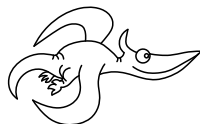


Úvodem

Milí Fykosáci,

máme tu předposlední sérii, takže přichází jedna z posledních šancí tohoto ročníku řešit úlohy a získávat body. Těšíme se, až některé z vás, kteří pilně řešili během prvních tří sérií, potkáme na jarním soustředění.

Organizátoři



Zadání V. série



Termín uploadu: 14. 4. 2015 20.00

Termín odeslání: 13. 4. 2015

Úloha V.1 ... tuhost pana Plancka

2 body

Možná jste už někdy slyšeli o takzvaných Planckových jednotkách, tj. jednotkách vyjádřených na základě fundamentálních fyzikálních konstant – rychlosti světla $c \doteq 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, gravitační konstanty $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ a redukované Planckovy konstanty $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. Takto bývá často zmiňován Planckův čas, Planckova délka a Planckova hmotnost. Co kdyby nás ale zajímala „Planckova tuhost pružiny“? Sestavte na základě rozměrové analýzy z c , G a \hbar vzorec jednotky odpovídající tuhosti pružiny $[k] = \text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$. Pro určení vzorce uvažujte, že neznámá a z rozměrové analýzy neurčitelná multiplikativní bezrozměrná konstanta je rovna 1.

Úloha V.2 ... slyším dobře, to nemohu říct

2 body

Ve vzdálenosti $d = 5 \text{ m}$ od bodového zdroje zvuku slyšíme zvuk o hladině intenzity $L_1 = 90 \text{ dB}$. V jaké vzdálenosti od zdroje je hladina intenzity tohoto zvuku $L_2 = 50 \text{ dB}$?

Úloha V.3 ... matfyzácká honička

4 body

N lidí se rozhodne hrát na honěnou, ale ne jen tak ledažakou. Na začátku se rozmístí do vrcholů pravidelného N -úhelníku o straně délky a . Hra poté probíhá tak, že každý honí (to znamená běží přímo za ním) svého souseda po pravé ruce (proti směru hodinových ručiček). Každý se přitom pohybuje rychlostí o konstantní velikosti v . Popište průběh hry (trajektorie, po kterých se hráči pohybují) a zjistěte, za jak dlouho hra skončí v závislosti na parametrech N , a , v .

Úloha V.4 ... lijavec

4 body

Podzimní počasí je občas stejně rozmařilé, jako to jarní, a tak nás nezřídka může na cestě zastihnout nečekaný liják. Někteří šťastlivci s sebou nosí deštník. Odhadněte, jak velkým tlakem dokáže hustý déšť na deštník působit a porovnejte tíhovou sílu deštníku s tlakovou silou deště. Parametry deštníku vhodně zvolte.

Úloha V.5 ... plavala čočka po vodě

5 bodů

Na hladině vody plove tenká bikonvexní (dvojjvypuklá) čočka z lehkého materiálu. Poloměry křivosti obou povrchů jsou $R = 20$ cm. Určete vzdálenost mezi obrazovým a předmětovým ohniskem čočky, jestliže index lomu vzduchu nad čočkou je $n_a = 1$, index lomu materiálu čočky je $n_l = 1,5$ a index lomu vody je $n_w = 1,3$.

Bonus Předpokládejte, že se jedná o čočku tloušťky $T = 3$ cm, uvnitř níž je symetricky umístěna vzduchová dutina tvaru bikonkávní čočky s poloměry křivosti $r = 50$ cm a tloušťkou $t = 1$ cm.

Úloha V.P ... vycákaná

5 bodů

Bylo by možné plavat v bazénu, kdyby se voda v něm chovala jako dokonale nestlačitelná kapalina, jejíž viskozita se limitně blíží nule? Jak by se pohyb plavce odlišoval od plavání v běžné vodě? Co by se dělo s energií soustavy plavec a bazén v případě, že voda z bazénu může vytékat přes okraj? Na počátku je hladina vody zarovnaná s okrajem.

Úloha V.E ... sladíme

8 bodů

Změřte závislost teploty tuhnutí vodného roztoku sacharózy na koncentraci za atmosférického tlaku.

Úloha V.S ... mapovací

6 bodů

1. Ukažte, že pro libovolné hodnoty parametrů \tilde{K} a T můžete Standardní mapu ze seriálu vyjádřit jako

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n-1} + y_{n-1}, \\y_n &= y_{n-1} + K \sin x_n,\end{aligned}$$

kde x, y jsou nějak přeškálovaná φ, φ . Určete fyzikální rozměr K , x, y .

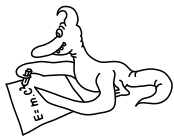
2. Podívejte se znova na model nakopávaného rotoru ze seriálu a vezměte tentokrát předávaný impuls $I(\varphi) = I_0$, po periodě T pak $I(\varphi) = -I_0$, po další zase I_0 a takto dokola kopejte rotor tam a zpátky.

a) Napište mapu $\varphi_n, \dot{\varphi}_n$ na základě hodnot $\varphi_{n-1}, \dot{\varphi}_{n-1}$ před dvojkopem $\pm I_0$.

b) Bude zkonstruovaná mapa chaotická? Proč ne?

c) Vyřešte $\varphi_n, \dot{\varphi}_n$ na základě nějakých počátečních podmínek $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ pro libovolné n .

Bonus Zkuste podle ingrediencí ze seriálu navrhnout kopání, které bude dávat chaotickou dynamiku. Dávejte ale pozor na to, že φ je 2π -periodické a že by se vám $\dot{\varphi}$ nemělo vyšroubovat kopáním donekonečna.



Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... čtvercátý odpor

2 body; průměr 1,63; řešilo 56 studentů

Jak závisí elektrický odpor čtverce na délce jeho strany a ? Všechny čtverce, o které se zajímáme, jsou samozřejmě vodiče vyrobené z tenkého materiálu o tloušťce h a měrném elektrickém odporu ϱ . Zajímáme se o odpor mezi protilehlými stranami čtverce.

Karel se inspiroval na Veletrhu nápadů učitelů fyziky 19.

Těleso, které nás zajímá, je hranol s podstavou tvaru obdélníku o hranách délek a a h a výšce a , kde h je oproti a velmi malé. Budeme u něho chtít spočítat elektrický odpor mezi podstavami. Předpokládáme, že těleso představuje pro elektrický proud homogenní, izotropní prostředí, tj. má ve všech bodech stejné, směrově nezávislé dielektrické vlastnosti. Při řešení tohoto problému potom můžeme vycházet ze vzorce pro výpočet elektrického odporu vodiče ve tvaru

$$R = \frac{\varrho l}{S},$$

kde ϱ je měrný elektrický odpor materiálu, l je délka vodiče a S je obsah jeho průřezu. Průřez našeho vodiče je obdélník o stranách a a h , jeho obsah je tedy

$$S = ah.$$

Délka našeho vodiče je a . Nyní nám stačí tyto veličiny dosadit do původního vztahu a dostáváme výsledek

$$R = \frac{\varrho a}{ah} = \frac{\varrho}{h},$$

který je nezávislý na délce hrany a . Elektrický odpor čtverce tedy nezávisí na délce jeho strany.

Michal Nožička
nozicka@fykos.cz

Úloha IV.2 ... rychlá kráska reloaded

2 body; průměr 1,60; řešilo 48 studentů

Terka si zase jednou vyjela na výlet. Tentokrát se prochází o rovnodennosti v pravé poledne na zemském rovníku. Jakou vzájemnou rychlost by měla vůči Alešovi, pokud by ji Aleš chtěl (bláhově) pozorovat z povrchu Slunce na rovníku v bodě nejbližším jeho objektu zájmu (Terce)? Sklon sluneční osy vůči rovině ekliptiky můžete považovat za zanedbatelně malý.

Karel pozoroval Slunce.

Základní řešení

Úlohu lze řešit různě složitě, podle toho, jaké všechny pohyby se rozhodneme uvažovat. Je to jednoduchá úloha, není tedy očekáván žádný složitý výpočet, ale je potřeba svůj postup zdůvodnit.

Nejprve si rozmyslíme, které pohyby Země/Slunce, a tím pádem Terky a Aleše, by mohly mít vliv na jejich vzájemnou rychlost. Vzhledem k tomu, že jde o jednoduchou úlohu a ne

problémovou, tak se budeme zajímat o určení velikosti rychlosti pouze na dvě platné cifry, což nám umožní některé pohyby zanedbat.

Prvním pohybem, který by nás mohl zajímat, je oběh Země kolem Slunce. Vzhledem k tomu, že hmotnost Země je malá vůči Slunci, budeme uvažovat, že Země obíhá Slunce po kružnici, jejíž střed leží ve středu Slunce. Oběžnou rychlost si můžeme najít v tabulkách nebo si ji můžeme vypočítat z jiných údajů. Zkusme si ji instruktivně vypočítat, nicméně pro došlá řešení bude stačit ocitovaný zdroj. Vyjdeme z rovnosti velikosti síly dostředivé $F_d = mv^2/r$ a gravitační $F_g = GmM/r^2$, kde m je hmotnost Země, v je její oběžná rychlost, r je vzdálenost hmotných středů (těžišť) Země a Slunce, $G = 6,67 \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta a M je hmotnost Slunce.

$$F_d = F_g \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Pokud dosadíme hodnoty¹ $M = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ a $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, dostáváme oběžnou rychlost $v \doteq 3,0 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Stejnou hodnotu nalézáme jako orbitální rychlost².

Další pohyby, které by mohly mít vliv na vzájemnou rychlost Terky a Aleše, jsou rotace Země a Slunce kolem vlastní osy. Je vidět, že i pokud by se oni sami pohybovali, pak by jejich vlastní pohyb byl nejspíše zanedbatelný (tedy tvrdit to můžeme u Terky, Aleš je pravděpodobně v nějakém super odolném a výkonném plavidle³, ale i u něj předpokládáme, že pohyb bude zanedbatelný, protože chce přeci upřeně sledovat Terku).

Rychlost pohybu bodu na rovníku v_i přibližně kulového tělesa můžeme určit z jeho periody rotace T_i (vůči vzdáleným hvězdám). Index i značí buď Slunce S či Zemi Z.

$$v_i = R_i \omega_i = 2\pi R_i \frac{1}{T_i},$$

kde ω_i je úhlová rychlost rotace a R_i poloměr daného tělesa. Opět si nalezneme potřebné údaje na Wikipedii (mohli bychom opět rovnou najít rychlosti) $R_Z = 6380 \text{ km}$, $R_S = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$, $T_Z = 23,9 \text{ h}$ a $T_S = 25,4 \text{ dne}$ na rovníku⁴ Vychází nám $v_Z \doteq 470 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $v_S \doteq 2,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Nyní máme pohromadě všechny důležité rychlosti pro náš výpočet. Je pravdou, že se nejedná o všechny pohyby, které bychom mohli uvažovat. Ale další jsou buď vykonávány Sluncem i Zemí společně (oběh okolo jádra naší galaxie, pohyb společně s galaxií v mezigalaktickém prostoru), proto je nemusíme uvažovat, nebo se jedná o pohyby pomalejší, které jsou svou velikostí zanedbatelné vůči rychlosti oběhu Země kolem Slunce (dráha není kruhová, ale eliptická, dále poruchy vyvolané dalšími planetami a Měsícem).

Měli bychom si ještě uvědomit, v jakých směrech pohyby probíhají. Obě rotace i oběh probíhají ve stejném smyslu.⁵ Znázornění pohybů Země a Slunce je na obrázku 1. V našem uspořádání by tedy výsledná rychlost byla $v - v_Z - v_S$, pokud by všechny rotace probíhaly

¹<http://cs.wikipedia.org/wiki/Slunce>

²<http://cs.wikipedia.org/wiki/Země>

³Muselo by být opravdu velice odolné. Dokonce z dnešního hlediska zcela nedostižné. Pokud by se plavidlo „vznášelo“ v konstantní výšce na „povrchu“ Slunce, pak by na osoby v něm umístěné působilo gravitační zrychlení cca $28g$, což by Aleš zcela jistě nepřežil. Přitom zatím neznáme metodu, jak gravitační působení odstínit, kromě možnosti nechat těleso v gravitačním poli padat.

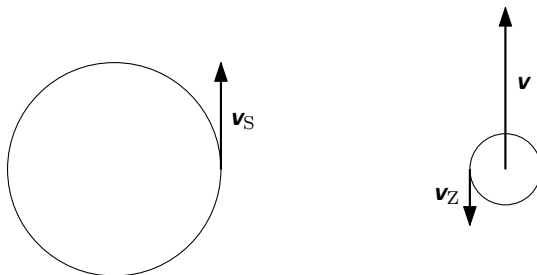
Povrchová teplota 5800 K také nebude pro techniku zrovna jednoduchá na zvládnutí.

Raději také nebudeme uvažovat, jak to, že Alešovi nevadí v pozorování Země světlo, které je všude kolem něj.

⁴Slunce má diferenciální rotaci, tj. otočí se kolem své osy na rovníku za jinou dobu než na jiných rovnoběžkách. Nás zajímá doba rotace na rovníku.

⁵To platí pro všechny planety s výjimkou Venuše, která „retrográdní“ rotaci.

v jedné rovině (osy rotací byly rovnoběžné). Měli bychom tedy zvážit, jaké nepřesnosti se dopouštíme, pokud bychom to takto zjednodušili.



Obr. 1: Schematické znázornění úlohy, nedodržující měřítko.

Rovina oběhu Země kolem Slunce je rovina ekliptiky. Sluneční rovník je vůči rovině ekliptiky skloněný o $\delta = 7,3^\circ$. Vzhledem k tomu, že $\cos \delta \doteq 0,992$, takže bychom mohli v rámci přesnosti na dvě platné cifry tento sklon zanedbat. O důvod více, proč tuto veličinu zanedbat je, že nevíme, jakou přesnou polohu má sluneční rovník vůči poloze Země. Úhel mezi zemským rovníkem rovinou ekliptiky je však větší: $\alpha = 23,5^\circ$, což odpovídá $\cos \alpha \doteq 0,92$. To už nevypadá na první pohled zanedbatelně, pokud se zajímáme o přesnost na dvě platné cifry. Pokud si ale uvědomíme, že v_Z je o zhruba dva řády nižší, pak bychom mohli zanedbat buď i v_Z , ale zanedbáme v tuto chvíli pouze sklon. Dostáváme se tedy k výsledku

$$w = v - v_Z - v_S = \sqrt{\frac{GM}{r}} - 2\pi \left(\frac{R_Z}{T_Z} + \frac{R_S}{T_S} \right) \doteq 27,4 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} \approx 27 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Výsledná velikost rychlosti Terky vůči Alešovi bude zhruba $27 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Nicméně v_Z se projeví na druhé platné cifře jenom díky zaokrouhlení, takže bychom se nedopustili velké chyby, pokud nás zajímá jenom přibližná rychlost, pokud bychom v_Z zanedbali.

Poznámka ke změně vzdálenosti

Úlohou bylo určit rychlost jednoho vůči druhému. Pokud bychom se však zajímali o změnu jejich vzájemné vzdálenosti, pak si v našem přiblížení, kde máme kruhovou dráhu Země kolem Slunce a mlčky předpokládáme, že Země a Slunce jsou kulaté a že Slunce sedí ve středu sluneční soustavy (nejsou nutné ani úplně všechny předpoklady současně), můžeme si uvědomit, že určit změnu vzdálenosti je triviální, protože se zrovna v tomto okamžiku nemění. Vidíme to ihned z toho, že pokud necháváme na Slunci a na Zemi oba pozorovatele stát, tak zrovna v poledne, kdy je současně Aleš na nejbližším místě k Zemi, nastane okamžik, kdy jejich vzdálenost bude minimální. Předtím se zmenšovala a později se bude zvětšovat. Ovšem v daném okamžiku je změna jejich vzdálenosti nulová.

Pokud bychom uvážili, že dráha Země je eliptická, pak už výsledek takto triviální nebude, pokud by zrovna o rovnodennosti nastala situace, při níž by byla Terka v perihelu, nebo v afelu. To ovšem v současné době nenastává. Nejbliže Slunci je Země, když je na severní polokouli zima. Mohli bychom tedy vytvořit alespoň řádový odhad velikosti změny vzdálenosti Země od Slunce právě na základě eliptického pohybu. Nalezneme si rozdíl afelu a perihelu. Ten je

dle Wikipedie $\Delta = 5 \cdot 10^9$ m. Pokud bychom uvažovali, že se Země od Slunce rovnoměrně vzdaluje po dobu poloviny roku a poté opět přibližuje, pak dostáváme odhad rychlosti vzdalování či přibližování $w = 2\Delta/P \approx 3 \cdot 10^2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, kde P je perioda oběhu Země kolem Slunce. Tato rychlost v průběhu roku sice stoupá a klesá, nicméně řádově by se měla rychlost pohybovat kolem stovek až maximálně tisícovek metrů za sekundu.

Komentáře k došlým řešením

Bodování bylo velice tolerantní, i když řešení vykazovala spoustu nedokonalostí, které se neustále opakují. . . Nějaké z nich dál v bodech:

- Špatné zaokrouhlování – někteří uvádí stále příliš mnoho platných cifer ve výsledcích.
- Nejsprávnější postup je počítat nejprve obecně a dosazovat až do výsledného vztahu nakonec. Resp. můžete počítat mezivýsledky, někdy je to i žádoucí jako dobrá kontrola, ale pak ve finálním vztahu dosadit hodnoty, které máte zadané či vyhledané.
- Neuvádíte, odkud jste vzali hodnoty, které dosazujete do vztahů. Např. je pochopitelné, že víte, jak dlouhý je den, ale je dobré napsat, že jde o hvězdný (siderický) den. Hodnoty veličin jako poloměr Slunce, nebo rychlost rotace na rovníku jsou přeci jen už takové, že si je prakticky nikdo nepamatuje, ve škole se nazpaměť (snad) neučí, a tak je potřeba uvést zdroje.
- Pokud uvedete, že zdroj je např. „Wikipedie“ nebo něco tak obecného, je to prakticky, jako byste zdroj neuvedli. Uvádějte konkrétní stránku.
- Některá naskenovaná řešení se skoro nedají přečíst.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha IV.3 . . . nerozlučné pouto

4 body; průměr 2,90; řešilo 49 studentů

Dva sešity A460 zasuneme do sebe tak, že se střídají listy jednoho a druhého sešitu, a položíme je na vodorovný stůl. Jakou práci musíme vykonat, abychom sešity od sebe oddělili, jestliže na sebe listy působí pouze vlastní vahou? Předpokládejte, že taháme v rovině sešitů kolmo na hřbet jednoho z nich a že se na začátku listy zcela překrývají.

Mirkovi se nedařilo oddělit algebru od analýzy.

Cílem úlohy bude zjistit, jakou třecí silou na sebe listy sešitů při pohybu působí a jak se tato síla během pohybu mění. Z této informace potom určíme práci vykonanou během celého pohybu. Než však začneme úlohu řešit, zavedeme si několik předpokladů. Jednak nebudeme uvažovat tlak vazby sešitů (představujeme si například dva kroužkové bloky) a vlastní tíhu vazby. Dále budeme předpokládat, že je třecí koeficient mezi vazbou a listy stejný jako mezi listy navzájem. Nakonec uvažujeme, že jsou listy velmi tenké, a proto každý z nich nese pouze část váhy listu nad ním, úměrnou styčné ploše zmíněných listů.

Označme dynamický třecí koeficient mezi listy f ; zrychlení na počátku pohybu, způsobené vyšším koeficientem statického tření, zanedbáme. Nechť má každý list hmotnost m , tíhové zrychlení je g . Potom bude na vrchní list na začátku pohybu působit třecí síla $F_1 = mgf$. Následující list stejného sešitu (tedy třetí list celkem) bude na vrchní styčné ploše pocítovat třecí sílu $F_2 = 2mgf$, neboť na něm leží dva listy o hmotnosti m . Na spodní styčné ploše již bude mít síla velikost $F_3 = 3mgf$ atd. Sešit A460 má 62 listů včetně desek, máme proto celkem

$n = 123$ styčných ploch, neboť vrchní plocha se žádné další nedotýká. Na i -té styčné ploše působí třecí síla $F_i = imgf$, celková síla je potom

$$F = \sum_{i=1}^n F_i = \frac{n(n+1)}{2} mgf,$$

příčemž jsme zanedbali tření o stůl.

Při vzájemném posunutí listů y ve směru kolmém na hranu listů bude klesat tíha, kterou listy nesou. Celková síla bude

$$F(y) = \frac{n(n+1)}{2} \frac{a-y}{a} mgf,$$

kde a je délka hrany v daném směru. Práci vykonanou při oddělování listů můžeme určit buď jako plochu trojúhelníku v grafu závislosti F na y , nebo ji spočítat z definice jakožto integrál

$$W(a) = \int_0^a F(y) dy = \int_0^a \frac{n(n+1)}{2} \frac{a-y}{a} mgf dy = \frac{n(n+1)}{4} mgfa.$$

Zamysleme se nyní nad smysluplností našich předpokladů. Je pravděpodobné, že tření mezi deskami a tření mezi listy bude mít různé hodnoty třecího koeficientu. Vrchní desky celkovou sílu příliš neovlivní, zajímají nás především ty spodní. Potom by poslední člen sumy měl obsahovat jistě f' obecně různě od f . Jedná se o poslední člen aritmetické řady – bude-li poměr koeficientů $f'/f = \kappa$, bude poměr celkových sil, a tedy i prací, roven $W'/W \approx 1+2(\kappa-1)/n$ pro velká n . Lze předpokládat, že hodnoty f, f' se neliší více než dvojnásobně, zanedbání tedy bylo oprávněné. Podobný odhad bychom mohli provést pro tření mezi deskami a listy, tj. předposlední člen.

Pokud bychom chtěli být precizní, museli bychom také započítat třecí sílu mezi vazbou a stolem, která navíc v průběhu tažení může zůstat konstantní, táhneme-li „spodním“ sešitem (a v případě vrchního sešitu tato síla roste, místo aby klesala). Jednalo by se však pouze o přičtení speciálního členu na konec řady, resp. rozšíření sčítacího indexu. Výsledné vztahy by byly méně přehledné a relativní změna by byla řádově v jednotkách procent.

Předpoklad úměrnosti $F(y) \propto (a-y)/a$ úzce souvisí s vlivem vazby sešitu. V případě kroužkového bloku je oblast ohybu jednoho z listů doléhajícího na hranu listu pod ním velmi malá, tíha pak bude skutečně dobře odpovídat styčné ploše. U běžného sešitu způsobí vazba ohnutí listů, na hraně v blízkosti vazby proto bude tlak vyšší a bude se s rostoucím y měnit. Charakter této závislosti je však obtížně popsateľný.

Zkusme nakonec ještě provést číselný odhad. Sešit A460 má rozměry $a = 21,0$ cm, $b = 29,7$ cm a gramáž listů $\sigma = 80$ g·m⁻². Pro $g = 9,81$ m·s⁻² a dynamický koeficient tření⁶ $f = 0,4$ dostaneme $F(0) \doteq 150$ N a $W(a) \doteq 16$ J. Hodnota $F(0)$ nám říká, že pro roztažení sešitů musíme vyvolat sílu odpovídající tíze tělesa o hmotnosti 15 kg, a to není úplně málo.⁷ Také si uvědomme, že síla potřebná k oddělení sešitů roste s kvadrátem počtu listů. Že k oddělení dvou telefonních seznamů o několika stech stranách již lidská síla nestačí, ukazuje následující video: https://www.youtube.com/watch?v=h0t-D_e-JE.

⁶<http://www.paperonweb.com/paperpro.htm>

⁷Navíc bychom zde měli použít statický koeficient tření, který by odhad ještě zvýšil.

Komentáře k došlým řešením

Většina řešitelů si se součtem aritmetická řady poradila, ačkoli často dost rozličnými způsoby. Problémy ponejvíce činilo tření o desky sešitu a o stůl. Zde ve vzorovém řešení jsme horní desky neuvažovali a naspodu jsme diskutovali detailněji pouze tření mezi deskami a listy, nikoli tření mezi deskami a stolem. Všechny tyto vlivy jsou však zanedbatelné, zvláště uvážíme-li fakt, že třecí koeficienty dokážeme odhadnout s ještě menší přesností.

Při výpočtu práce jste ve svých řešeních často zapomínali, že přítláčná síla bude záviset na ploše a dostávali jste proto nadhodnocené odhady.

Miroslav Hanzelka

mirek@fykos.cz

Úloha IV.4 ... ach ta tíže

4 body; průměr 2,12; řešilo 42 studentů

Určete, jaké je tíhové zrychlení na povrchu neutronové hvězdy v závislosti na rovnoběžce. Jak velká slapová síla by působila na předmět vysoký $h = 1$ m a s hmotností $m = 1$ kg v blízkosti jejího povrchu? S jakou energií by dopadl na povrch neutronové hvězdy marshmallow upuštěný z výšky h ? Neutronová hvězda má poloměr R a rotuje s periodou rotace T . Můžete ji považovat za kulovou, i když přesně kulová není. Najděte si hodnoty pro typickou neutronovou hvězdu a udejte jak obecné, tak konkrétní číselné výsledky.

Karel se zasnul nad drtivou silou neutronových hvězd a jejich skvělou neinercialitou.

V celém řešení budeme předpokládat, že gravitační účinky lze popsat newtonovsky a že všechny rychlosti jsou nerelativistické.

Započneme s tíhovým zrychlením na povrchu. Na testovací těleso spojené s hvězdou (rotuje s ní) působí dvě síly – skutečná gravitační a zdánlivá odstředivá. Uvažujme kulovou neutronovou hvězdu s poloměrem R a hmotností M a testovací částici na rovnoběžce ψ s hmotností m , tj. situace jako na obrázku 2.

Z geometrie situace lze nahlédnout, že pro velikosti sil působících na testovací těleso bude platit kosinová věta

$$|\mathbf{F}_g|^2 = |\mathbf{F}_G|^2 + |\mathbf{F}_o|^2 - 2 \cos \psi |\mathbf{F}_G| |\mathbf{F}_o| ,$$

kde \mathbf{F}_g je celková tíhová síla působící na těleso, \mathbf{F}_G je gravitační síla a \mathbf{F}_o je odstředivá síla.

Pro velikost $|\mathbf{F}_G|$ bude platit z Newtonova gravitačního zákona

$$|\mathbf{F}_G| = \frac{GMm}{R^2}$$

a pro velikost odstředivé síly dostaneme

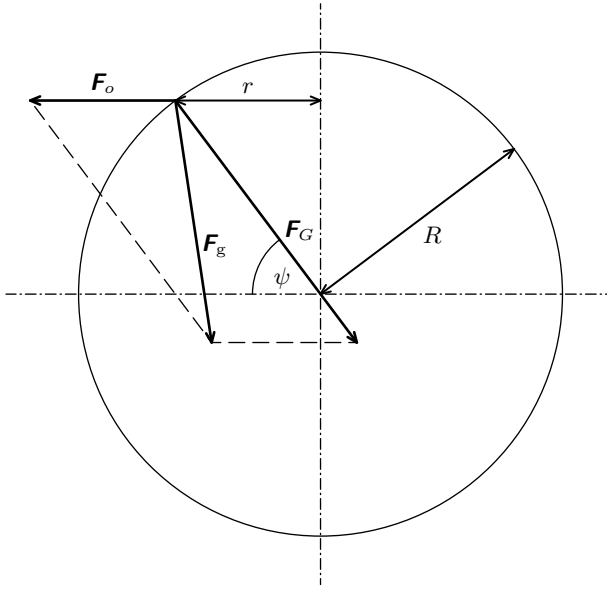
$$|\mathbf{F}_o| = m r \omega^2 = \frac{4\pi^2 m r}{T^2} = \frac{4\pi^2 m R \cos \psi}{T^2} ,$$

kde ω je úhlová rychlost rotace hvězdy a G je Newtonova gravitační konstanta. Pro velikost tíhového zrychlení tedy dostáváme

$$g(\psi) = \frac{|\mathbf{F}_g|}{m} = \sqrt{\frac{G^2 M^2}{R^4} + \frac{16\pi^4 R^2 \cos^2 \psi}{T^4} - \frac{8\pi^2 GM \cos^2 \psi}{RT^2}} .$$

Speciálně na pólech

$$g(90^\circ) = |\mathbf{F}_G| = \frac{GM}{R^2}$$



Obr. 2: Rozbor situace.

a na rovníku

$$g(0^\circ) = |\mathbf{F}_G| - |\mathbf{F}_o(0^\circ)| = \frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Nyní se zaměříme na slapovou sílu. Slapová síla je způsobena různými silovými účinky na bližší a vzdálenější části tělesa. Je-li $h \ll R$, pak lze těleso aproximovat dvěma bodovými hmotnostmi na koncích tělesa (pro malé homogenní těleso). A velikost slapové síly potom lze přiblížit jako

$$F_s = F_g \left(\frac{m}{2}, R+h \right) - F_g \left(\frac{m}{2}, R \right) \approx \frac{1}{2} h \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y=R}.$$

kde uvažujeme velikost síly jako funkci hmotnosti a polohové souřadnice y – v radiálním směru.

Po výpočtu lze zapsat slapovou sílu jako

$$F_s = \frac{mh}{g(R)} \left(\frac{-G^2 M^2}{R^5} + \frac{8\pi^4 R \cos^2 \psi}{T^4} + \frac{2\pi^2 GM \cos^2 \psi}{R^2 T^2} \right),$$

kde značením $g(R)$ vyjadřujeme, že zde tíhové zrychlení považujeme za funkci poloměru hvězdy a s ψ nakládáme jako s konstantou. Tento vztah pro sílu F_s zasluží bližší komentář. Předpoklad $h \ll R$ je splněn pro malé předměty, poloměry neutronových hvězd se ale pohybují i v řádech kilometrů, takže pro jiná kosmická tělesa tento předpoklad platit nemusí. Dále jsme vycházeli z toho, že je těleso spojené s hvězdou. Např. kdyby se jednalo dříve zmíněný cizí objekt, tak by slapová síla odpovídala pouze gravitační slapové síle. Nakonec v závislosti na parametrech může mít slapová síla různé znaménko (těleso je stlačováno či roztahováno).

Co se týče třetí podotázky, z formulace „upustíme marshmallow“ není jasné, zda jsme při upouštění spojení s hvězdou či nikoliv (rotujeme či nerotujeme). Další otázkou je, zda máme v situaci zohledňovat slapové síly a příslušné deformace marshmallow. Tyto deformace budou ale silně záviset na rozměrech marshmallow, které nejsou specifikovány, proto je zde nebudeme uvažovat.

Ať už uvažujeme rotující či nerotující marshmallow, jako nejsnazší cesta k výsledku se jeví počítat pohyb marshmallow v inerciální soustavě a poté pouze pohyb převést do rotující soustavy (odkud zjistíme dopadovou energii).

Padá-li marshmallow z klidu, jeho kinetická energie při dosažení povrchu hvězdy bude v inerciální soustavě

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_p(R+h) - E_p(R) = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right),$$

kde m je hmotnost marshmallow. Tedy

$$v_0 = \sqrt{2GM \frac{h}{R(R+h)}},$$

pro malé výšky h můžeme aproximovat $R+h \approx R$. Nicméně „povrch“ hvězdy se vůči klidové soustavě pohybuje rychlostí

$$v' = R\omega = \frac{2\pi R \cos \psi}{T}.$$

Protože jsou ale tyto dvě rychlosti na sebe kolmé, bude pro dopadovou energii platit

$$E_0 = \frac{1}{2}m \left(v_0^2 + v'^2 \right) = m \left[\frac{GMh}{R(R+h)} + \frac{2\pi^2 R^2 \cos^2 \psi}{T^2} \right]$$

Pro rotující marshmallow je situace pro malá h obdobná, pouze tečná rychlost povrchu vůči marshmallow bude $h\omega \cos \psi$ namísto $R\omega \cos \psi$. Pro větší h již toto nemusí být splněno. Zaprvé se může stát, že marshmallow vůbec nedopadne (jeho orbita neprotne povrch hvězdy), nicméně toto by se muselo dít pro značné výšky h (zkuste si odhadnout poloměr stacionární kruhové orbity), pro které je spojení s hvězdou velice problematické; jediný rozumný scénář (krom šílených konstrukcí typu výtah do vesmíru na neutronové hvězdě) je stacionární družice, na které by po upuštění marshmallow nekonal urychlený pohyb (vůči družici by byl v klidu). Proto předpokládejme, že marshmallow dopadne.

Provedeme přibližný výpočet pro „menší“ h (nemusí být malé v porovnání s R , ale ne tak velké, aby se výrazně projevilo zakřivení orbity – viz níže).

Opět postupujeme jako dříve. Musí být zachována mechanická energie, tudíž

$$\frac{1}{2}m [(R+h)\omega \cos \psi]^2 - \frac{GMm}{R+h} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{R},$$

$$v_1^2 = [(R+h)\omega \cos \psi]^2 + 2GM \frac{h}{R(R+h)},$$

kde v_1 je rychlost marshmallow vůči klidové soustavě při dosažení povrchu hvězdy. Tentokrát ale vektor rychlosti v klidové soustavě při dosažení povrchu nebude na povrch kolmý, proto musíme ještě spočítat tečné a kolmé složky v_1 k povrchu.

Musí rovněž platit zákon zachování momentu hybnosti, proto

$$m\omega \cos^2 \psi (R+h)^2 = mRv_t \cos \psi,$$

$$v_t = \frac{(R+h)^2 \omega \cos \psi}{R},$$

kde v_t je tečná složka (rovnoběžná s povrchem) rychlosti marshmallow v klidové soustavě při dosažení povrchu.

Nechť w je rychlost marshmallow vůči povrchu při dopadu. Potom pro dopadovou energii E_1 platí:

$$E_1 = \frac{1}{2} m w^2 = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'|^2 = \frac{1}{2} m \left[(v_r^2 + (v_t - v')^2) \right] = \frac{1}{2} m \left[v_1^2 - 2v_t v' + v'^2 \right],$$

kde v_r je radiální složka rychlosti marshmallow při dosažení povrchu. Po dosazení za v' , v_1 a v_t dostaneme

$$E_1 = \frac{1}{2} m \left\{ [(R+h)\omega \cos \psi]^2 + 2GM \frac{h}{R(R+h)} - \frac{4\pi(R+h)^2 \omega \cos^2 \psi}{T} + \frac{4\pi^2 R^2 \cos^2 \psi}{T^2} \right\}$$

a konečně po dosazení $\omega = 2\pi/T$ máme

$$E_1 = m \left\{ GM \frac{h}{R(R+h)} + \frac{2\pi^2}{T^2} [R^2 - (R+h)^2] \cos^2 \psi \right\}.$$

Pro uspokojení obecnosti je třeba dodat, uvedený postup výpočtu dopadové energie nebyl úplně korektní, protože existují takové polohy upouštěného marshmallow, kdy marshmallow dopadne, ale použitá aproximace není správná. Jedná se o takové polohy, kdy již orbita upouštěného marshmallow nemá v dobrém přiblížení triviální tvar (je nutno ji považovat za elipsu, ne za úsečku), ale orbita povrch neutronové hvězdy protne. V takovémto případě již není stelární šířka dopadu shodná s „upouštěcí“ šířkou a vektor rychlosti při dopadu již obecně nebude rovnoběžný s místní rovnoběžkou (dopadu). V takovémto případě by bylo nutno spočítat místo dopadu a poté rychlost rozložit do tří směrů místo dvou, a počítat s různými stelárními šířkami. Postup by byl velice pracný, ale typově ne až tak odlišný od použitého.

Nyní aplikujme výsledky na nějakou neutronovou hvězdu, např. na pulsar PSR J0348+0432 (dvojhvězda s bílým trpaslíkem)⁸. Ta má parametry: (data uvedeny bez nepřesností, poloměr je uveden střední)

$$M \doteq 2,01 M_{\odot} \doteq 4,00 \cdot 10^{30} \text{ kg},$$

$$R \doteq 13 \text{ km} \doteq 1,3 \cdot 10^4 \text{ m},$$

$$T \doteq 39,1 \text{ ms} = 3,91 \cdot 10^{-2} \text{ s}.$$

Podotýkáme, že se jedná o poměrně mohutnou neutronovou hvězdu. Dostáváme pro ni hodnoty

$$g(90^\circ) \doteq 1,58 \cdot 10^{12} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$g(0^\circ) \doteq 1,58 \cdot 10^{12} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

(rozdíl řádově $10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). Vidíme, že závislost na rovnoběžce je slabá, proto pro jednoduchost budeme počítat slapovou sílu při pólu, pro 1 m vysoké těleso o hmotnosti 20 kg (peřináč):

$$F_s \doteq \frac{GMmh}{R^3} \doteq 2,43 \cdot 10^9 \text{ N},$$

⁸http://en.wikipedia.org/wiki/PSR_J0348+0432

což je poměrně hodně. Zkuste si porovnat slapové síly působící na atom se silou, kterou jsou vázány elektrony.

A konečně dopadová energie marshmallow puštěného z výšky $h = 1$ m (zařízením spojeným s hvězdou) o hmotnosti $m = 5$ g je zhruba

$$E_1 = 7,89 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Lubomír Grund
grund@fykos.cz

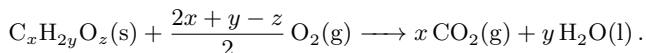
Úloha IV.P . . . nejmenovaná tyčinka

4 body; průměr 2,15; řešilo 26 studentů

Na základě biochemických dějů v lidském těle a jeho mechaniky odhadněte, kolik energie spotřebuje cyklista na překonání tisíce výškových metrů, je-li průměrné stoupání 5%.

Michal s Tomášem přemýšleli na kolik kopců stačí jedna tyčinka (která FYKOS nesponzoruje, a proto zde neuvedeme její název!).

Najprv si ujasníme, čo budeme myslieť pod pojmom energia (pri stravovaní). Názov úlohy napovedá, že by sa hodilo dačo ako to číslo (energetická hodnota), ktoré je napísané na obaloch od jedla. Proste maximálna energia, ktorú vieme z jedla získať. V organizme sa získava spaľovaním uhlíkatých zlúčenín s O_2 na H_2O (kvapalnú) a CO_2 , je teda rozumné priradiť jedlu energiu rovnú teplu uvoľnenému v reakcii



Každý látke vieme priradiť tzv. štandardnú zlučovaciu entalpiu ΔH_f° , ktorá vyjadruje reakčné teplo spotrebované pri jej vzniku z prvkov pri štandardných podmienkach – obvykle atmosférický tlak a izbová teplota – (v ľudskom tele sú tlak a teplota trochu iné, ale to môžeme zanedbať). Reakcii potom môžeme priradiť jej štandardnú reakčnú entalpiu ΔH_r° ako stechiometrický súčet štandardných zlučovacích entalpií produktov mínus reaktantov. Takže $\Delta H_{r,1}^\circ(C_xH_{2y}O_z)$ je práve reakčné teplo spotrebované pri spálení daného množstva (typicky jedného molu) látky $C_xH_{2y}O_z$; s mínusom dostaneme uvoľnené reakčné teplo.

Prevýšeniu 1 km zo zadania zodpovedá vzdialenosť zhruba 20 km a navyše to je dosť do kopca. Predpokladajme, že cyklista je chytrý a nechce sa úplne zabiť. Šprint a dlhšia jazda totiž využívajú úplne iné zdroje energie a mechanizmy ich premeny na energiu (tzv. metabolické dráhy). Dokonca sa na ne špecializujú aj rôzne druhy svalových vlákien. Menší výkon, ale väčšiu výdrž má aeróbne (v reakcii vystupuje kyslík) spaľovanie tukov. Zvoľme si teda ako zdroj energie bežný tripalmitoylglycerol. Entalpia jeho spálenia je⁹ $\Delta H_{r,1}^\circ(C_{51}H_{98}O_6) = -32 \text{ MJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. Keďže je záporná, uvoľní sa z 1 molu spáleného $C_{51}H_{98}O_6$ teplo 32 MJ. Teraz potrebujeme zistiť, aká práca sa z neho dá vykonať.

Biochémi

Základnou „energetickou jednotkou“ v metabolických dráhach je adenzíntrifosfát (ATP). Väčšinou sa hydrolyzuje na adenzíndifosfát (ADP) a fosfát (Pi), pričom sa uvoľňuje energia pre iné energeticky náročné biochemické reakcie, alebo sa z ADP a Pi skladá pomocou energie uvoľnenej v biochemických reakciách. Niekedy sa naraz odtrhnú dve fosfátové skupiny ako difosfát

⁹<https://archive.today/rwFII>

(PPi), čo je ale energeticky ekvivalentné dvom reakciám $\text{ATP} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{ADP} + \text{Pi}$. A niekedy sa použije iný nukleotid, napr. guanozíntrifosfát (GTP), ale prenáša prakticky rovnaké množstvo energie. Môžeme preto hovoriť o ekvivalentoch ATP potrebných/vzniknutých pri reakcii z ADP ako o jednotkách energie.

Okrem ATP sa často objavujú aj ďalšie pomocné látky (kofaktory), napr. nikotínamidadenínindinukleotid (NAD^+) a jeho analógy ako flavínadenínindinukleotid (FAD). Majú aj svoje redukované formy (NADH , FADH_2), ktoré sú súčasťou tzv. elektrónového transportného reťazca, kde sa redukuje kyslík a vzniká voda. Pri tom sa uvoľní energia, ktorá sa v prípade NADH využije na vznik 2,5 ekv. ATP (v prípade FADH_2 vznikne 1,5 ekv. ATP). Ďalším dôležitým biochemickým kofaktorom je koenzým A (CoA).

Pri trávení sa tuk rozloží na glycerol a masťné kyseliny, v našom prípade 3 ekv. kyseliny palmitovej ($\text{C}_{15}\text{--COOH}$; uhľovodíkový reťazec budeme len stručne značiť počtom uhlíkov). Tieto látky sa nejako musia dostať do bunky. Pritom sa síce regeneruje a zasa rozkladá tuk, ale tento proces nie je podstatný pre energetické úvahy. Pozrime sa na metabolizmus kyseliny palmitovej v bunke.

Prvý krok, v ktorom sa energia spotrebuje, je „aktivácia“ masťnej kyseliny jej pripojením na CoA. To si vyžiada spotrebu 2 ekvivalentov ATP (toto je príklad reakcie, v ktorej z ATP vzniká AMP). Vzniknutý $\text{C}_{15}\text{CO--CoA}$ pokračuje do β -oxidácie – cyklického procesu, v ktorom sa vždy z $\text{C}_{2n+1}\text{CO--CoA}$ odtrhne acetylkoenzým A (Ac--CoA , v našom značení $\text{C}_1\text{CO--CoA}$) za vzniku 1 ekv. FADH_2 , 1 ekv. NADH (teda 4 ekv. ATP) a $\text{C}_{2n-1}\text{CO--CoA}$. Teraz vidíme, že sme si dobre zvolili kyselinu s párnym počtom uhlíkov: uhľovodíkový reťazec sa vždy skrúti o 2 a z $\text{C}_{15}\text{CO--CoA}$ vznikne 8 Ac--CoA a 32 ekv. ATP¹⁰

Ac--CoA pokračuje do citrátového cyklu, v ktorom z neho vznikne CO_2 , H_2O , 3 ekv. NADH , 1 ekv. GTP a 1 ekv. FADH_2 . Celkový energetický zisk z kys. palmitovej je 110 ekv. ATP. Glycerol môže byť prevedený na glycerinaldehyd-3-fosfát (spotrebuje sa 1 ekv. ATP a vznikne 1 ekv. NADH). Z neho vznikne v glykolýze Ac--CoA (uvoľní sa 1 ekv. ATP a 2 ekv. NADH), ktorý zas pokračuje do citrátového cyklu. Z glycerolu získame teda 17,5 ekv. ATP a z tripalmitoylglycerolu asi 350 ekv. ATP.

Termodynamika

Teraz sa naskytuje otázka: akú prácu vedia svaly vykonať pomocou daného množstva ATP?

Najprv si ujasnime, ako sa vyráta entalpia. Nestačí zobrať len súčet energií chemických väzieb produktov mínus reaktantov – zmenu vnútornej energie molekúl ΔU v reakcii – lebo v reakcii vznikajú aj plyny, ktoré sa eventuálne uvoľňujú do vzduchu. Pri uvoľnení plynov s objemom V do prostredia s tlakom p (ktorý môžeme považovať za atmosférický) treba vykonať prácu pV , teplo spotrebované pri reakcii teda získame ako $\Delta H = \Delta U + pV \approx \Delta H^\circ$.

Mínus entalpia síce vyjadruje teplo, ktoré sa uvoľní v reakcii, ale nie všetko sa dá premeniť na prácu. Problém je v zmene entropie. Entropia sa totiž mení jednak tým, že sa uvoľňuje alebo spotrebuje teplo v prostredí, ale aj vznikáním a zaníkaním väzieb v molekulách. Entropia je „miera neusporiadanosti systému“, takže informácia o tom, že dva atómy sú spojené, do nej určite prispieva. 2. termodynamický zákon hovorí, že na to, aby entropia neklesala, sa musí časť energie uvoľnenej premeniť na teplo, a nie na prácu.

¹⁰Pri odbúravaní masťných kyselín s nepárnym počtom uhlíkov sa β -oxidácia zastaví na trojuhlíkovom konci – propionylkoenzým A (v našom značení $\text{C}_2\text{CO--CoA}$). Ten ďalej prechádza biochemickými dráhami trojuhlíkatých a štvoruhlíkatých kyselín.

Maximálnu prácu (zasa s opačným znamienkom, ako pri entalpii), ktorá sa môže uvoľniť v reakcii, popisuje tzv. reakčná Gibbsova energia ΔG . V reakcii $\text{ADP} + \text{Pi} \longrightarrow \text{ATP} + \text{H}_2\text{O}$ sa dá vyjadriť ako

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = \Delta H - T\Delta S^\circ + RT \ln q \approx \Delta G^\circ + RT \ln q,$$

kde $q = [\text{ADP}][\text{Pi}]/[\text{ATP}]$ je stechiometrický súčin bezrozmerných koncentrácií (v jednotkách $\text{mol}\cdot\text{l}^{-1}$; koncentrácia rozpúšťadla – vody – sa doňho neráta). Výraz $\Delta H^\circ - T\Delta S^\circ$ pri teplote 25°C ($T \doteq 298\text{K}$) potom označujeme ako štandardnú zmenu Gibbsovej energie v danej reakcii. Pre hydrolýzu ATP poznáme¹¹ $\Delta G^\circ \doteq -31\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Entropia $\Delta S(\text{M})$ jedného molu jedného typu molekúl M (teda hodnota, o ktorú sa zmení entropia tým, že tieto molekuly zaniknú) sa totiž dá rozpísať do dvoch členov – člen ΔS° zodpovedá entropii, ktorú by mali, ak by sa mohli voľne pohybovať v objeme 1 l a člen $-R \ln q$ prepočtu entropie na iný objem, v ktorom budú potom mať inú koncentráciu. ΔS° závisí zložito na vnútornom usporiadaní týchto molekúl, ide teda o experimentálne namerané hodnoty. Zmenu entropie v reakcii potom vypočítame z ΔS jednotlivých molekúl rovnako ako zmenu entalpie.

Vidíme, že ΔG_{ATP} závisí výrazne na koncentráciách ATP, ADP a Pi, ale aj rôznych látkach, ktoré tieto koncentrácie ovplyvňujú. Jej hodnotu je treba proste merať. Väčšina hodnôt ΔG_{ATP} nameraných v svaloch sa pohybuje okolo¹² $-50\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$, z čoho vieme prepočítať, že na prácu (teda ΔG , ktoré sa dá získať z 350 ekv. ATP) sa môže premeniť maximálne zhruba polovica tepla uvoľneného pri spálení $\text{C}_{51}\text{H}_{98}\text{O}_6$ (teda zmeny entalpie), $\Delta G_1 \doteq 18\text{MJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Takú dokonalú účinnosť sval samozrejme nemá. Ten istý zdroj uvádza, že v skutočnosti je získaná práca len zhruba 30 % ΔG_1 , teda 5,5 MJ z 1 molu tripalmitoylglycerolu.

Pozor, spočítali sme len max. prácu, ktorá sa dá teoreticky z ATP vyťažiť. V skutočnosti svaly nepremieňajú ATP na prácu, ale na napätie T . Doslova na to, aby sa posunuli svalové proteíny. Sila F , ktorú vie sval zložený z rovnakých vlákien vyvinúť, teda rastie s jeho prierezom S , lebo $F = TS$. Ak by sme človeka zväčšili k -krát, jeho objem a hmotnosť narastie k^3 -krát a max. sila len k^2 -krát. Väčší, resp. ťažší, človek teda na svoju hmotnosť vyvinie menšiu silu ako menší a ťažšie sa utiahne do kopca. To je dôvod, prečo sú profesionálni cyklisti relatívne chudí.

Mechanika

Áké sily cyklistu brzdia? Samozrejme ťažová, potom nejaký odpor vzduchu, trenie v ložiskách a valivý odpor. Odporová sila vzduchu rastie s rýchlosťou cyklistu, ktorá do kopca nie je veľmi veľká. Konkrétne ak by tých 20 km mal náš cyklista prejsť pohodovým tempom za 4 hodiny, bude mať rýchlosť $v = 5\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Pri tomto tempe môžeme využiť vyššie spomenutý mechanizmus získavania energie. Plochu cyklistu odhadnime na $S = 0,5\text{m}^2$, koeficient odporu vzduchu nech je $C = 1$, hustota vzduchu $\rho \doteq 1\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Podľa vzorca

$$F_o = \frac{CS\rho v^2}{2}$$

dostaneme odhadom $F_o \doteq 0,5\text{N}$. Ak má cyklista s bicyklom hmotnosť $m = 80\text{kg}$ a uhol stúpania (pre malé hodnoty je uhol v rad. približne rovný stúpaniu v percentách) $\alpha = 0,05$, zložka ťažovej

¹¹<https://archive.today/jjCfY>

¹²Nicholas P. Smith, Christopher J. Barclay, Denis S. Loiselle: The efficiency of muscle contraction. Progress in Biophysics and Molecular Biology 2005.

sily, ktorá ho ťahá dozadu, je $F_{g,\parallel} = mg \sin \alpha \doteq 40 \text{ N}$, odpor vzduchu je teda úplne zanedbateľný. Straty energie v ložiskách sa dajú výrazne minimalizovať dobrým namazaním a valivý odpor dofúkaním pneumatík¹³ (predpokladáme, že cyklista je chytrý), takže môžeme vplyv všetkých síl okrem gravitačnej zanedbať.

Existuje veľa techník bicyklovania do kopca. Niektoré sú lepšie (efektívnejšie), iné horšie. Nie všetka práca svalov sa totiž využije na prekonanie spomenutých síl. Časť sa spotrebuje na zrýchľovanie/spomaľovanie nôh, časť na udržanie polohy tela a bicykla (napr. ak cyklista na pedáloch stojí a bicykel sa viac kýve zo strany na stranu) a taktiež noha netlačí úplne kolmo na pedále, takže sa energia spotrebuje aj na napínanie svalov neúčinným tlačením rovnobežne s klukou pedálov¹⁴.

Tento tretí efekt sa môžeme pokúsiť odhadnúť. Zoberme si jednoduchý model krútenia pedálov: uhlová rýchlosť pedálov je konštantná, cyklista tlačí na pedál v rozsahu uhlov (pedálu od kolmice) $\varphi \in (20^\circ, 160^\circ)$ konštantnou silou F zvislo dole. Môžeme predpokladať, že svaly spotrebujú rovnako veľa energie v oboch prípadoch. Akú prácu (W_1) vykoná oproti prípadu (W_0), keď by tlačil silou F vždy kolmo na kluku pedálov?

Je jasné, že $W_0 = Fs = 140^\circ RF \doteq 2,4RF$, kde R je vzdialenosť pedálu od osi otáčania. Ak F pôsobí dole, analogicky s potenciálnou energiou v tiažovom poli môžeme povedať, že sa pedál pohol o $\Delta h = R(\cos 20^\circ - \cos 160^\circ) \doteq 1,9R$ dole a vykonaná práca $W_1 = \Delta h F \doteq 1,9RF$, čo je asi 80% W_0 . Skutočné straty energie závisia dosť na spôsobe pedálovania, ale použijeme tento výsledok pre finálny odhad.

Záver

Prevýšeníu $H = 1 \text{ km}$ zodpovedá potenciálna energia $E_p = Hmg \doteq 0,7 \text{ MJ}$. Odhadli sme, že svaly musia spáliť aspoň $E_p/0,8 \doteq 0,9 \text{ MJ}$. To zodpovedá 0,15 mol tripalmitoylglycerolu, resp. hľadanej energii $E = 5 \text{ MJ} \doteq 1 \cdot 10^3 \text{ kcal}$ energie, resp. štyrom 50gramovým nemenovaným tyčinkám s energetickou hodnotou zhruba 250 kcal.

To je stále len pre dosť idealizovaný prípad. Ak by stúpanie nebolo rovnomerné, teda s krátkymi prudkými stúpaniami a rovinami alebo sa cyklista ponáhal, musel by zapojiť anaeróbne dýchanie, ktoré je menej efektívne, lebo nie je možné využiť elektrónový transportný reťazec. V skutočnosti aj pri miernom tempe budú svaly spaľovať aj glukózu. Celý organizmus potrebuje viac energie atď., proste je kopa bodov, v ktorých sa ešte môže stratiť energia. Jedna platná cifra v E je veľa, odhad je skôr zopár MJ a zopár tyčieniek.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Úloha IV.E ... lahvované povrchové napätí 8 bodů; průměr 5,20; řešilo 30 studentů

Máme válcovou nádobu, ve které vytvoříme z boku kruhový otvor. Nalijeme do ní vodu. Voda bude postupně vytékat, ale v nějaké výšce nad otvorem se výtok vody z nádoby zastaví. Určete povrchové napětí vody na základě změřené výšky nad otvorem, ve které se hladina zastaví. Pokus několikrát opakujte, a to alespoň se třemi různě velkými otvory. Jako válec může posloužit vhodná PET lahev. Karel se inspiroval tím, co říkal Vojta Žák, že dělá na kroužku fyziky.

¹³<https://archive.today/JfUUv>

¹⁴<https://archive.today/uXn09>

Teorie

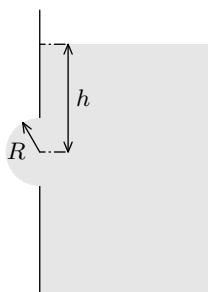
Podívejme se na začátek, kde se povrchové napětí vody vlastně bere a co to je. V kapalině jsou molekuly v mnohem menších vzájemných vzdálenostech než v plynu, takže v blízkosti dané molekuly je dostatečný počet dalších molekul, které na ni působí přitažlivými silami, které vyvolávají nezanedbatelný kohezní tlak. Pokud si vezmeme situaci, kdy máme molekulu kapaliny ve větší hloubce pod volným povrchem, počet molekul kolem této molekuly je poměrně velký a tyto molekuly jsou rovnoměrně rozložené, takže se jejich interakce vzájemně vyruší a výslednice sil je prakticky rovna nule. Pokud se však molekula dostatečně přiblíží povrchu, výslednice sil, jimiž na ni působí ostatní molekuly kapaliny, bude směřovat dovnitř kapaliny kolmo k volnému povrchu. Samozřejmě na ni budou silově působit i molekuly plynu (syté páry nad kapalinou), nicméně hustota kapaliny je obvykle řádově větší než plynu, proto celková výslednice sil bude stále směřovat dovnitř kapaliny. Z toho plyne, že převedení molekuly z vnitřku kapaliny do její povrchové vrstvy je spojeno s vykonáním práce proti silám působení ostatních molekul. Takže molekuly na povrchu musí mít větší potenciální energii, kterou nazýváme povrchová energie E_p . Povrchové napětí můžeme definovat jako práci vnějších sil potřebných k zvětšení plochy vztaženou na změnu plochy, tedy

$$\gamma = \frac{dE_p}{dS}.$$

Případně jako přitažlivou sílu molekul F vztaženou na jednotku délky myšleného řezu povrchem kapaliny l , tedy

$$\gamma = \frac{dF}{dl}.$$

Podíváme-li se na náš experiment (schéma na obrázku 3), pak je zřejmé, že hydrostatická síla, respektive hydrostatický tlak vody bude nutit kapalinu vytékat bočním otvorem ven. Povrchové napětí naopak bude působit soudržnost kapaliny a bránit jejímu odtékání.



Obr. 3: Nákres.

Vně nádoby je atmosferický tlak p_a . Tlak v hloubce h pod hladinou kapaliny je roven součtu atmosferického a hydrostatického tlaku, tedy $p_a + h\rho g$, kde ρ je hustota kapaliny a g je tíhové zrychlení. Pro rozdíl tlaků Δp na rozhraní dvou tekutin za rovnovážného stavu platí Youngova-Laplaceova rovnice

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right), \quad (1)$$

kde γ je povrchové napětí a poloměry křivosti rozhraní jsou R_x a R_y . Dále budeme předpokládat, že $R_x = R_y = R$, tedy že povrch kapaliny má tvar kulového vrchlíku o poloměru R . Z obrázku 3 vidíme, že poloměr křivosti rozhraní R bude vždy větší nebo roven (v případě, že má povrch tvar polokoule) než poloměr otvoru $d/2$, tedy z rovnice (1) dostáváme nerovnici $\Delta p \leq 4\gamma/d$. Po dosazení za Δp již můžeme získat vztah pro povrchové napětí

$$\gamma \geq \frac{h\varrho g d}{4},$$

přičemž dále budeme předpokládat, že povrch kapaliny má přesně tvar polokoule.

Je dobré myslet na to, že povrchové napětí je poměrně výrazně závislé na teplotě. Pro pokus proto byla použita voda s pokojovou teplotou, která činila přibližně 20°C , pro kterou by povrchové napětí vody mělo¹⁵ být asi $0,073\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Hustota destilované vody při této teplotě činí asi $998\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, jelikož však stejně máme kohoutkovou vodu, spokojíme se pro výpočet se zaokrouhlenější hodnotou $1\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Experiment

Pro experiment byla použita PET láhev, jak doporučuje zadání. Do ní byl jehlou vytvořen otvor. Jehla byla v příslušné šířce označena a její průměr zde byl změřen posuvným měřítkem, tento průměr byl posléze považován za průměr otvoru d .

Do láhve byla nalita voda do dostatečné výšky nad otvorem a nechala se volně odtékat až do předpokládaného vyrovnání tlaků, respektive zastavení odtékání. A poté byla pomocí pravítka s dílkou po $0,5\text{ mm}$ změřena výška hladiny h od středu otvoru po dolní hranu menisku hladiny. Měření bylo provedeno pro celkem čtyři různé průměry otvoru d , pro každý bylo opakováno pětkrát (pro nejmenší otvor trvalo jedno měření poměrně dost dlouho, větší počet opakování by tedy byl časově náročný).

Pro větší otvory a větší míru naplnění PET láhve šlo dobře pozorovat klesající rychlost vytékání vody (snižující se spolu s hydrostatickým tlakem) – její proud se postupně více a více přibližoval PET lahvi až nakonec tekla už pouze po ní.

Výsledky a diskuze

V tabulce 1 jsou zaznamenány naměřené výšky hladin h spolu s průměrnou výškou \bar{h} pro každý z otvorů s nejistotou určenou jako kombinovaná nejistota nejistoty typu A (určené jako výběrová směrodatná odchylka násobená kvantilem Studentova rozdělení pro daný počet měření) a nejistoty typu B (polovina nejmenšího dílku pravítka), šířka otvoru d a dopočítané povrchové napětí γ , přičemž nejistota $\Delta\gamma$ povrchového napětí γ byla určena pomocí zákona šíření nejistot

$$\Delta\gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial d}\Delta d\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(\varrho g d \Delta h)^2 + (h \varrho g \Delta d)^2},$$

kde Δh je nejistota hloubky h , Δd je nejistota průměru otvoru d a $g = 9,81\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ i hustotu vody považujeme za konstanty.

Vidíme, že získané hodnoty povrchového napětí jsou přibližně čtyřikrát menší, než je tabulková hodnota, kterou bychom u vody dané teploty očekávali.

¹⁵<http://www.converter.cz/tabulky/povrchove-napeti.htm>

Tabulka 1: Naměřené výšky hladin h , průměrná hodnota výšek \bar{h} , průměr otvorů d a vypočtené povrchové napětí vody γ pro čtyři různé průměry otvoru d .

$\frac{d}{\text{mm}}$	h		\bar{h}		$\frac{\gamma}{\text{N}\cdot\text{m}^{-1}}$		
$0,4 \pm 0,1$	18,0	17,5	17,0	18,5	18,0	$17,8 \pm 0,9$	$0,017 \pm 0,004$
$0,7 \pm 0,1$	10,0	11,0	11,0	10,5	10,0	$10,5 \pm 0,8$	$0,018 \pm 0,003$
$1,0 \pm 0,1$	8,5	7,5	8,0	8,5	8,5	$8,2 \pm 0,6$	$0,020 \pm 0,003$
$1,3 \pm 0,1$	5,5	5,5	5,5	6,0	6,0	$5,7 \pm 0,3$	$0,018 \pm 0,002$

Důvodem je pravděpodobně hlavně to, že experiment je sice vhodnou demonstrací důsledků povrchového napětí kapalin (všechna voda nad otvorem neodtéká, i když má kudy), ale nehodí se pro jeho kvantifikaci. Zásadním problémem je nejspíše právě to, že vodu necháváme odtékat, takže není statická a dochází k proudění, neměříme tedy situaci při vyrovnání tlaků, tak jak bychom čekali. Vhodnější by mohlo být naopak nechat kapalinu velmi pomalu natékat hadičkou u dna a hodnotit, kam hladina vystoupí, neboť takto bychom omezili víření kapaliny. Dalšími příčinami podhodnocených výsledků mohou být například neideálnost otvoru, nebo to, že kapka nemusí držet v otvoru, ale může jej překrývat, skutečný poloměr je poté větší, což také vede k menším hodnotám povrchového napětí. Poslední zmíněný jev bychom mohli odstranit zvětšením otvoru, avšak v příliš velkých otvorech se utvoří pouze mírně zakřivená blána, jejíž poloměr křivost je i násobně větší než poloměr otvoru, což opět vede k velkým nepřesnostem při stanovení povrchového napětí.

Skutečné hodnotě se výrazněji nepřiblížíme, ani když zohledníme nejistoty měření, čili celý interval, ve kterém by se hodnota povrchového napětí měla nacházet. Je to dáno tím, že nejistoty měření hodnotí především přesnost, s jakou jsme něco měřili, nicméně prakticky jsme neměřili to, co jsme předpokládali.

Závěr

V našem experimentu jsme mohli pozorovat důsledky povrchového napětí. Získané hodnoty povrchového napětí převážně pod $0,020 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ jsou však výrazně menší, než by měly pro vodu s pokojovou teplotou být. Na závěr je tedy nutné říct, že experiment pro určení hodnoty povrchového napětí kapalin není vhodně navržen.

Kristína Nešporová

kiki@fykos.cz

Úloha IV.S ... Ljapunovská

6 bodů; průměr 4,79; řešilo 14 studentů

1. Uvažujte propisku o délce 10 cm s těžištěm přesně v půlce a $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Nyní si představte, že jste propisku postavili na stůl s nulovou výchylkou δx s přesností na n desetinných míst a s nulovou rychlostí. Za jak dlouho po postavení propisky si budete moct být jisti pouze s $n - 1$ desetinnými místy nulovostí výchylky?
2. Uvažujte model počasí s největším Ljapunovovým exponentem $\lambda = 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Předpověď počasí přestává být použitelná, pokud je její chyba více než 20 %. Pokud jste dokázali změřit

stav počasí s přesností na 1 %, na jak dlouho byste odhadovali, že bude dobrá vaše předpověď? Odpověď podejte v dnech a hodinách.

3. Vezměte si Lorenzův model konvekce z minulého dílu, opište si z něj funkci $f(x_i, t)$ a nasimulujte a vykreslete si hodnotu parametru $X(t)$ pro dvě různé trajektorie pomocí příkazů

```
X01=1;
Y01=2;
Z01=5;
X02=...;
Y02=...;
Z02=...;
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01, 'MaxStep', 0.1);
pocPodminka1=[X01, Y01, Z01];
reseni1=ode45(@f, [0, 45], pocPodminka1, nastaveni);
pocPodminka2=[X02, Y02, Z02];
reseni2=ode45(@f, [0, 45], pocPodminka2, nastaveni);
plot(reseni1.x, reseni1.y(:, 1), reseni2.x, reseni2.y(:, 1));
pause()
```

Místo tří teček u $X02, Y02, Z02$ musíte zadat počáteční podmínky pro druhou trajektorii. Pusťte kód alespoň pro pět řádově odlišných, ale malých odchylek a poznamenejte si čas, ve kterém se druhá trajektorie od první kvalitativně odlepí (tj. směřuje například na úplně druhou stranu). Odchylku nezmenšujte pod řád cca 10^{-8} , protože pak se začnou projevovat nepřesnosti numerické integrace. Načrtněte závislost odlepovacího času na řádu odchylky.

Bonus Pokuste se ze získané závislosti odlepovacího času na velikosti odchylky odhadnout odpovídající Ljapunovův exponent. Budete potřebovat víc než pět běhů a můžete předpokládat, že v okamžiku odlepení velikost odchylky pokaždé zrovna překročila nějaké konstantní Δ_c .

1. Přesný vývoj linearizovaných rovnic ze seriálu nám dává, že při $\delta v(0) = 0$ se počáteční výchylka propisky δx_0 vyvíjí jako¹⁶

$$\delta x(t) = \delta x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right).$$

My chceme vědět, kdy v nejhorším případě výchylka zasáhne i $(n - 1)$ -té desetinné místo, i přestože začínala o řád níže. Zajímá nás tedy, v jaký okamžik se počáteční odchylka desetkrát zvětší, neboli hledáme čas T , kdy je $\delta x(T) = 10\delta x_0$. Nemusíme tedy do rovnic vůbec dosazovat nějaké konkrétní δx_0 a řešíme jen rovnici

$$10 = \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}T\right),$$

což lze pomocí inverzního kosinu hyperbolického $\operatorname{arccosh}$ obrátit jako

$$T = \operatorname{arccosh}(10)\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Pro $L = 5 \text{ cm}$ a $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ pak máme $T \doteq 0,2 \text{ s}$.

¹⁶Vzpomeňte na definici kosinu hyperbolického $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$.

2. Náš model počítá vývoj počasí $\mathbf{z}(t)$, ale kvůli tomu, že jsme počasí změřili s nějakou odchylkou, doopravdy se vyvíjí jako $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{z}(t) + \delta\mathbf{z}(t)$. Díky tomu, že má ale tento systém největší Ljapunovův exponent λ větší než nula, bude se výchylna v nejhroším případě vyvíjet zhruba jako

$$|\delta\mathbf{z}(t)| \approx |\delta\mathbf{z}(0)|e^{\lambda t}.$$

Pokud je na začátku relativní chyba měření 1% a ptáme se po chybě 20%, vlastně nás zajímá, za jak dlouho se relativní odchylka v nejhroším případě zdvacetinásobí. Předpis pro $\delta\mathbf{z}(t)$ je platný jenom pro *absolutní* odchylku, a pokud neznáme $|\mathbf{z}(t)|$ ve všech časech, není možné relativní odchylku $|\delta\mathbf{z}(t)|/|\mathbf{z}(t)|$ přesně sledovat. My tu ale už tak děláme hodně jednoduchý odhad, a proto si můžeme tipnout, že relativní odchylka se zdvacetinásobí zhruba v ten okamžik, co se zdvacetinásobí¹⁷ $|\delta\mathbf{z}(t)|$. Hledáme tedy čas T takový, že

$$20 = e^{\lambda T}.$$

To je jednoduché počítání, získáváme pro tento čas

$$T = \frac{\ln(20)}{\lambda}.$$

Pro $\lambda = 1,16 \cdot 10^{-5}$ s dostáváme T jako 3 dny a nula hodin. Přesnost výsledku samozřejmě není vzhledem k hrubosti odhadu na počty hodin, ale na jednotky dní můžeme brát odhad poměrně vážně. Hodnota exponentu byla také vybrána tak, aby zhruba vystihovala spolehlivost předpovědi počasí v praxi, ale doopravdy je samozřejmě odhadování spolehlivosti předpovědi ještě o něco složitější.

3. Tato úloha by měla být přímočarým použitím kódu ze zadání a z minulého vzorového řešení. Jak vidíte na obrázku 4, „odlepovací čas“ není úplně precizní pojem; trajektorie se často viditelně odchylovala už před kvalitativním „odlepením“, a proto nemělo cenu čas odlepení T zachycovat na přesnost větší než jednotky.

V tabulce 2 je zachyceno několik odlepovacích časů spolu s vybranými počátečními výchylnkami δX_0 . Výchylnku jste ale mohli vnést do libovolné počáteční souřadnice, ne jen do X_0 . Místo δX_0 v tabulce píšeme $\log_{10}(\delta X_0)$, protože nejlepší bylo odchylky posouvat o celé řády. Náčrt závislosti najdete v grafu na obrázku 5.

V grafu je také načrtnuta přímka přibližně vystihující sklon závislosti T na $\log_{10}(\delta X_0)$, protože z tohoto sklonu lze odhadnout největší Ljapunovův exponent systému (což byla bonusová část úlohy). Předpokládáme-li totiž, že zhruba platí $\Delta_C = \delta X_0 e^{\lambda T}$ a závislost zlogaritmuje a algebraicky upravíme, dostáváme

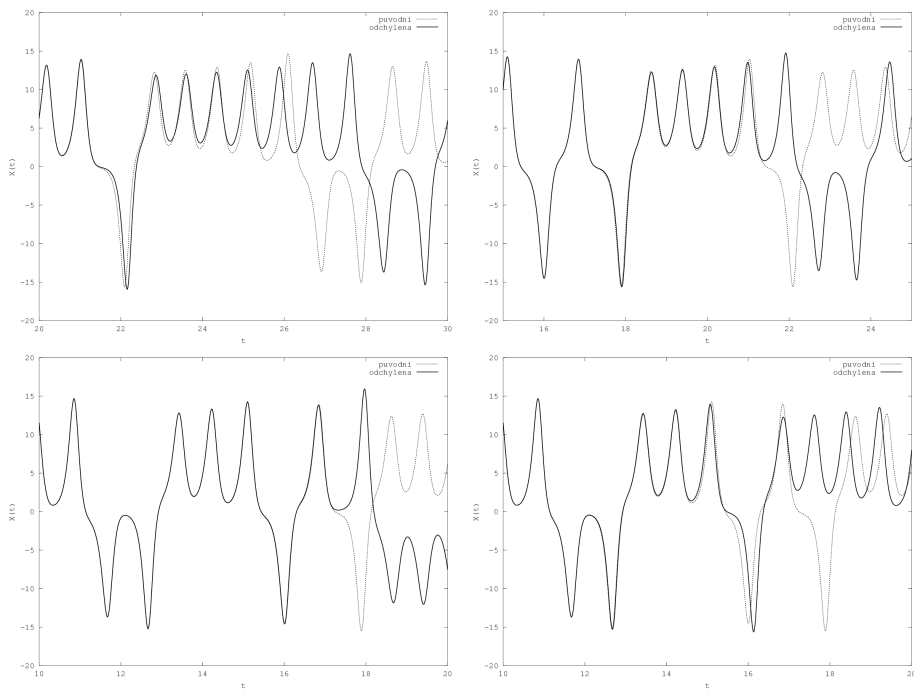
$$T = -\frac{1}{\log_{10}(e)\lambda} \log_{10}(\delta X_0) + \frac{\log_{10}(\Delta_C)}{\log_{10}(e)\lambda}.$$

My ale předpokládáme, že poslední člen na pravé straně rovnice je konstantní, proto by měla být mezi T a $\log_{10}(\delta X_0)$ lineární závislost se sklonem $-1/(\log_{10}(e)\lambda)$.

Dobře vidíte na obrázku 5, že závislost není tak úplně lineární, ale naopak taková hrboilatá. Někáký sklon ale dokážeme body proložit a z toho dostáváme přibližně $\lambda = 0,8$. Doopravdy je největší Ljapunovův exponent spočítaný sofistikovanějšími metodami $\lambda = 0,9$, což je vzhledem k hrubosti metody opravdu dobrá shoda.

Vojtěch Witzany
witzany@fykos.cz

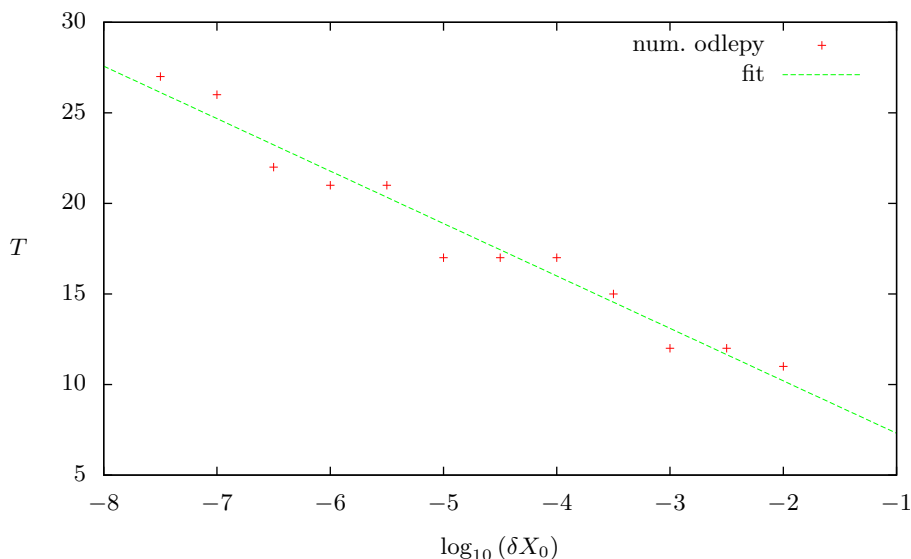
¹⁷Tj. předpokládáme, že $|\mathbf{z}|$ bude po zdvacetinásobení zhruba stejné jako na začátku.



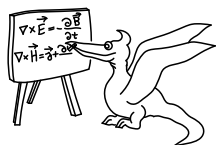
Obr. 4: Zleva doprava a shora dolů postupně odlepení souřadnice $X(t)$ Lorenzova modelu tak, jak mi to spočítalo a nakreslilo Octave. Odchyly jsou $\delta X_0 = 10^{-7}; 10^{-6}; 10^{-5}; 10^{-4}$.

Tabulka 2: Časy odlepení pro vybrané počáteční výchylky.

$\log_{10}(\delta X_0)$	T
-7,5	27
-7,0	26
-6,5	22
-6,0	21
-5,5	21
-5,0	17
-4,5	17
-4,0	17
-3,5	15
-3,0	12
-2,5	12
-2,0	11



Obr. 5: Zleva doprava a shora dolů postupně odlepení souřadnice $X(t)$ Lorenzova modelu s odchylkou δX_0 z tabulky 2.



Seriál: Rotor a jeho kopačky

V minulých dílech jsme se podívali na to, jak numericky integrovat diferenciální rovnice a definovali si chaos. Tento díl bude o něčem trochu jiném; naučíme se, jak *vyrobit* chaos. Nandejte si šéfkuchařské čepice, vezměte si jako ingredience různé pružinky, táhla, kuličky, kyvadla a podívejte se na to, co je na chaos potřeba:

1. Zajistěte si, aby vám různé části dynamického systému neulétly donekonečna, pamatujte, že chaos je definovaný pro vázaný systém.
2. Pokud v systému hodně dochází ke tření a k disipaci, musíte systému poskytnout nějaký systém pošťuchování nebo buzení, aby se nepřestal pohybovat. Zase ale nesmí pošťuchování způsobit, že se části systému pohybují nekonečně rychle, to by bylo také svým způsobem porušení podmínky na vázanost systému, protože by unikal někam do pryč v „prostoru rychlostí“.
3. Uvolněte dostatečné množství stupňů volnosti systému. Pokud se nemůže trajektorie pohybovat v dostatku rozměrů, k chaosu z principu nemůže docházet.
4. Přidejte nelinearitu, tj. přidejte do systému síly, které nejsou jen konstantní nebo lineárně závislé na souřadnicích. Žádné nudné síly lineárně závislé na výchylce x jako u pružinky $F = -kx$! Chceme alespoň něco jako $F = -kx^2$!

Garantuji vám, že když všechny tyto ingredience použijete, v drtivé většině případů dostanete chaotický systém. Dost možná z tohoto receptu ještě nejste úplně moudří, ale to nevadí. Od toho, abyste to pochopili, je tu tento díl seriálu. Postupně si v něm každý ze zmíněných kroků vysvětlíme, a nakonec dokonce uvaříme velmi delikátní chaotickou *mapu*.

Terminátor? Kdepak, rotor

Začneme hodně jednoduše první ingrediencí, vázaností systému, a uvidíme, kam se to vyvine. Nejjednodušší způsob, jak mít systém vázaný, je jej přivázat nebo dokonce zafixovat tak, aby se sice mohl pohybovat, ale pouze v konečné oblasti prostoru. Představme si, že na tenkou osu připevníme nehmotnou tyčku, na jejímž druhém konci je hmotný bod. Tyčka se může zcela volně otáčet kolem osy, nemůže se však po ní posouvat. K určení polohy bodu v daném okamžiku nám pak stačí jenom jedno číslo, jako vhodný se jeví úhel otočení okolo osy od zvolené referenční polohy. Tomuto úhlu budeme říkat φ . Máme tedy něco, čemu se říká *rotor*, věcičku, co se může otáčet jen kolem dokola v nějakém směru a má *jen jeden stupeň volnosti*, který je navíc automaticky vázaný. Když totiž protočíte úhel φ (v radiánech) o 2π , jste zase na tom samém místě, takže existuje jen konečný interval hodnot φ , ve kterém se náš rotor může z principu pohybovat.

Zopakujeme pro pořádek, že pokud popisujeme polohu těžiště rotoru pomocí úhlu φ , je rychlost v_φ ve směru rostoucího¹⁸ φ dána jako

$$v_\varphi = R\dot{\varphi},$$

kde $\dot{\varphi}$ je časová derivace φ a R je vzdálenost těžiště rotoru od osy. Pokud chceme zjistit, jaké je zrychlení a_φ ve směru rostoucího φ , předchozí rovnici prostě zderivujeme podle času a dostaneme

$$a_\varphi = \dot{v}_\varphi = R\ddot{\varphi},$$

kde jsme užili toho, že R je konstantní.

Pokud pak použijeme Newtonův zákon $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, kde m je hmotnost rotoru, a uvážíme, že veškeré síly mimo směr otáčení se vyruší díky uchycení na ose, dostáváme jenom jednu rovnici pro pohyb rotoru

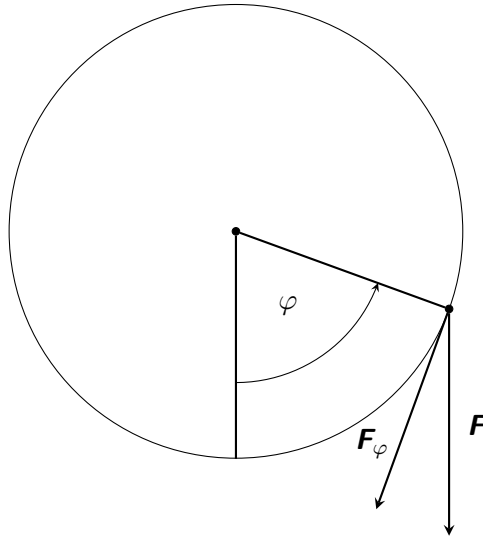
$$F_\varphi = ma_\varphi = mR\ddot{\varphi}.$$

Pokud byste rotorem otočili tak, aby rotor při $\varphi = 0$ visel dolů ve směru tíhové síly, na rotor by v libovolné poloze působila (jako vždy) konstantní tíhová síla $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_d$, kde \mathbf{e}_d je vektor mířící dolů. Zprvu se tedy zdá, že na chaos je tíhová síla příliš nudná, ale nesmíme zapomenout, že rotor je vázaný a při každém natočení φ se část tíhové síly vyruší a zbude z ní jen část $\mathbf{F}_{g\varphi}$ ve směru možného otáčení rotoru (viz obrázek 6). Když si nakreslíme všechny náležité trojúhelníky a použijeme základní goniometrii, dostaneme, že z tíhové síly přežije jen

$$F_{g\varphi} = -mg \sin \varphi, \quad (2)$$

což už je taková zábavnější *nelineární* síla (nezávisí jenom tak na φ , ale i na něčem složitějším). Způsobí ale chaos? Jistě si pamatujete z hodin fyziky, že ne. Svislý rotor je totiž realizací *fyzikálního kyvadla*, které buď osciluje, pěkně periodicky sem a tam okolo svislé polohy, nebo se při dostatečné rychlosti protáčí kolem dokola – také periodicky.

¹⁸Tj. φ roste proti směru nebo po směru hodinových ručiček na rotoru. Záleží jen na nás, kterou ze dvou možností *orientace úhlu* si vybereme. Pokud ale zvolíme rostoucí φ třeba po směru hodinových ručiček, kladné v_φ znamená, že se rotor pohybuje právě po směru hodinových ručiček.



Obr. 6: Náčrt gravitační nebo elektrostatické síly působící na rotor a jejího průmětu do směru otáčení. Směr, ve kterém úhel φ roste je schválně načrtnutý tak, aby bylo jasné znaménko u $F_\varphi = -F \sin(\varphi)$. Síla totiž působí *proti* směru růstu φ , a proto musí mít záporné znaménko.

Jak to, že tedy ale nevyrobíme chaos? Zapomněli jsme snad na nějakou z ingrediencí? Nebo jsme jen měli smůlu? První ingredienci máme, systém je vázaný. Tření neuvažujeme, takže druhá ingredience je také v zásadě splněna. A čtvrtou také, síla je přeci nelineární. A třetí? Je jeden stupeň volnosti dost na chaos? Skoro.

Kolik dimenzí na chaos?

Pojďme nejdřív přemýšlet nad tím, kolik dimenzí má stav našeho rotoru. Určitě má nejméně jednu, a to úhel φ . Ale vystihuje pouze φ úplný stav našeho dynamického systému? Představte si následující: rotor je na $\varphi = 0$ a úplně v klidu. Teď si ale představte, že je na $\varphi = 0$, ale řítí se nějakým směrem, $\dot{\varphi}$ je nenulové. Jsou to ty samé stavy systému? Jistě ne. K vystižení stavu rotoru tedy potřebujeme dvě čísla, φ a $\dot{\varphi}$. Říkáme tedy, že se jedná o dvojrozměrný dynamický systém.

Tak ale co ten chaos. Existuje matematická věta, takzvaný *Poincarého-Bendixsonův teorém*, jejímž důsledkem je, že chaos nemůže nastat pro dynamický systém¹⁹ o méně než třech rozměrech. Ouha, to náš rotor ale ještě zatím nesplňuje. Představte si ale teď, že se rotor pohybuje pod časově proměnnou silou $\mathbf{F}(t)$. K vystižení úplného stavu systému by pak nestačilo jen říct φ , $\dot{\varphi}$, ale museli bychom také určit čas t , ve kterém se nacházíme a ze kterého se situace může vyvíjet docela jinak než v jiném čase t' .

¹⁹Bavíme se o fyzikálních systémech se spojitým časem. Pokud například vezmeme funkci $f(x)$, pak posloupnost postupných iterací této funkce daná vztahem $x_{n+1} = f(x_n)$ může být v jistém slova smyslu chaotická, i když je x jednorozměrné.

Pokud tedy umístíme rotor do nějakého pole nelineární časově proměnné síly $F_\varphi(t)$, máme třídimenzionální dynamický systém a už bychom měli najít chaotické chování.

Dávám ti kopačky, rotore!

Pokoušet se řešit pohyb v poli proměnné síly může ale být docela fuška. Budeme tedy předpokládat, že rotor si po většinu času vesele rotuje a po nějakém čase T se náhle zapne síla, která mu během krátkého okamžiku předá impuls a pak se zase vypne. Můžete si ověřit, že pokud působíme po nějaký čas Δt konstantní silou ve směru otáčení, působíme na rotor konstantním zrychlením a dostáváme změnu úhlové rychlosti

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{F_\varphi \Delta t}{mR}.$$

Bude se nám hodit rovnici vyjádřit pomocí *impulsu*, který je definován jako

$$I = \int_{\Delta t} F_\varphi dt,$$

což speciálně v případě konstantní síly dává $I = F_\varphi \Delta t$. Pro změnu úhlové rychlosti pak dostáváme

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{I}{mR}. \quad (3)$$

Pokud ale chceme dostat nějaký chaos, musí síla záviset třeba na úhlu, $F_\varphi = F_\varphi(\varphi)$. Na druhou stranu, pokud je síla takto závislá, nemáme takový hezký vztah pro změnu rychlosti jako (3), protože φ se samozřejmě během Δt změní a tím nebude konstantní působící síla.

Jediný způsob, jak toto jednoduše vyřešit, je předpokládat, že síla působí po tak krátkou dobu Δt , že její efekt předá impuls v jediném bodě φ . Ve výsledku tedy budeme mít, že rotor dostane jednou za časovou periodu T kopanec (impuls) $I = I(\varphi)$ závislý jen na okamžité poloze rotoru. Tento kopanec pak způsobí okamžitou změnu úhlové rychlosti

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{I(\varphi)}{mR}, \quad (4)$$

a jinak se bude rotor volně protáčet po svém. Tj. mimo kopance bude $\dot{\varphi}$ konstantní a φ bude rovnoměrně růst s touto rychlostí $\dot{\varphi}$.

V daném přiblížení tedy můžeme explicitně sledovat vývoj systému. Nejlepší je sledovat sekvenci bodů po uběhnutí každé „kopací periody“ T . Úhlovou rychlost a úhel po n kopnutích $\dot{\varphi}_n, \varphi_n$ můžeme z hodnot po předchozím kopnutí $\dot{\varphi}_{n-1}, \varphi_{n-1}$ vyvodit následovně: rotor se mezi kopanci prostě volně otáčí s úhlovou rychlostí $\dot{\varphi}_{n-1}$ a kopance si nevšimne, pro úhel φ_n tedy máme

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + T\dot{\varphi}_{n-1}.$$

Naopak úhlová rychlost $\dot{\varphi}$ se mezi kopanci nemění vůbec, ale samotný kopanec ho posune podle předpisu (4)

$$\dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_{n-1} + \frac{I(\varphi_n)}{mR}.$$

Vypínání a zapínání gravitace

Představte si nyní, že na rotor umístíme náboj e a umístíme jej mezi dvě velké desky kondenzátoru tak, že mezi nimi vzniká nějaké homogenní²⁰ elektrostatické pole \mathbf{E} ve směru tyčky rotoru, když je $\varphi = 0$ (opět jako na obrázku 6). Na rotor tedy působí síla $e\mathbf{E}$, ale do směru otáčení se promítne při tomto natočení jen $F_\varphi = -eE \sin(\varphi)$. Pokud zapneme toto elektrostatické pole jen na chvíli, bude předaný impuls zhruba $I(\varphi) = -eE\Delta t \sin(\varphi)$ a po n kopnutích budeme mít

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \varphi_{n-1} + T\dot{\varphi}_{n-1}, \\ \dot{\varphi}_n &= \dot{\varphi}_{n-1} - \tilde{K} \sin(\varphi_n),\end{aligned}$$

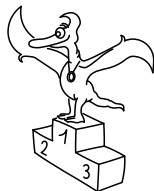
kde $\tilde{K} = eE\Delta t/(mR)$. Když označíme $x = \varphi$ a $y = \dot{\varphi}$, jsou tyto iterace mapováním roviny xy opět na rovinu xy . Takovýmto iteracím dynamických systémů se tedy říká *mapy*. Tato mapa, kterou jsme si zrovna odvodili, je jedna z nejjednodušších a nejelegantnějších map chaotického dynamického systému, a proto se jí říká *Standardní mapa*. Vývoj v této mapě je pro řadu počátečních podmínek chaotický a lze to i pro některé hodnoty \tilde{K} a T matematicky dokázat.

Přidám ještě krátkou poznámku k počítačovému generování náhodných čísel zmíněnému v předchozím díle. Mnoho generátorů náhodných čísel v počítači jsou takové trochu legrační triky, jak vzít předchozí pseudonáhodné číslo a nové pseudonáhodné číslo získat pomocí nějaké banální operace (*nechaotické mapy*), která jen není na první pohled vidět. Řada náhodných generátorů tedy produkuje kvaziperiodickou posloupnost čísel, jen se špatně vysledovatelnou pravidelností. Pro potřeby kryptografie toto ale nestačí a často se používají chaotické mapy, kde je pseudonáhodnost o hodně kvalitnější.²¹

Ale zpátky ke Standardní mapě. Když si vzpomenete na rovnici (2), vidíte, že naše kopání elektrickým polem odpovídá zapínání a vypínání gravitačního pole. Pokud tedy hodně snížíme periodu spínání T a spolu s tím budeme adekvátně snižovat \tilde{K} , měli bychom efektivně získat něco jako pohyb kyvadla v homogenním gravitačním poli. V příštím díle si numerickými experimenty ověříme, že Standardní mapa má chaotické vlastnosti a že vskutku tyto trajektorie $\dot{\varphi}_n, \varphi_n$ připomínají trajektorie v případě fyzikálního kyvadla. Ale zjistíme ještě něco – někde chaos je a někde není. A kde bude? Na špičce propisky. Cože? Uvidíte.

²⁰Tj. stejné ve všech bodech prostoru.

²¹Protože ale máme v počítači čísla na konečný počet desetinných míst, bude nakonec i chaotická trajektorie v této reprezentaci periodická, ale s olbřímí periodou.



Pořadí řešitelů po IV. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	4	8	6	38	<i>100</i>	157
1.–2. Filip Čermák	G Golianova, Nitra	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	88
1.–2. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	4	2	4	3	1	4	7	–	25	73	88
3. Šimon Karch	G, Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	85
4.–5. Ondřej Knopp	G, Třeboň	4	4	2	3	2	–	–	6	21	77	79
4.–5. Jan Preiss	G, Lovosice	0	4	3	2	1	–	4	–	14	60	79
6. David Němec	G, Tanvald	4	4	4	2	–	–	7	–	21	57	73
7. Denisa Chytilová	G J. Škody, Přerov	4	2	2	1	2	1	6	–	18	62	72
8. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	4	2	2	1	–	1	4	–	14	64	64
9. Jakub Suchánek	G Opatov, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	66	56
10. Ondřej Chloupek	G, Mostecká, Chomutov	4	2	–	–	–	–	–	–	6	63	52
11. Jan Došek	G, Brandýs n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	47
12.–13. Ladislav Nagy	G a SOŠZZE Vyškov	0	4	1	–	1	1	3	–	10	39	43
12.–13. Dominik Starý	G, Benešov	2	6	3	3	–	–	–	–	14	69	43
14. Filip Nácovský	G, Dvůr Králové n. L.	2	2	0	1	–	0	–	–	5	40	35
15. Jaroslav Páidar	SPŠ, Masarykova, Liberec	–	–	4	–	1	–	–	–	5	54	30
16. Ondřej Bílek	SPŠ, Vlašim	4	–	4	–	–	–	–	–	8	70	28

Kategorie druhých ročníků

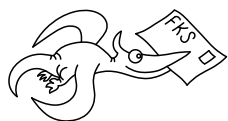
jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	4	4	4	4	8	6	38	<i>100</i>	157
1. Jáchym Bártík	G Havlíčkův Brod	4	4	4	2	2	4	8	3	31	72	108
2. Přemysl Štastný	G, Žamberk	4	4	2	0	0	–	5	4	19	73	105
3.–4. Matěj Mezera	G Havlíčkův Brod	4	2	4	3	3	4	4	3	27	74	103
3.–4. David Vokrouhlický	G Jana Keplera, Praha	4	2	4	2	2	3	6	4	27	66	103
5.–6. Daniel Pajer	G Jana Keplera, Praha	4	6	3	2	2	4	5	4	30	65	85
5.–6. Daniela Stennerová	G L. Svobodu, Humenné	4	4	4	3	2	3	4	–	24	68	85
7. Štěpán Stenclák	G, Třinec	4	4	4	3	2	2	6	–	25	75	83
8. Martin Štyks	G Jana Keplera, Praha	4	4	4	2	3	3	8	–	28	71	79
9.–10. Aleš Krčil	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	4	2	3	1	2	0	4	–	16	47	64
9.–10. Adam Poloček	G, Havlíčkova, Český Těšín	4	4	3	2	1	3	–	–	17	54	64
11. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava	4	2	–	3	–	–	6	–	15	74	63
12. Klára Ševčíková	G Uherské Hradiště	4	4	–	3	–	–	6	–	17	60	61
13. Peter Kubaščík	G Kysucké Nové Město	4	4	3	1	1	–	–	6	19	65	59
14.–15. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	2	2	2	0	1	4	–	15	48	56
14.–15. Kateřina Stodolová	G, Dašická, Pardubice	4	2	–	–	–	–	6	–	12	77	56
16. Veronika Úlovcová	Církevní G, Plzeň	4	2	2	3	1	1	3	–	16	53	49

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	4	4	8	6	34	<i>100</i>	141
1. <i>Tomáš Hrbek</i>	G J. Ressela, Chrudim	2	1	4	3	1	4	8	7	30	75	106
2. <i>Tomáš Fárnák</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	73
3. <i>Andrej Uhlířik</i>	G Námestovo	2	1	4	2	1	2	5	–	17	57	71
4. <i>Pavel Souček</i>	G, Nymburk	1	2	4	1	2	2	–	–	12	54	58
5. <i>Klára Stefanová</i>	G B. Němcové, HK	2	1	–	3	–	1	–	–	7	61	43
6. <i>Kristína Mrázová</i>	G, Český Krumlov	2	2	2	–	–	–	–	–	6	55	39
7. <i>Jakub Pilař</i>	G J. Ressela, Chrudim	2	2	3	1	1	–	–	–	9	45	38
8.–9. <i>Peter Lučanský</i>	G Bardejov	2	1	3	2	1	–	–	–	9	49	36
8.–9. <i>Jiří Tuháček</i>	Masarykovo G, Plzeň	2	2	2	3	1	–	–	–	10	65	36
10. <i>Jakub Marták</i>	G Golianova, Nitra	2	1	1	0	1	–	3	–	8	33	31
11. <i>Marian Poljak</i>	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	61	30
12. <i>Šimon Knoška</i>	G A. Kmeta, B. Štiavnica	2	2	3	3	–	–	–	–	10	57	29

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	2	4	4	4	4	8	6	34	<i>100</i>	141
1. <i>Jakub Sláma</i>	G Opatov, Praha	2	2	4	3	2	3	7	6	29	80	113
2. <i>Domínika Jochcová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	2	3	4	3	2	2	3	6	25	76	104
3. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	85
4. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	2	4	–	2	–	–	–	8	72	83
5. <i>Kateřina Smátalová</i>	G, Dašická, Pardubice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	65	60
6. <i>Petr Doležal</i>	G Z. Wintra, Rakovník	–	–	–	–	–	–	–	4	4	72	58
7. <i>Luboš Krnác</i>	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	–	–	–	–	2	–	–	5	7	74	50
8. <i>Kryštof Šulc</i>	VOŠ, SOŠ a G, Evropská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	66	38
9. <i>Mojmír Poprocký</i>	G Matyáše Lercha, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	33
10. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	72	31
11. <i>Marek Biely</i>	G, Považská Bystrica	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	30
12. <i>Samuel Kočiščák</i>	G Poštová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	81	29



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: fykos@fykos.czFYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.