

Zadání VI. série



Termín uploadu: 16. 5. 2017 23.59

Termín odeslání: 15. 5. 2017

Úloha VI.1 ... dost těžké kulometry

3 body

Na auto připevníme dopředu dva kulometry, které vystřelují kulky o hmotnosti $m = 25$ g rychlostí $v_1 = 500$ m·s⁻¹, každý s frekvencí 10 výstřelů za sekundu. Auto se rozjede po rovině rychlostí $v_2 = 80$ km·h⁻¹ a poté začne střílet. Kolik nábojů vystřílíme, než auto zastaví? Během palby nepřidáváme plyn, odpor vzduchu a kol zanedbáváme. Tepelné ztráty uvnitř zbraní jsou taktéž zanedbatelné.

Úloha VI.2 ... upadlo

3 body

Z jaké výšky nad povrchem neutronové hvězdy bychom museli "upustit" předmět, aby dopadl na její povrch v rychlosti $0,1 c$ ($0,1$ rychlosti světla). Naše neutronové hvězda má hmotnost $1,5$ násobek hmotnosti Slunce a průměr $d = 10$ km. Zanedbejte atmosféru neutronové hvězdy a její rotaci. Můžete zanedbat korekci na speciální teorii relativity. Srovnejte ale jakého výsledku byste dosáhli, pokud by pád probíhal v homogenním gravitačním poli (které má intenzitu stejnou jako na povrchu planety) s tím, kdy pád probíhá v radiálním gravitačním poli.

Bonus: Uvažujte korekci na speciální teorii relativity.

Úloha VI.3 ... relativistický Zenonův paradox

6 bodů

Superman a Flash se rozhodli, že si dají závod. Závod se koná v hlubokém vesmíru, protože na Zemi není dostatečně dlouhá rovná pláž. Flash, protože je pomalejší, startuje s délkovým náskokem l před Supermanem. Flash v jednu chvíli vyběhne s konstantní rychlostí v_F srovnatelnou s rychlostí světla. Ve chvíli, kdy si Superman všimne, že Flash vyběhl, vyběhne také, a to konstantní rychlostí $v_S > v_F$. Za jak dlouho Superman Flashe dožene (z pohledu Supermana)? A za jak dlouho Flashe dožene Superman (z pohledu Flashe)? A byl vůbec závod spravedlivě odstartován, resp. dokázali byste vymyslet spravedlivější způsob (příčemž náskok l má být ponechán)?

Úloha VI.4 ... zastřel si svého potkana

7 bodů

Mírek by rád zastřelil potkana, kterého vídá na kolejích. Připravil si tedy jednoduchou vzduchovou pušku, kterou si můžeme modelovat jako trubku s konstantním průřezem $S = 15$ mm² a délkou $l = 30$ cm, která je na jedné straně uzavřená a na druhé otevřená. Do ní se chystá Mírek umístit náboj hmotnosti $m = 2$ g, který trubku akorát utěsní, a to ve vzdálenosti $d = 3$ cm od uzavřeného konce. Náboj zde zatím nechá upevněný v klidu a natlakuje uzavřenou část trubky na určitý tlak p_0 . Posléze náboj uvolní. Chce aby na konci ústí byla minimálně rychlost náboje $v = 90$ m·s⁻¹. Poradte mu, na jaký tlak by musel vzduchovou pušku natlakovat, aby náboj vyšel s takovou rychlostí, pokud by plyn byl ideální, a diskutujte realističnost uspořádání. Předpokládejte, že náboj je uvolňován kvazistatickým adiabatickým dějem, kde $\kappa = 7/5$,

protože se jedná o dvouatomový plyn. Uvažujte, že vnějšíku působí na náboj atmosférický tlak $p_a = 10^5$ Pa. Zanedbejte energetické ztráty vyvolané třením, odporem vzduchu a stlačováním plynu před nábojem.

Úloha VI.5 ... přetáhni ho přes prsty

8 bodů

Máme homogenní tyč konstantního průřezu délky l připevněnou na jednom konci k otočnému kloubu. Na počátku směřuje tyč přímo vzhůru a jsme v homogenním tíhovém poli velikosti g . Tyč se vlivem mírného závanu větru začne otáčet a "padat" dolů, ale stále je držena otočným kloubem. S jakým zrychlením se bude pohybovat konec tyče v průběhu času?

Úloha VI.P ... vypařující se asteroid

9 bodů

Umístíme hodně velký kus ledu, dejme tomu o průměru 1 km, do blízkosti hvězdy podobné Slunci na kruhovou dráhu. Blízkost je tak velká, že rovnovážná teplota černého tělesa by v této vzdálenosti byla zhruba 30 °C. Co se bude dít s takovým asteroidem a jeho drahou? Asteroid nemá vázanou rotaci.

Úloha VI.E ... skladba jako od Cimrmana

12 bodů

Sežeňte si skleničku na víno, ideálně tenkou se zabroušeným okrajem. Nejprve změřte vnitřní průměr skleničky v závislosti na výšce ode dna. Pak ji rozeznívejte, ideálně navlhčeným prstem pohybem po jejím okraji – někdy to chce trochu trpělivosti. Změřte závislost frekvence tónů, které sklenička vydává v závislosti na výšce naplnění vody v ní (alespoň pro 5 hladin vody a dvě frekvence v každé výšce).

Nápověda: Pokud je sklenička tenkostěnná, můžete její vnitřní rozměry považovat za stejné jako vnější a díky tomu závislost jejího průměru na výšce určit z vhodné fotografie s měřítkem. Pro měření zvuku doporučujeme freeware program Audacity (Rozbor → Kreslit spektrum).

Úloha VI.S ... nelineární

10 bodů

- Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu a jak se používá nelineární regrese (postačí vlastními slovy popsat následující: model nelineární regrese, způsob odhadu regresních koeficientů, vyjádření nejistot odhadů regresních koeficientů a hodnot prokládané funkce, statistické testy hodnot regresních koeficientů, identifikovatelnost parametrů a způsob volby prokládané funkce). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.
- V příloženém datovém souboru *regrese1.csv* naleznete dvojice hodnot (x_i, y_i) . Těmito daty chceme proložit teoretickou funkční závislost, kterou je v tomto případě sinusoida, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + b \cdot \sin(cx + d).$$

Vykreslete graf naměřených hodnot a proložené funkce a stručně ho okomentujte (takovýto graf musí mít všechny náležitosti). Není potřeba dělat regresní diagnostiku.

Nápověda: Dejte si pozor na identifikovatelnost parametrů v tomto modelu a vhodné omezující podmínky na parametr c .

- c) V příloženém datovém souboru *regrese2.csv* naleznete dvojice hodnot (x_i, y_i) . Těmito daty chceme proložit teoretickou funkční závislost, kterou je v tomto případě exponenciála, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + e^{bx+c}.$$

Určete hodnoty odhadů všech regresních koeficientů včetně nejistot měření.

Nápověda: Grafickou metodou ověřte předpoklad homoskedasticity a v případě potřeby pro určení nejistot měření regresních koeficientů použijte Whiteův (sendvičový) odhad kovarianční matice.

- d) V příloženém datovém souboru *regrese3.csv* naleznete dvojice hodnot (x_i, y_i) . Těmito daty chceme proložit teoretickou funkční závislost, kterou je v tomto případě hyperbola, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + \frac{1}{bx + c}.$$

Vykreslete graf naměřených dat v podobě průměrů a chybových úseček a proložené funkce a stručně ho okomentujte (takovýto graf musí mít všechny náležitosti). Proveďte regresní diagnostiku.

Bonus: V příloženém datovém souboru *regrese4.csv* naleznete dvojice hodnot (x_i, y_i) . Těmito daty chceme proložit teoretickou závislost, která je ovšem příliš složitá na analytické vyjádření. Proložte těmito daty regresní spliny (s vhodně zvolenými uzly a vhodně zvoleným stupněm).


Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí *R*. Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit příložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka *R*.

Poznámka Text seriálu naleznete na našem webu.



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.