

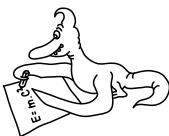
*Milí řešitelé!*

Konečně se k vám dostává poslední číslo XXIII. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře. V tomto díle najdete vzorová řešení úloh posledních dvou sérií a také napjatě očekávanou závěrečnou výsledkovou listinu. Naše gratulace patří nejen těm, kdo se umístili na předních pozicích, ale všem, kdo FYKOS řeší. Vážíme si práce každého řešitele, neboť svým úsilím dokazuje, že má zájem o přírodní vědy, což je v dnešní době obdivuhodné víc než kdy předtím.

Již jsme začali připravovat příští ročník 2010/2011. Plody naší práce brzy najdete ve svých poštovních stránkách. Protože chceme, aby se vám FYKOS líbil ještě víc, přicházíme s některými novinkami, o nichž se dočtete v informačním letáčku. Nadto jsme se rozhodli uspořádat pro žáky základních škol nový seminář. Pokud máte mladšího sourozence, zkuste mu říci o Výfuku!

Všichni organizátoři FYKOSu vám přejí pěkné prázdniny. Hlavně si dobře odpočíte, ať můžete v září úspěšně vyřešit naši první sérii!

*Tomáš Jirotko*

*Řešení V. série***Úloha V. 1 ... fotonová fontánka** (4 body; průměr 2,50; řešilo 6 studentů)

Honza není spokojen se současným standardem postelí, a proto začal testovat levitaci na laseru. Koupil si malou kuličku s dokonale vyleštěným zrcadlovým povrchem o hmotnosti  $m$ , poloměru  $r$  a položil ji na zem. Podlaha se rozzářila lasery o vlnové délce  $\lambda_0$  a plošném výkonu  $P$ . V jaké výšce nad zemí se kulička ustálila? Za bonusové body můžete vyřešit situaci, kdy je kulička skleněná. V obou případech uvažujeme, že ji laser neroztaví a že se experiment odehrává v homogenním gravitačním poli. *Do fyziklání přinesl Honza Humplík.*

Ze symetrie problému je zřejmé, že kulička může konat pouze vertikální pohyb. Poloměr kuličky označíme  $a$  a vzdálenost bodu dopadu fotonu od svislé osy kuličky  $r$ . Všechny fotony, které dopadnou ve vzdálenosti  $r$  od osy, se odrazí pod stejným úhlem. Celkovou hybnost fotonů před nárazem označíme  $p$  a po nárazu  $p'$ . Pro hybnost koule budeme používat  $p_k$ , resp.  $p'_k$ .

Jestliže označíme  $\alpha$  úhel, pro který platí, že  $\cos \alpha = r/a$ , bude svislá složka hybnosti odražených fotonů rovna  $p' \cos 2\alpha$  (kreslete si obrázek!). Předaná svislá složka hybnosti kuličky fotonu ve vzdálenosti  $r$  je tedy

$$dp_k = p - p' \cos 2\alpha.$$

Naopak ze zákona zachování energie dostáváme, že

$$pc + \frac{p_k^2}{2m} = \frac{(p_k + dp_k)^2}{2m} + p'c,$$

kde  $c$  je rychlost světla ve vakuu. Nás zajímá pouze situace, kdy je hybnost kuličky nulová. Také víme, že  $dp_k$  bude velmi malé vzhledem k hybnosti předané celé kuličce (je to diferenciál), a tudíž jeho druhé mocniny můžeme zanedbat. Ze zákona zachování energie tedy dostáváme  $p = p'$ .

Nyní nás zajímá hybnost dopadajících fotonů. Vzhledem k tomu, že fotony ztrácí energii kvůli přítomnosti gravitačního pole, jejich hybnost bude klesat s výškou. Jestliže má laser plošný výkon  $P$  je energie a tedy i hybnost vyzařená za jednotku času z malého plošného elementu  $dS$  rovna

$$p_0 = \frac{dE}{c} = \frac{P dS dt}{c}.$$

Pro změnu vlnových délek fotonů v homogenním gravitační poli platí vztah

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{gz}{c^2} \lambda_0,$$

kde  $z$  je změna výšky nad povrchem. Tento vztah lze snadno najít v různých tabulkách, případně si ho můžete sami odvodit. Uvažujte dva rovnoměrně zrychlující pozorovatele letící ve stejném směru. Jeden vystřelí foton směrem k druhému a ten ho za nějaký čas zachytí. Touto dobou se už ale pohybuje rychleji. Použijte klasický Dopplerův efekt k určení vlnové délky přijatého fotonu. Poslední ingredience je takzvaný princip ekvivalence, jenž byl pro Einsteina hlavní motivací k formulaci jeho gravitačního zákona.<sup>1</sup> Zajisté je fascinující, že takový přirozený a jednoduchý princip implikuje věci jako gravitační rudý posuv!

Jestliže víme, jak se mění vlnová délka, lze z de Broglieho vztahu  $p_f = h/\lambda$  ( $p_f$  je hybnost jednoho fotonu a  $h$  Planckova konstanta) vyjádřit

$$p = \frac{p_0}{1 + \frac{gz}{c^2}}.$$

Označme výšku, ve které se míček drží jako  $H$ . Pro výšku  $z$ , ve které fotony narážejí do míčku tedy bude platit  $z = H - \sqrt{a^2 - r^2}$ . My si ale uvědomíme, že faktor před  $z$  ve vztahu pro hybnost je úměrný  $c^{-2}$ , což je strašně malé číslo, a tak můžeme předpokládat, že na kuličku všude dopadají fotony se stejnou hybností, neboli  $z = H$ . Výpočet by byl možný i bez tohoto předpokladu, ale potom bychom museli integrovat složitější funkci než je polynom.

Finální krok je vypočítat celkovou hybnost předanou všemi fotony míčku. Zatím známe jen  $dp_k$ , což je hybnost předaná pouze fotony narážejícími ve stejné výšce. Celkovou předanou hybnost spočítáme integrací přes plochu, ale nejdříve si uvědomíme, že tato celková změna hybnosti bude rovna impulsu gravitační síly  $mg dt$ .

$$mg dt = \int_0^a dp_k = \int_{r=0}^{r=a} p(1 - \cos 2\alpha).$$

(Diferenciál nechybí – připomeňte si definici  $p$  a  $p_0$ .) Za použití  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2r^2/a^2 - 1$ , plošného elementu  $dS = 2\pi r dr$  a dosazením  $p$  dostáváme

$$mg = \frac{4\pi P}{c} \cdot \frac{1}{1 + \frac{gH}{c^2}} \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r dr = \frac{a^2 \pi P}{c + \frac{gH}{c}}.$$

Pokud je například  $m = 1 \text{ kg}$  a  $a = 1 \text{ m}$  dostáváme  $H = \pi c P / g^2 - c^2 / g$ . Pokud by pravá strana vyšla záporně, odpovídá to situaci, kdy je laser moc slabý na to, aby kuličku udržel.

<sup>1)</sup> Pokud jste o tomto principu nikdy neslyšeli, podívejte se například na Wikipedii.

Abychom se ale dostali ke kladné pravé straně, musel by být výkon řádově  $10^9 \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ , což není zrovna malé číslo. Také vidíme, že jakmile se dostaneme na kladné hodnoty, přítomnost konstanty  $c$  v prvním členu způsobí, že i malá změna v plošném výkonu způsobí velký vzestup kuličky. Na závěr můžeme říci, že naše tvrzení o neroztavitelnosti kuličky zjevně nebylo pravdivé.

*Jan Humplík*

honza@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha V.2 ... Lukášovo péro (4 body; průměr 2,67; řešilo 6 studentů)

*Ve starém gauči našel Lukáš pružinu o tuhosti  $k$ , poloměru závitu  $r$ , délky  $l$  a počtu závitů  $n$ . Protože se nudil, připojil ji ke stabilnímu zdroji elektrického proudu  $I$ . Jak se změnila její tuhost?*  
*Vymyslel Lukáš, když mu Aleš řekl, aby něco vymyslel.*

Jak víme již ze školy, pokud protéká proud dvěma vodiči stejným směrem, tyto se přitahují. Na rozdíl od dvou vodičů se však vodiče v cívce vzájemně odpuzují. Proto se po připojení proudu do obvodu celá pružina prodlouží, ale kromě prodloužení se také kupodivu změní její tuhost. Vypočtete nyní tuto změnu kvantitativně.

V mnohých fyzikálních úlohách je vhodné místo počítání sil, vypočíst energii systému. Energie je totiž skalární veličina, zatímco síla je veličina vektorová. Pokud se v systému nikde neztrácí energie, např. třením, platí, že síla je derivací energie dle polohy. Platí totiž, že  $W = Fs$ , kde  $s$  je dráha, na které je konána práce a pokud budeme uvažovat jen malé posunutí  $s$ , změna energie systému bude také malá a dostáváme  $F = dW/ds$ .

Začneme nejdříve s energií stlačené pružiny. Uvažme, její klidová délka je  $l_0$ , její aktuální délka je  $l$  a její tuhost nechť je  $k$ . Potom její energie je

$$E = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \quad (1)$$

Je zajímavé, že pokud posuneme počátek soustavy souřadné do rovnovážné polohy, tak energie na malém okolí nezávisí lineárně na této posunuté souřadnici. Je to náhoda, nebo to platí obecně? Představme si situaci, když by energie závisela lineárně na poloze, potom by se v jistém směru zmenšovala energie systému a ten by se začal pohybovat tímto směrem, jako na houpačce, houpeme-li se. To by ovšem byl spor s předpokladem o rovnovážné poloze. Dále je z této úvahy vidět, že koeficient před kvadratickým členem odpovídá polovině tuhosti fiktivní pružinky.

Další fyzikálně vděčná úvaha souvisí s aproximacemi funkcí na malém okolí jistého bodu. Funkce se nejjednodušeji aproximuje polynomem. Uvažujme polynom

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Chceme nalézt takové koeficienty  $a_k$ , takové aby původní funkce co nejlépe odpovídala tomuto polynomu na okolí bodu  $x_0$ . Máme širokou paletu možností. Jedna z metod, jak tohoto cíle dosáhnout je požadovat rovnost derivací původní funkce a tohoto polynomu v bodě  $x_0$ . Takto vzniklému rozvoji se říká Taylorův rozvoj. Pro něj platí

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

kde  $x_0$  je střed rozvoje.

Vraťme se nyní k našemu problému. Chceme-li vypočítat celkovou energii systému, je možno odděleně vypočítat mechanickou energii a elektromagnetickou energii.

Označme  $N$  počet závitů cívky,  $l$  její aktuální délku,  $I$  proud, který jí prochází,  $k$  její tuhost bez procházejícího proudu a  $R$  její poloměr. Pro mechanickou energii platí

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2.$$

Víme, že energie elektromagnetického pole cívky o indukčnosti  $L$  je  $E_{\text{EM}} = LI^2/2$ . Naším dalším cílem bude vypočítat indukčnost této cívky a zjistit, jak závisí na  $l$ .

Víme, že pokud se nachází cívka v magnetickém poli, pro indukované napětí platí  $U = -d\Phi/dt$ , kde  $\Phi$  je magnetický tok cívkou. Dále víme, že pro indukované napětí na cívce platí  $U = -L dI/dt$ , kde  $I$  je proud protékající cívkou a  $L$  její indukčnost. V našem případě tok  $\Phi$  budí sama cívka. Srovnáním těchto výrazů dostáváme

$$L = \frac{d\Phi}{dI}.$$

Cívku budeme aproximovat solenoidem. Z Ampérova zákona pro intenzitu magnetického pole uvnitř cívky platí

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

a pro celkový tok magnetického pole platí

$$\Phi = BSN = \mu_0 \frac{\pi R^2 N^2}{l} I \quad \Rightarrow \quad L = \mu_0 \frac{\pi R^2 N^2}{l},$$

kde  $S = \pi R^2$  je plocha jednoho závitu.

Celková energie pružiny, kterou protéká proud je tedy

$$E = E_{\text{mech}} + E_{\text{EM}} = \frac{1}{2} \left( k(l - l_0)^2 + \mu_0 \frac{\pi R^2 N^2 I^2}{l} \right). \quad (2)$$

Označme nyní  $A = \frac{1}{2} \mu_0 \pi R^2 N^2 I^2$ . Potom pro elektromagnetickou energii platí

$$E_{\text{EM}} = \frac{A}{l} = \frac{A}{l_0 \left( 1 + \left( \frac{l}{l_0} - 1 \right) \right)} = \frac{A}{l_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta l}{l_0}}.$$

kde jsme označili  $\Delta l = l - l_0$ . Druhý zlomek je však součtem geometrické řady s kvocientem  $-\Delta l/l_0$ . Lze však též nahlédnout, že jde o výše zmiňovaný Taylorův rozvoj. Proto můžeme psát

$$E_{\text{EM}} = \frac{A}{l_0} \left( 1 - \frac{\Delta l}{l_0} + \left( \frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 - \dots \right). \quad (3)$$

Zajímalo-li by nás přesné určení rovnovážné polohy, museli bychom vypočítat, pro jaké  $l$  platí,  $dE/dl = 0$ . Vzhledem k malé elektromagnetické síle ve srovnání s mechanickou můžeme posunutí střední polohy zanedbat.

Než budeme moci postupovat dále je potřeba si ujasnit řádové velikosti výše používaných veličin. Uvažujme nyní pružinu s těmito parametry: tuhost pružiny  $k \approx 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , klidová délka

$l_0 \approx 0,1$  m, počet závitů  $N \approx 100$ , poloměr pružiny  $R \approx 0,01$  m, procházející proud  $I \approx 1$  A a uvažovaná výchylka  $\Delta l = 0,01$  m. Pro tyto parametry vychází síla, vyvolaná pružinou při maximální výchylce  $F_p \approx 0,1$  N, síla vyvolaná proudem v pružině  $F_{EM_0} \approx 4 \cdot 10^{-4}$  N. Z toho plyne, že rovnovážná poloha pružiny se změní jen nepatrně. Proto lze při určování změny tuhosti pružiny použít rozvoj okolo  $l_0$  a uvažovat kvadratický člen. S odvoláním na diskusi výše víme, že tuhost fiktivní pružinky je rovna dvojnásobku koeficientu  $a_2$ . Z rovnic (2) a (3) plyne

$$k_{\text{celk}} = k + \frac{\mu_0 \pi R^2 N^2 I^2}{l_0^3}.$$

Pro výše uvedené hodnoty vychází  $k_{\text{celk}}/k - 1 \approx 4 \cdot 10^{-4}$ . Změna tuhosti připojením zdroje proudu je překvapivě pouze o tři řády menší, než je mechanická tuhost uvažované pružiny. Znamená to tedy, že změna tuhosti je bez větších problémů měřitelná.

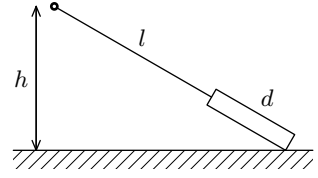
**Lukáš Ledvina**

lukasl@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha V.3 ... vozík (4 body; průměr 2,00; řešilo 12 studentů)

Na pevném závěsu ve výšce  $h = 1$  m nad zemí je upevněn provázek délky  $l = 1,5$  m. Na konci provázku je přivázána deska délky  $d = 0,5$  m tak, že provázek je napnut a spolu s deskou leží v jedné přímce (viz obrázek). Když soustavu uvolníme, deska nejprve po hraně klouže bez tření, dokud nedopadne celou svou délkou na zem. Potom se pohybuje proti třecí síle s koeficientem smykového tření  $f$ . Spočítejte, jaká musí být jeho hodnota, aby deska svým bližším koncem doklouzala přesně pod závěs.

Vykoumal Lukáš L. pro fyziklání.



Obr. 1. Závěs s tyčí

Řešení tohoto příkladu začneme odzadu. Když deska dopadne na zem, bude mít  $x$ -ovou složku rychlosti  $v_x$  a její levý okraj bude od závěsu ve vodorovné vzdálenosti, kterou jednoduše vypočteme z Pythagorovy věty

$$s = \sqrt{l^2 - h^2}.$$

Dál bude deska konat rovnoměrně zpomalený pohyb se zrychlením  $gf$ , než se zastaví. Analogicky volnému pádu máme  $v_x = \sqrt{2gfs}$ , a tedy

$$f = \frac{v_x^2}{2g} \frac{1}{\sqrt{l^2 - h^2}}.$$

Teď už zbývá pouze vypočítat  $x$ -ovou složku rychlosti těžiště desky. Použijeme k tomu zákon zachování energie. Pro to ale potřebujeme zjistit, jaká část potenciální energie se přemění na rotaci okolo těžiště a jaká část se přemění na jeho posun. K tomu musíme vědět, jakou rychlostí se bude těžiště pohybovat a jaká bude úhlová rychlost rotace tyče kolem něj.

Co se stane po dopadu? Kdybychom uvažovali, že tyč i podložka jsou dokonale tuhé, proběhne pružný ráz a následný pohyb nebude tak jednoduchý, jak se píše v zadání. Protože se deska neodrazí, musí se ve směru osy  $y$  úplně zastavit. Při dopadu dojde k nějakým ztrátám energie, ale vzhledem k tomu, že v ose  $x$  nejsou žádné zábrany, rychlost v tomto směru zůstane nezměněna.

Zaměříme se na situaci těsně před dopadem. Konec závěsu se pohybuje po kružnici se středem v závěsu a poloměrem  $r$  a proto má rychlost  $\mathbf{v}_l$  kolmou na provázek. Tu si můžeme

rozepsat po složkách na  $\mathbf{v}_1 = (v_x, -v_y)$  (mínus proto, že rychlost směřuje dolů). Když se podíváme na druhý konec tyče, vidíme, že se pohybuje směrem podél země. Protože je tyč dokonale tuhá, musí být  $x$ -ová složka rychlosti druhého konce stejná, tedy  $\mathbf{v}_2 = (v_x, 0)$ . Jaká teď bude rychlost těžiště? Bude to aritmetický průměr rychlosti levého a pravého krajního bodu. Rychlost jednotlivých bodů podél tyče totiž musí spojitě přecházet z hodnoty napravo v hodnotu nalevo. Tedy rychlost těžiště bude

$$\mathbf{v}_t = \left( v_x, -\frac{v_y}{2} \right).$$

Jaká bude úhlová rychlost rotace? Když odečteme rychlost těžiště od rychlostí obou krajních bodů, měli bychom dostat navzájem opačné rychlosti, ze kterých bychom už měli být schopni úhlovou rychlost vypočítat, protože  $\omega = v/r = 2v/d$ . Opravdu vyjdou dvě opačné rychlosti o velikosti  $v_y/2$ , a úhlová rychlost rotace tedy bude  $\omega = v_y/d$ .

Zapišme tedy zákon zachování energie s tím, co víme:

$$\begin{aligned} mgy &= \frac{m}{2} \left( v_x^2 + \frac{v_y^2}{4} \right) + \frac{v_y^2 J}{2d^2}, \\ \frac{ghd}{l+d} &= v_x^2 + \frac{v_y^2}{3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Ve druhém řádku jsme dosadili za počáteční výšku těžiště a moment setrvačnosti tyče vůči těžišti (všeobecně známá hodnota  $md^2/12$ ) a rovnici dále zjednodušili.

Nicméně stále máme příliš neznámých na jednu rovnici. Využijeme tedy již zmíněného poznatku o směru rychlosti levého konce desky. Protože známe parametry závěsu, umíme říct, pod jakým úhlem  $\alpha$  je skloněno lanko při doteku desky se zemí. Protože je rychlost na lanko kolmá, známe vztahy mezi jejími složkami

$$\mathbf{v}_1 = (v_x, -v_y) = (v \cos \alpha, v \sin \alpha),$$

tedy  $v_y = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $v_x = \sqrt{(l/h)^2 - 1}$ . Dosazením do (4) máme

$$v_x = h \sqrt{\frac{3ghd}{(l+d)(2h^2+l^2)}}.$$

Takže se po dosazení konečně dostáváme k výsledku

$$f = \frac{v_x^2}{2g} \frac{1}{\sqrt{l^2 - h^2}} = \frac{3h^3 d}{2(l+d)(2h^2+l^2)\sqrt{l^2-h^2}} \approx 0,08.$$

Nejčastější chybou řešitelů této úlohy bylo, že jste vůbec neuvažovali to, že se tyč otáčí, a zapoměli tak při výpočtu na rotační energii.

**Aleš Podolník**

ales@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha V.4 ... drtivý dopad** (4 body; průměr 2,50; řešilo 6 studentů)

Všichni dobře víme, že se 21. prosince 2012 se na své cestě ke Slunci srazí se Zemí asteroid (pohybuje se ve stejné rovině jako Země). Uvažme, že se pohybuje po protáhlé eliptické dráze s hlavní poloosou délky 4 AU a excentricitou 0,2 AU. Lidstvo bylo moc zaneprázdněno, a tak se problém začal řešit až 1. prosince 2012. Po jaké dráze musí udatná světová autorita vystřelit raketu s jadernou hlavicí, aby včas odvrátila konec světa? *Napadlo Honzu Humplíka.*

Uvažujme, že raketa vystřelí v okamžik, kdy jsou splněny předpoklady, že všechny trajektorie v uvažovaném čase můžeme nahradit přibližně úsečkami a zároveň tak, aby k výbuchu došlo dostatečně daleko od Země, aby ji trosky minuly. V dalším budeme uvažovat, že autorita vystřelí, hned jak se to dozví.

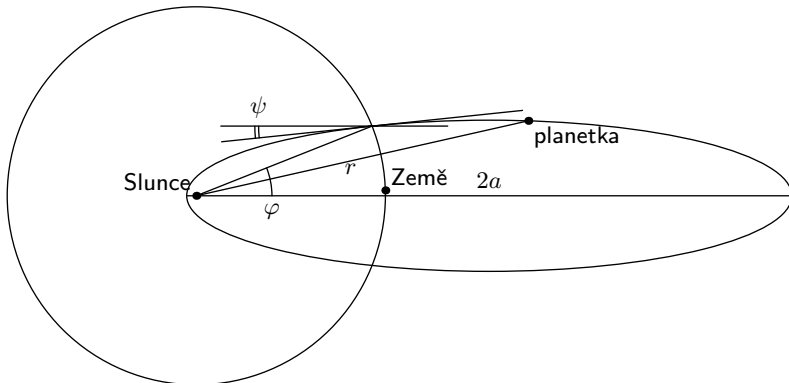
Zopakujme nejprve základní poznatky o Keplerově úloze. Platí Keplerovy zákony: 1) planetka se pohybuje po elipse se Sluncem v ohnisku, 2) moment hybnosti planetky se zachovává a 3) pro různá tělesa je čtverec oběžné doby dělený krychlí velké poloosy stejný.

Pokud napíšeme zákon zachování energie pro přísluní a odsuní (které nadále se společným ohniskem tvoří souřadnou soustavu) a uvažíme, že v těchto polohách je stejný moment hybnosti, dostaneme pro celkovou mechanickou energii

$$E = -\frac{GM}{2aI}.$$

kde  $G$  značí gravitační konstantu,  $M$  hmotnost Slunce a  $a$  je délka hlavní poloosy elipsy. Proto ve vzdálenosti  $r$  od Slunce má planetka rychlost

$$v = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}.$$



Obr. 2. Vzájemná poloha Země a nebezpečné planetky 1. prosince 2012

Podle třetího Keplerova zákona odhadneme dobu oběhu planetky

$$T' = \left( \frac{a'}{a} \right)^{3/2} T = 3000 \text{ d},$$

takže z tohoto hlediska je 20 dnů kratičká doba a nahrazení přímkou trajektorii planetky je ospravedlněné. Za trajektorii Země budeme dále považovat kružnici. Za 20 dní se Země posune

přibližně o  $20^\circ$ .<sup>2</sup> Planetka se pohybuje po elipse, a tedy musí platit

$$r = \frac{b^2}{a} \frac{1}{1 - e \cos \varphi},$$

kde numerická excentricita  $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a \doteq 0,99875$ . Odsud vyjádříme úhel průsečíku se Zemí

$$\cos \varphi = \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{b^2}{a} \right) \Rightarrow \varphi = 7,59^\circ.$$

Teď zjistíme směrnici tečny k elipse v tomto bodě. Uvažujme rovnici elipsy ve středovém tvaru

$$\frac{(x - ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jejím diferencováním zjistíme směrnici tečny

$$\frac{(x - ae)}{a^2} dx + \frac{y}{b^2} dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x - ae}{y} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{r \cos \varphi - ae}{r \sin \varphi}.$$

Dosazením  $\varphi$  a  $r = 1$  AU zjistíme úhel, který svírá tečna trajektorie planetky v očekávaném místě střetu se zemí s ohniskovou osou

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dy}{dx} \doteq 0,05686 \Rightarrow \psi = 3,25^\circ.$$

Proto můžeme psát pro pohyb planetky obdobně jako u vrhu šikmého s rychlostí  $v$  ve vakuu

$$x_p = v \cos \psi \cdot (20 \text{ d} - t) + \cos \varphi,$$

$$y_p = v \sin \psi \cdot (20 \text{ d} - t) + \sin \varphi.$$

Pro úhel, který oběhne planeta Země za dvacet dnů, platí  $\vartheta = \frac{20}{365} \cdot 360^\circ$ . Můžeme napsat rovnice pro pohyb rakety vystřelené rychlostí  $w$ , kterou zvolíme tečnou k trajektorii v místě odpalu,

$$x_r = -w \sin(\varphi - \vartheta) \cdot t + \cos(\varphi - \vartheta),$$

$$y_r = w \cos(\varphi - \vartheta) \cdot t + \sin(\varphi - \vartheta).$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých  $t$  a  $w$ . Tato soustava má řešení

$$t = 17,33 \text{ d},$$

$$w = 0,0204 \text{ AU} \cdot \text{d}^{-1}.$$

Zbývá uvědomit si, že Země má na své oběžné dráze rychlost  $2\pi \cdot 1/365 = 0,0172 \text{ AU} \cdot \text{d}^{-1}$  a rozdíl těchto rychlostí tvoří rychlost  $5526 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , se kterou musí jaderná hlavice opustět ve směru tečném k trajektorii Země základnu, která je umístěná na oběžné dráze tak, abychom mohli zanedbat rozdíl potenciální energie gravitačního pole Země.

Závěrem zbývá konstatovat, že kdyby malé planetky nestřežily americké radary, ale posádka Fyzikálního korespondenčního semináře, tak se tím vyřeší vlastně všechny problémy. Civilizace by totiž zanikla; řešitelé nedodali žádný správný výsledek a autorské řešení se do 20 dnů určitě nevešlo.

**Jakub Michálek**

jmi@fykos.mff.cuni.cz

<sup>2)</sup> Už chápete, proč má plný úhel  $360^\circ$ ?



**Úloha V. P ... tunelářská** (5 bodů; průměr 3,27; řešilo 11 studentů)

Kryštof se vydal na cestu vlakem a spokojeně usnul. Když se probudil v tunelu, cítil, že jej nějaká síla táhne směrem na jednu stranu. Ve vlaku bylo sice světlo, ale ven neviděl. Vzpomněl si, že je v zatáčkách trať klopená a uvědomil si, že i když si pamatuje původní směr jízdy, vůbec neví, na kterou stranu vlak zatáčí. Nepozná totiž rozdíl mezi stavem, kdy vlevo zatáčející vlak jede dostatečně pomalu a výsledná síla míří směrem do zatáčky, a situací, kdy je vlak dostatečně rychlý, zatáčí vpravo a síla směřuje ven ze zatáčky. Navrhněte experiment, který Kryštofovi pomůže tuto situaci vyřešit. Čím víc variant, tím lepší bodové hodnocení.

*V metru se Kryštof divil, kam to jede.*

Popíšeme přímočaré řešení, které naprostá většina řešitelů opomenula. K jeho realizaci stačí olovnice. Změříme úhel který svírá olovnice vůči podlaze na příince kolmé ke směru pohybu ve třech bodech. Budou-li tyto body od sebe vzdáleny  $r$ , pak při poloměru zatáčky  $R$  bude odstředivá síla úměrná  $1/(R - r)$ ,  $1/R$  a  $1/(R + r)$ . Rozdíl mezi úhlem naměřeným na vnitřní straně zatáčky a středem bude vždy větší než mezi úhlem na vnější straně zatáčky a opět středem. Tato vlastnost souvisí s monotonií funkce  $\arctg(1/x)$  pro kladné hodnoty. Toto si rozmyslete, případně si sami ozkoušejte pro vhodně zvolené parametry. Pokud bychom měli siloměr, tak by nám dokonce stačila pouze dvě měření, neboť výsledná síla s rostoucí odstředivou silou samozřejmě roste.

Kdybychom si náhodou nepamatovali směr pohybu, nebylo by nic snazšího než se projít po a proti směru jízdy opět s olovnici v ruce a pozorovat, jak se mění výchylka. Směr odstředivé síly už známe z minulého měření, a tak nám stačí sledovat změnu její velikosti. Nakonec již snadno určíme, kterým směrem jsme svoji rychlost vůči Zemi zvýšili, a kdy naopak snížili.

Z dalších řešení uvedme nejčastěji navrhovaný kompas, jehož střílka ukazuje neustále na sever a snadno tedy určíme směr otáčení. Dále pak Foucaultovo kyvadlo, kterým byla v roce 1851 demonstrována rotace Země, což je problém v zásadě obdobný. Naopak některými navrhovanými poslech frekvence hluku od kol a následné odvození rychlosti by k řešení nevedlo, neboť směr výsledné síly není určen ani tak rychlou, resp. pomalou jízdou, jako spíše jízdou, na kterou bylo projektováno klopení zatáčky. Tato rychlost se však samozřejmě mezi tratěmi a zatáčkami liší.

Řešení nedošlo mnoho, většina z nich však obsahovala některou ze správných metod. Nebojte se v podobných úlohách popsat více nápadů a popusťte uzdu fantazii, ve fyzice se přeci kreativita cení.

Nakonec dodejme, že popisovaná situace skutečně nastává. Například v pražském metru je na lince B v ranní špičce takový provoz, že mezi stanicemi Anděl a Karlovo náměstí, kde je pravotočivá zatáčka, jedou vlaky pomaleji, než bylo původně plánováno. Klopení zatáčky je pro tak nízké rychlosti moc velké, a tak je patrné působení výsledné síly do středu zatáčky. Zkušenost naopak velí, že výslednice působících sil míří ze zatáčky ven a pasažérům se zdá, že metro zatáčí doleva. Prudké klopení zatáček metra je dobře pozorovatelné při výjimečných situacích, kdy metro v zatáčce dokonce zastaví.

**Kryštof Touška**

krystof@fykos.mff.cuni.cz

**Úloha V. E ... ozvěna** (8 bodů; průměr 5,40; řešilo 5 studentů)

Když stojíte v malém prostoru a zahučíte správný tón, můžete objevit jeho rezonanční frekvenci. Protože rezonanční frekvence přímo souvisí s rozměry rezonátoru, umíme je z její znalosti určit. Vyhlédněte si doma vhodnou místnost (ideální jsou malé rozměry a holé stěny;

třeba toaleta), tímto způsobem ji změřte a porovnejte výsledky se skutečností.

*Na záchodě si notoval Jakub Michálek.*

Nejdříve je potřeba se zamyslet na tím, co to je vlastně zvuk. Náš ušní bubínek či mikrofon reagují na změny tlaku vzduchu. Tyto změny jsou však velmi malé v porovnání s atmosférickým tlakem.

Zamysleme se nejdříve nad tím, co se děje v místnosti, když začneme vyluzovat jistý zvuk. Zvuková vlna, resp. oblast, kde je zvýšený tlak vzduchu, se začne šířit od reproduktoru nebo hudebního nástroje atp. Narazí-li zvuková vlna na zeď, odrazí se, toto odrazení vlny je analogické odrazu vlny na volném konci provázku. Takto odražená vlna začne postupovat stejnou rychlostí zpět, kde ale opět narazí na protější zeď, od této se opět odrazí a tak dále. Jak ale všichni dobře víme, všechny takto odražené vlny spolu začnou interferovat. Pokud nebude násobek jejich délky půlvlny roven rozměru místnosti, tak dojde k destruktivní interferenci a pokud bychom měli dokonale odrazivé stěny, tak bychom neslyšeli nic. Avšak v našem případě začne intenzita velmi rychle klesat, budeme-li se vzdalovat od rezonanční frekvence.

### Teorie

Nyní se podívejme, jak úlohu řešit analyticky. Pro vlnění obecně platí vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0,$$

kde  $p = p(x, y, z, t)$  značí tlak v místnosti a  $c$  je rychlost šíření zvuku.

Nechť rozměry místnosti tvaru kvádra jsou  $a, b, c$ . Jakožto okrajovou podmínku uvažujeme maximální tlak na stěnách místnosti. Proto budeme řešení hledat ve tvaru

$$p(x, y, z, t) = p_0 \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{l\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{c}z\right) \cos(\omega t),$$

kde  $p_0$  je konstanta a  $k, l, m \in \mathbb{Z}$ . Dosadíme-li do vlnové rovnice dostáváme známý vztah pro frekvenci vlnění v rezonátoru pravoúhlého tvaru

$$f_{klm} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{l}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{c}\right)^2}. \quad (5)$$

### Postup měření

Nejdříve změříme ku příkladu svinovacím metrem rozměry místnosti. Toto měření bychom měli provádět na několika různých místech, abychom se vyvarovali hrubých chyb měření a také abychom mohli určit chybu měření rozměrů místnosti.

Způsobů, jak proměřit rezonanční frekvence, je mnoho. Někteří řešitelé použili hudebního nástroje ke generování tónu a vlastní sluch pro nalezení maximální intenzity.

Další metodou je použití počítače. Do měřené místnosti umístíme reproduktor a mikrofon. Do reproduktoru budeme přehrávat zvuky různých frekvencí a měřit hlasitost uvnitř místnosti pomocí mikrofonu. Jsou v podstatě dvě možnosti, jaký zvuk přehrávat v reproduktorech; jednak to může být zvuk s kontinuálně se zvyšující frekvencí, jednak to může být šum.

Při měření jsme použili šumovou metodu. Pokud totiž přehrajeme šum, a vzniklý záznam opět přehrajeme v místnosti, docílíme velmi silného zesílení právě rezonančních frekvencí a potlačení ostatních. Výsledný záznam převedeme pomocí Fourierovy transformace do frekvenčního spektra. Mezní rozlišovací schopnost odpovídá tzv. Nyquistově frekvenci. Měřitelné jsou

tyto frekvence

$$\omega_n = \frac{2\pi k}{n\Delta t},$$

kde  $\Delta t$  je vzorkovací frekvence,  $n$  je počet vzorků a  $k \in \{0, 1, \dots, n/2\}$ . Proto je mezní rozlišovací schopnost

$$\Delta f = \frac{1}{n\Delta t}.$$

Další používaná, ne však úplně správná metoda měření spočívá v diskretní změně přehrávané frekvence. Tato metoda však nemusí postihnout všechna maxima, která jsou užší než volený frekvenční skok.

### Měření

Zamysleme se nejdříve nad tím, co bychom měli změřit. Rezonanční frekvence se budou opakovaným přehráváním nahrávky zesilovat a nerezonanční frekvence se budou oslabovat. Problém je, že kromě nerezonančních frekvencí se oslabují i slabší rezonanční a dalším problémem je samotné měřicí zařízení. Používaný mikrofon jistě nemá stejnou odezvu na podnět pro různé frekvence. Je naprosto jisté, že na malé frekvence nebude tak citlivý, jako na frekvence střední a na vysoké bude opět méně citlivý. Je totiž optimalizován pro mluvenou řeč.

Další slabinou je zpracování v programu Audacity. Zde je bohužel možno zpracovávat pomocí FT maximálně 16 384 vzorků. Proto je mezní frekvenční rozlišovací schopnost 3 Hz. Filtrováním maxima se však lze dosáhnout rozlišovací schopnosti 1 Hz.

Nejdříve jsme změřili svinovacím metrem rozměry místnosti každý v různých místech, abychom tyto rozměry změřili co nejpřesněji. Vlastní chyba měření svinovacím metrem byla 0,5 cm. Změřené rozměry místnosti jsou:

$$a = (2,788 \pm 0,010)\text{m},$$

$$b = (2,788 \pm 0,010)\text{m},$$

$$a = (2,966 \pm 0,010)\text{m}.$$

Teplota v místnosti byla  $(25 \pm 1)^\circ\text{C}$ . Proto rychlost zvuku je<sup>3)</sup>  $c = (345,1 \pm 0,5)\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Protože je rezonančních frekvencí je mnoho a pro vyšší frekvence jsou si velmi blízké, převážně pokud jde o vyšší frekvence, je prakticky nemožné ze změřených maxim určit, jaké frekvenci  $f_{klm}$  odpovídají. Další vadou na kráse je i fakt, že místnost, jež jsme použili, nebyla úplně prázdná – uvnitř zůstalo umyvadlo a skříň. Skříň byla obložena matracemi, tedy její vliv na měření byl minimální, avšak umyvadlo zde mohlo způsobit posunutí maxim ve frekvenční charakteristice, ale také další falešná maxima.

Pokusíme se proto spíše o opačný postup: ze změřených rezonančních frekvencí se pokusíme odhadnout, jakému módu přísluší, a tím ověříme teorii.

Přímé měření by šlo provést pouze pokud by se nám povedlo přesně změřit módy 100, 010 a 001. Dále bychom mohli extrapolovat další rezonanční frekvence a nakonec přes všechny takto určené frekvence fitovat rozměry místnosti. Vzhledem k příliš velké měřené místnosti, které odpovídají základní rezonanční frekvenci okolo 60 Hz, kde mikrofon nesnímal dosti kvalitně, není tento postup možný.

Z rozměrů místnosti vycházejí následující teoretické rezonanční frekvence. Byly vypočteny ze vztahu (5) a zaneseny do tabulky níže.

<sup>3)</sup> <http://www.sengpielaudio.com/calculator-speedsound.htm>

První pozorovaný peak je na frekvenci 57 Hz, tento nejspíše odpovídá první harmonické ve směru  $m$ , teoretická hodnota je 58,2 Hz. Další, již patrnější peak je na frekvenci 64 Hz, což se řádově shoduje s první harmonickou ve směru  $k$  nebo  $l$ . Porovnáme-li další velká maxima 112 Hz a 124 Hz s teorií, lze vytyšit, že odpovídají módům 002 a 020 resp. 200. Třetí harmonické jsou naopak oproti druhým velmi slabé.

Tabulka výsledků měření

$k$	$l$	$m$	$f$ [Hz]	$k$	$l$	$m$	$f$ [Hz]	$k$	$l$	$m$	$f$ [Hz]
0	0	1	58	1	2	1	150	3	1	1	204
1	0	0	62	0	2	2	170	2	2	2	210
0	1	0	62	2	0	2	170	2	0	3	214
1	0	1	85	0	0	3	175	3	0	2	219
0	1	1	85	2	2	0	175	0	3	2	219
1	1	0	88	1	2	2	181	2	3	0	223
1	1	1	105	2	1	2	181	3	2	0	223
0	0	2	116	2	2	1	184	1	3	2	228
0	2	0	124	1	0	3	185	3	1	2	228
2	0	0	124	0	1	3	185	3	2	1	231
1	0	2	132	3	0	0	186	2	3	1	231
0	1	2	132	0	3	0	186	2	3	2	252
2	0	1	137	0	3	1	195	3	2	2	252
0	2	1	137	3	0	1	195	3	0	3	255
1	2	0	138	1	3	0	196	3	3	0	263
2	1	0	138	3	1	0	196	3	3	1	269
1	1	2	146	1	3	1	204	3	3	2	287
2	1	1	150								

Jak je vidět z naměřených spekter, maxim je opravdu hodně a přesné namapování na teorii je téměř nemožné. Můžeme se ještě zkusit zamyslet nad tím, proč jsou některá maxima intenzivnější, než jiná. Jednak intenzita zvukového vjemu závisí na poloze reproduktoru; bude-li v uzlu bude přispívat mnohem méně než v kmitně. Dalším faktorem je poloha mikrofonu, který zachytí zvuk pouze v kmitně. Nakonec má na intenzitu vliv materiál stěn, podlahy a stropu, od kterých se zvuk odráží.

### Diskuse

Jak je vidět z porovnání teorie a měření, první a druhé harmonické rozměry místnosti  $a$  a  $b$  byly změřeny dobře, ale výška místnosti, tj. rozměr  $c$  nebyl změřen správně, neboť odraz od podlahy, na které bylo lino, způsobil odchylku. Buď došlo k chybě při určení výšky místnosti nebo odraz zvukových vln probíhá jinde než na svrchní části lina, což je pravděpodobnější. Další chyby jsou zaneseny z důvodu nepravidelnosti měřené místnosti, tj. výklenky, obklady, ...

V celém měření dále není zanesena chyba mikrofonu, reproduktoru nebo zvukové karty. Tyto chyby jsou normálními prostředky neměřitelné.

Z praktického pohledu je toto měření velmi nepraktické pro zjištění rozměrů místnosti. Mnohem lepších výsledků bychom dosáhli, pokud bychom mikrofon i s reproduktorem umístili do trubky se stěnami, které absorbují zvuk. Takto bychom pozorovali pouze rezonance v jednom

směru, které jsou frekvenčně ekvidistantně rozdělené. A změřili bychom jen jeden konkrétní rozměr místnosti velmi přesně.

*Lukáš Ledvína*

lukasl@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha V. S ... světlo v látce (6 bodů; průměr 3,67; řešili 3 studenti)

- a) Index lomu v nelineárním materiálu závisí na intenzitě světla  $I$  jako  $n = n_1 + n_2 I$ , kde  $n_1$  a  $n_2$  jsou konstanty větší než nula. Zamyslete se, co se bude dít s paprskem světla dané šířky, který tímto materiálem prochází. Předpokládejte, že intenzita paprsku klesá se vzdáleností od jeho středu. (Stačí kvalitativní úvaha, odvážnější se mohou pokusit vybudovat analytický model.)
- b) Deska tloušťky  $a$  sestává z  $2N$  stejně širokých rovnoběžných destiček ze dvou materiálů o indexech lomu  $n_1$  a  $n_2$  poskládaných „na střídačku“. Světelná vlna dopadá kolmo na čelní destičku. Jaký bude efektivní index lomu této smíchané desky pro  $N \rightarrow \infty$ ? Napadá vás proč? (Nápověda: pro libovolnou matici  $A$  platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( I + \frac{A}{N} \right)^N = \exp(A),$$

kde  $I$  je jednotková matice a  $\exp(A) = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \dots$ )

### Sebesoutředující paprsek

Na kvalitativní předpověď nám stačí použít Snellův zákon lomu. Intenzita paprsku se zvětšuje směrem do jeho středu, a tím pádem bude i index lomu vzrůstat při pohybu do středu paprsku. Snellův zákon nám říká, že při přechodu do oblasti s vyšším indexem lomu se světlo láme ke kolmici. Zhruba tedy můžeme předpokládat, že okrajové části paprsku se budou lámat víc a víc do středu a paprsek se bude postupně zužovat. Tím ale bude jeho energie koncentrovaná blíž ke středu, kde tak poroste intenzita, a následně i index lomu, takže soustředující efekt se bude sám od sebe zesilovat, dokud nebude paprsek příliš úzký, aby platila použitá aproximace. To může nastat například tehdy, kdy ohromná intenzita světla změní kvalitativní chování materiálu, kterým prochází (roztaví ho, ionizuje, atp.) nebo tehdy, kdy šířka paprsku dosáhne řádově vlnové délky světla a geometrické přiblížení přestane platit.

S tím souvisí další problém našeho modelu – vezmeme-li v úvahu vlnové vlastnosti světla, žádný paprsek světla ve vakuu nebo lineárním materiálu nemůže mít všude stejnou šířku, ale musí se vlivem difrakce rozšiřovat. Tento fakt lze nahlédnout nejlépe z principu neurčitosti aplikovného na jednotlivé fotony. Předpokládejme, že připravíme paprsek světla vlnové délky  $\lambda$  o šířce  $D$ , což můžeme udělat například tak, že necháme projít rovinou vlnu štěrbinou šířky  $D$ . To ale znamená, že při průchodu štěrbinou známe polohu fotonů ve směru kolmém na pohyb světla s přesností  $\Delta x_{\perp} = D$ . Kvantově mechanický princip neurčitosti tak ale zaručuje, že hybnost fotonů v kolmém směru můžeme znát nanejvýš s přesností (řádově)  $\Delta p_{\perp} = \hbar/D$ . Paprsek se tedy bude vlivem neurčitosti kolmé složky rychlosti rozšiřovat pod úhlem

$$\vartheta = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} = \frac{\hbar/D}{2\pi\hbar/\lambda} \approx \frac{\lambda}{D}. \quad (6)$$

V materiálu tedy proti sobě působí dva jevy – rozšiřování paprsku vlivem difrakce, a zužování vlivem závislosti indexu lomu na intenzitě. Pokusme se odhadnout, kdy budou tyto dva jevy

v rovnováze. Máme-li paprsek konstantní intenzity  $I$  a tloušťky  $D$ , index lomu se na hranici paprsku skokově mění z  $n_1 + In_2$  na  $n_1$ . Bude-li intenzita dostatečně velká, hodnota kritického úhlu<sup>4</sup> na rozhraní překročí rozptylový úhel a k žádnému rozptylu paprsku pak nedojde. Pro kritický úhel  $\vartheta$  platí podle Snellova zákona

$$(n_1 + Icn_2) \cos \vartheta = n_1 .$$

Pro rozumně tlusté paprsky viditelného světla máme  $\lambda \ll D$ , tedy  $\vartheta \ll 1$ , a můžeme použít přibližný vzorec pro kosinus malých úhlů  $\cos \vartheta \approx 1 - \vartheta^2/2$ . Dosadíme-li za  $\vartheta$  z rovnice (6), dostaneme po zanedbání členů vyšších řádů a numerických konstant kritickou intenzitu

$$I_c \approx \frac{n_1 \lambda^2}{n_2 D^2} . \quad (7)$$

Tento vztah nám říká, jak intenzivní paprsek dané vlnové délky musíme připravit, aby sám sebe udržel v oblasti šířky  $D$ . Většina běžně dostupných materiálů (voda, sklo, polymery) skutečně vykazuje pro dostačně silné světlo lineární závislost indexu lomu na intenzitě, a popsáný jev se v praxi často využívá při práci s laserovými paprsky.

Podívejme se nyní, jestli se nám podaří úlohu vyřešit přesně – za použití vlnového modelu světla. Nebudeme vás napínat, a prozradíme, že problém má elegantní analytické řešení. Najdeme upravenou vlnovou rovnici pro elektrické pole  $\mathbf{E}$  a ukážeme, že má řešení ve tvaru postupujícího paprsku s charakteristickým profilem intenzity.

Předpokládejme, že vektor polarizace  $\mathbf{P}$  materiálu závisí na elektrickém poli podle vztahu

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\chi_0 + \chi_2 |\mathbf{E}|^2) \mathbf{E} ,$$

kde  $\chi_0$  a  $\chi_2$  jsou konstanty charakteristické pro daný materiál. Ke vztahu z pátého dílu seriálu jsme tedy přidali člen úměrný  $|\mathbf{E}|^2$ , a tedy intenzitě světla. Označíme-li  $I = |\mathbf{E}|^2$ , pro index lomu bude platit (podle téhož dílu)

$$n = \sqrt{1 + \chi_0 + \chi_2 I} \approx n_1 + n_2 I ,$$

přičemž použitá aproximace platí pro  $\chi_2 I \ll 1$ , což je bezpečně pravda pro běžné materiály a intenzity světla, které jsou schopné vytvořit pozemské laboratoře. Hodnoty  $n_1$  a  $n_2$  pak s  $\chi_0$  a  $\chi_2$  souvisí vztahy

$$n_1 = \sqrt{1 + \chi_0} , \quad n_2 = \frac{\chi_2}{2\sqrt{1 + \chi_0}} .$$

Hledejme nyní upravenou vlnovou rovnici pro elektrické pole. Ampérův zákon v našem materiálu má tvar

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (n_1^2 \mathbf{E} + \chi_2 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}) .$$

Vezměme nyní jeho časovou derivaci a použijme Faradayův zákon (ten je stejný jako ve vakuu)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (n_1^2 \mathbf{E} + \chi_2 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}) = 0 ,$$

<sup>4)</sup> Kritický úhel je minimální úhel, měřený od rozhraní, pod jakým může světlo dopadat, aby ještě nedošlo k úplnému odrazu.

což můžeme přepsat pomocí vektorového zaklínadla „*rot rot = grad div – laplace*“ jako

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (n_1^2 \mathbf{E} + \chi_2 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}) = 0. \quad (8)$$

Nebýt prvního členu s divergencí elektrického pole, a kvadratického členu v druhé časové derivaci, měli bychom vlnovou rovnici pro elektrické pole. Hledáme řešení, které má tvar paprsku světla s vlnovým číslem  $k_z$  a frekvencí  $\omega$ , šířícího se ve směru  $z$ , jehož intenzita (amplituda) ale závisí na  $x$  a  $y$ .

$$\mathbf{E}(t, x, y, z) = \mathbf{E}_0(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)},$$

kde  $\mathbf{E}_0(x, y)$  je velké jen v určitém okolí počátku  $x, y = 0$ , a jde k nule pro  $x, y \rightarrow \pm\infty$ . Takové řešení odpovídá rovnovážnému paprsku, který se při postupu materiálem nerozbíhá, ani nezužuje. Pro jednoduchost se omezíme na situaci, kdy<sup>5</sup>  $\mathbf{E}_0(x, y) = E(y)\hat{x}$ , přičemž  $E(y) \rightarrow 0$  pro  $y \rightarrow \pm\infty$  a  $E'(0) = 0$ , protože intenzita je maximální na ose pohybu. Máme tedy paprsek polarizovaný ve směru  $x$ , jehož intenzita závisí jen na směru  $y$ . Člen s divergencí v rovnici (8) je pak rovný nule, a po dosazení se z  $x$ -ové složky této rovnice stane následující diferenciální rovnice pro  $E(y)$ .

$$-E''(y) + \left(k_z^2 - \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2}\right) E(y) + \frac{\chi_2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}_x) = 0.$$

Nelineární materiály obvykle nereagují na okamžitou, rychle oscilující intenzitu elektrického pole, ale spíše na jeho střední hodnotu. Budeme tedy předstírat, že jediný na čase závislý člen v posledním členu předchozí rovnice je  $\mathbf{E}_x$ , a okamžitou intenzitu  $|\mathbf{E}|^2$  nahradíme její střední hodnotou<sup>6</sup>  $E^2(y)/2$ . Druhá časová derivace je tedy ekvivalentní násobení faktorem  $-\omega^2$ , a dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici

$$E''(y) - \Gamma^2 E(y) + \frac{\chi_2}{2} k^2 E^3(y) = 0,$$

kde  $k = \omega/c$  a  $\Gamma^2 = k_z^2 - (n_1 k)^2$ , spolu s okrajovými podmínkami  $E(y) \rightarrow 0$  pro  $y \rightarrow \pm\infty$  a  $E'(0) = 0$ . Tato rovnice je ekvivalentní druhému Newtonovu zákonu pro pohyb částice v dvoujámovém kvartickém potenciálu tvaru

$$-\frac{1}{2}\Gamma^2 E^2 + \frac{\chi_2}{8} k^2 E^4.$$

Můžete si promyslet, jak nám tato analogie napoví, že pro  $\Gamma^2 > 0$  existuje právě jedno řešení s danými okrajovými podmínkami (a že pro  $\Gamma^2 < 0$  žádné takové neexistuje). Samotné řešení pak můžeme najít přes analogii zákona zachování energie

$$\frac{1}{2} E'^2 - \frac{1}{2} \Gamma^2 E^2 + \frac{\chi_2}{8} k^2 E^4 = 0,$$

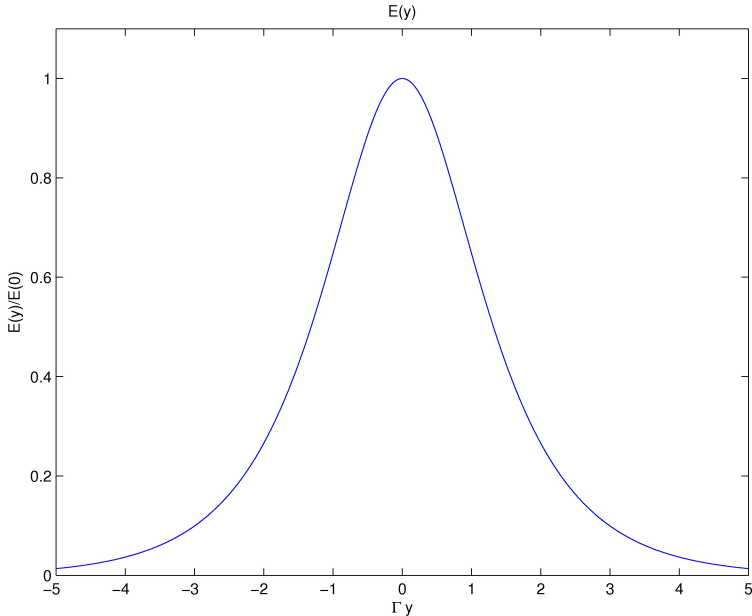
a separací proměnných dostaneme

$$E(y) = \frac{2\Gamma}{\sqrt{\chi_2} k} \frac{1}{\cosh(\Gamma y)}.$$

<sup>5)</sup> Symbol  $\hat{x}$  značí jednotkový vektor ve směru  $x$ .

<sup>6)</sup> Střední hodnota  $\cos^2$  je  $1/2$ .

Tvar této funkce je znázorněn na obrázku 3.



Obr. 3. Velikost elektrického pole v rovnovážném paprsku v závislosti na vzdálenosti od středu.

Jak bychom očekávali, výsledné elektrické pole má maximum pro  $y = 0$  šířky řádově  $D = 2/\Gamma$  a je zanedbatelné pro větší  $y$ , neboť funkce  $\cosh$  stoupá exponenciálně, neboli zatraceně rychle. S naším výsledkem nyní můžeme přesně vypočítat kritickou intenzitu světla

$$I_c = E^2(0) = \frac{4\Gamma^2}{\chi_2 k^2} = \frac{4\lambda^2}{\pi^2 \chi_2 D^2},$$

a dosazením  $\chi_2 = 2n_1 n_2$  získáme konečně

$$I_c = \frac{2}{\pi^2} \frac{\lambda^2}{n_1 n_2 D^2}. \quad (9)$$

Ale téměř stejný výsledek (7) jsme dostali z jednoduchého odhadu pomocí Snellova zákona! Kvadratická závislost na  $\lambda/D$  a úměrnost  $1/n_2$  jsou stejné, a jediný rozdíl činí  $n_1$  ve jmenovateli, namísto v čitateli. Tuto nesrovnalost můžeme vysvětlit tím, že jsme použili nesprávný předpis pro dopřednou hybnost světla v materiálu. Šíří-li se totiž světlo materiálem, rozkmitává nabitě částice, a celková hybnost pak sestává z elektromagnetické hybnosti světla, a mechanické hybnosti částic. Můžete si ověřit, že když budeme psát<sup>7</sup>  $p_{||} = n_1 \hbar k$ , vzorce (7) a (9) získají stejný tvar, až na číselnou konstantu.

<sup>7</sup>) Vysvětlení, proč je tento vztah ten pravý, není vůbec jednoduché. Fyzikům trvalo celou první polovinu dvacátého století, než se na něm shodli. Rozbor tohoto problému můžete najít v knížce *Rudolf Peierls: More Surprises in Theoretical Physics*.



Vidíme, že jednoduchý řádový odhad nám může hodně napovědět a ušetřit spoustu práce s přesným řešením rovnic.

### Limita sendviče

Tento příklad ukazuje, jak užitečná může být metoda transferových matic popsaná v seriálu. Označíme-li stejně jako v seriálu amplitudy dopadající, odražené a prošlé vlny po řadě  $E_d$ ,  $E_o$  a  $E_p$ , můžeme vztah mezi nimi vyjádřit maticově

$$\begin{pmatrix} E_p \\ 0 \end{pmatrix} = T^{-1}(A_2 A_1)^N T \begin{pmatrix} E_d \\ E_o \end{pmatrix}, \quad (10)$$

kde

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{pmatrix}, \quad A_{1,2} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n_{1,2}ka}{2N}\right) & \frac{1}{n_{1,2}k} \sin\left(\frac{n_{1,2}ka}{2N}\right) \\ -n_{1,2}k \sin\left(\frac{n_{1,2}ka}{2N}\right) & \cos\left(\frac{n_{1,2}ka}{2N}\right) \end{pmatrix}.$$

$A_{1,2}$  jsou transferové matice odpovídající elementárním vrstvám šířky  $a/2N$  a indexu lomu  $n_{1,2}$ . Nás zajímá limita rovnice (10) pro  $N \rightarrow \infty$ . V tom případě jsou argumenty goniometrických funkcí v  $A_{1,2}$  mnohem menší než 1, a můžeme tak vzít prvních pár členů Taylorova rozvoje

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & a/2N \\ -(n_{1,2}k)^2 a/2N & 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

kde byly zanedbány členy úměrné  $1/N^2$  a vyšších řádů. Součin  $A_2 A_1$  pak nabývá tvaru<sup>8</sup>

$$A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a/N \\ -(n_1^2 + n_2^2)ak^2/2N & 1 \end{pmatrix}.$$

Označme pro přehlednost  $n^2 = (n_1^2 + n_2^2)/2$ . Výraz  $(A_2 A_1)^N$  z rovnice (10) se pak rovná

$$(A_2 A_1)^N = \left( I + \frac{A}{N} \right)^N,$$

kde  $I$  je matice identity a

$$A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(nk)^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nápověda nám radí, že pro matice platí stejný limitní vztah, jako pro normální čísla (jedná se vlastně o jednu z definic exponenciály), tedy že

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( I + \frac{A}{N} \right)^N = \exp(A).$$

Na úplné vyřešení naší úlohy tedy stačí spočítat exponenciálu matice  $A$ . To můžeme udělat buď za pomoci vlastních čísel a vektorů, a využít toho, že vlastní čísla exponenciály matice jsou

<sup>8)</sup> Stále zanedbáváme kvadratické a vyšší členy  $1/N$ . Ačkoli ještě není úplně jasné proč, přesně takovou přesnost potřebujeme.

exponenciálami vlastních čísel, anebo přímo spočítat obecnou mocninu  $A^j$ , použít alternativní definici exponenciály  $\exp(A) = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \dots$  a pak si vzpomenout na Taylorův rozvoj sinu a kosinu. Oba postupy vedou k výsledku

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (A_2 A_1) = \exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(nka) & \frac{1}{nk} \sin(nka) \\ -nk \sin(nka) & \cos(nka) \end{pmatrix}.$$

Nalistujete-li nyní poslední stránku pátého dílu seriálu, nebo se podíváte na rovnost (11), zjistíte, že náš výsledek přesně odpovídá transferové matici desky tloušťky  $a$  vyrobené z materiálu o indexu lomu  $n$ . V limitě  $N \rightarrow \infty$  bude tedy chování naší složené desky vůči kolmo dopadající rovinné vlně úplně stejné jako chování homogenní desky stejné tloušťky a efektivního indexu lomu

$$n = \sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2}{2}}. \quad (12)$$

Efektivní index lomu tedy, trochu neočekávaně, není aritmetický průměr  $n_1$  a  $n_2$ , ale jakýsi kvadratický průměr. Za intuitivní fyzikální vysvětlení tohoto překvapivého výsledku můžeme vzít fakt, že pracujeme-li se světlem jako s vlnou, je přirozenější popisovat materiál nikoli jeho indexem lomu, ale jeho relativní permitivitou  $\varepsilon$ . Index lomu je s ní ve vztahu  $n^2 = \varepsilon$ . Efektivní permitivita sendviče je tedy aritmetickým průměrem permitivit obou materiálů

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2},$$

což je už méně překvapivé. Zajímavá otázka je, jestli výsledný efektivní index lomu složeného materiálu závisí na způsobu, jakým jsou oba materiály poskládané, anebo jen na průměrném zastoupení obou složek. Dostaneme jiný výsledek, když destičky poskládáme rovnoběžně s paprskem světla, namísto kolmo? Anebo když vezmeme trojrozměrné šachovnicové rozložení, ve kterém se pravidelně střídají krychličky dvou materiálů?

### Poznámky k došlým řešením

Většina z došlých řešení (kterých bylo poskrovnu) správně kvalitativně předpověděla chování paprsku v nelineárním materiálu. Přestože se nikdo nepokusil o analytický model, ukázali jsme ho zde jako příklad zajímavé a komplikované úlohy, která jde vyřešit víceméně přesně.

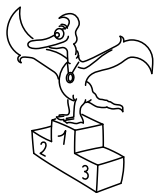
*Petr Ryšavý* použil pro řešení úlohy se sendvičovým materiálem následující úvahu: světlo urazí právě polovinu dráhy v každém z materiálů, a jeho efektivní (průměrná) rychlost by tedy měla být

$$v_{\text{ef}} = \frac{a}{t} = \frac{a}{t_1 + t_2} = \frac{2c}{n_1 + n_2},$$

z čehož dostaneme index lomu jako aritmetický průměr  $n = (n_1 + n_2)/2$ , v rozporu s předchozím výsledkem (12). Problém je v tom, že pro složený materiál, obzvlášť pak v limitě nekonečně tenkých vrstev, pojem fázové rychlosti světla přestává dávat smysl, protože v každé destičce máme dvě vlny, které se pohybují opačnými směry, a výsledná efektivní vlna, kterou pozorujeme, může mít dost nečekané vlastnosti. Protože nás ale vlnový model nemůže klamat, musíme přijmout fakt, že když na naši desku budeme kolmo svítit světlem dané vlnové délky, bude se chovat přesně jako materiál s indexem lomu daným vztahem (12). Jediný *Jakub Vošmera* v této úloze použil metodu transferových matic, za což mu patří náš obdiv, ačkoli ji nedotáhl úplně do konce.

*Dalimil Mazáč*

[dalimil.mazac@gmail.com](mailto:dalimil.mazac@gmail.com)



## Pořadí řešitelů po V. sérii



### Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	6	<b>35</b>	<i>100</i>	<b>159</b>
<b>1.</b> <i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	–	–	2	2	2	5	–	<b>11</b>	<i>67</i>	<b>82</b>
<b>2.</b> <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>85</i>	<b>41</b>
<b>3.</b> <i>Lubomír Grund</i>	G Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>74</i>	<b>29</b>
<b>4.</b> <i>Vladan Glončák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	–	2	–	–	–	–	<b>3</b>	<i>40</i>	<b>22</b>
<b>5.</b> <i>Lukáš Timko</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>63</i>	<b>20</b>
<b>6.</b> <i>Klaudia Mráziková</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	2	–	–	–	–	<b>2</b>	<i>51</i>	<b>18</b>
<b>7.</b> <i>Vladimír Macko</i>	G L. Štúra, Zvolen	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>50</i>	<b>14</b>
<b>8.</b> <i>Samuel Puček</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	1	–	–	<b>1</b>	<i>21</i>	<b>12</b>

### Kategorie druhých ročníků

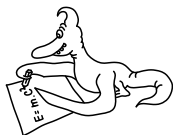
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	6	<b>35</b>	<i>100</i>	<b>159</b>
<b>1.</b> <i>Jakub Vošmera</i>	G Matyáše Lercha, Brno	3	6	4	4	1	9	5	<b>32</b>	<i>82</i>	<b>112</b>
<b>2.</b> <i>Peter Kosec</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	2	3	5	–	–	<b>10</b>	<i>74</i>	<b>64</b>
<b>3.</b> <i>Patrik Švančara</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	2	–	2	–	–	<b>6</b>	<i>61</i>	<b>44</b>
<b>4.</b> <i>Gabija Maršalkaite</i>		–	–	–	2	–	–	–	<b>2</b>	<i>60</i>	<b>25</b>
<b>5.</b> <i>Kristýna Nešporová</i>	G, Boskovice	–	–	2	–	–	4	–	<b>6</b>	<i>68</i>	<b>21</b>
<b>6.</b> <i>Samuel Havadej</i>	G J. A. Raymana, Prešov	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>45</i>	<b>15</b>
<b>7.</b> <i>Jan Bydžovský</i>	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>69</i>	<b>9</b>
<b>8.–9.</b> <i>Lucia Filová</i>	Hotelová akadémia, Brezno	–	–	–	0	–	–	–	<b>0</b>	<i>26</i>	<b>7</b>
<i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>88</i>	<b>7</b>
<b>10.–11.</b> <i>Jan Česal</i>	SPŠ Otrokovice	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>38</i>	<b>3</b>
<i>Martin Pitřík</i>	SPŠ elektrotechnická, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	<b>0</b>	<i>27</i>	<b>3</b>

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student</i> <i>Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	6	35	100	159
1. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	3	4	2	–	5	6	–	20	85	118
2. <i>Domínika Kalasová</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	3	–	–	3	56	65
3. <i>Anna Chejnovská</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	72	54
4. <i>Martin Bucháček</i>	G Luďka Pika, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	88	49
5. <i>Stefan Badza</i>	Mat. gymnázium, Bělehrad	–	–	–	–	–	–	–	0	51	38
6. <i>Ondřej Maslikiewicz</i>	SPŠ, Hronov	–	2	0	–	4	–	–	6	50	32
7. <i>David Krška</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	2	–	4	–	–	6	68	28
8. <i>Kateřina Jiráková</i>	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	0	78	25
9. <i>Jiří Nárožný</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	0	88	21
10. <i>Zoltan Jehn</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	80	20
11. <i>Barbora Drozdová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	49	18
12. <i>Jiří Jelínek</i>	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	70	16
13. <i>Stefan Stanojević</i>	Mat. gymnázium, Bělehrad	–	–	–	–	–	–	–	0	48	10
14.–15. <i>Mustafa Cevizci</i>	Yamanlar College, Izmir	–	–	–	–	–	–	–	0	47	8
<i>Jarier Wannos</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	67	8
16. <i>Jiří Táborský</i>	G, Palackého 191, Ml. Boleslav	–	–	–	–	–	–	–	0	41	7
17. <i>Zuzana Bogárová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student</i> <i>Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	5	8	6	35	100	159
1. <i>Petr Ryšavý</i>	G J. Heyrovského, Praha	3	2	2	4	5	3	3	22	76	117
2. <i>Jakub Klemsa</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	3	0	2	–	4	–	3	12	74	78
3. <i>Štěpán Poláček</i>	G F. Palackého, Val. Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	0	81	54
4.–5. <i>Zdeněk Novák</i>	G, Česká Kamenice	–	–	–	–	–	–	–	0	63	30
<i>Lada Peksová</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	77	30
6.–7. <i>Ján Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	74	29
<i>Zuzana Dočekalová</i>	G, F. Hajdy, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	0	83	29
8. <i>Karel Král</i>	G, Most	–	–	–	–	–	–	–	0	71	22
9. <i>Pavel Novotný</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	2	–	–	–	–	–	2	56	19
10.–11. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	–	–	–	–	–	–	–	0	76	16
<i>Michal Zanáška</i>	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	0	100	16
12. <i>Jana Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	56	14
13.–14. <i>Petr Cagaš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	65	13
<i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	87	13
15. <i>Jáchym Sýkora</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	92	11
16. <i>Jan Hoďic</i>	G J. Ressela, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	0	48	10
17. <i>Nurullah Karakoc</i>	Yamanlar College, Izmir	–	–	–	–	–	–	–	0	31	9
18. <i>Kristýna Onderková</i>	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
19. <i>Barbora Hanáková</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
20. <i>Petra Vahalová</i>	G, Plasy	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
21.–22. <i>Martin Bachratý</i>	G Velká okružná, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
<i>Michal Husek</i>	G, Bučovice	–	–	–	–	–	–	–	0	13	1



## Řešení VI. série

### Úloha VI.1 ... husitská (4 body; průměr 2,73; řešilo 15 studentů)

Na nakloněné rovině s úhlem sklonu  $\alpha$  stojí směrem po spádnicí vozová hradba. Vozy jsou stejně těžké, mezi sousedními dvěma je vzdálenost  $s$ , celkem jich je  $N$ . Na počátku jsou všechny zabrzděné. Mazaný bratr Žižka odbrzdí horní  $s$  z nich a ten se začne pohybovat směrem dolů a bere s sebou další vozy (hned po nárazu se nabouraný vůz odbrzdí a pokračuje dolů spolu s tím, který do něj narazil). Vypočítejte, jakou rychlost bude mít celá vozová hradba po posledním nárazu. Jako bonus můžete určit, jaké by měly být hmotnosti vozů tak, aby se rychlost hradby mezi dvěma nárazy nezměnila.

Na zašlou slávu husitství vzpomínal Jakob.

Předpokládejme, že srážky mezi vozy jsou dokonale nepružné, tzn. po nárazu se vozy spojí a pokračují spolu (podobně jako vagonky v železničních modelech).

Nechť má horní vůz index 1, dolní  $N$ . Dále označme  $w_i$  rychlost vozů  $1, \dots, i$  těsně po srážce a  $v_i$  rychlost týchž vozů před následující srážkou.

Abychom zjistili rychlost prvních  $i$  vozů po srážce využijeme zákon zachování hybnosti

$$v_{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} m_j = w_i \sum_{j=1}^i m_j \quad \Rightarrow \quad w_i = v_{i-1} \frac{\sum_{j=1}^{i-1} m_j}{\sum_{j=1}^i m_j}.$$

Dále potřebujeme znát rychlost  $i$  vozů po rozjetí. Pomůže nám zákon zachování energie

$$\frac{1}{2} v_i^2 \sum_{j=1}^i m_j = \frac{1}{2} w_i^2 \sum_{j=1}^i m_j + gs \sin \alpha \sum_{j=1}^i m_j \quad \Rightarrow \quad v_i = \sqrt{w_i^2 + 2gs \sin \alpha}.$$

Výše uvedené vztahy použijeme k vytvoření rekurentního vzorce pro  $w_i$ ; první člen je  $w_1 = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a dále máme

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} m_j}{\sum_{j=1}^i m_j} \sqrt{w_{i-1}^2 + 2gs \sin \alpha}.$$

Stejně hmotnosti rekurenci zjednoduší na

$$w_i = \frac{i-1}{i} \sqrt{w_{i-1}^2 + 2gs \sin \alpha}.$$

To je diferenční rovnice, jejíž řešení lze „uhodnout“<sup>9</sup> a správnost výsledku lze dokázat indukcí. Speciálně pro  $i = N$  máme

$$w_N = \sqrt{\frac{(N-1)(2N-1)}{3N} gs \sin \alpha}.$$

<sup>9)</sup> Jako odrazový můstek poslouží stránka <http://www.wolframalpha.com/>.

Proberme nyní případ, kdy požadujeme stejné rychlosti soustavy vozů po nárazu. Rychlost, kterou chceme zachovat je

$$w_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \mu v_1.$$

Dále musí platit  $w_{i+1} = w_i$ , což při využití rekurentního vztahu dává

$$m_{i+1} = \left( \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}} - 1 \right) \sum_{j=1}^i m_j.$$

V případě stejné rychlosti před srážkou je jasné, že první vůz musí před prvním nárazem získat vyšší rychlost než ostatní vozy. Necht' je tedy mezeza mezi prvním a druhým vozem  $\lambda$ -násobek normální vzdálenosti  $s$ . Nyní máme podmínky  $m_1 = m$  a  $v_i = v_1 = \sqrt{2gls} \sin \alpha$ . Jejich dosazením do rekurentních vztahů a úpravou získáváme

$$\lambda = \lambda \left( \frac{\sum_{j=1}^i m_j}{\sum_{j=1}^i m_j + m_{i+1}} \right)^2 + 1 \Rightarrow m_{i+1} = \left( \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda - 1}} - 1 \right) \sum_{j=1}^i m_j.$$

Často jste při srážkách používali zákon zachování kinetické energie, což by odpovídalo pružným srážkám, jelikož však vozy pokračovaly spojené, jednalo se o srážky nepružné. Mnoho z vás též uvažovalo, že rychlost spojených vozů mezi srážkami vzroste vždy o konstantu, což však není pravda, taktó se mění jen kinetická energie vozů. Rekurentních posloupností se nehlédíc na množství nejméně lekali bratři *Patrik Švančara* a *Lubomír Grund*.

**Michal Koutný**

xm.koutny@seznam.cz

### Úloha VI. 2 ... šmírák Honza (3 body; průměr 2,33; řešilo 9 studentů)

Honza stojí na Žižkovské věži a hledí lidem do oken. Okna jsou všechna namířena k němu, mají stejnou velikost a jsou ve stejné výšce od země. V jak vzdáleném okruhu mají nejméně soukromí? Honza nemá dalekohled. *Panorama Prahy studoval Honza Prachař.*

Předpokládáme, že Honza bude za míru uspokojení brát úhlový průměr  $\varphi$  sledovaného objektu. (Někteří řešitelé sice uvažovali změnu intenzity světla, které prochází oknem; i pokud by vše správně spočítali, zapomněli, že oko se výkyvům intenzity přizpůsobuje velice snadno.)

Označme  $O_1$  spodní hranu okna,  $O_2$  horní hranu okna,  $P$  pozorovací místo na věži,  $T$  místo na věži, které je ve stejné výšce jako  $O_1$ .

Pokud navíc označíme  $B$  patu výšky na stranu  $O_1P$ , platí, že trojúhelníky  $TO_1P$  a  $BO_2O_1$  jsou si podobné. Pak lze ale už psát, s označením  $|O_1O_2| = o$ ,  $|PT| = h$ ,  $|TO_1| = x$  a přeponou  $|PO_1| = p$ ,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|O_2B|}{|BP|} = \frac{\frac{xo}{p}}{p - \frac{oh}{p}} = \frac{xo}{x^2 + h^2 - oh}.$$

Protože tangens je prostá a rostoucí, stačí hledat maximum vnitřní funkce  $\operatorname{tg} \varphi(x)$ . Zkuste si nakreslit graf funkce  $f(x) = x/(x^2 + a^2)$ . Uvažujme vodorovnou přímkou  $C$ , která se právě dotýká  $f(x)$  v maximu. Pak dostaneme rovnici  $f(x) = C$ , neboli kvadratickou rovnici

$$Cx^2 - x + Ca^2 = 0,$$

kteřá musí mít právě jeden kořen, takže její diskriminant  $D = 1 - 4C^2a^2$  musí zmizet. Proto  $C = \pm 1/2a$  a rovnici řeší  $x = 1/2C = a$  (záporný kořen je minimum). Úhlový průměr má tedy maximum pro okna ve vzdálenosti  $x = a = \sqrt{h(h-o)}$ .

**Jakub Michálek**

jmi@fykos.mff.cuni.cz

### Úloha VI.3 ... atomový kondenzátor (4 body; průměr 3,50; řešili 4 studenti)

Lukáš si koupil uranový atom a nenapadlo jej nic lepšího, než z něj postupně odebírat elektrony. Když odebral  $n$ -tý, s údivem zjistil, že se hmotnost atomu zvětšila. Co způsobilo tento jev? Jaké bylo ono  $n$ ?  
Poslali jsme Lukáše nakoupit.

Zamysleme se nejprve nad tím, jak vypadá atom. První teorie, která smysluplně popisovala elektrony obíhající kolem jádra, byla Bohrova. Bohr předpokládal, že elektron obíhá kolem jádra po kružnici, a pro jeho moment hybnosti platí kvantovací podmínka  $L = n\hbar$ . Vypočteme-li možné energie takto se pohybujícího elektronu, zjistíme, že platí

$$E = Z^2 \frac{R}{n^2}. \quad (13)$$

kde  $Z$  je protonové číslo tohoto prvku,  $R$  je tzv. Rydbergova konstanta, která má velikost 13,6 eV.

Tento popis je vhodný především pro atomy, které mají malý počet elektronů v obalu. Uvažujeme-li však těžší atomy, které jsou jen slabě ionizované, na vytrhávání elektron nepůsobí elektrostaticky pouze kladně nabitě jádro, které je přitahuje, ale také ostatní přítomné elektrony, které je odpuzují. Proto celková energie potřebná k odtržení elektronu od atomu je menší, než vypočtená dle vztahu (13). Zavádí se proto tzv. konstanty stínění  $s$ . Pro energii potřebnou k odtržení elektronu na  $n$ -té slupce platí vztah

$$E = (Z - s)^2 \frac{R}{n^2}.$$

Zamysleme se nyní ještě nad tím, co považujeme za hmotnost atomu. Celková hmotnost atomu je rovna součtu jeho klidové hmotnosti a hmotnosti elektrostatického pole v jeho okolí. Hmotnost tohoto pole určíme ze známého Einsteinova vztahu  $E = mc^2$ . Energie tohoto pole je však rovna práci, kterou jsme vykonali při odtrhávání elektronu od atomu. Budeme-li nyní působit silou na atom, tento se začne pohybovat konkrétním směrem, ale spolu s ním musíme též urychlit elektrostatické pole, jež se nachází v jeho okolí. Použijeme-li ještě všeobecně uznávanou rovnost setrvačné a gravitační hmotnosti, máme všechny podklady pro vyřčení výše uvedené myšlenky o celkové hmotnosti ionizovaného atomu.

Vraťme se nyní k našemu problému. Atom uranu má protonové číslo  $Z = 92$ . Pokud bychom užili vztah (13) a odtrhli elektron ze slupky 1s, elektrostatické pole v okolí tohoto atomu bude mít energii 115 keV, což je asi pětina klidové hmotnosti elektronu. Je sice možné vytrhnout elektron z této slupky, ale ostatní elektrony v atomu toto volné místo zaplní v řádu femtosekund, popřípadě dojde ještě k vyzáření tzv. Augerových elektronů. Tyto elektrony se původně nacházely na vyšších elektronových hladinách, ale vlivem velkého množství energie jsou od atomu nakonec odtrženy. Z tohoto je vidět, že odtrhneme-li libovolný elektron tohoto atomu, jeho celková hmotnost se sníží. Odtrhneme-li další elektron, konstanta stínění se sice zmenší, ale není to postačující vliv ani v případě odtržení posledního elektronu, kdy je konstanta stínění rovna 0.

Zamysleme se ještě nad tím, kolik protonů v jádře by musel mít atom, aby při hypotetickém odtržení elektronu s nejnižší energií došlo ke zvýšení jeho hmotnosti. K tomuto výsledku se dostaneme nejjednodušeji použitím vztahu (13), kde položíme  $n = 1$ , což odpovídá slupce nejbližší k jádru. Za energii  $E$  budeme dosazovat klidovou energii elektronu, tj. 511 keV. Konstantu stínění budeme pro jednoduchost uvažovat nulovou, i když konkrétně pro případ mědi  $Z = 32$  je konstanta stínění rovna přibližně 6. Z této úvahy dostáváme pro protonové číslo  $Z$  podmínku

$$Z \geq \sqrt{\frac{E}{R}} = \sqrt{\frac{511 \cdot 10^3}{13,6}} \doteq 194,$$

kteří však nepřísluší žádnému známému prvku.

Dorazila pouze čtyři pěkná řešení. Naprosto perfektní řešení poslal *Petr Ryšavý*, a proto dostal zaslouženě bonusový bod.

*Lukáš Ledvina*

lukasl@fykos.mff.cuni.cz

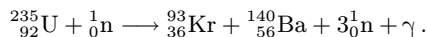
#### Úloha VI.4 ... **podkritické polokoule** (4 body; průměr 2,33; řešili 3 studenti)

Když Lukáše přestala bavit ionizace jednotlivých atomů, objednal si uranu víc. Doručili mu dvě přesné polokoule, každou o hmotnosti  $m$  ( $m_k/2 < m < m_k$ , kde  $m_k$  je kritická hmotnost). Lukáš je nastavil rovnými stranami k sobě a začal je přibližovat. V jaké vzdálenosti  $d$  mezi koulemi byl jeho pokus přerušen zažehnutím řetězové reakce?

*Přinesl v ranečku Pavel Motloch.*

Situace, kterou popisujeme v zadání, je sice kvůli protiteroristickým opatřením poměrně nepravděpodobná, ale má reálný podklad. Chcete-li totiž sestrojít atomovou pumu, musíte si na tento efekt dát pozor. Pokud je zbraň tzv. dělového typu a při odpálení selže roznětka, což má za následek jen pomalé přiblížení podkritických polokoulí k sobě, dojde při určité vzdálenosti k výbuchu a zbytek štěpného materiálu bude odhozen od sebe, aniž by v něm řetězová reakce proběhla podle původních požadavků.

Za štěpení uranu může např. následující reakce:



Přičemž produkty reakce nesou energii 193 MeV. To je v jaderných rozměrech poměrně dost (samotné neutrony mají asi 6 MeV). Na rozštěpení je totiž potřeba neutron, který je pomalý a tedy pravděpodobnost, se kterou některý z emitovaných elektronů spustí další reakci, je také velmi malá. Řetězovou reakcí pak rozumíme stav, kdy ze štěpení v jedné generaci neutronů vznikne minimálně stejný počet reakcí v generaci následující. Budeme uvažovat rovnost

$$n_r^2 = n_r^1 = p(kn_r - n_u), \quad (14)$$

kde  $n_r^1$  (resp.  $n_r^2$ ) je počet reakcí v první resp. druhé generaci,  $p$  pravděpodobnost záchytu neutronu do reakce,  $k$  počet neutronů vzniklých jednou reakcí a  $n_u$  počet uniklých neutronů.

Jak spočítáme počet reakcí? Na tom se podílí plno různých faktorů, zvláště tzv. účinný průřez, ale pro naše účely bude stačit říct, že bude přímo úměrný počtu jader.

$$n_r = a \frac{m}{M},$$

přičemž do konstanty  $a$  jsme zahrnuli vše, co ovlivňuje pravděpodobnost srážky a reakce.



Kolik neutronů uteče? To závisí především na povrchu tělesa, o které se zajímáme. Uvážíme-li, že z něj unikají rovnoměrně, můžeme psát

$$n_u = bS,$$

kde  $S$  je povrch tělesa a  $b$  je počet neutronů emitovaných z jednotky plochy. Tedy po dosazení do rovnice (14) dostaneme vztah pro kritickou hmotnost pro zapálení reakce

$$m_k = \frac{aM}{k - \frac{1}{\rho}} bS_k. \quad (15)$$

Jak to bude s polokoulemi? Z protilehlých rovinných částí jsou emitovány neutrony, které by, pokud by byly polokoule spojeny, prošly na druhou stranu a normálně by vstupovaly do reakcí. Jenže tím, jak mezi koulemi vytvoříme skulinu, jich část uteče. To způsobí změnu v rovnici (14).

$$n_r = p(kn_r - n_u - n_{uv}),$$

přidáme nový člen popisující neutrony unikající vzduchovou štěrbinou  $n_{uv}$ . Ten si pomocí rovnice (15) můžeme jednoduše vyjádřit. Teď již ale použijeme hodnoty ze zadání – kouli o hmotnosti  $2m$  a povrchu  $S$ .

$$n_{uv} = bS_k \left( \frac{m}{m_k} - \frac{S}{S_k} \right).$$

Budeme uvažovat, že ze vzduchové štěrbinou vylétají neutrony stejně jako z povrchu uranu, tedy  $n_{uv} = 2\pi rdb$ . Dosadíme do minulé rovnice (také využijeme toho, jaký je vzájemný vztah  $r$ ,  $S$  a  $m$ ) a dostaneme výsledek

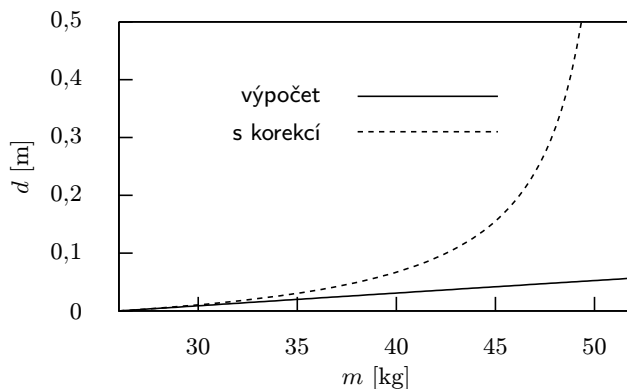
$$d = \left( 2\sqrt[3]{\frac{m}{m_k}} - 2^{2/3} \right) \sqrt[3]{\frac{3m}{\pi \rho}}.$$

Pro náš výsledek by měly platit dvě okrajové podmínky. Pro  $m/m_k = 1/2$  by mělo platit, že  $d = 0$ . To platí, při této hodnotě se závorka, tedy i celý výraz, vynuluje. Ovšem druhá podmínka splněna není, pro  $m/m_k = 1$  by měla stačit libovolná vzdálenost na zážeh reakce (tedy, že i nekonečně vzdálené polokoule vybuchnou<sup>10</sup>). Výsledek bychom mohli opravit např. do tohoto tvaru

$$d = \frac{1}{2 \left( 1 - \frac{m}{m_k} \right)} \left( 2\sqrt[3]{\frac{m}{m_k}} - 2^{2/3} \right) \sqrt[3]{\frac{3m}{\pi \rho}},$$

ovšem otázka je, nakolik tento výsledek odpovídá reálným hodnotám. Dosadíme-li správné materiálové konstanty ( $m_k \approx 52 \text{ kg}$ ,  $\rho \approx 19000 \text{ kg/m}^3$ ), dostaneme pro  $m/m_k = 3/4$  hodnotu okolo 10 cm, což je docela dobré. Jak si vede výsledek s korekcí oproti vypočtenému je zobrazeno v obrázku 4.

<sup>10)</sup> Zde schválně nediskutujeme jejich tvar. Kritická hmotnost pro polokouli vyjde větší než pro kouli.



Obr. 4. Porovnání obou metod

Řešení bohužel moc nedorazilo, o to víc si pochvalu zaslouží *Petr Ryšavý*, který došel ke správnému výsledku.

**Aleš Podolník**

ales@fykos.mff.cuni.cz

#### Úloha VI. P ... *toro toro toro* (3 body; průměr 1,67; řešilo 6 studentů)

*Japonský pilot za druhé světové války dostal ve výšce 5 km nad zemí žízeň. Zjistil však, že mu dali jen láhve s limonádou. Co má dělat? Z imperiálních archivů vynesla Adéla.*

Zamysleme se nad tím, kde je jádro problému. První problém je ve ve výšce. V pěti tisících metrech nad mořem už je pořádná zima (cca  $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) a mohli bychom namítnout, že pilot za druhé světové války neměl bůhvíjakou techniku a za chvíli by umrzl, popřípadě by se nevyrovnal s výškovou nemocí (na takovou výšku si horolezci zvykají i několik dní). Teplota napovídá také tomu, že by mu jakékoliv pití zmrzlo. Ale podívejme se na hypotetický případ (v reálu by pilot letadla v této nadmořské výšce už skutečně musel mít nějaký přístroj na podporu dýchání), kdy pilot přežije takovou výšku, řídký vzduch a nepotřebuje kabinu, co umí vyrovnat tlaky, která je dnes přítomna ve všech dopravních letadlech. V tu chvíli přijde na řadu ona limonáda.

Proč by měl pilot hořekovat nad limonádou? Pomiňme případ, že mu nechutná. Problém limonády tkví v přítomnosti bublinek, tedy oxidu uhličitého. Většina již okusila, co se stane, když neopatrně otevřete limonádu. Vybublá. Důvody pro to mohou být dva:

- S limonádou se zatřepe.
- Limonáda zůstane ve velmi horkém prostředí (auto za horkého letního dne, podle Mythbusters limonáda může v takovém případě dokonce sama vybuchnout).

Proč se tomu tak děje? Když se vyrábí soda, je do ní pod velkým tlakem vpraven oxid uhličitý, v tekutině se ho v tomto případě rozpustí mnohem více, než za normálního atmosférického tlaku. Zatřesení limonádou způsobí, že se bublinky usadí na stěnách lahve a po otevření nadšeně vyletí i s tekutinou (Boylův zákon, tlak se bude vyrovnávat a poroste objem bublinek). Trik pro otevření takové limonády je vskutku jednoduchý, stačí prsty poklepat na stěny, aby se bublinky usadily nahoře. Toto chování je pro ně poměrně normální, neboť plyn je lehčí než tekutina a pokludně unikne z lahve a nevytlačí limonádu.

Jak je to s teplým prostředím? Napadlo vás, proč se sekt chladí než se otevře? Zde přijde ke slovu Henryho zákon, který nám poskytne hned dvě informace relevantní pro „limonádový

problém“. Zákon říká: *s rostoucím tlakem roste rozpustnost plynů v kapalinách*. Tedy s rostoucí teplotou tato vlastnost klesá. Proto pokud v autě necháme plechovku s limonádou, plyn z ní bude vytlačován, až to plechovka nevydrží a praskne,<sup>11</sup> kromě toho zde přijde ke slovu Charlesův zákon, který říká, že zahřátý plyn se rozpíná.

V našem případě nás ale zajímá spíše případ s tlakem. Jak známo, s nadmořskou výškou řídne vzduch a klesá tlak. Tedy rozpustnost plynu v kapalině klesá. Předpokládejme, že zde na zemi nám rychle vybublá limonáda při teplotě 20 °C. Pak vysoko v oblacích musí při stejné teplotě zákonitě také vybublat, a to ještě rychleji! K odhadu rychlosti použijeme Poiseuilleho rovnici, která aproximativně rychlost úniku limonády může popsat

$$v = \frac{\Delta p r^4 \pi}{8L\eta},$$

kde  $r$  je průměr trubice (hrdla lahve),  $L$  její délka a  $\eta$  je viskozita. Vidíme, že rychlost přímo úměrně závisí na rozdílu tlaků, tedy je-li rozdíl tlaků vyšší, je únik limonády z lahve vyšší. Ve míněné pětakilometrové výšce je tlak o cca 50 % menší než na hladině moře,<sup>12</sup> tedy limonáda unikne dvakrát rychleji.

Jak docílit toho, aby nám nevybublala? Opět se zamyslíme nad Henryho zákonem, pokud klesne teplota limonády, zvýší se rozpustnost plynu v ní a dle Charlesova zákona budou i bublinky oxidu uhličitého menší. Jediná šance, jak se rozumně napít, je tedy limonádu vychladit, ostatně jako již zmíněný sekt.

*Jana Poledniková*

*janap@fykos.mff.cuni.cz*

### Úloha VI. E ... kapička (8 bodů; průměr 5,67; řešilo 6 studentů)

*V této úloze budeme zkoumat kapičku vody jakožto optickou čočku. Naneste-li kapičku vody na nějakou tenkou skleněnou nebo průhlednou umělohmotnou destičku, dostanete improvizovanou lupu – spojnou čočku. Zkoumejte ohniskovou vzdálenost a maximální zvětšení „kapkové lupy“ v závislosti na jejích rozměrech a porovnejte s teorií. Všimněte si různých zobrazovacích vad kapky. Speciálně prozkoumejte, co se děje, když naší lupu přiblížíme např. k barevnému displeji počítače.*

*Nad zmoklým mobilem meditoval Marek Scholz.*

Kapičky jsme nanášeli na podložní sklíčko pro mikroskopování, a to injekční stříkačkou s jehlou. Menší kapičky byly vytvořeny nanesením z hrotu špejle. Zdroj světla v nekonečnu libovolná spojná čočka zobrazí do svého ohniska. Vzdálenost kapky a obrazu vytvořeného na stínítku odpovídá obrazové ohniskové vzdálenosti  $f$  kapky. Za zdroj v nekonečnu lze považovat např. Slunce. Nám však stačila obyčejná žárovka ve výšce 2 metry, neboť i tato vzdálenost je mnohem větší, než pozorované obrazové vzdálenosti (vzpomeň na zobrazovací rovnici).

Rozměry kapek byly určeny z digitální fotografie. Kapky nanesené na okraj podložního sklíčka byly nejdříve vyfoceny svrchu, přičemž na sklíčko vedle kapek byl přilepen kousek milimetrového papíru. Rovněž bylo sklíčko s kapkami vyfoceno z boku, kde nám jako srovnávací míra poslouží tloušťka skla 1 mm. V prohlížeči obrázků potom byly odměřeny rozměry kapek – průměr  $d$  a výška  $h$ . Kapku předpokládáme přibližně ve tvaru kulového vrchlíku, což fotografie potvrzují. Ohnisková vzdálenost byla odměřena šuplerou následujícím způsobem. Na jednu čelist šuplery jsme lepidlem připevnili podložní sklíčko, na druhou čelist pak stínítko –

<sup>11)</sup> Podívejte se např. na <http://mythbustersresults.com>.

<sup>12)</sup> Zdroj [http://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere\\_of\\_Earth](http://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth).

čtvereček tuhé čtvrtky. Šupleru jsme posouvali dokud nebylo na čtvrtce co nejlépe zaostřeno vlákno žárovky, a tato vzdálenost byla zaznamenána. Je obtížné rozhodnout, kdy je obraz nejostřejší, a proto bylo trochu zbytečné měřit vzdálenosti šuplerou. Bohatě bychom si vystačili jednoduchým posouváním sklíčka po pravítku či trojúhelníku. Při měření je dobré neotálet, protože se kapka vypařuje.

Poloměr křivosti  $R$  pak vypočteme pomocí Pythagorovy věty, a sice

$$R = \frac{\frac{1}{4}d^2 + h^2}{2h}. \quad (16)$$

Takzvaná rovnice výrobců čoček<sup>13</sup> umožňuje pomocí poloměrů křivosti  $R_1, R_2$  ohraničujících kulových ploch určit ohniskovou vzdálenost čočky ve vzduchu,

$$\frac{1}{f} = \frac{(n-1)^2 h + n(R_2 - R_1)}{nR_1 R_2}, \quad (17)$$

kde  $n$  značí index lomu materiálu čočky. V našem případě je jedna stěna kapky rovinná, tudíž  $R_2 = \infty$ . Potom se rovnice (17) zjednodušuje až na

$$f = \frac{R}{n-1}. \quad (18)$$

Ještě si musíme uvědomit, že světlo prochází skrz sklíčko indexu lomu  $n_s$  a tím se posouvá obraz o  $b(1 - 1/n_s) \approx 0,3$  mm, a toto posunutí od naměřených vzdáleností odečíst.

Výsledky měření jsou uvedeny v tabulce a v grafu. Z naměřených rozměrů je vypočten podle (16) poloměr křivosti kapky. S použitím indexu lomu vody  $n = 1,33$  je dle (18) určena teoretická předpověď ohniskové vzdálenosti, kterou porovnáváme s měřením (v tabulce značeno po řadě indexy  $t_{eo}$  a  $e_{xp}$ ). Chyba teoretické předpovědi vychází z odhadu nepřesnosti určení  $d$  a  $h$ , které odhadujeme po řadě na 0,4 mm a 0,1 mm, nepřesnost měření ohniskové vzdálenosti je odhadnuta na 0,5 mm.

Je patrné, že větší kapky mají menší poloměr křivosti a větší ohniskovou vzdálenost, což vede k menšímu zvětšení. Naměřené ohniskové vzdálenosti jsou systematicky menší než ty vypočtené, ovšem v rámci chyby se shodují.

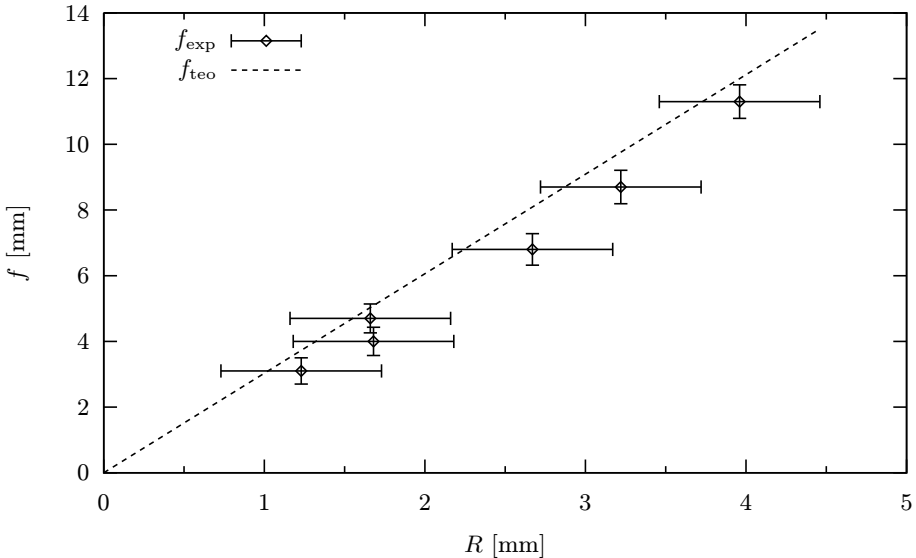
Tabulka výsledků měření

číslo měření	$d$ [mm]	$h$ [mm]	$R$ [mm]	$f_{teo}$ [mm]	$f_{exp}$ [mm]
1	2,04	0,55	$1,2 \pm 0,4$	$3,7 \pm 1,2$	$3,1 \pm 0,5$
2	2,73	0,70	$1,7 \pm 0,4$	$5,1 \pm 1,3$	$4,0 \pm 0,5$
3	2,63	0,65	$1,7 \pm 0,4$	$5,0 \pm 1,3$	$4,7 \pm 0,5$
4	4,04	0,92	$2,7 \pm 0,5$	$8,1 \pm 1,5$	$6,8 \pm 0,5$
5	4,70	1,02	$3,2 \pm 0,5$	$9,8 \pm 1,6$	$8,7 \pm 0,5$
6	5,97	1,36	$4,0 \pm 0,5$	$12,0 \pm 1,5$	$11,3 \pm 0,5$

Zvětšení kapky jakožto lupy jsme zkoušeli určit pozorováním dvou blízkých měřítek, přičemž jedno pozorujeme přes lupu a druhé jen okem. Pro pozorování byla použita kapka číslo 6. Maximální prakticky použitelné zvětšení bylo určeno jako čtyřnásobné, přestože teoreticky by

<sup>13)</sup> Petr Malý: Optika, Karolinum, 2008

mohlo dosahovat až hodnoty  $d/f$ , kde  $d = 25$  cm je konvenční zraková vzdálenost. Při snaze o další zvětšení již začaly dominovat zobrazovací vady a obraz se stal nečitelným.



Obr. 5. Výsledný graf závislosti ohniskové vzdálenosti na poloměru kapičky

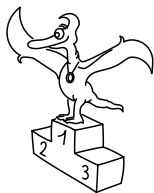
Kulatý povrch čočky, byť by byl dokonalý, nezajistí ostré zobrazení, protože okrajovým částem čočky odpovídá jiná ohnisková vzdálenost, než jejímu středu. Tím méně bude obraz ostrý pro naši kapku. Zvláště u větších kapek se projeví zploštění v důsledku vlastní tíže, což vede ještě k většímu rozdílu ohniskových vzdáleností středu a okrajů. Rozdílné poloměry křivosti na různých místech kapky a její nepravidelný tvar se projeví tím, že předmět, např. Slunce nebo vlákno žárovky, nelze zcela zaostřit, kolem nejsvětější skvrny je ještě světlý „obláček“ a obraz jeví různé deformity. Deformaci obrazu lze nejlépe sledovat pozorováním pravidelného rastru skrz kapku, např. milimetrového papíru. Okrajové části kapky jsou zpravidla zakřivenější a více zvětšují, což se projeví rozestupováním linek rastru při okraji kapky. Hovoříme potom o poduškovitém zkreslení. Zobrazujeme-li na stínítku Slunce, které svítí pod určitým úhlem k optické ose kapky, obraz připomíná tvarem kometu a hovoříme pak o vadě s názvem koma. Barevná vada se u kapkové čočky tolik neprojeví, protože dříve jmenované vady jsou daleko silnější.

Kapíčka na barevném displeji notebooku nebo mobilního telefonu umožňuje pozorovat barevné složení pixelu. Vedle sebe jsou červená, zelená a modrá políčka. Různých barev je dosaženo změnou intenzity jednotlivých barevných políček. V bílém pixelu svítí všechna barevná políčka, v žlutém pixelu pouze červená a zelená, ve fialovém jen červená a modrá. Zvědavci si jistě všimli rozdílného rozložení barevných elementů v LCD a CRT monitoru počítače.

Došlá řešení nás potěšila svou vysokou úrovní a nápaditostí, vámi získané výsledky byly pěkné. *Domínika Kalasová* dokonce experimentální úlohu pojednala jako vědeckou práci.

**Marek Scholz**

mara@fykos.mff.cuni.cz



## Pořadí řešitelů po VI. sérii



### Závěrečné pořadí

#### Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
		4	3	4	4	3	8	0	26	100	185
1. <i>Kristýna Kohoutová</i>	G, Žamberk	2	-	-	-	-	5	-	7	66	89
2. <i>Filip Murár</i>	G, Masarykovo nám., Třebíč	-	3	-	-	-	-	-	3	86	44
3. <i>Lubomír Grund</i>	G Zábřeh	4	3	-	1	-	-	-	8	74	37
4. <i>Lukáš Timko</i>	G P. de Coubertina, Tábor	2	3	-	2	-	-	-	7	63	27
5. <i>Vladan Glončák</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	-	-	-	-	-	-	3	42	25
6. <i>Klaudia Mráziková</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	-	-	-	-	-	-	2	51	20
7. <i>Vladimír Macko</i>	G Ľ. Štúra, Zvolen	1	-	2	-	-	-	-	3	47	17
8. <i>Samuel Puček</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	-	-	0	21	12
9. <i>Ondřej Toloch</i>	Jazykové G P. Tigrida, Ostrava	2	1	-	-	-	-	-	3	43	3

#### Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
		4	3	4	4	3	8	0	26	100	185
1. <i>Jakub Vošmera</i>	G Matyáše Lercha, Brno	-	-	-	-	-	-	-	0	82	112
2. <i>Peter Kosec</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	-	-	-	-	-	4	-	4	72	68
3. <i>Patrik Švančara</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	4	-	-	-	1	3	-	8	60	52
4. <i>Gabija Maršalkaite</i>		3	1	-	-	-	-	-	4	59	29
5. <i>Kristýna Nešporová</i>	G, Boskovice	2	-	-	-	-	-	-	2	66	23
6. <i>Samuel Havadej</i>	G J. A. Raymana, Prešov	-	-	-	-	-	-	-	0	45	15
7. <i>Jan Bydžovský</i>	G J. Heyrovského, Praha	-	-	-	-	-	-	-	0	69	9
8.-9. <i>Lucia Filová</i>	Hotelová akadémia, Brezno	-	-	-	-	-	-	-	0	26	7
<i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	0	88	7
10.-11. <i>Jan Česal</i>	SPŠ Otrokovice	-	-	-	-	-	-	-	0	38	3
<i>Martin Pitřík</i>	SPŠ elektrotechnická, Havířov	-	-	-	-	-	-	-	0	27	3

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	3	8	0	26	100	185
1. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	3	3	4	–	1	7	–	18	84	136
2. <i>Domínika Kalasová</i>	G, Boskovice	3	2	3	–	1	8	–	17	59	82
3. <i>Anna Chejnovská</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	72	54
4. <i>Martin Bucháček</i>	G Luďka Pika, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	0	88	49
5. <i>Stefan Badza</i>	Mat. gymnázium, Bělehrad	–	–	–	–	–	–	–	0	51	38
6. <i>Ondřej Maslikiewicz</i>	SPŠ, Hronov	2	–	–	–	3	–	–	5	52	37
7. <i>David Krška</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	0	68	28
8. <i>Kateřina Jiráková</i>	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	0	78	25
9. <i>Jiří Nárožný</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	0	88	21
10. <i>Zoltan Jehn</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	80	20
11. <i>Barbora Drozdová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	49	18
12. <i>Jiří Jelínek</i>	G, Blansko	–	–	–	–	–	–	–	0	70	16
13. <i>Stefan Stanojević</i>	Mat. gymnázium, Bělehrad	–	–	–	–	–	–	–	0	48	10
14.–15. <i>Mustafa Cevizci</i>	Yamanlar College, Izmir	–	–	–	–	–	–	–	0	47	8
<i>Jarier Wannous</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	67	8
16. <i>Jiří Táborský</i>	G, Palackého 191, Ml. Boleslav	–	–	–	–	–	–	–	0	41	7
17. <i>Zuzana Bogárová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	3	4	4	3	8	0	26	100	185
1. <i>Petr Ryšavý</i>	G J. Heyrovského, Praha	4	2	5	4	2	7	–	24	79	141
2. <i>Jakub Klemsa</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	4	3	–	–	2	–	–	9	76	87
3. <i>Štěpán Poláček</i>	G F. Palackého, Val. Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	0	81	54
4.–5. <i>Zdeněk Novák</i>	G, Česká Kamenice	–	–	–	–	–	–	–	0	63	30
<i>Lada Peksová</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	77	30
6.–7. <i>Ján Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	74	29
<i>Zuzana Dočekalová</i>	G, F. Hajdy, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	0	83	29
8. <i>Karel Král</i>	G, Most	–	–	–	–	–	–	–	0	71	22
9. <i>Pavel Novotný</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	0	56	19
10.–11. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	–	–	–	–	–	–	–	0	76	16
<i>Michal Zanáška</i>	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	0	100	16
12. <i>Jana Bazová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	–	–	–	–	0	56	14
13.–14. <i>Petr Cagaš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	0	65	13
<i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	0	87	13
15. <i>Jáchym Sýkora</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	92	11
16. <i>Jan Hoďic</i>	G J. Ressela, Chrudim	–	–	–	–	–	–	–	0	48	10
17. <i>Nurullah Karakoc</i>	Yamanlar College, Izmir	–	–	–	–	–	–	–	0	31	9
18. <i>Kristýna Onderková</i>	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	50	4
19. <i>Barbora Hanáková</i>		–	–	–	–	–	–	–	0	100	3
20. <i>Petra Vahalová</i>	G, Plasy	–	–	–	–	–	–	–	0	50	2
21.–22. <i>Martin Bachratý</i>	G Velká okružná, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	0	25	1
<i>Michal Husek</i>	G, Bučovice	–	–	–	–	–	–	–	0	13	1

*Pošlete nám pohlednici z prázdnin! :-)*



**FYKOS**  
**UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta**  
**Ústav teoretické fyziky**  
**V Holešovičkách 2**  
**180 00 Praha 8**

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>  
e-mail pro řešení: [fykos-solutions@mff.cuni.cz](mailto:fykos-solutions@mff.cuni.cz)  
e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.