

Úvodem

Milí fykosáci,

jak jste si již jistě všimli, je tu poslední série letošního ročníku, máte tedy poslední možnost zamíchat s pořadím výsledkových listin, i když vítězem nejspíše zůstane Student Pilný.

Hodně dobrých nápadů a toaletního papíru přeji

Organizátoři



Zadání VI. série



Termín uploadu: 20. 5. 2014 20.00

Termín odeslání: 19. 5. 2014

Úloha VI.1 ... antijádro

2 body

Máme dvě homogenní nerotující planety tvaru dokonalých koulí s vnějšími poloměry R_Z . První z nich je dokonalá koule o hustotě ρ a na jejím povrchu je gravitační zrychlení a_g . Druhá je dutá do poloviny jejího poloměru a až pak je plná.

- Pokud by obě planety byly ze stejného homogenního materiálu, na povrchu které planety bude větší gravitační zrychlení a jaký bude poměr mezi hodnotami gravitačního zrychlení na obou planetách?
- Pokud by i na povrchu druhé planety bylo gravitační zrychlení a_g , jaká by musela být hustota druhé planety?

Úloha VI.2 ... go west

2 body

Již před více než sto lety měření geodetů potvrdila, že když plujeme lodí směrem na západ, ukazují gravimetry větší hodnoty tíhového zrychlení než při cestě na východ. Určete, jaký rozdíl naměříme na rovníku, jestliže nejprve provedeme měření v klidu a poté za konstantní rychlosti 20 uzlů v západním směru.

Úloha VI.3 ... kule a šlupka

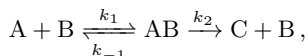
4 body

Máme měděnou plnou kouli a měděnou tenkou kulovou slupku (tak tenkou, že můžete zanedbat její tloušťku). Obě mají při pokojové teplotě stejný poloměr. Jak se bude jejich poloměr měnit, když je začneme ohřívat? (Zapište závislost poloměru na teplotě a okomentujte ji.) U měděné slupky uvažujte, že má v sobě malé otvory, které vyrovnávají vnitřní a vnější tlak vzduchu.

Úloha VI.4 ... nenasytný pavouk

4 body

V tmavém koutě číhá pavouk, který právě polapil mouchu a postupně ji tráví za předpokladu, že trávení probíhá podle rovnice



kde A je *muší substrát*, B jsou trávící látky (neustále v dostatku) a C je produkt trávení. AB označuje nestabilní meziproduct. Reakce je prvního řádu, tzn. rychlost je přímo úměrná koncentraci dané látky. Určete, za jak dlouho se pavouk vydá opět na lov, jestliže mu interoreceptory oznámí pocit hladu při poklesu koncentrace substrátu na 10 % původní hodnoty.

Nápověda Použijte aproximaci stacionárního stavu meziproductu.

Úloha VI.5 ... toaleťák

4 body

Roli s papírem uchytíme do ložiska (bez tření) a necháme odmotávat konec papíru (zanedbáme lepení vrstev na sebe, tření v ložisku a hmotnost ložiska). Jakou úhlovou rychlostí se bude otáčet rulička potom, co se odmotá všechnen papír? Známe poloměr a hmotnost ruličky, délkovou hustotu papíru, jeho celkovou hmotnost a délku. Uvažujte, že se papír bude odmotávat do nekonečné hloubky.

Bonus Uvažujte, že papír dopadne na zem dříve, než se celý odmotá.

Úloha VI.P ... světlo přesně podle norem

5 bodů

Navrhnete rozmístění světel nad stolem tak, abyste dodrželi normy pro osvětlení. K dispozici máte dostatečné množství kompaktních zářivek (lidově úsporných žárovek) se světelným tokem $P = 1400$ lm. Normy říkají, že pro běžné pracovní úkony má být osvětlení pracovní plochy $E = 300$ lx. Zářivky můžete umístit do libovolných pozic na strop ve výšce $H = 2$ m nad pracovní plochu. Pro jednoduchost uvažujte čtvercovou pracovní plochu o straně $a = 1$ m a zářivku považujte za bodový izotropní zdroj záření. Odraz a rozptyl světla zanedbejte.

Úloha VI.E ... želatinová rychlost světla

8 bodů

Určete rychlost světla v průhledném želatinovém dortu, který sami připravíte. Nezapomeňte popsat jeho složení.

Nápověda Sežeňte si na to třeba laser nebo mikrovlnku.

Úloha VI.S ... spektrální

6 bodů

1. Jak bude vypadat spektrum otevřené struny na hmotnostní hladině $M^2 = 2/\alpha'$? Kolik máme možných stavů struny na této hladině?
2. Pokud bychom uvažovali interakci tachyonu s jinými strunami, zjistili bychom, že ho můžeme popsat přibližně jako částici pohybující se v nějakém potenciálu. Uvažujme model struny, která je upevněna na nestabilní D-bráně. Odpovídající potenciál tachyonu je určen vztahem

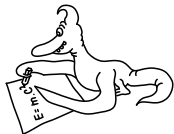
$$V(\varphi) = \frac{1}{3\alpha'} \frac{1}{2\varphi_0} (\varphi - \varphi_0)^2 \left(\varphi + \frac{1}{2}\varphi_0 \right),$$

kde α' a φ_0 jsou kladné konstanty. Roznásobte závorky a určete hmotnost tachyonu jako dvojnásobek koeficientu stojícího před φ^2 . Najděte minimum potenciálu $\tilde{\varphi}$ a ukažte, že provedeme-li v potenciálu záměnu $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} + \varphi$ (tj. rozvíjíme teorii kolem minima tachyonového potenciálu), dostaneme po roznásobení a odečtení koeficientu před φ^2 kladnou hmotnost tachyonu. Záporná hmotnost tedy ukazuje na nestabilitu D-brány a ve stabilní konfiguraci, kdy D-brána vymizí (minimum potenciálu), již hmotnost není záporná.

3. Teorie superstrun umožňuje popis fermionů. Pro jejich popis je však potřeba antikomutujících veličin. Pro ty se zavede namísto komutátoru antikomutátor vztahem

$$\{A, B\} = AB + BA.$$

Najděte takové dvě 2×2 matice a a b , které splňují $\{a, a\} = 1$, $\{b, b\} = 1$ a $\{a, b\} = 0$.



Řešení V. série

Úloha V.1 ... natlakovaná žirafa

2 body; průměr 1,85; řešilo 59 studentů

Porovnejte krevní tlak v hlavě dospělé žirafy a dospělého člověka. Systolický tlak na úrovni srdce je u člověka $p_{h1} = 120$ mmHg a u žirafy $p_{g1} = 280$ mmHg, hustota krve obou živočichů je $\rho = 1050$ kg·m³. Uvažujte pouze případ, kdy člověk i žirafa stojí. Rychlost proudění krve v těle považujte za konstantní.

Mírek přemýšlel, proč žirafa neomdlí.

Krevní soustava savců je velmi hustě rozvětvená, nicméně pro zjednodušení budeme předpokládat, že celým tělem člověka/žirafy vede pouze jedna velká céva. Na základě Bernoulliho rovnice by pro tlak u srdce a v hlavě měl platit vztah¹

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1 \rho g = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2 \rho g,$$

kde indexem 1 značíme veličiny příslušející srdci a indexem 2 značíme veličiny příslušející hlavě. Pro rozdíl tlaků mezi srdcem a hlavou máme díky předpokladu o konstantní velikosti rychlosti proudění (aneb $v_1 = v_2$)

$$p_1 - p_2 = \Delta p = (h_2 - h_1) \rho g = \Delta h \rho g.$$

Nyní potřebujeme odhadnout Δh . Výška dospělého muže je v průměru 180 cm, srdce je zhruba ve výšce 130 cm, takže $\Delta h_h = 50$ cm. Žiraf je několik různých druhů dosahujících výšek od 4 m do 6 m, vezmeme průměrnou hodnotu 5 m; srdce žirafy je zhruba v polovině její výšky, takže $\Delta h_g = 250$ cm. Ze znalosti hodnot $p_h = 120$ mmHg $\doteq 16\,000$ Pa, $p_g = 280$ mmHg $\doteq 37\,300$ Pa ze zadání nyní můžeme určit tlak v hlavě člověka

$$p_{h,2} = p_{h,1} - \Delta h_h \rho g = 10\,850 \text{ Pa}$$

a tlak v hlavě žirafy

$$p_{g,2} = p_{g,1} - \Delta h_g \rho g = 11\,700 \text{ Pa}.$$

Vzhledem k tomu, že jsme Δh pouze hrubě odhadovali, můžeme obě hodnoty $p_{h,2}$, $p_{g,2}$ považovat za přibližně stejné (liší se o méně než 10 %). To znamená, že srdeční tlak žirafy dobře kompenzuje výšku jejího krku. Můžete si pro zajímavost sami zkusit dopočítat, zda to platí i pro jiné živočichy.

Veronika Dočkalová
verca@fykos.cz

¹Ve skutečnosti bychom ještě měli zohlednit viskozitu krve, jejíž účinky jsou popsány Poiseuillovým zákonem.

Úloha V.2 . . . uranová hvězda

2 body; průměr 2,02; řešilo 49 studentů

Představme si, že ve hvězdách neprobíhá termojaderná fúze, nýbrž štěpná jaderná reakce. Odhadněte, jak dlouho by taková hvězda dokázala vyzařovat, jestliže na počátku svého životního cyklu sestává pouze z uranu ^{235}U , její hmotnost i zářivý výkon jsou přibližně konstantní a odpovídají současným hodnotám pro Slunce. *Mirek si pročítal nové učebnice.*

Uran ^{235}U je nuklid, který podléhá štěpné reakci, přičemž energie, která se uvolní štěpením jednoho atomu ^{235}U , činí asi² $E_a = 200\text{ MeV}$. Produkty této reakce jsou sice také nestabilní, ale jejich energetický příspěvek by byl malý a lze jej zanedbat. Hmotnost hvězdy M odpovídá hmotnosti Slunce, takže má hmotnost³ $M = 2,0 \cdot 10^{30}\text{ kg}$. Pokud tuto hmotnost vydělíme hmotností jednoho atomu ^{235}U , která je $m_a = 235m_u = 3,9 \cdot 10^{-25}\text{ kg}$, kde m_u je atomová hmotnostní konstanta, pak zjistíme, kolik atomů ^{235}U hvězdu tvoří, a tím, že celková energie E , která by se z takto hmotné hvězdy mohla štěpením uranu uvolnit, je

$$E = \frac{M}{m_a} E_a = 1,6 \cdot 10^{44}\text{ J}.$$

Předpokládáme-li, že má hvězda přibližně konstantní zářivý výkon $L = 3,8 \cdot 10^{26}\text{ W}$ odpovídající Slunci,⁴ pak můžeme určit dobu života hvězdy, tedy dobu, po kterou bude vyzařovat, jako podíl celkové energie, která se uvolní štěpením uranu, a jejího zářivého výkonu.

$$t = \frac{E}{L} = 1,4 \cdot 10^{10}\text{ let}.$$

Naše hypotetická uranová hvězda by zářila asi 14 miliard let, což je doba řádově srovnatelná se skutečnou délkou života hvězd (například pro Slunce je odhadovaná délka života kolem 10 miliard let). Nebylo zjištěno, že by existovaly hvězdy, ve kterých by probíhaly štěpné reakce, a nepravděpodobnost tohoto jevu podporuje extrémní vzácnost výskytu prvků těžších než železo ve hvězdách (fúze prvků může probíhat při výbuchu supernovy, a tyto prvky se pak mohou dostat do nové hvězdy při jejím tvoření). Asi nejzásadnějším problémem takovéto konkrétní uranové hvězdy by bylo, že množství uranu v ní by bylo nadkritické, takže by velice rychle vybuchla.

Kristína Nešporová
kiki@fykos.cz

Úloha V.3 . . . ta jemná nádoba

3 body; průměr 2,65; řešilo 34 studentů

Mějme válcovou nádobu, jež zaujímá objem $V = 1\text{ l}$. Nádoba je uzavřena vzduchotěsným pohyblivým pístem, který má zanedbatelnou hmotnost M . Dále víme, že nádoba je vodorovnými přepážkami rozdělena na n komor a v i -té komoře (číslováno odshora) je $2^i a$ částic, kde a je blíže neurčená konstanta. Přepážky nejsou k nádobě připevněny, přesto nedovolují, aby si komory, v nichž je ideální plyn, vyměňovaly teplo nebo částice. Celý systém je v rovnováze. Poté zdvojnásobíme hmotnost pístu a počkáme, až se náš systém opět ustaví v rovnováze. Jak se změní objem, který plyn v nádobě zaujímá? Atmosferický tlak neuvažujte.

Náry pod tlakem vymyslel úlohu o tlaku.

²<http://cs.wikipedia.org/wiki/Uran-235>

³<http://cs.wikipedia.org/wiki/Slunce>

⁴Tato informace v zadání nám ulehčuje práci, neboť s určitou aproximací bychom měli být schopni ze známých údajů zářivý výkon uranové hvězdy dopočítat.

Hned ze začátku musíme podotknout, že v zadání není specifikován jistý „detail“, který významně ovlivňuje správné řešení. Tímto prvkem je rychlost procesu přechodu mezi ustálenými stavy v nádobě. Jinými slovy, záleží na tom, jestli na píst ten druhý jen tak laxním způsobem upustíme, nebo naopak „šetrně“ položíme. V řeči zvyšování hmotnosti pístu pak mluvíme opět o rychlosti nárůstu jeho hmotnosti. První z případů lépe odráží praxi, avšak jeho kvantitativní rozbor nespadá do rámce středoškolské ani FYKOSí termodynamiky. Jde totiž o čistě dynamický problém, na nějž nejsou kladeny požadavky kvazistaticity, které nám třeba umožní definovat pojem teplota. Problematikou „rychlých“ procesů se zabývá nerovnovážná termodynamika, která by nám také odpověděla, že za těchto okolností k žádné rovnováze nedojde, píst bude okolo své rovnovážné polohy oscilovat. Intuitivně lze tuto skutečnost nahlédnout, když si rozmyslíme, že při vyrovnání tlaků bude mít píst nenulovou pohybovou energii, kterou ztratí až po opuštění tohoto rovnovážného stavu. Těm z vás, kteří si zadání upřesnili podle svého, a dle svého upřesnění úlohu i správně vyřešili, jsme udělovali plný počet bodů.

V dalším se již budeme zabírat jen kvazistatickou variantou, kdy se pístu „dostatečně pomalu“ zvyšuje hmotnost. Tím „dostatečně pomalu“ myslíme tak rychle, aby tlak pístem vyvíjený byl vždy roven tlaku plynu v horní komoře. Jedině tímto pomalým přechodem zajistíme, že vždy budeme přecházet mezi rovnovážnými stavy, bude nám po celý děj platit klasická stavová rovnice a podobně.

Takto formulovaná úloha tedy spadá do kategorie vyšetřování rovnovážných stavů v termodynamice. V tomto případě se jedná o rovnováhu mechanickou, kterou známe nejlépe z mechaniky. Pod mechanickou rovnováhou v termodynamice rozumíme silové vyrovnání působící na každou fyzickou, ale i imaginární plošku uvnitř našeho systému. To jinými slovy vynucuje vyrovnání tlaků. Přirozené je se ptáti, na jaké rovnovážné hodnotě se náš tlak v různých komorách ustálí. Můžeme to nějak určit rovnou? Není těžké si rozmyslet, že argument rovnováhy bude platit mezi každými dvěma sousedními komorami, což nás vede k závěru, že při dosažení rovnováhy bude nastolena rovnost tlaků napříč celou nádobou a hodnota tohoto tlaku bude rovna tlaku, který určují vnější podmínky – okamžitá hmotnost pístu. Při vyšetřování změny objemu se tak můžeme omezit na zkoumání změny objemu v jedné komoře, protože, jak jsme si rozmysleli výše, podmínky jsou v případě každé komory stejné. Pro výchozí a koncový stav tlaku v každé z komor tak můžeme s využitím stavové rovnice ideálního plynu psát

$$\frac{gM}{S} = p_0 = \frac{NkT_0}{V_0} = \frac{NkT_0}{Sd_0}, \quad (1)$$

kde 0 označuje počáteční, 1 koncový stav, p tlak v komoře, g tíhové zrychlení, M počáteční hmotnost pístu, S plochu pístu, N počet částic v komoře, k Boltzmannovu konstantu, T teplotu plynu, d výšku pístu. Podobně pro koncový rovnovážný stav platí

$$\frac{2gM}{S} = 2p_0 = \frac{NkT_1}{V_1} = \frac{NkT_1}{Sd_1}. \quad (2)$$

Jak ale souvisí změna teploty se změnou výšky komory? Lze to určit? Vraťme se zpět k otázce podstaty procesu, který se realizuje. Už víme, že děj probíhá za neustálé vyrovnanosti tlaku pístu s tlakem v komoře, navíc při ději do komory nepřichází žádné teplo. Takový děj je znám jako děj adiabatický. Přemostění mezi těmito dvěma rovnovážnými stavy nám podá energetická bilance procesu. K tomu potřebujeme kalorimetrickou rovnici pro ideální plyn a vztah pro práci při adiabatickém ději

$$\Delta U = \frac{f}{2} Nk(T_1 - T_0) = - \int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0 V_0^{1+2/f}}{V^{1+2/f}} dV = p_0 V_0^{1+2/f} \left[\frac{f}{2} V^{-2/f} \right]_{Sd_0}^{Sd_1},$$

kde jsme pro obecnost předpokládali f stupňů volnosti plynových částic a rovnou dosadili za Poissonovu konstantu $\kappa = (f + 2)/f$. Drobné úpravy s dosazením za p_0 a V_0 ze stavové rovnice vedou na vedou na

$$\frac{f}{2}(T_1 - T_0) = \frac{f}{2}T_0 \left[\left(\frac{d_1}{d_0} \right)^{-2/f} - 1 \right]. \quad (3)$$

Abychom mohli ze vztahu vyloučit teploty, využijeme sadu rovnic (1) a (2), z níž přímočaře plyne

$$2 \frac{d_1}{d_0} = \frac{T_1}{T_0}$$

a po dosazení do (3) máme

$$\frac{f}{2} \left(2 \frac{d_1}{d_0} - 1 \right) = \frac{f}{2} \left[\left(\frac{d_1}{d_0} \right)^{-2/f} - 1 \right].$$

Řešení této rovnice pro neznámou d_1/d_0 dává

$$\frac{d_1}{d_0} = 2^{-f/(f+2)} = 2^{-1/\kappa}.$$

Tím jsme získali poměr výšek komor na konci ku na začátku děje. K dobrání se konečné odpovědi na otázku zadání již vedou dvě jednoduché úvahy. Uvědomíme si, že byl spočten kompresní poměr pro libovolnou komoru, takže rovnou známe kompresní poměr pro celou nádobu, a navíc, protože se jedná o válcovou nádobu, je poměr výšek pístu nade dnem přímo roven poměru objemů plynu, který je pístem do nádoby uzavřen. Řešení naší slovní úlohy už postrádá pouze slovní odpověď. Po opatrném zdvojnásobení hmotnosti pístu bude plyn v nádobě zaujímat objem $2^{-1/\kappa}$ litrů.

Jiří Nárožný
nahry@fykos.cz

Úloha V.4 ... trojúhelníkový odporník 4 body; průměr 2,71; řešilo 42 studentů

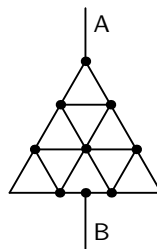
Určete odpor trojúhelníku vytvořeného z odporového drátu mezi svorkami A a B, které vidíte na obrázku. Jedna strana malého trojúhelníčku (ze kterých se skládá velký trojúhelník) má odpor R_0 . Odpor přívodních vodičů neuvažujte. Karel si maloval trojúhelníčky.

Zamysleme sa, čím vieme popísať elektrický obvod. Každému uzlu vieme priradiť potenciál φ a každému drôtu prúd I . Ak spája drôt s odporom r i -ty a j -ty uzol, potom ním tečie prúd

$$I_{ij} = \frac{\varphi_i - \varphi_j}{r}$$

z i -tého do j -tého uzla (ak je záporný, znamená to len, že kladný prúd $-I_{ij} = I_{ji}$ tečie opačným smerom). Ide o obyčajný Ohmov zákon – napätie medzi uzlami je totiž rozdiel ich potenciálov a prúd tečie z väčšieho potenciálu na menší.

Ak teda pridáme medzi 2 uzly s rovnakými potenciálmi drôt s ľubovoľne malým odporom, nebude týmto drôtom tiecť žiadny prúd – ten ale netiekol ani pred tým, takže sa v obvode nič,

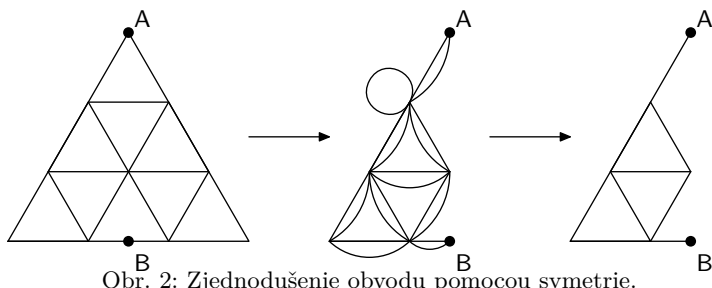


Obr. 1:

Trojúhelník

vrátane odporu medzi bodmi A a B, nezmení. Potom môžeme tento drôt skracovať na ľubovoľne malú dĺžku, až kým sa naše 2 uzly spoja do jedného, tiež bez zmeny odporu medzi bodmi A a B. Pozor, pri takomto spojení uzlov stále existujú všetky pôvodné drôty!

Dvojíc s rovnakými potenciálmi sa dá ľahko nájsť dosť veľa. Obvod je totiž symetrický podľa osi AB, teda každé 2 uzly, ktoré sú si navzájom obrazmi v tejto osovej súmernosti, budú mať aj rovnaké potenciály. Spojme teda každé dva také uzly do jedného.



Obr. 2: Zjednodušenie obvodu pomocou symetrie.

Pri druhom zjednodušení na obr. 2 ešte zahodíme drôt, ktorý spájal jeden uzol sám so sebou (týmto drôtom žiadny prúd zjavne netečie) a nahradili každé 2 paralelne zapojené drôty s rovnakými odpormi r jedným drôtom s odporom $r/2$. Celá strana malého trojuholníčka bude potom mať odpor $R_0/2$ a jej *polovica* pri uzle A odpor $R_0/4$.

Transformácia trojuholník-hviezda

Predstavme si čiernu skrinku, do ktorej môžeme pripojiť drôty na niekoľkých miestach (tzv. termináloch), zvolit potenciály na týchto termináloch a merať prúdy, ktoré cez tieto drôty tečú.

Ak by sme mali dve takéto čierne skrinky (T a S), pre ktoré nameráme pre rovnaké potenciály vždy rovnaké prúdy, potom môžeme v ľubovoľnom obvode vymeniť skrinku T za skrinku S (a naopak) bez toho, aby sa ľubovoľná veličina (odpory, prúdy, atď.) v obvode zmenila.

Dá sa dokázať⁵ že skrinky na obr. 3 (s terminálmi K, L a M) sú v tomto zmysle ekvivalentné. Zapojeniu v skrinke T hovoríme trojuholník, zapojeniu v skrinke S zasa hviezd⁶. Ekvivalentnú hviezdu vieme nájsť ľubovoľnému trojuholníku, vzťahy medzi odpormi v hviezde a v trojuholníku sú ale zložitejšie.

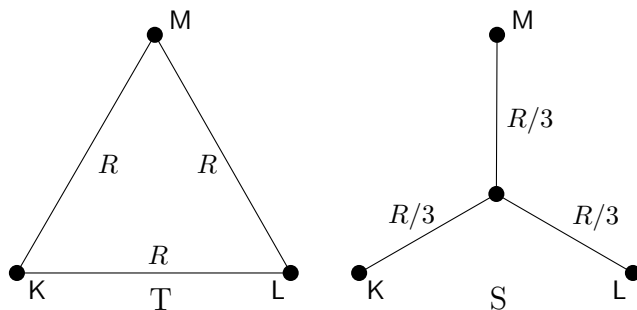
Všimnime si, že práve trojuholník zložený z drôtov s rovnakými odpormi sa v našom (už zjednodušenom) obvode nachádza. Môžeme ho teda nahradiť hviezdou ako na obr. 4.

Odpor R tohto obvodu už spočítame priamočiaro – už zo základnej školy predsa vieme, že sériovo zapojené rezistory s odpormi R_1 a R_2 sa správajú ako jeden rezistor s odporom $R_1 + R_2$ a pri paralelnom zapojení zasa ako rezistor s odporom

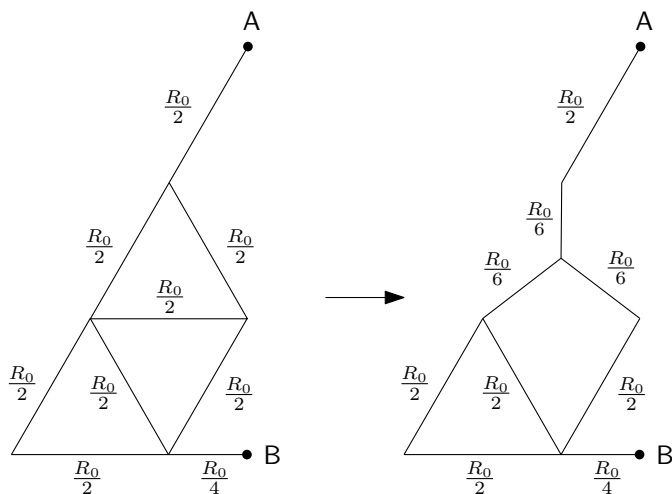
$$\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

⁵Ide o veľmi známy trik pri počítaní odporov, dôkaz preto neuvádzame.

⁶i



Obr. 3: Ekvivalentné zapojenia do trojuholníka a do hviezd.



Obr. 4: Zjednodušenie obvodu nahradením trojuholníka hviezdou.

Odpor medzi bodmi A a B teda bude

$$R = \frac{R_0}{4} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{R_0}{6} + \frac{R_0}{2}} + \frac{1}{\frac{R_0}{6} + \frac{1}{\frac{1}{R_0} + \frac{2}{R_0}}}} + \frac{R_0}{6} + \frac{R_0}{2} = \frac{101}{84} R_0.$$

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha V.5 . . . hlídání dětí

5 bodů; průměr 2,97; řešilo 37 studentů

Mějme houpačku zavěšenou na dvou svislých lanech délky $l = 1,5\text{ m}$ na vodorovné tyči o poloměru $r = 4\text{ cm}$. Dítěti sedícímu na houpačce udělíme v dolní úvrati takovou rychlost v_0 , aby dítě vykonalo celou otočku kolem horizontální tyče a lana byla během namotávání stále napnutá. Zároveň chceme, aby počáteční rychlost byla nejmenší možná. Určete rozdíl úhlové rychlosti ω_1 houpačky s dítětem po návratu do dolní úvrati a počáteční úhlové rychlosti ω_0 .

Nápověda Pro výpočet odstředivého zrychlení můžete uvažovat, že se dítě pohybuje lokálně po kružnici. *Mírek si vždycky rád hrál s mladšími sourozenci.*

V celé úloze budeme předpokládat, že lana mají zanedbatelnou šířku i hmotnost, a dítě s houpačkou budeme považovat za hmotný bod. Víme, že během rotace houpačky kolem tyče se budou lana postupně navíjet a tím se bude zkracovat poloměr rotace. Houpačka se tedy bude pohybovat po Archimédově spirále, tj. zkrácení lana bude přímo úměrné úhlu, o který se houpačka otočila.

Aby zůstala lana napnutá a dítě z houpačky nevypadlo, musí být v horní úvrati odstředivá síla větší nebo rovna síle tíhové⁷. Zároveň však musíme splnit podmínku, že počáteční rychlost houpačky musí být co nejmenší. Toho dosáhneme právě tehdy, když si budou odstředivá a tíhová síla přesně rovný. Pro zjednodušení zatím předpokládejme, že při otočení o malý úhel se změní délka lana pouze minimálně, a můžeme proto velikost odstředivé síly v daném bodě počítat ze vztahu $F = mv^2/d$, kde d je vzdálenost od osy otáčení (diskusi vlivu tohoto zanedbání viz níže).

Délka lana v horní úvrati je $l - \pi r/2$, protože lana se začnou navíjet až po otočení o $\pi/2$. Z úvah v předchozím odstavci nám plyne rovnost

$$\frac{v_u^2}{l - \pi r/2} = g, \quad (4)$$

kde v_u je rychlost houpačky v horní úvrati. Zároveň ze zákona zachování mechanické energie získáme vztah

$$\frac{1}{2} (v_0^2 - v_u^2) = gl \left(2 + \frac{r}{l} - \frac{\pi r}{2l} \right). \quad (5)$$

Z rovnice (4) vyjádříme v_u^2 , dosadíme do (5) a vyjádříme počáteční rychlost

$$v_0^2 = gl \left(5 + 2\frac{r}{l} - \frac{3}{2}\frac{\pi r}{l} \right). \quad (6)$$

Rychlost v_1 v dolní úvrati po otočení houpačky o plný úhel určíme opět na základě ZZME z rovnice

$$\frac{1}{2} v_0^2 - \frac{1}{2} v_1^2 = gl \left(\frac{r}{l} + \frac{3}{2}\frac{\pi r}{l} \right), \quad (7)$$

kde nárůst potenciální energie je úměrný součtu délky namotaného lana a poloměru tyče (střed rotace je nyní právě o tento jeden poloměr výše než na počátku). Ze vztahů (6) a (7) dostaneme

$$v_1^2 = gl \left(5 - \frac{9}{2}\frac{\pi r}{l} \right). \quad (8)$$

⁷Horní úvrati zde myslíme polohu, kdy je houpačka nejvýše, lana tedy směřují kolmo vzhůru. Správně bychom podmínku pro síly měli vyšetřovat v mírně odlišné poloze, viz níže.

Nyní už jsme schopni po odmocnění vztahů (6) a (8) vyjádřit rozdíl úhlových rychlostí

$$\omega_1 - \omega_0 = \frac{\sqrt{\frac{g}{l} \left(5 - \frac{9}{2} \pi \frac{r}{l}\right)}}{1 - \frac{3}{2} \pi \frac{r}{l}} - \sqrt{\frac{g}{l} \left(5 + 2 \frac{r}{l} - \frac{3}{2} \pi \frac{r}{l}\right)} \doteq 0,61 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (9)$$

Při výpočtu úhlových rychlostí jsme (podobně jako v případě odstředivého zrychlení) použili přímo délku lana příslušející oběma polohám. Pokud ovšem budeme chtít zahrnout skutečnost, že se houpačka pohybuje přibližně po spirále, budeme muset poloměry použité ve výpočtu odstředivé síly a úhlové rychlosti nahradit poloměrem oskulační kružnice. To je taková kružnice, jejíž poloměr je roven převrácené hodnotě křivosti trajektorie ve zkoumaném bodu této trajektorie. Pro parametricky zadanou rovinnou křivku

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

je poloměr R oskulační kružnice definován vztahem

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}, \quad (10)$$

kde \dot{x} je derivace x podle parametru t . Trajektorie houpačky leží na Archimédově spirále s počátkem rotujícím po kružnici, kterou v parametrizaci úhlem ϑ popíšeme rovnicí

$$a(\vartheta) = \begin{pmatrix} r \left(\sin \vartheta + \left(\frac{l}{r} - \vartheta \right) \cos \vartheta \right) \\ r \left(-\cos \vartheta + \left(\frac{l}{r} - \vartheta \right) \sin \vartheta \right) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Úhel ϑ je volen tak, aby byl nulový ve chvíli, kdy houpačka při otáčení poprvé dorazí do vodorovné polohy. Tato volba parametrizace je výhodná, protože se pro kladná ϑ vyhneme úseku na začátku pohybu, během kterého se houpačka pohybuje přesně po kružnici. Polože, kdy má lano délku $L(\vartheta)$, pak odpovídá hodnota parametru $\vartheta = (l - L(\vartheta))/r$. Po dosazení (11) do (10) dostaneme velmi sympatický výraz

$$R = r \left(\frac{l}{r} - \vartheta \right).$$

Za ϑ nyní dosadíme hodnoty ϑ_1, ϑ_2 odpovídající dolní úvrati po jedné otočce a horní úvrati, tedy

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{3}{2} \pi = \frac{l - L(\vartheta_1)}{r}, \\ \vartheta_2 &= \frac{\pi}{2} = \frac{l - L(\vartheta_2)}{r}. \end{aligned}$$

Tento zápis pomocí okamžité délky $L(\vartheta)$ nám nyní umožňuje kompaktně zapsat hledané poloměry oskulačních kružnic

$$R(\vartheta) = r \left(\frac{l}{r} - \frac{l - L(\vartheta)}{r} \right) = L(\vartheta).$$

Odtud je již vidět, že se při ztotožnění okamžité délky lana a poloměru rotace nedopouštíme žádné chyby.

Nyní se vrátíme k výpočtu počáteční úhlové rychlosti ω_0 , u nějž jsme poznamenali, že podmínka na rovnost velikostí odstředivé síly a tíhové síly v horní úvratí (4) není zcela správná. Polohu, kde má tato rovnost nastat, určíme na základě zákona zachování energie. Jelikož se charakter pohybu houpačky změní při dosažení vodorovné polohy, budeme ji považovat za počáteční a popíšeme ji pomocí $\vartheta = 0$, $\dot{\vartheta} = \omega_h$. Používáme tedy stejnou parametrizaci jako při výpočtu poloměru oskulační kružnice. Potom můžeme pro kinetickou a potenciální energii psát

$$T = \frac{1}{2}mR(\vartheta)^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}m(l - r\vartheta)^2\dot{\vartheta}^2,$$

$$V = mg(r(1 - \cos \vartheta) + (l - r\vartheta) \sin \vartheta).$$

Nulovou hladinu potenciální energie jsme přitom nastavili do vodorovné polohy, kinetická energie odpovídá pohybu po oskulační kružnici. Z volby nulové hladiny potenciální energie plyne, že celková mechanická energie systému je

$$E = \frac{1}{2}m\omega_h^2l^2.$$

Ze zákona zachování $E = T + V$ jsme schopni vyjádřit kvadrát úhlové rychlosti

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{\omega_h^2l^2 - 2gr(1 - \cos \vartheta) - 2g(l - r\vartheta) \sin \vartheta}{(l - r\vartheta)^2}.$$

Pro odstředivé zrychlení potom máme

$$a_d = (l - r\vartheta)\dot{\vartheta}^2$$

a požadujeme, aby stále platilo

$$a_d \geq g \sin \vartheta,$$

kde $g \sin \vartheta$ je složka tíhového zrychlení ve směru lana. Rovnost má nastat pouze v jednom jediném bodě blízkém horní úvratí – v něm musí mít rozdíl zrychlení minimum, které nalezneme derivací. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\frac{\omega_h^2l^2 - 2gr(1 - \cos \vartheta) - 2g(l - r\vartheta) \sin \vartheta}{l - r\vartheta} - g \sin \vartheta = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{\omega_h^2l^2 - 2gr(1 - \cos \vartheta) - 2g(l - r\vartheta) \sin \vartheta}{l - r\vartheta} - g \sin \vartheta \right) = 0 \quad (13)$$

pro proměnné ω_h , ϑ . Z rovnice (12) jsme schopni vyjádřit

$$\omega_h^2l^2 = 2gr(1 - \cos \vartheta) + 3g \sin \vartheta(l - r\vartheta) \quad (14)$$

a po zderivování (13) a dosazení za $\omega_h^2l^2$ z (14) dostaneme

$$3 \cos \vartheta(l - r\vartheta) - r \sin \vartheta = 0.$$

Získali jsme tak transcendentní rovnici pro ϑ , kterou nedokážeme analyticky řešit.

K poměrně přesnému výsledku bychom dospěli rozvinutím funkce $\sin \vartheta$ a $\cos \vartheta$ do Taylorovy řady kolem bodu $\vartheta = \pi/2$. Pokud bychom provedli rozvoj do druhého řádu,⁸ řešili bychom kvadratickou rovnici pro ϑ . Výsledkem je $\vartheta \doteq 1,561\,52$ rad.

Větší přesnosti však můžeme dosáhnout numerickými metodami. Mezi nejrozšířenější metody řešení nelineárních soustav rovnic patří metoda bisekce (půlení intervalu), metoda tečen, metoda sečen a metoda regula falsi. Jejich podrobný popis a implementaci do programovacího jazyka C++ nalezneme např. v knize *Numerical Recipes in C*.⁹ My zde použijeme metodu tečen zvanou též Newtonova. Tato metoda aproximuje funkci $f(x)$ v okolí odhadu x_k prvním členem Taylorova rozvoje, tj. tečnou v bodě $[x_k, f(x_k)]$. Řešíme rovnici $f(x) = 0$ v aproximaci

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_k - x) = 0.$$

Řešení této rovnice označíme x_{k+1} a pokračujeme v iteraci až po dosažení konvergence, lépe řečeno dokud není splněna podmínka $|x_k - x_{k+1}| < \delta$, kde δ volíme podle požadované přesnosti. Metoda tečen konverguje obecně rychleji než ideově jednodušší metoda bisekce, ale na rozdíl od ní může selhat a divergovat. Nebudeme zde uvádět přesné předpoklady kladené na zkoumanou funkci, ale snadno si rozmyslíme, že problematická budou například okolí stacionárních bodů (derivate nulové, dělíme nulou).

Implementace základní verze metody tečen do některého z běžných programovacích jazyků není složitá, my jsme však raději zvolili odladěnou funkci NEWTON obsaženou v programovacím jazyce IDL. Pro odhad $\vartheta = 1,55$ jsme dostali výsledek $\vartheta \doteq 1,561\,52$ rad a z (14) jsme dopočetli $\omega_h \doteq 4,375\,82$ rad·s⁻¹. Hledaná poloha, ve které má nastat rovnost sil, je od svislé polohy odchýlena o přibližně 0,5°. Ze ZZME triviálně dopočteme $\omega_0 \doteq 5,676\,95$ rad·s⁻¹. Zjednodušený výpočet ω_0 v (9) dává hodnotu 5,676 87 rad·s⁻¹. Lišíme se až na páté platné číslici, odhad kritické polohy $\vartheta = \pi/2$ je tedy velmi dobrý.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz

Úloha V.P ... fyzika v plamenech

5 bodů; průměr 3,24; řešilo 29 studentů

Na jakých fyzikálních (a chemických) parametrech závisí teplota, kterou hoří nějaká konkrétní látka? Jak? Určete tuto teplotu pro nějakou konkrétní látku.

Karel přemýšlel nad plamenem.

V řešení se budeme zabývat hořením vodíku $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \longrightarrow 2\text{H}_2\text{O}$, protože jde o nejjednodušší reakci hoření s nejvyšší dosahovanou teplotou. Budeme tak moci demonstrovat nejvíce efektů.

V celé úloze budeme uvažovat, že plyn má stále atmosférický tlak a že případné zvýšení tlaku bude velmi rychle kompenzováno rozepnutím daného plynu. Protože uvažujeme model ideálního plynu, tak veškerá energie je uložena v kinetické energii jednotlivých atomů či molekul. Podívejme se podrobněji na to, jakým způsobem by mohl růst v plameni tlak. Tlak vzroste proto, že kinetická energie produktů reakce bude vyšší než kinetická energie reaktantů. Tyto atomy a molekuly se vlivem Brownova pohybu rozptýlí po okolí úplně stejně, jako když si otevřete v místnosti voňavku a ta vám zavoní celý pokoj. Důležité je to, že na produkty reakce nepůsobí žádná vnější síla a proto je správné uvažovat tepelnou kapacitu za konstantního objemu, nikoli tlaku (vnější síla – závaží na pístu je zodpovědná za větší tepelnou kapacitu). Poznamenejme,

⁸ $\cos \vartheta \approx \pi/2 - \vartheta$ a $\sin \vartheta \approx 1 - (\pi/2 - \vartheta)^2/2$

⁹Starší verze dostupné online na <http://www.nr.com/oldverswitcher.html>.

že jde o nevratný děj, tzn. produkty reakce z plamenu budou odcházet, ale nebudou se do něj samovolně vracet.

Ukážeme si nejprve první odhad teploty spalin vodíku na výbuchu směsi vodíku a kyslíku smíchaných ve slučovací poměru 2 : 1. Pak jej zobecníme na případ plamene, kde ukážeme, jaké všechny vlivy mohou snižovat jeho teplotu.

Pokud smícháme vodík s kyslíkem v poměru 2 : 1, tak se veškeré spalné teplo změní na kinetickou energii produktů. Uvážíme-li spalování jednoho molu vodíku a půl molu kyslíku, získáme po reakci jeden mol vody. Tato voda se přirozeně bude vyskytovat ve formě páry, proto musíme ještě od spalného tepla odečíst její skupenské teplo varu. Výsledná veličina se pak označuje jako výhřevnost (angl. lower heating value). Měrnou molární tepelnou kapacitu vody za konstantního objemu označme¹⁰ $c_{\text{H}_2\text{O}} = 29,2 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, výhřevnost vodíku vztaženou k látkovému množství¹¹ $H_{\text{H}_2} = 240 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Podělením výhřevnosti vodíku a tepelné kapacity vody dostáváme výsledek $\Delta T_a = 8\,200 \text{ K}$, tedy produkty by měly mít teplotu vyšší o ΔT_a oproti reaktantům.

První z efektů, který jsme zanedbali, je změna velikosti tepelné kapacity vodní páry. Na základě vyhledaných dat¹² můžeme zkonstruovat závislost tepelné kapacity vodní páry na teplotě, viz obr. 5. Vidíme, že není vůbec lineární, ale na rozsahu teplot (0, 2000) K jej můžeme aproximovat lineární závislostí

$$\frac{C_{\text{H}_2\text{O}}}{\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}} \approx 22,0 + 10,8 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \cdot T = A_1 + B_1 T \quad (15)$$

a na intervalu (2000, 5000) K lineární funkcí

$$\frac{C_{\text{H}_2\text{O}}}{\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}} \approx 38,5 + 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \cdot T = A_2 + B_2 T, \quad (16)$$

kde teplotu T dosazujeme v Kelvinech. Teplo potřebné k ohřátí plynu z pokojové teploty (skupenské teplo nemůžeme uvažovat, protože reaktanty jsou plyny a produkty též) odpovídá ploše pod křivkou, tedy, při použití první aproximační křivky, můžeme položit

$$H_{\text{H}_2} = A_1(T_2 - T_1) + \frac{B_1}{2}(T_2 - T_1)^2, \quad (17)$$

kde konstanty A_1 a B_1 jsou definovány vztahem (15). Dosazením $T_1 = 273 \text{ K}$ obdržíme kvadratickou rovnici pro T_2 s řešením $T_2 = 5\,200 \text{ K}$, z čehož vyplývá, že nemůžeme použít pouze první vztah, protože nám vyšla teplota, která nespadá do rozsahu aproximace odpovídající vztahu (15). Musíme nejprve spočítat teplo nutné k ohřátí na teplotu 2000 K a následně určit finální teplotu páry T_b obdobným postupem, ale pro aproximaci (16).

Vypočítáme nejprve energii E_1 potřebnou k ohřátí spalin na teplotu 2000 K, dosazením do (17) dostáváme $E_1 = 54,1 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Použitím obdobného postupu jako v (17) dostáváme odhad na finální ohřátí¹³ o $\Delta T_b = 6\,200 \text{ K}$, kterou se též dostáváme mimo platnost našeho modelu, ale další data bohužel nemáme.

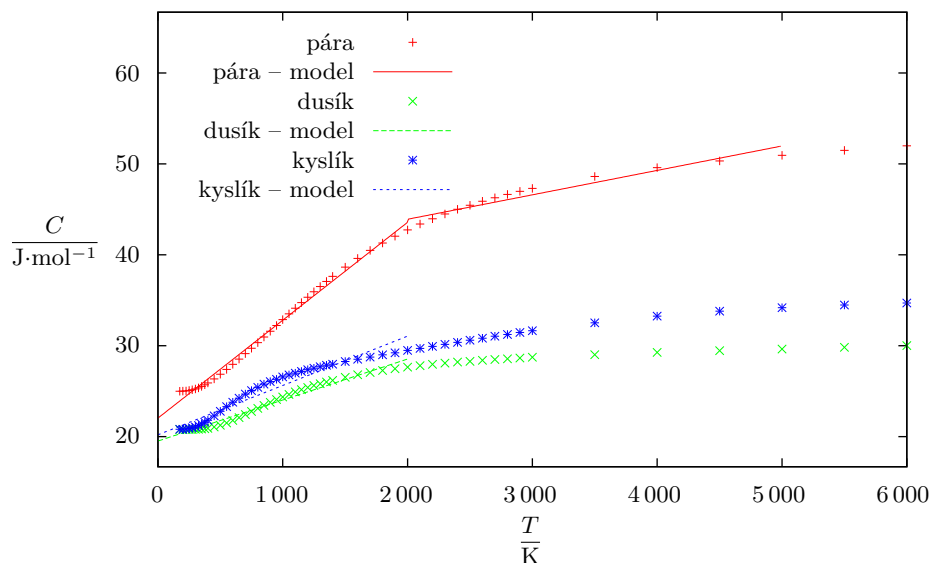
Spalování není ideální, takže budeme uvažovat další vlivy. Všechna dále uváděná procenta jsou objemová či molární.

¹⁰http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_capacity, uvažujeme hodnotu za teploty 100 °C.

¹¹Na <http://cs.wikipedia.org/wiki/Výhřevnost> najdeme, že výhřevnost je 120 MJ·kg⁻¹.

¹²http://www.engineeringtoolbox.com/water-vapor-d_979.html, od kterých musíme odečíst molární plynovou konstantu, abychom dostali tepelnou kapacitu za konstantního objemu.

¹³Wikipedia <http://cs.wikipedia.org/wiki/Vodík> uvádí hodnotu přes 3000 K. Nesoulad budeme diskutovat dále.



Obr. 5: Graf závislosti molární tepelné kapacity vodní páry, dusíku a kyslíku na teplotě.

- Aby mohlo jít o spalování, nikoli o výbuch, musí být koncentrace vodíku menší než 67%. Pro směs s kyslíkem musí být koncentrace vodíku menší než 15% a pro směs se vzduchem 18,3%, pak nemůže dojít k výbuchu.¹⁴
- Reakce spalování není dokonalá, takže mezi produkty zůstane i nějaký nezreagovaný vodík. Tento příspěvek je již započtený v měrném spalném teple.¹⁵
- Část energie se vyzáří infračerveným a optickým zářením, proto nepřispěje do teploty plamene.

Spočítáme si zde oba výše uvedené případy a pro případ spalování na vzduchu i v nevybušné směsi s kyslíkem.

Spalování směsi s kyslíkem

Je-li koncentrace vodíku 15%, tak v reaktantech bude 7,5% spáleného kyslíku a 77,5% nespáleného kyslíku. Tedy pro jeden mol spáleného vodíku vznikne jeden mol vody, ale také musíme ohřát 5,17 mol kyslíku. Pro kyslík jsou hodnoty¹⁶ konstant $\{A\} = 20,2$ a $\{B\} = 5,4 \cdot 10^{-3}$, definice viz (15). Použitím vztahu (17), do kterého dosadíme vážené průměry molárních tepelných kapacit, dostaneme pro rozdíl teplot pouze $T_c = 1800 \text{ K}$, pokud porovnáváme s výbuchem.

¹⁴http://www.odbornecasopisy.cz/index.php?id_document=31466

¹⁵http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_of_combustion

¹⁶http://www.engineeringtoolbox.com/oxygen-d_978.html

Spalování směsi se vzduchem

Pokud budeme spalovat směs 18,3% vodíku ve vzduchu, tak spálíme 9,1 procentního bodu kyslíku ze vzduchu a budeme muset na každý spálený mol vodíku ohřát 3,96 mol vzduchu. Vzduch je především dusík a kyslík, z grafu¹⁷ na obr. 5 zjistíme ale, že tepelná kapacita dusíku i kyslíku je podobná a bude tedy odpovídat tepelné kapacitě vzduchu. Dosazením odpovídajících hodnot do vztahu (17) dostaneme výsledek $\Delta T_d = 2\,100\text{ K}$, což je podezřele více než pro spalování s čistým kyslíkem, ale rozdíl je způsoben vyšší bezpečnou koncentrací vodíku.

Závěr

Nejprve jsme určili nárůst teploty spalin vodíku s kyslíkem pro model konstantní tepelné kapacity s výsledkem $T_a = 8\,200\text{ K}$, pak jsme model zobecnili pro případ lineárně se měnící tepelné kapacity a teplota klesla na $6\,200\text{ K}$. Dále jsem uvážili spalování „bezpečné“ směsi vodíku a kyslíku s teplotou plamene $T_c + T_0 \approx 1\,800\text{ K}$ a pro směs vodíku se vzduchem o teplotě $T_d + T_0 \approx 2\,100\text{ K}$. Poznamenejme, že např. pro případy sváření či tavení kovů se používají nižší koncentrace kyslíku, kde je možnost výbuchu, ale dokud hoří směs plamenem, nemůže k výbuchu dojít. Ale snížením koncentrace kyslíku též vzroste teplota plamene, protože nemusíme „zbytečně“ ohřívát přebytečný kyslík.

Lukáš Ledvina

lukasl@fykos.cz

Úloha V.E ... gumipuk

8 bodů; průměr 4,40; řešilo 25 studentů

Závaží o hmotnosti m na gumičce délky l_0 je zavěšeno v pevném bodě o souřadnicích $x = 0$ a $y = 0$. Z osy x , která je horizontálně, závaží pouštíme. Jaká bude závislost nejnižšího dosaženého bodu na poloze na ose x ?

Dominika zkoušela, jak co nejlépe někomu vypíchnout oko.

Tuto úlohu pojmem téměř úplně experimentálně a z teorie se omezíme na druhý Newtonův zákon. Speciální případ pohybu závaží sice vyřešíme analyticky, ale pro popis obecného případu pohybu vytvoříme numerický model, který potom srovnáme s experimentem. V experimentu jsme používali pomůcky s těmito parametry: hmotnost závaží $m = (51,5 \pm 0,1)\text{ g}$, délka nenaťžené gumičky $l_0 = (19,1 \pm 0,1)\text{ cm}$, délka gumičky s volně visícím závažím (před samotným měřením) $d = (23,4 \pm 0,1)\text{ cm}$. Stejně hodnoty parametrů byly použity v numerickém modelu.

Rozbor situace vidíme na obrázku 6.

Polohu závaží budeme popisovat kartézskými souřadnicemi x , y nebo polárními l , φ . Platí transformační vztahy $l = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = x/l$, $\sin \varphi = y/l$.

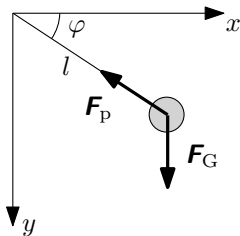
Na závaží působí v každém okamžiku tíhová síla \mathbf{F}_G o velikosti $F_G = mg$, kde g je tíhové zrychlení, a síla pružnosti gumičky \mathbf{F}_p o velikosti $F_p = k(l - l_0)$, kde k je tuhost gumičky a $(l - l_0)$ je její prodloužení (tato síla působí pouze tehdy, když $l > l_0$).

Za pomoci uvedených vztahů můžeme napsat pohybové rovnice (\ddot{x} a \ddot{y} značí druhou derivaci souřadnic podle času, tedy zrychlení v jednotlivých souřadnicích)

$$m\ddot{x} = -F_p \cos \varphi,$$

$$m\ddot{y} = F_G - F_p \sin \varphi.$$

¹⁷http://www.engineeringtoolbox.com/nitrogen-d_977.html



Obr. 6: Závaží na gumičce – označení veličin a sil.

Dosadíme-li do nich za výše uvedené veličiny a vyjádříme zrychlení, dostaneme tvar, který využijeme při numerickém řešení:

$$\ddot{x} = -\frac{kx(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0)}{m\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (18)$$

$$\ddot{y} = g - \frac{ky(\sqrt{x^2 + y^2} - l_0)}{m\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Analytické řešení

Budeme řešit případ, kdy počáteční poloha závaží je $(0, 0)$, tedy že ho volně pustíme dolů (pohyb probíhá pouze v ose y).

Tuhost gumičky spočítáme z protažení vlastní vahou závaží – dáme do rovnosti tíhovou sílu a sílu, jakou je gumička napínána, a vyjádříme $k = mg/(d - l_0)$. Vyjde $k = (11,7 \pm 0,4) \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$.

Ke zjištění protažení gumičky Δl zvolíme přístup přes energie. Zvolíme-li hladinu nulové potenciální energie v bodě $(0, 0)$, pak v nejnižším místě trajektorie (po puštění) se bude potenciální energie závaží rovnat energii pružnosti z natažení gumičky, neboli

$$mg(l_0 + \Delta l) = \frac{1}{2}k\Delta l^2.$$

Dosadíme za k a s využitím $l = l_0 + \Delta l$ vyjádříme prodloužení

$$\Delta l = d - l_0 + \sqrt{d^2 - l_0^2},$$

tedy $\Delta l = (17,8 \pm 0,4) \text{ cm}$, kde jsme nejistotu typu B určili podle zákona šíření nejistot

$$s_{\Delta l} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta l}{\partial l_0} s_{l_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta l}{\partial d} s_d\right)^2},$$

kde $s_{\Delta l}$ označuje nejistotu veličiny Δl atd.

Když prodloužení přičteme k původní délce gumičky l_0 , dostaneme

$$l_0 + \Delta l = (36,9 \pm 0,4) \text{ cm}.$$

Tabulka 1: Maximální délka gumičky l_{\max} pro různé počáteční polohy $x - z$ numerického modelu.

x/l_0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
l_{\max}/cm	36,93	36,89	36,76	36,53	36,20	35,76	35,21
x/l_0	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
l_{\max}/cm	34,51	33,66	32,65	31,91	33,15	34,47	35,88
x/l_0	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
l_{\max}/cm	37,25	38,50	39,67	40,80	41,95	43,13	44,36

Numerický model

Numerickým řešením rovnic (18) Eulerovou metodou (prvního řádu) jsme získali model pohybu závaží. Jako počáteční podmínky jsme zvolili čas $t = 0$ s, $y = 0$ m, $v_x = v_y = 0$ m·s⁻¹; polohu x_0 jsme měnili v intervalu $\langle 0, 2l_0 \rangle$. Simulaci jsme nechali běžet 20 s časovým krokem 0,001 s.

Pro hrubý odhad chyby metody zkusíme měnit časový krok a sledovat, o kolik se prodloužení změní. Je-li prodloužená délka 31,908 7 cm s krokem 0,001 s, 31,922 3 cm s polovičním krokem 0,000 5 s a 31,901 8 cm s dvojnásobným krokem 0,002 s, odhadneme chybu na 0,05 cm.

Zvolená metoda je sice jedna z nejjednodušších, nicméně vypočtený pohyb se od výsledků jiných metod výrazně liší až po několika kyvech.

Pro dvacet různých počátečních poloh jsme vykreslili polohu závaží a závislost délky gumičky na čase a odečetli délku gumičky, když poprvé dosáhla spodní úvratí. Číselné výsledky jsou v tabulce 1 a vyneseny v grafu na obrázku 7.

Pro zajímavost jsme vykreslili pohyb závaží pro dvě různé počáteční polohy (obrázky 8 a 9).

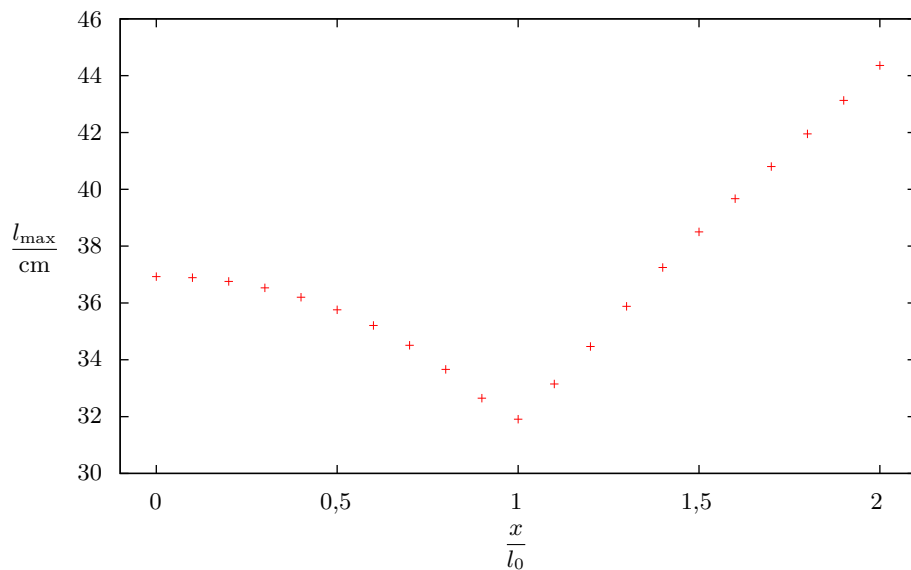
Experiment

Jako závaží jsme použili nástrčnou hlavici, lidově ořech. Gumičku jsme k němu připevnili stylově další gumičkou. Celý pokus jsme filmovali oproti světlému pozadí a nezapomněli na měřítko. Z videa jsme potom odečetli délku gumičky ve spodní úvratí. Pro každou polohu jsme udělali několik pokusů, z nich aritmetický průměr a výběrovou směrodatnou odchylku; její hodnotu jsme potom použili jako délku chybové úsečky.

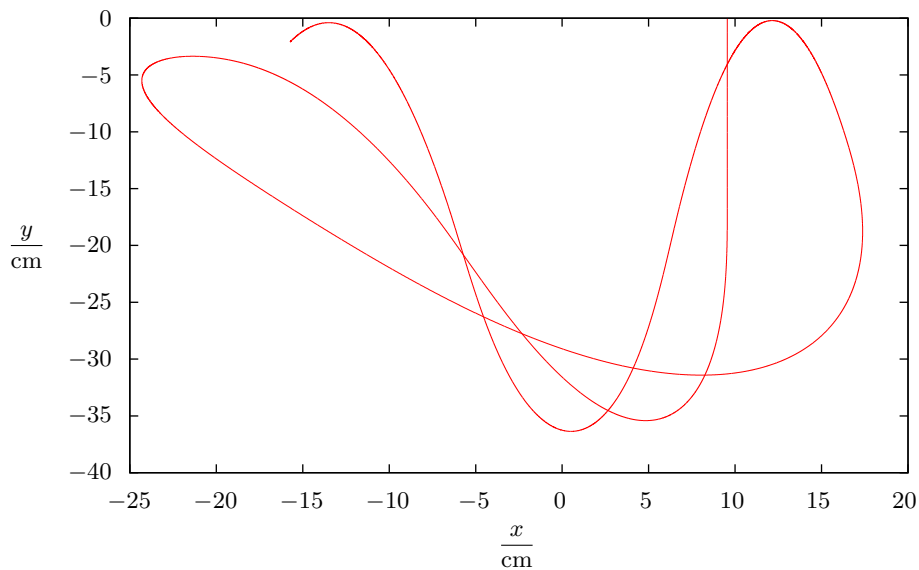
Výsledky jsou v grafu na obrázku 10.

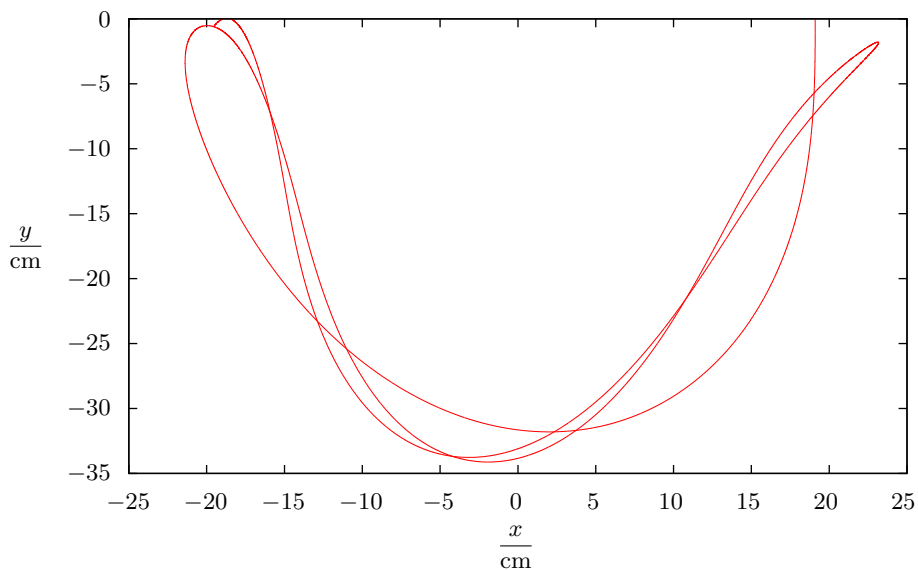
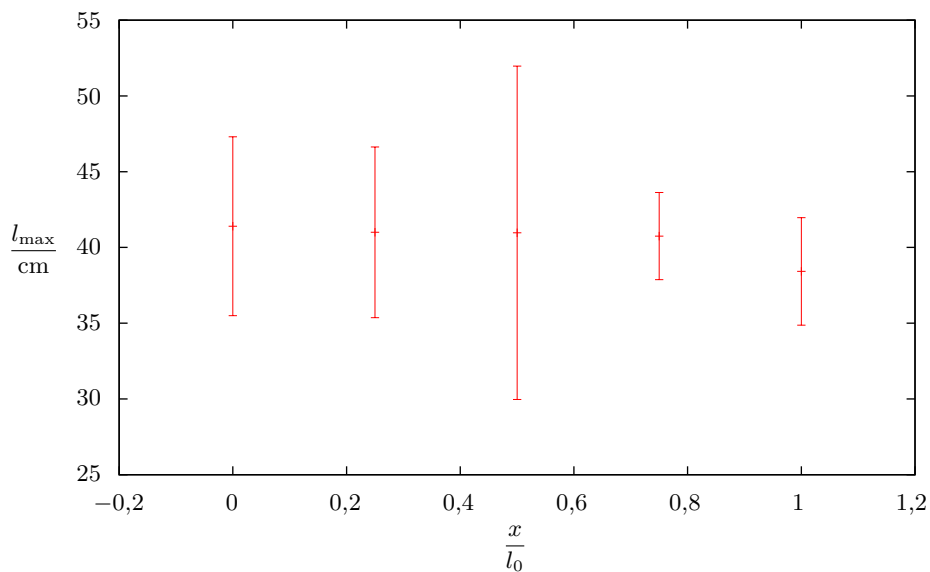
Diskuze

Ve výsledném grafu nelze v rámci chyb s jistotou pozorovat hledanou klesající závislost. Mohlo by to být chybami měření, které by mohly být způsobeny nahráváním videa v kvalitě 30 fps, nepřesným uspořádáním, zkreslením videa, atd. – ale tyto důvody nebudou hlavní příčinou neúspěchu. Porovnejme klidovou délku gumičky před měřením a po dvaceti měřeních – 19,1 cm a 21,3 cm! Hlavním problémem tedy bude hystereze gumičky.



Obr. 7: Závislost prodloužení gumičky na počáteční poloze – z numerického modelu.

Obr. 8: Pohyb závaží pro počáteční polohu $(l_0/2, 0)$.

Obr. 9: Pohyb závaží pro počáteční polohu $(l_0, 0)$.Obr. 10: Naměřená závislost prodloužení gumičky na x -ové poloze, z které závaží pouštíme.

Guma je polymer (přírodní kaučuk) a v klidovém stavu je tvořena navzájem smotanými uhlovodíkovými řetězci, které se po natažení narovnají. Při opětovném uvolnění se ale nenaškládají zpátky přesně tak, jak byly, a pokud proces stále opakujeme, na stejné prodloužení potřebujeme stále méně práce.

Závěr

Numerický model ukazuje, že prodloužení gumičky směrem od polohy $(0, 0)$ nejprve klesá, v poloze $(l_0, 0)$ je nejmenší a pak dál roste.

Délka gumičky ve spodní úvrti z polohy $(0, 0)$ bude 36,93 cm. Z analytického řešení máme pro srovnání $\Delta l = (36,9 \pm 0,4)$ cm. Do tohoto intervalu se numerický model krásně trefil.

Experimentálně se nám tento výsledek bohužel nepodařilo potvrdit. Kvůli velké hysterezi gumičky jsou chybové úsečky v grafu závislosti prodloužení na poloze tak velké, že z něj nelze závislost s jistotou určit.

Dominika Kalasová
dominika@fykos.cz

Úloha V.S ... strunná

6 bodů; průměr 4,00; řešilo 17 studentů

1. Uvažujme otevřené struny a omezme se jen na tři prostorové rozměry. Namalujte, jak vypadá
 - a) struna volně se pohybující v časoprostoru,
 - b) struna připevněná oběma konci k D2-bráně,
 - c) struna natažená mezi D2-bránou a D1-bránou.
 Jaké jsou možnosti, kde mohou struny končit v případě konfigurace tří rovnoběžných D2-brán?
2. Vyberte si jednu z funkcí \mathcal{P}_μ^τ nebo \mathcal{P}_μ^σ definovanou v první části seriálu a najděte její explicitní tvar (tj. přímo závislost na \dot{X}^μ a X'^μ). Ukažte, že podmínky $\mathbf{X}' \cdot \dot{\mathbf{X}} = 0$ a $|\dot{\mathbf{X}}|^2 = -|\mathbf{X}'|^2$ opravdu vedou na zjednodušení uvedené v textu.
3. Najděte spektrum energií harmonického oscilátoru.
 - a) Energie harmonického oscilátoru je dána Hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

Druhý člen je očividně potenciální energií, zatímco první dává po dosazení $\hat{p} = m\dot{\hat{x}}$ kinetickou energii. Definujme lineární kombinaci $\hat{\alpha} = a\hat{x} + i\hat{p}$. Určete reálné konstanty a a b , tak aby měl Hamiltonián tvar

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \right),$$

kde $\hat{\alpha}^\dagger$ je komplexní sdružení $\hat{\alpha}$.

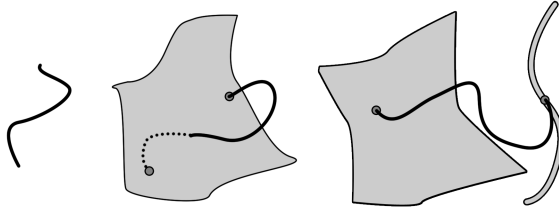
- b) Ukažte ze znalosti kanonických komutačních relací pro \hat{x} a \hat{p} , že platí

$$[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}] = 0, \quad [\hat{\alpha}^\dagger, \hat{\alpha}^\dagger] = 0, \quad [\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] = 1.$$

- c) Ve spektru oscilátoru bude jistě stav s minimální energií odpovídající nejmenšímu možnému kmitání. Označme ho $|0\rangle$. Tento stav musí splňovat $\hat{\alpha}|0\rangle = 0$. Ukažte, že je jeho energie rovna $\hbar\omega/2$, tj. $\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega/2|0\rangle$. Dále ověřte, že pokud by bylo $\hat{\alpha}|0\rangle \neq 0$, pak

máme spor s tím, že má $|0\rangle$ minimální energii, tj. $\hat{H}\alpha|0\rangle = E\alpha|0\rangle$, kde nyní je $E < \hbar\omega/2$. Všechny vlastní stavy Hamiltoniánu můžeme potom psát jako $(\alpha^\dagger)^n |0\rangle$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$. Najděte energie těchto stavů, tj. čísla E_n taková, že $\hat{H}(\alpha^\dagger)^n |0\rangle = E_n (\alpha^\dagger)^n |0\rangle$.
Tip Použijte komutační relace pro $\hat{\alpha}^\dagger$ a $\hat{\alpha}$.

- Na obrázku 11 vidíte postupně otevřenou strunu, strunu s oběma konci na D2-bráně a na D2-bráně a D1-bráně. V textu jsme se dopustili chyby, když jsme psali, že Dp-brána svazuje p stupňů volnosti. Je tomu právě naopak, p stupňů volnosti v rámci Dp-brány zůstává volných a zbytek směrů je pro konec struny svázaný. Pokud vás to zmátlo, uznáváme samozřejmě plný počet bodů i za obrácené řešení. V případě konfigurace tří rovnoběžných D2-brán mohou konce struny končit kdykoliv na kterékoli bráně, takže možností je 6.



Obr. 11: Nákresy strun.

- Derivací Lagrangiánu relativistické struny získáváme

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}') X'_\mu - |\mathbf{X}'|^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}')^2 - |\mathbf{X}'|^2 |\dot{\mathbf{X}}|^2}}.$$

K tomu jsme použili faktu, že $\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}' = \eta_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha X'^\beta$ a že $\eta_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha = \dot{X}_\beta$, to vše samozřejmě v Einsteinově sumační konvenci. Zcela obdobně pro druhou hybnost získáváme

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}') \dot{X}_\mu - |\dot{\mathbf{X}}|^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}')^2 - |\mathbf{X}'|^2 |\dot{\mathbf{X}}|^2}}.$$

Dosazením $\mathbf{X}' \cdot \dot{\mathbf{X}} = 0$ a substitucí $-|\mathbf{X}'|^2 = |\dot{\mathbf{X}}|^2$ do prvního vztahu (opačně do druhého) pak získáváme triviálně vztahy z textu.

- a) Dosadíme prostě $\hat{\alpha} = a\hat{x} + ib\hat{p}$ do výrazu

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \right),$$

a pak nastavíme konstanty tak, aby dával výraz původní Hamiltonián. Pro sdružený operátor platí $\hat{\alpha}^\dagger = a\hat{x} - ib\hat{p}$, protože \hat{x}, \hat{p} jsou samosdružené operátory a jinak sdružení působí jako komplexní sdružení. Po dosazení a roznásobení dostáváme¹⁸

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(a^2 \hat{x}^2 + b^2 \hat{p}^2 - ab\hbar + \frac{1}{2} \right).$$

¹⁸Nezapomeňte, že \hat{x}, \hat{p} nekmutují, musíme proto jejich násobení prohazovat s pomocí komutátoru!

Porovnáním s původním Hamiltoniánem z toho už snadno plyne

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}.$$

- b) První dva komutátory nemusíme počítat, stačí si uvědomit, že je to rozdíl dvou úplně stejných výrazů. Třetí komutátor je složitější, podobně jako v předchozím příkladě spočítáme

$$\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} = a^2 \hat{x}^2 + b^2 \hat{p}^2 - ab\hbar, \quad \hat{\alpha} \hat{\alpha}^\dagger = a^2 \hat{x}^2 + b^2 \hat{p}^2 + ab\hbar.$$

Rozdíl těchto dvou je právě kýžený komutátor. S použitím hodnot a a b z předchozího bodu dostáváme již

$$[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] = 1.$$

- c) Zapůsobením Hamiltoniánu z předchozích bodů zničí α z prvního členu náš $|0\rangle$ vektor a přispívá pouze člen druhý, tj. $\hbar\omega/2$. To je tedy energie stavu značeného $|0\rangle$. Pro další část tohoto bodu si ukážeme, že operátor α vlastní stav Hamiltoniánu $|\Psi\rangle$ převede na další s nižší energií. Jediná nekonstantní část Hamiltoniánu je $\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha}$, počítáme tedy

$$\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} \hat{\alpha} |\Psi\rangle = \hat{\alpha} \hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} |\Psi\rangle - [\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] \hat{\alpha} |\Psi\rangle = \hat{\alpha} (\hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} - 1) |\Psi\rangle.$$

Když toto porovnáme s Hamiltoniánem, zjistíme, že zapůsobení operátorem $\hat{\alpha}$ sníží energii vektoru o $\hbar\omega$. Pokud by tedy operátor $\hat{\alpha}$ vektor $|0\rangle$ neanihoval, znamenalo by to, že jej zobrazil na vektor s nižší energií, což je spor. Obdobným odvozením můžeme ukázat, že operátor $\hat{\alpha}^\dagger$ naopak o $\hbar\omega$ zvyšuje. Energetické hladiny pak jednoduše začínají na $\hbar\omega/2$ a pak jdou nahoru o celé násobky $\hbar\omega$, tedy

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz

Miroslav Rapčák
miro@fykos.cz

Úloha IV.P ... to pravé gravitační zrychlení

5 bodů; průměr 3,15;

řešilo 40 studentů

Faleš chtěl v Praze (V Holešovičkách 2 v přízemí) určit hodnotu gravitačního zrychlení z experimentu, kdy pouštěl kulatý míček z výšky pár metrů na Zemi. Rozmyslete si, jaké korekce musel při zpracování měření zahrnout. Poté navrhnete vlastní experiment na stanovení gravitačního zrychlení a diskutujte jeho přesnost.

Karel přemýšlel nad rozdílem mezi tíhovým zrychlením a gravitační silou.

Nejdůležitější chyby, které musí vzít Faleš v úvahu, jsou chyby způsobené neideálností jeho přístrojů a neideálností jeho samotného. Jeho stopky totiž nedokáží přesně změřit čas a přesto, že má rychlost reakcí jako buddhistický mnich, nedokáže přesně určit, kdy míček doopravdy spadl. Posuďte sami, zda byste dokázali vypnout stopky například do tisíciný sekundy po pádu. Obvykle můžeme uvažovat, že stopky jsme schopni zastavit s přesností na 0,2s, což je, jak ještě uvidíme, pro zahrnutí korekcí docela dlouhý časový úsek.

Musíme si nejprve uvědomit, co Faleš ve skutečnosti měří a co je to gravitační zrychlení. Gravitační zrychlení je zrychlení způsobené gravitací Země na jejím povrchu. Když ale měříme pád míčku, hrají roli i jiné efekty než hmota planety. Nejdůležitější je odstředivá síla na povrchu Země. Kombinaci odstředivého a gravitačního zrychlení se říká tíhové zrychlení. Faleš tedy změřil zrychlení tíhové.

Vypočteme nyní vliv rotace naší planety. Země se otočí 1,00krát za 24 hodin (skutečná hodnota není přesně 1,00, nýbrž spíše 1,0027krát, nám ovšem stačí takto zaokrouhlená hodnota), což odpovídá úhlové rychlosti $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Souřadnice MFF UK V Holešovičkách jsou zhruba $50^{\circ}6'S$, $14^{\circ}26'V$, my ovšem budeme potřebovat pouze zeměpisnou šířku. Dále bychom potřebovali co nejpřesněji určit vzdálenost tohoto místa od středu Země. Zemi budeme považovat za homogenní kouli (přestože ve skutečnosti se jedná o nehomogenní elipsoid) a vzhledem k tomu, jak náročné by bylo zahrnout do úvah veškeré nehomogenity, smíříme se s tím, že korekce nebude úplně přesná. Vzdálenost od středu jsme schopni určit s přesností zhruba na 10 km, což při uvažovaném poloměru Země 6378 km není ani setina a vzhledem k tomu, že korekce bude také maximálně v řádu setin, tak nám tato nepřesnost (která by ve výsledku byla jedna desetitisícina) nebude vadit. Pro vypočtení odstředivého zrychlení potřebojeme určit vzdálenost od osy otáčení Země, což, pokud budeme zeměpisnou šířku brát jako úhel φ , bude $R_Z \cos \varphi$. Ještě zbývá udělat průmět tíhového zrychlení do směru gravitace, jelikož takto vypočtené zrychlení bude mířit směrem od osy rotace. Pro průmět musíme hodnotu opět vynásobit členem $\cos \varphi$. Odstředivé zrychlení nyní můžeme tedy vypočítat jako

$$a_{\text{od}} = \omega^2 (R_Z \cos^2 \varphi) = 0,0140 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Aby tíhové zrychlení přepočítal na gravitační, musí tedy připočíst tuto hodnotu a_{od} .

Dále musí samozřejmě uvažovat odpor prostředí. Ač to často pro zjednodušení uvažujeme, nepohybujeme se ve vakuu. Proti míčku působí odpor vzduchu. Odpor prostředí lze určit pomocí Newtonova vztahu. V tomto vztahu se celkem rozumně očekává, že pro překonání odporové síly musí těleso vykonat stejnou práci, jako je kinetická energie vzduchu, kterou vzduch získal od prolétajícího tělesa. Odporovou sílu tedy určíme ze vzorce

$$F_{\text{odp}} = C \frac{1}{2} \rho v^2 S,$$

kde C je součinitel odporu (pro kouli je roven 0,5) a S obsah průřezu kolmého na směr pádu. Pro přesné vyřešení musíme vyřešit pohybovou rovnici

$$ma = -mg + C \frac{1}{2} \rho v^2 S,$$

jejíž řešení s počátečními podmínkami $v(0) = 0$, $y(0) = h$ je

$$y(t) = h - \frac{v_{\infty}^2}{g} \ln \left(\cosh \left(\frac{gt}{v_{\infty}} \right) \right), \quad (19)$$

kde jsme substituovali za limitní rychlost

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho CS}}.$$

Toto je již ovšem poměrně náročná matematika.

My známe dobu pádu, tedy čas t_0 , pro který platí $y(t_0) = 0$. Z rovnice (19) pak dokážeme po vrácení substituce vyjádřit zrychlení

$$g = \frac{2m}{\rho C S t_0^2} \operatorname{argcosh}^2 \left(e^{(h \rho C S)/(2m)} \right).$$

Při tíhovém zrychlení $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ by míček o hmotnosti 100 g a průměru 5 cm při hustotě vzduchu $1,29 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ padal ze dvou metrů 0,639 s. Kdyby gravitační zrychlení počítal se zanedbáním odporu vzduchu podle vzorce

$$g = \frac{2h}{t_0^2},$$

získal by výsledek $9,769 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, což se celkem znatelně liší od skutečného v uvažované situaci. Pokud tedy Faleš chce počítat s přesností na více než dvě desetinná místa, měl by počítat i s odporem vzduchu.

Přítomnost atmosféry nám přináší i další problémy – například působící vztlaková síla. Ta bude po celou dobu konstantní a dle Archimédova zákona je rovna tíze kapaliny tělesem vytlačené, tedy

$$F_{vz} = V \rho g.$$

Pohybová rovnice přejde na tvar

$$ma = -mg \left(1 - \frac{V \rho}{m} \right) + C \frac{1}{2} \rho v^2 S.$$

To znamená, že výsledný vzorec pro g je potřeba vydělit hodnotou $1 - V \rho / m$. Pro představu je toto pro náš míček zhruba 0,999. Uvědomme si ale, že pokud zvážíme míček na vzduchu, bude samotné vážení zatíženo chybou vážení na vzduchu (kilo peří bude na váhách „lehčí“ než kilo železa). Ve vahách je vždy malé vlastní závaží – etalon. Jelikož i na etalon působí vztlaková síla, naměřená hmotnost je závislá na hustotě tohoto etalonu. Pro skutečnou hmotnost m poté platí vzorec:

$$m = \frac{1 - \frac{\rho_a}{\rho_c}}{1 - \frac{\rho_a}{\rho_c} W} W,$$

kde ρ je hustota našeho závaží, ρ_a je hustota vzduchu a ρ_c je hustota etalonu. Předpokládejme ale, že Faleš si míček zvážil v některé z laboratoří MFF UK a zná hmotnost s vysokou přesností (mohl ho například změřit pod vývěvou ve vakuu).

Zanedbatelný vliv může mít i Slunce, Měsíc a ostatní planety Sluneční soustavy, ale tento vliv je opravdu pouze zanedbatelný. Koho by výpočet této korekce zajímal, může se podívat na vzorové řešení úlohy III.1 z 26. ročníku.

Uvědomme si také, že gravitační zrychlení se mění z výškou, ve které ho měříme. Pro ilustraci si spočtíme, jak rychle se gravitační zrychlení mění dle Newtonova gravitačního zákona. Zrychlení dle Newtonova gravitačního zákona bude

$$F_G = G \frac{M}{R^2},$$

kde $G \approx 6,67384 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ a R je vzdálenost od středu planety (tento vzorec můžeme použít pouze nad povrchem planety, nikoliv v jejím nitru). Pokud budeme počítat s poloměrem

Země 6378 km, tak nám je asi hned zřejmé, že 1 nebo 2 metry nebudou hrát výrazný rozdíl, ten bude zhruba $3 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Celkově tedy můžeme říci, že zdaleka největší vliv mají na měření gravitačního zrychlení odporové síly působící na padající míček. Pak následují korekce z tíhového zrychlení na zrychlení gravitační. Ostatní vlivy jsou zanedbatelné.

Klasickým experimentem pro měření tíhového zrychlení je měření periody kyvadla. Mějme závaží kmitající s malými výchylkami a periodou T . Pro tuto periodu platí vztah $T = 2\pi\sqrt{J/(mgR)}$, kde J je moment setrvačnosti tělesa vůči ose otáčení, R je vzdálenost těžiště od osy otáčení a m je hmotnost tělesa.

Při výpočtu momentu setrvačnosti ovšem může být zanesena relativně velká chyba. Proto se například v praxi u nás na Matfyzu měří tíhové zrychlení pomocí takzvaného reverzního kyvadla. Pro objasnění potřebujeme zavést veličinu $l_r = J/(mR)$ a budeme jí říkat *redukovaná délka kyvadla*. Po zavedení této veličiny můžeme psát

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}.$$

Redukovanou délku můžeme ovšem určit i bez znalosti momentu setrvačnosti kyvadla. V případě, že těleso kmitá kolem dvou rovnoběžných os se stejnou periodou, tak vzdálenost těchto dvou os je právě naše redukovaná délka. Tíhové zrychlení bychom poté mohli dopočítat ze vzorce

$$g = l_r \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

Jak takové reverzní kyvadlo vypadá si můžete prohlédnout například na videu!¹⁹ Nejprve se kyvadlo otáčí kolem jedné osy a poté je otočeno. Čočky na kyvadle jsou následně nastaveny tak, aby perioda kmitů kolem obou os byla stejná.

Za běžných podmínek jsme schopni redukovanou délku kyvadla určit s přesností zhruba $\pm 0,1$ cm. Pokud bude redukovaná délka například 0,5 m, je tedy chyba 0,2 %. Dobu kmitu jsme schopni určit velmi přesně, použijeme-li světelnou závoru pro zapnutí a vypnutí stopky. Světelná závora je mechanismus, který kontroluje, zda jde do detektoru světlo. Světlo umístíme tak, aby svítilo do detektoru skrz rovnovážnou polohu kyvadla. Ve chvíli, kdy kyvadlo projde touto rovnovážnou polohou, dráha paprsků jdoucích do detektoru je přerušena a světelná závora spustí stopky. Počkáme na deset period kyvadla a ve chvíli, kdy kyvadlo znovu projde rovnovážnou polohou, stopky se zastaví. Je důležité, že čas měříme v rovnovážné poloze. V rovnovážné poloze má totiž kyvadlo největší rychlost. Tím pádem dokážeme velmi přesně vždy určit, že je kyvadlo ve stejné poloze. Kdybychom chtěli měřit od okamžiku, kdy má kyvadlo největší výchylku, bude kyvadlo bránit paprskům v průchodu po mnohem delší čas. Bude tedy možné, že se stopky budou spouštět v různých polohách. Světelná závora čas změří poměrně přesně, ale kdybychom měřili ručně, bylo by opravdu obtížné určit, zda se kyvadlo opravdu nachází v té samé poloze, ve které jsme stopky spustili.

Pokud měříme veličinu g závislou na veličinách l_r a T , určíme celkovou chybu měření podle vzorce

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l_r} \sigma_{l_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \sigma_T\right)^2},$$

¹⁹<http://youtu.be/6wFIxz2p-Cs>

kde σ vždy značí chybu veličiny, která je uvedena v dolním indexu. Po vypočtení získáme vzorec

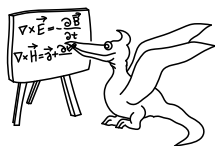
$$\sigma = \sqrt{\frac{16\pi^4}{T^4} \sigma_{l_r}^2 + l_r^2 \frac{64\pi^4}{T^6} \sigma_T^2}.$$

S pomocí světelné závory budeme schopni určit T s přesností zhruba na tisícinu sekundy. Doba kmitu bude zhruba 1,5 s. Dosadíme tedy do vzorce pro výpočet chyby a dostaneme

$$\sigma \doteq 0,02 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2},$$

přičemž pouze minimum chyby je způsobeno nepřesností určení času (pokud bychom čas měřili úplně přesně, byla by chyba $0,017 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$). Vidíme, že největší problém nám tvoří nepřesnost způsobená určením l_r . Pokud bychom měřili čas ručně, můžeme očekávat, že stopky zastavíme s přesností na jednu desetinu sekundy (0,1 s). Pokud změříme 10 period, rozloží se chyba mezi jednotlivé periody a jednu periodu tedy budeme schopni určit s přesností 0,01 s. V tuto chvíli již přestane být chyba způsobená nepřesností měření času zanedbatelná – celkově budeme schopni g určit s přesností $\pm 0,12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Tomáš Bárta
tomas@fykos.cz



Seriál: Spektrální

Po minulém technickém dílu se dnes podíváme již na fyzikální důsledky našich výpočtů. Nejprve zkonstruujeme spektrum otevřených strun a povíme si také o uzavřených strunách. Následně shrneme problémy námi vybudované teorie bosonových strun a nastíníme jejich řešení. Závěrem si povíme něco o aplikacích teorie strun.

Spektrum struny

Uhodíme-li do struny natažené mezi dvěma body, začne kmitat. Jak už víme, struna může kmitat s různými módy. V případě kvantové struny odpovídají tyto módy různým částicím.

Z minulého dílu víme, že Hamiltonián (operátor časového vývoje v kvantové teorii) struny má tvar

$$\hat{H} = \alpha' \sum_{I=2}^d p^I p^I + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{I=2}^d j a_j^{\dagger I} a_j^I - 1. \quad (20)$$

První člen v Hamiltoniánu má (až na konstantu) tvar jako Hamiltonián volné částice. Je to suma přes všechny nezávislé prostorové složky hybnosti umocněné na druhou. Zapomeneme-li na chvíli na druhý člen, můžeme strunu považovat za volnou částici. První člen tedy vystihuje pohyb těžiště struny. Vlastní stavy operátoru hybnosti můžeme pro jednoduchost označovat $|p^1, p^2, \dots, p^d\rangle$, kde p^1, p^2, \dots, p^d jsou konkrétní číselné hodnoty hybnosti, které operátor na stavu nabývá.

Druhá část je nám také povědomá. V příkladu k minulému dílu seriálu jsme podobné členy (opět až na konstanty) viděli v případě harmonického oscilátoru. Spektrum jsme zkonstruovali

aplikací operátorů a^\dagger na vakuum. Tady máme naprosto stejnou situaci, jen máme členů odpovídajícím harmonickému oscilátoru nekonečně mnoho. Každému prostorovému směru $I = 2, \dots, d$ a každému indexu j číslujícímu módy, na kterém struna kmitá v daném směru, odpovídá jeden takzvaný kreační operátor $a_j^{\dagger I}$.

V našem případě ale máme ještě navíc první člen, který je ale na druhém úplně nezávislý. Budeme proto stavům $|p^1, p^2, \dots, p^d\rangle$ říkat *vakua*, protože je to vlastně jen pozadí vůbec neovlivňující život kmitajících módů na struně. Můžeme si to představit tak, že sledujeme strunu z pohledu soustavy spjaté s jejím těžištěm. Různé stavy struny pak dostaneme aplikací kreačních operátorů na tyto naše vakua.²⁰

Podívejme se, jak situace vypadá při aplikaci malého množství kreačních operátorů. Nejprve uvažujeme samotná vakua

$$|p^1, p^2, \dots, p^d\rangle.$$

Tyto stavy odpovídají částici pohybující se hybností se složkami p^1, p^2, \dots, p^d . Jaká je hmotnost této částice? Jelikož jsme slíbili, že v tomto dílu již nebudeme počítat, napíšeme vztah pro hmotnost struny rovnou²¹

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\sum_{j=1}^{\infty} j a_j^{\dagger I} a_j^I - 1 \right).$$

Všimněme si, že jde až na multiplikativní konstantu o poslední dva členy v Hamiltoniánu (20). V případě nejméně excitované struny dostáváme tedy hmotnost rovnu $M^2 = -1/\alpha'$. Všimněme si, že je hmotnost v tomto případě ryze imaginární. Takové částice se nazývají tachyony a povíme si o nich něco později.

Přejdeme k případu prvních excitovaných stavů. Druhá nejmenší možná hmotnost bude odpovídat působení jedním kreačním operátorem $a_1^{\dagger I}$. V případě zapůsobení více operátory bychom dostali větší hmotnost. Podobně bychom dostali větší hmotnost i v případě násobení $a_2^{\dagger I}$. Pro každý index $I = 2, \dots, d$ máme tedy stav

$$a_1^{\dagger I} |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle.$$

Hmotnost částice odpovídající tomuto stavu vychází nulová, $M^2 = 0$. Obecný stav částice o dané hmotnosti můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci těchto $d - 1$ stavů. Máme tedy vlastně vektorovou částici s $d - 1$ složkami a nulovou hmotností. V reálném světě se taková částice opravdu vyskytuje a je jí foton, kvantum světla, neboli částice zprostředkovávající elektromagnetickou interakci.

Zmíníme si už jen, že elektromagnetické pole je popsáno vektorovými veličinami \mathbf{E} a \mathbf{B} a že tyto veličiny lze s použitím Maxwellových rovnic určit z koeficientů naší $(d - 1)$ -složkové lineární kombinace. Nulová hmotnost fotonu je spojená s tím, že se ve vakuu pohybuje přesně rychlostí světla, která je jinak hmotným částicím zapovězená.

Další částice, tentokrát s hmotností $M^2 = 1/\alpha'$, můžeme získat dvěma způsoby. Máme pro $I = 2, \dots, d$ možnost

$$a_2^{\dagger I} |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle,$$

²⁰Stejně jako v případě harmonického oscilátoru splňuje naše vakuum $a_j^I |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle = 0$ pro všechny indexy j a I .

²¹Tento vztah lze snadno odvodit z Hamiltoniánu uvedeného výše. Museli bychom však detailně diskutovat tzv. light-cone kalibraci a kvantování polí v light-cone souřadnicích. Diskuze je přímočará a poměrně nudná. Proto jsme se rozhodli ji vynechat.

a podobně pro dva indexy I, J lze získat částice

$$a_1^{\dagger I} a_1^{\dagger J} |p^1, p^2, \dots, p^d\rangle .$$

Na této hmotnostní škále dostáváme proto jednu vektorovou částici (první případ) a jednu tenzorovou částici (druhý případ), jejíž složky jsou číslovány dvěma indexy.

My už jsme na jednu tenzorovou veličinu se dvěma indexy narazili, a to v prvním díle seriálu, kdy jsme mluvili o obecné teorii relativity. Zakřivení časoprostoru jsme tehdy zakódovali do tzv. metrického tenzoru $g^{\mu\nu}$. Přirozeně nás napadá, že by částice, kterou jsme zde získali, mohla odpovídat částici tohoto gravitačního pole. Není tomu tak. Tenzorová částice, kterou jsme získali z otevřené struny, má nenulovou hmotnost, a to se nám nezamlouvá. Graviton však musí být částice nehmotná, podobně jako foton, jinak by nebyla gravitace dalekodosaňová.

Proč? Vzpomeňme na podobnost Coulombova zákona a Newtonova zákona gravitace. Částice se v obou případech přitahují (případně odpuzují), a to v libovolné vzdálenosti. Naopak například zmiňovaná slabá interakce má konečný dosah a částice příslušející této interakci jsou hmotné. Gravitační vlny, vzruchy v gravitačním poli, se navíc v obecné teorii relativity šíří rychlostí světla. Proto pokud chceme získat kvantovou verzi teorie relativity, musí být graviton nehmotný.

Kdybychom provedli stejnou konstrukci i pro uzavřené struny, také bychom dostali tenzorovou částici, ale v tomto případě již s nulovou hmotností. Graviton tedy odpovídá excitaci uzavřené struny, zatímco foton odpovídá excitaci otevřené struny. Podobně bychom mohli pokračovat dále a konstruovat další částice z vyšších excitací otevřené a uzavřené struny. Vy si to vyzkoušíte na další hmotnostní škále v úloze k seriálu.

Kmitající problémy

Mohli bychom v tuto chvíli zajásat, že máme v ruce kvantovou teorii gravitace. Gravitaci popsanou jako kvantové excitace struny. Navíc se nám povedlo v rámci jedné teorie popsat také elektromagnetické pole. Zdá se, že teorie strun je sjednocující teorií gravitace a elektromagnetické interakce. Narážíme však na spoustu problémů.

Nejprve si všimněme, že excitace struny mohou dát dohromady nekonečně mnoho částic. My jich však pozorujeme jen konečně mnoho. Proč nevidíme všechny? Tomu se nemůžeme divit v případě, že je konstanta α' hodně malá. Pak je hmotnost excitací už na třetí hmotnostní hladině ohromně velká ($1/\alpha'$ je velké číslo). Produkce takových těžkých částic je možná jen v případě nesmírně energetických srážek. Takové energie se nám nepodařilo docílit zatím ani na největších urychlovačích.

Problém nekonečně mnoha částic se nám podařilo vyřešit. I když je částic nekonečně mnoho, něco nám tu přece jen schází. Zatím jsme totiž dokázali vyrobit pouze *bosony* (fotony, gravitony), částice odpovídající polím, ne každodenní hmotě. Hmota, ze které je například váš stůl v pokoji, je složena hlavně z *fermionů* (elektronů, kvarků), které excitací na naší struně nevyrobíme. Naši právě představené teorii strun se proto říká *bosonová teorie strun*. Není však žádný problém bosonovou teorii strun rozšířit pomocí *supersymetrie*, která elegantně fermiony a bosony propojuje do jednoho velkého celku.

Této rozšířené teorii se říká *teorie superstrun*. My jsme se pro teď zabývali jen jednodušší bosonovou teorií, ale přechod k teorii superstrun je už jen o něco málo komplikovanější.

Jak už jsme si před pár odstavci pověděli, spektrum kvantových stavů struny obsahuje také stav s imaginární hmotností. Částice s imaginární hmotností se však musí pohybovat rychlostí

větší než rychlost světla a máme tak zdánlivý rozpor s teorií relativity. Tachyonové stavy lze v některých případech odstranit také přechodem k teorii superstrun. I v teorii superstrun se však za některých podmínek, pokud struna končí na některých typech D-brán, může tachyon objevit.

Existenci tachyonu lze snadno pochopit v rámci kvantové teorie pole. Uvažujme, že máme tachyon popsaný veličinou φ (pole konstantní v celém prostoru). Uvažujme situaci, kdy je dynamika tachyonu popsána přibližným potenciálem ve tvaru

$$V(\varphi) = a + b\varphi^2 + c\varphi^3 + \dots,$$

kde tečky znázorňují členy odpovídající vyšším mocninám φ a a , b , c jsou konstanty. V teorii pole má hmotový člen v potenciálu však následující tvar

$$\frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

a porovnáním s výrazem výše můžeme odečíst, že hmotnost musí být rovna

$$m^2 = 2b.$$

Co když je tedy konstanta b záporná? Pak je také záporná druhá mocnina hmotnosti a jedná se o tachyon. To odpovídá tomu, že má potenciál $V(\varphi)$ v nule zápornou druhou derivaci a jde o maximum potenciálu. Když si ale vzpomeneme na obrázek s kuličkami z druhého dílu seriálu, je nám jasné, že tato situace je neudržitelná. Maximum je nestabilní rovnovážný stav a částice má tendenci se při libovolném vyrušení posunout do minima potenciálu (tj. do *údolí*). V něm je ovšem druhá derivace potenciálu již kladná a při rozvinutí potenciálu kolem této hodnoty dostaneme člen, který odpovídá kladné druhé mocnině hmotnosti. Sklouznutí do minima tedy odpovídá okamžitému rozpadu na částici s kladnou hmotností.

I v případě tachyonu tedy půjde o stabilní stav a tachyon získá kladnou hmotnost. Předchozí tvrzení můžeme také formulovat tak, že je původní teorie nestabilní a tachyon má tendenci kondenzovat do stabilního stavu. To odpovídá tomu, že se původní nestabilní D-brána rozplyne. Tato takzvaná *tachyonová kondenzace* však není v částicové fyzice zas tak výjimečnou situací, jeden z nejslavnějších případů, kde je situace zcela obdobná, je *Higgsův boson*.

Posledním problémem, o kterém se zmíníme, je problém dimenze. Teorie strun, tak jak jsme ji vybudovali, bohužel není obecně Lorentzovsky invariantní, tj. je v rozporu s teorií relativity. K tomu ovšem nedochází tehdy, je-li dimenze časoprostoru rovna

$$D = d + 1 = 26.$$

Že by byl náš časoprostor 26-rozměrný? Už dvakrát nám z problémů pomohla teorie superstrun. Můžeme tedy čekat, že i zde povede přechod k této teorii na dimenzi $D = 4$ tak, jak bychom čekali. Není tomu ovšem tak! Teorie superstrun dává podmínku $D = 10$. To je už velká redukce původních 26 rozměrů. Co provést se zbylými šesti dimenzemi?

To, že další dimenze nevidíme, nemusí nutně znamenat, že neexistují. Kdyby totiž byly ostatní rozměry svinuté do malinkých ruliček, běžně bychom je nebyli schopni detekovat. Představme si například list papíru, který můžeme považovat za dvojrozměrný objekt. Pokud jej srolujeme do tenké trubičky a podíváme se na ni z dostatečné dálky, bude se nám jevit jako jednorozměrný objekt. Podobně když svineme neboli *kompaktifikujeme* další rozměry a čtyři klasické necháme rovné, z dálky už je nevidíme.

A zkoušel někdo, jestli je to všechno pravda?

Existují experimenty, které by mohly vést k objevu kompakťovaných extra dimenzí. Například lze studovat velice jemné odchylky od Newtonova zákona gravitace na malých vzdálenostech (menších než centimetr). Taková odchylka by signalizovala existenci vyšších dimenzí. Bohužel ale nic takového nebylo zatím pozorováno.

Přímé experimentální potvrzení výsledků teorie strun je zatím v nedohlednu. Přesto například objev částic, které předpovídá supersymetrie, by nám však naznačoval, že se ubíráme tím správným směrem. V CERNu bude po krátké pauze brzy opět v provozu velký srážeč hadronů a bude testovat (kromě dalších jevů) supersymetrii. Následující roky rozhodnou, zdali se bude teoretická fyzika ubírat „super-směrem“, nebo úplně jinudy.

Dalším klíčovým experimentem je průzkum fází vesmíru krátce po Velkém třesku. Možná jste zaznamenali v tomto kontextu převratné výsledky experimentu BICEP2 z minulého měsíce. Tým vědců naměřil specifické vzorce v mikrovlnném pozadí,²² které dokládají existenci takzvaných *primordiálních* gravitačních vln.

Důležité jsou pro nás na výsledku týmu BICEP2 dvě věci. První důležitá věc je, že energetická škála, při které dokumentované procesy probíhaly, je jen o dva řády nižší než planckovská, kterou jste si mohli odvodit v prvním dílu seriálu. V dějích by se tedy již mohla otisknout slabá změna gravitace vzhledem ke kvantování. Druhý zásadní fakt je, že vzruchy budící nepřímo pozorované gravitační vlny jsou s vysokou pravděpodobností kvantového původu. To jest mohou za ně nejspíš přímo kvantové fluktuační v gravitačním poli. Každopádně je BICEP2 milníkem v historii fyziky, kdy lidstvo stojí na jakési pomyslné hranici v mnoha ohledech, ať už jde o kosmologii nebo fundamentální fyziku.

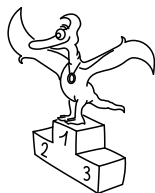
Závěr

V letošním seriálu o teorii strun jsme nastínili stěžejní metody využívané v teoretické fyzice. Především se jednalo o základy teorie relativity, kvantové mechaniky, klasické mechaniky v řeči akce a některých matematických metod. Vše jsme prokládali diskuzí teorie strun. Umíme vyřešit pohybovou rovnici klasické struny, odvodit pohybové rovnice relativistické struny z Nambu-Gotovy akce, víme, jakým způsobem lze strunu nakvantovat a jaké jsou různé možné stavy struny.

Tím vším ale rozmanitost teorie strun nekončí, nýbrž začíná. Struny mohou například interagovat, mohou se spojovat a rozpojovat. Můžeme studovat superstruny a duality v této teorii nebo spoustu dalších aspektů. I kdyby se ukázalo, že teorie strun není správnou teorií kvantové gravitace, je přínosem v mnoha dalších oborech matematiky a fyziky, kde dnes hraje významnou roli.

A je konec seriálu o teorii strun. Pokud jste se dočetli až sem, gratulujeme. Tímto dílem seriálu se s vámi loučí Vojta a Mirek. Je nám potěšením předat štafetu tvůrců seriálu na příští rok někomu jinému. Doufáme, že se vám seriál líbil a někdy na viděnou.

²²Nejstarší světlo ve vesmíru vzniklé ve chvíli, kdy začal být vesmír po Velkém třesku *průhledný*.



Pořadí řešitelů po V. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	4	5	5	8	6	39	<i>100</i>	197
1. <i>Martin Štyks</i>	G Jana Keplera, Praha	4	4	3	5	4	5	6	–	31	<i>79</i>	150
2. <i>Matěj Mezera</i>	G Havlíčkův Brod	4	4	3	4	3	–	4	2	24	<i>77</i>	148
3. <i>Jan Preiss</i>	G, Lovosice	4	2	3	1	4	5	6	–	25	<i>76</i>	146
4. <i>Jáchym Bártík</i>	G Havlíčkův Brod	4	6	3	5	4	3	5	3	33	<i>71</i>	140
5. <i>Jozef Lípták</i>	G Tajovského, B. Bystrica	4	4	3	5	3	5	6	3	33	<i>67</i>	122
6. <i>Přemysl Šťastný</i>	G, Žamberk	4	4	3	0	3	3	7	–	24	<i>63</i>	106
7. <i>Lucie Hronová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	4	1	1	4	0	1	–	15	<i>50</i>	91
8. <i>Daniela Pittnerová</i>	G L. Svobodu, Humenné	4	2	3	–	1	3	–	–	13	<i>60</i>	81
9. <i>Jaroslav Janoš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	4	–	–	1	–	–	–	–	5	<i>76</i>	71
10. <i>Vít Horáček</i>	G L. Jaroše, Holešov	2	4	1	–	–	–	1	–	8	<i>66</i>	62
11. <i>Klára Ševčíková</i>	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>71</i>	61
12. <i>Jozef Burkuš</i>	G, Rožňava	4	4	–	2	–	–	–	–	10	<i>51</i>	60
13. <i>Petr Jakubčík</i>	PORG, Praha	4	4	–	–	–	–	–	–	8	<i>67</i>	58
14. <i>František Zajíc</i>	G, Nymburk	4	6	–	–	–	–	–	–	10	<i>76</i>	56
15. <i>Adam Poloček</i>	G, Havlíčkova, Český Těšín	4	4	3	1	–	3	–	–	15	<i>61</i>	55
16. <i>Kateřina Stodolová</i>	G, Dašická, Pardubice	4	4	3	–	1	–	–	–	12	<i>76</i>	53

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	4	5	5	8	6	39	<i>100</i>	197
1. <i>Petr Hrubý</i>	G, Polička	4	4	1	0	4	3	6	5	27	<i>73</i>	144
2. <i>Dominika Ďurovčíková</i>	G Hlohovec	4	4	1	4	3	5	5	6	32	<i>72</i>	132
3. <i>Jakub Jambrich</i>	G J. A. Raymana, Prešov	4	4	3	4	1	3	4	2	25	<i>64</i>	126
4. <i>Tomáš Hrbek</i>	G J. Ressler, Chrudim	4	4	3	2	1	3	5	2	24	<i>61</i>	121
5. <i>Jiří Jarošík</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	4	4	–	2	1	3	–	–	14	<i>66</i>	112
6. <i>Daniela Šimánková</i>	G, Pelhřimov	4	4	1	0	1	3	4	–	17	<i>63</i>	92
7. <i>Klára Stefanová</i>	G B. Němcové, HK	4	2	3	1	4	3	–	–	17	<i>70</i>	89
8. <i>Samuel Obuch</i>	G Jána Hollého, Trnava	2	4	–	–	1	–	–	–	7	<i>54</i>	83
9. <i>Vojtěch Jelínek</i>	G, Neumannova, Žďár n. S.	4	4	2	–	–	3	–	–	13	<i>53</i>	73
10.–11. <i>Kuba Pilař</i>	G J. Ressler, Chrudim	4	–	–	–	1	–	4	–	9	<i>54</i>	61
10.–11. <i>Pavel Souček</i>	G, Nymburk	4	4	–	–	–	–	–	–	8	<i>78</i>	61
12. <i>Marek Otýpka</i>	G, Židlochovice	4	4	–	–	–	3	–	–	11	<i>56</i>	56
13. <i>Minh Tran Anh</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	4	–	1	–	–	–	–	9	<i>67</i>	55
14.–15. <i>Pavel Kůs</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>74</i>	53
14.–15. <i>Jaroslav Stránský</i>	G, Tišnov	4	–	–	0	1	–	2	–	7	<i>54</i>	53
16. <i>Tomáš Drozdík</i>	G Andreja Vrábla, Levice	4	–	–	–	3	–	–	–	7	<i>62</i>	42

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ	
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	3	4	4	5	5	8	6	35	<i>100</i>	177
1. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	4	4	4	5	5	8	7	39	<i>101</i>	179	
2. <i>Luboš Vozdecký</i>	G a SOŠZZE Vyškov	2	2	4	5	4	4	6	7	34	<i>85</i>	150	
3. <i>Pavel Peterka</i>	G P. de Coubertina, Tábor	2	2	3	3	4	5	5	4	28	<i>83</i>	144	
4. <i>Mojmír Poprocký</i>	G Matyáše Lercha, Brno	2	2	–	4	4	2	1	4	19	<i>75</i>	125	
5. <i>Jakub Sláma</i>	G Opatov, Praha	2	2	2	2	4	3	5	1	21	<i>68</i>	121	
6. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, HK	2	2	2	5	4	5	–	6	26	<i>88</i>	116	
7.–8. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	2	3	3	4	4	–	–	–	16	<i>73</i>	82	
7.–8. <i>Jakub Maruška</i>	G Andreja Vrábla, Levice	1	1	3	4	2	3	3	–	17	<i>66</i>	82	
9. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>75</i>	80	
10. <i>Tomáš Fiala</i>	G, SOŠ a VOŠ, Ledec n. Sáz.	2	2	–	4	2	–	–	–	10	<i>73</i>	77	
11. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	2	2	–	1	–	–	–	–	5	<i>78</i>	76	

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	V	%	Σ	
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	3	4	4	5	5	8	6	35	<i>100</i>	177
1. <i>Jakub Kvorka</i>	G, Dubnica n. Váhom	1	2	4	4	6	1	4	7	29	<i>94</i>	166	
2. <i>Ondřej Zelenka</i>	SPŠ a SOŠGS Most	2	2	3	4	7	–	4	6	28	<i>85</i>	129	
3. <i>Lýdia Janitorová</i>	G, Šrobárova, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>56</i>	49	
4. <i>Zuzana Vlasáková</i>	G, Rumburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>67</i>	47	
5. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>76</i>	45	
6. <i>Michal Belina</i>	G Volgogradská, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>65</i>	33	
7. <i>Tomáš Tměj</i>	G, Arabská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>79</i>	30	
8. <i>Denisa Lampášová</i>	G, Považská Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>83</i>	25	
9. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>89</i>	24	
10.–11. <i>Peter Hojnoš</i>	G Školská, Spišská Nová Ves	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>78</i>	21	
10.–11. <i>Ján Ondráš</i>	G Grösslingova, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	<i>75</i>	21	



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.