentu hybnosti zde tedy nemusí platit. Problémům bychom se mohli vyhnout tím, že bychom místo volného náboje uvažovali například náboj vázaný k počátku souřadnic lineární silou, tedy harmonický oscilátor v EM poli. Zkoumání tohoto systému ale přenecháme jen odvážnějším řeitelům.

Dalimil Mazáč

dalimil.mazac@gmail.com



Seriál na pokračování

Kapitola 6: Einsteinův odkaz

Poslední kapitolu seriálu jsme se rozhodli pojmenovat trochu volněji než ty předchozí. Rámcově bychom ji mohli pojmenovat *Rychlejší než světlo?*, ale díky báječné skutečnosti, že ve fyzice všechno se vším souvisí, se dostaneme i k tématům jako je chování kvantově mechanické vlny relativistické částice. A teď už rychlostí světla vpřed! (Omlouváme se, ale rychleji to vážně nejde.)

Neposlušný index lomu

Starý známý index lomu jsme zavedli už v prvním díle vztahem $n = c/v$. Později jsme zjistili, že Maxwellova teorie skutečně předpovídá, že elektromagnetické vlny se budou v jednoduchých materiálech šířit rychlostí

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}, \quad (3)$$

kde ε_r , μ_r jsou relativní permitivita a permeabilita látky.⁵ Tyto konstanty pak můžeme vypočítat z mikroskopické struktury materiálu.

Jaké hodnoty ale může index lomu nabývat? Každý, kdo se trochu orientuje ve speciální teorii relativity a seriál Star Trek bere s mírným nadhledem, ví, že žádná informace, která by mohla kauzálně spojit dvě události, se z pohledu daného pozorovatele nesmí pohybovat rychleji než c , rychlostí světla ve vakuu. Očekávali bychom tedy, že index lomu bude reálné číslo větší nebo rovno jedné. Ani jeden ze zmíněných přívlastků ale není obecně pravdivý! Index lomu může být číslo menší než jedna, dokonce může být záporný a mít i nenulovou imaginární část. Skutečně nic nebrání existenci materiálů, které mají velmi exotické hodnoty ε_r a μ_r . Pro tyto látky se v poslední době uchytil název *metamateriály* a do jejich výzkumu a výroby se investuje hodně úsilí. Je tedy něco v nepořádku se speciální teorií relativity? Není, vždyť při odvozování vztahu pro index lomu se používají teorie, které principy speciální relativity neporušují. Musíme jen najít správnou interpretaci, co index lomu menší než jedna znamená.

⁵⁾ Vlastně jsme toto ukázali jen pro elektrickou permitivitu, a magnetické vlastnosti zanedbávali, naše analýza se ale dá přímočaře zobecnit.

Fázová a grupová rychlost

Je důležité zmínit, že index lomu v každém materiálu kromě vakua netriviálně závisí na vlnové délce světla $n = n(k)$. Výchozím bodem vysvětlení pak je, že vlnění v takovém materiálu přísluší dva druhy rychlosti. První je takzvaná *fázová rychlost* v_f , která říká, jak rychle se pohybují body dané fáze v monochromatické⁶ vlně, tedy jak rychle se pohybují kopce a údolí sinusové vlny. Napíšeme-li takovou vlnu v komplexním tvaru jako

$$e^{i(\omega t - kx)}, \quad (4)$$

kde ω je úhlová frekvence a k vlnové číslo, vidíme, že celá vlna se posunuje doprava rychlostí

$$v_f = \frac{\omega}{k}. \quad (5)$$

Právě o této rychlosti vypovídá index lomu. Je tomu tak proto, že vlnová rovnice s proměnlivou rychlostí vlnění se pro monochromatickou vlnu redukuje na obyčejnou vlnovou rovnici (viz čtvrtý díl seriálu). Monochromatické vlny se tedy pohybují fázovou rychlostí.

Trik je v tom, že jedna monochromatická vlna nemůže přenášet žádnou informaci. Když budete na svého kamaráda na druhé straně louky nepřetržitě svítit červeným laserem, těžko mu přenesete zprávu, že se k němu zezadu blíží rodinka rozzuřených divočáků. Mohli byste zkusit vysílat Morseovku přerušovaným signálem, ale přerušená vlna už není monochromatická, a čelo takové vlny se nebude šířit fázovou rychlostí. Kdo umí fourierovsky transformovat, může si ověřit, že Fourierova transformace sinu, který se rozprostírá jen na konečném úseku reálné osy, je nenulová i pro frekvence odlišné od té základní. Slovně to znamená, že monochromatická vlna se začátkem a koncem se dá složit jen za použití monochromatických vln odlišných frekvencí, takže už nemůžeme mluvit o pevně dané fázové rychlosti, protože různé vlnové délky se šíří různou rychlostí.

Když chceme vysílat signál, snažíme se vytvořit modulovanou vlnu, tedy vlnu, jejíž frekvence je přibližně daná, ale jejíž amplituda se mění. Kdo už slyšel o *rázecích*, toho nepřekvapí, že takový signál se dá získat složením vln s podobnými vlnovými délkami. Vypočítejme, co vznikne složením dvou vln tvaru (4) s vlnovými čísly $k_1 = k + \Delta$ a $k_2 = k - \Delta$. Vztah pro index lomu v závislosti na vlnovém čísle $n(k)$ jednoznačně určuje závislost $\omega(k) = kv_f = kc/n(k)$. Pro malá Δ jsou tedy frekvence přibližně

$$\omega_1 = \omega(k) + \frac{d\omega}{dk} \Delta,$$

$$\omega_2 = \omega(k) - \frac{d\omega}{dk} \Delta.$$

Složená vlna má tvar

$$\begin{aligned} e^{i\omega(k_1)t - ik_1x} + e^{i\omega(k_2)t - ik_2x} &= \left[e^{i\left(\frac{d\omega}{dk}t - x\right)\Delta} + e^{-i\left(\frac{d\omega}{dk}t - x\right)\Delta} \right] e^{i\omega(k)t - ikx} = \\ &= 2 \cos [\Delta(v_g t - x)] e^{i(v_f t - x)k}, \end{aligned}$$

kde jsme použili označení

$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}. \quad (6)$$

⁶) *Monochromatická* vlna obsahuje jen jednu frekvenci (barvu), a má tedy tvar funkce sinus.

Vidíme, že výsledek vypadá jako monochromatická vlna s vlnovým číslem k (exponenciální faktor), modulovaná obálkou tvaru posunujícího se kosinu. Obálka se ale pohybuje jinou rychlostí, než původní vlna, a sice takzvanou *grupovou rychlostí* v_g . Protože modulace amplitudy vznikají složením více vln blízkých frekvencí, budou se vždy šířit přibližně grupovou rychlostí. Pro ilustraci si vezměme vlny způsobené gravitací⁷ na hluboké vodě. Ze zákonů hydrodynamiky se pro ně dá odvodit

$$\omega(k) = \sqrt{gk},$$

kde g je gravitační zrychlení. Rychlost sinusové vlny s vlnovým číslem k je tedy

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}},$$

zatímco rychlost pohybu vzruchů získáme jako

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}},$$

odkud vidíme, že když budeme po hluboké vodě posílat signál, bude se šířit poloviční rychlostí než hřbety a údolí monochromatických složek.

Zjistili jsme, že i když $n < 1$, fyzika se ještě nemusí zhroutit, protože informace se vlnou šíří grupovou rychlostí (6), která je odlišná od fázové (5). Tím jsme samozřejmě nedokázali, že grupová rychlost je vždy menší než c , ale ukazuje se, že $v_g > c$ jen výjimečně, a v takových případech je rychlost šíření signálu menší než v_g i c . Einsteinův odkaz tedy odolává dál.

Případ $n < 1$ se nám podařilo vyřešit, nebo alespoň zamést pod sousedův koberec. Co ale znamená, když má index lomu imaginární část?

$$\tilde{n} = n + i\nu \tag{7}$$

Při přechodu z vakua do optického prostředí si světlo zachovává svoji frekvenci⁸ a vlnové číslo se tedy změní z ω/c na

$$k = \frac{\tilde{n}\omega}{c}.$$

Vlna v materiálu má pak tvar

$$e^{i\tilde{n}\omega x/c} = e^{-\nu\omega x/c} e^{in\omega x/c}.$$

Imaginární část indexu lomu tedy světlo exponenciálně tlumí. Podařilo se nám tak popsat absorpci! V materiálech s částečně imaginárním indexem lomu elektrony v atomech nepracují jako dokonalé oscilátory, ale musí překonávat „tření“. Toto tření pak přeměňuje energii dopadajícího světla na vibrace mřížky apod., a světlo je absorbováno. Skutečně, číslo i ve vztahu (7) je stejné i , které se objevuje při studiu tlumeného harmonického oscilátoru

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

po dosazení $x = x_0 e^{i\omega t}$.

⁷⁾ Na vzniku vln na hladině vody se kromě gravitace podílí i povrchové napětí, které hladině dává vlastnosti pružné membrány. Pro vlny s velkou vlnovou délkou je ale vliv povrchového napětí zanedbatelný.

⁸⁾ Když světlo vstoupí do skla, rozkmitá elektrony v atomech svojí frekvencí a tyto atomy pak stejnou frekvencí vyzařují. Frekvence světla ve skle se tedy nezmění.

Relativistické částice v kvantové mechanice

Zde je na místě malá odbočka, která striktně řečeno nesouvisí přímo se světlem, ale krásně ilustruje fakt, že grupová rychlost bývá menší než c , zatímco fázová nemusí. V kvantové mechanice se částice nechovají vždy jako přesné body, ale mohou být „rozplízlé“ v prostoru. Například, když má volná částice pevně danou hybnost p (pro jednoduchost počítáme jen v jednom prostorovém rozměru), může se nacházet se stejnou pravděpodobností úplně kdekoliv a její stav je popsán vlnovou funkcí $\psi(t, x)$ tvaru komplexní exponenciály s vlnovým číslem k , které souvisí s hybností vztahem⁹

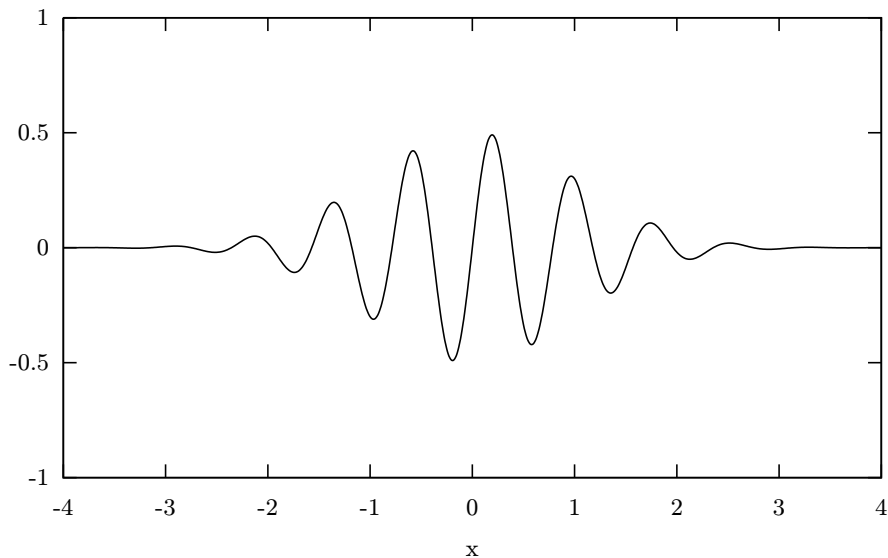
$$p = \hbar k,$$

kde \hbar je Planckova konstanta. Jak se ale tato vlna bude pohybovat, když necháme běžet čas? Kvantová mechanika nám říká, že se bude periodicky měnit s frekvencí ω , která souvisí s energií E zkušební částice

$$E = \hbar \omega,$$

a má tedy tvar

$$\psi(t, x) = \psi_0 e^{i(Et - px)/\hbar}. \quad (8)$$



Obr. 5. Vlnový balík

Dané hybnosti ale přísluší přesně daná energie, a máme stejnou situaci jako se světlem, kdy vlnové číslo udávalo frekvenci. Konkrétně Albert Einstein objevil správný vztah platný pro libovolnou rychlost

$$E(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4},$$

⁹⁾ Kdo nezná kvantovou mechaniku, a například nechápe, jak může dát vlnová funkce e^{ikx} všude stejnou pravděpodobnost, si může přečíst Seriál o kvantové mechanice z XX. ročníku FYKOSu.

kde m je klidová hmotnost částice, a c rychlost světla. Necháme-li tedy prostorem běžet vlnovou funkci relativistické částice s pevně danou hybností, budou se vlnky pohybovat rychlostí

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}, \quad (9)$$

což je vždy víc než c ! My ale můžeme zůstat v klidu, protože už víme, že abychom mohli mluvit o lokalizované částici, musíme složit víc vln (8), a dostat tak vlnový balík, s modulovanou amplitudou (viz obrázek 5).

Tento balík se bude pohybovat grupovou rychlostí

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}}, \quad (10)$$

kteřá je tentokrát vždy menší než c . Zdá se, že grupová rychlost je rychlostí pohybu částic s přesněji danou polohou, a skutečně si můžete ověřit, že po dosazení

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

do (10) vyjde $v_g = v$.

Čerenkovovo záření

Naši pouť světem světla zakončíme vysvětlením úkazu nesoucího jméno ruského experimentátora P. A. Čerenkova, který ho jako první pozoroval v roce 1934. Už mnohokrát bylo řečeno, že žádná částice ani signál se nemůže pohybovat rychleji než světlo ve vakuu. Přívlastek *ve vakuu* je zde ale zásadní, protože je to právě c , které se objevuje ve vztazích pro Lorentzovu transformaci a argumentech speciální relativity. Nic ale nebrání tomu, aby se částice pohybovaly rychleji než světlo v materiálu s indexem lomu větším než jedna, takže třeba ve vodě.

Nejčastěji se s takovou situací potkáme u jaderných reaktorů chlazených vodou – viditelné světlo se ve vodě pohybuje zhruba rychlostí $255\,564\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ a z reaktoru do ní běžně vylétávají elektrony téměř rychlostí c . Když se podíváte do reaktorového chlazení¹⁰, můžete vidět Čerenkovovo záření: étericky modré (i přes jméno svého objevitele) světlo, která jakoby vycházelo z celého objemu vody. Odkud se bere?

Mechanismus je podobný jako při vzniku rázové vlny za nadzvukovým letadlem nebo za lodí na vodě. Jak elektron letí, Coulombické pole se od něj nestíhá šířit dostatečně rychle a vytváří rázovou vlnu. Nahromaděná energie se pak projeví jako viditelné záření, které je silnější pro vyšší frekvence, a proto převládá modrá barva.

¹⁰⁾ Taková příležitost se vám může naskytnout třeba na *Dni s experimentální fyzikou*, pořádaném našim seminářem.

Závěr

Světlem optiky jsme ušli dlouhou cestu. Od Huyghensova principu jsme se dostali až k metamateriálům, a vysvětlili si základy mnoha způsobů popisu světla, od paprsků, přes komplexní čísla, až po vektorová pole. Jsme rádi, že jste se dočetli až sem, a doufáme, že v našem textu najdete inspiraci pro další přemýšlení a studium, vždyť spousty témat jsme se jen dotkli a nechali mnoho otevřených otázek. A kdo ví, třeba až se jednou budete snažit rozluštit složitou fyzikální otázku, osvítí vás analogie s úlohou ze Seriálu o světle, který jste četli před lety.

Dalimil Mazáč a Martin Výška

Zkrácené výsledkové listiny¹¹

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	0	29	<i>100</i>	124
1. <i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	2	-	-	3	3	8	-	16	<i>69</i>	67
2. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	4	4	-	-	-	-	-	8	<i>85</i>	41
3. <i>Lubomír Grund</i>	G Zábřeh	2	4	-	-	-	-	-	6	<i>74</i>	29

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	0	29	<i>100</i>	124
1. <i>Jakub Vošmera</i>	G Matyáše Lercha, Brno	1	4	1	-	2	5	-	13	<i>78</i>	80
2. <i>Peter Kosec</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	4	4	-	5	8	-	23	<i>74</i>	54
3. <i>Patrik Švančara</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	2	-	-	5	3	-	12	<i>64</i>	38

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	0	29	<i>100</i>	124
1. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	5	4	5	2	3	10	-	29	<i>86</i>	98
2. <i>Dominika Kalasová</i>	G, Boskovice	3	4	1	3	2	7	-	20	<i>56</i>	62
3. <i>Anna Chejnovská</i>	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	<i>72</i>	54

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	0	29	<i>100</i>	124
1. <i>Petr Ryšavý</i>	G J. Heyrovského, Praha	3	4	2	3	2	8	-	22	<i>81</i>	95
2. <i>Jakub Klemsa</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	3	4	5	4	-	-	-	16	<i>80</i>	66
3. <i>Štěpán Poláček</i>	G F. Palackého, Val. Meziříčí	-	4	-	-	-	7	-	11	<i>81</i>	54

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹¹⁾ Kompletní výsledkové listiny najdete na našem webu.