

## Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé, jubilejní třicátý ročník FYKOSu je za námi. Děkujeme všem, kteří se v uplynulém roce našeho korespondenčního semináře účastnili, a vítězům srdečně blahopřejeme. V průběhu června obdržíte e-mail, v němž si na základě svého bodového zisku budete moci vybrat odměnu.

Také je již znám termín podzimního soustředění 23. 9. až 1. 10. 2017. Pokud jste se umístili na předních příčkách, můžete si tento termín tužičkou zaznamenat do kalendáře. Pokud jste už moc velké děti a soustředění se nemůžete zúčastnit, protože budete nastupovat na Matfyz (tolerujeme i jiné školy, např. Cambridge), tak bychom vás rádi pozvali do organizátorských řad. Ozvat se nám můžete již nyní, nebo si s námi můžete promluvit osobně po prázdninách na úvodním srazu.

Bohužel jsme zase nestihli zkorigovat všechna vzorová řešení, za což se omlouváme. Pro příště se určitě polepšíme. Přikládáme některá starší zatím nepublikovaná řešení, tak doufáme, že stálo za to si na ně počkat.

To je pro tento ročník vše – užívejte si prázdniny a propagujte FYKOS!

*Organizátoři*



## Řešení VI. série

### Úloha VI.1 ... dost těžké kulometry

3 body; průměr 2,10; řešilo 41 studentů

Na auto připevníme dopředu dva kulometry, které vystřelují kulky o hmotnosti  $m = 25\text{ g}$  rychlostí  $v_1 = 500\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , každý s frekvencí 10 výstřelů za sekundu. Auto se rozjede po rovině rychlostí  $v_2 = 80\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  a poté začne střílet. Kolik nábojů vystřelíme, než auto zastaví? Během palby nepřidáváme plyn, odpor vzduchu a kol zanedbáváme. Tepelné ztráty uvnitř zbraní jsou taktéž zanedbatelné.

*Mírek vzpomínal na GTA 2.*

Soustavu auta, kulometů a vystřelených projektilů považujeme za izolovanou. Bude v ní tedy platit zákon zachování hybnosti. Budeme tedy uvažovat tak, že auto předává postupně svou hybnost vystřeleným projektilům. Poté, co vystřelíme dostatečný počet projektilů, jejichž celková hybnost bude rovna počáteční hybnosti auta, auto bude mít nulovou hybnost a tedy bude stát.

Pokud bychom chtěli úlohu počítat přesně, bylo by to poněkud komplikovanější. Projektily se pohybují rychlostí  $v_p$  vůči autu, tedy velikost jejich hybnosti vůči vnějšímu pozorovateli bude rovna  $p_p = m(v_p + v_a)$ , přičemž rychlost auta se bude právě v důsledku střelby snižovat. Také se bude měnit hmotnost auta, jak budou projektily vystřelovány. To by vedlo k úvahám a výpočtům podobným těm, které se používají při odvození Ciolkovského rovnice (kde se však počítá se spojitým tahem motoru). My se pokusíme situaci zjednodušit.

Rychlost projektilů vůči autu  $v_p = 500\text{ ms}^{-1}$  je poměrně velká oproti rychlosti auta  $v_a = 22,22\text{ ms}^{-1}$ . Na konci bude rychlost auta nulová. Jelikož střílíme kulky vždy po stejném

krátkém časovém úseku a auto bude zpomalovat přibližně lineárně v čase, můžeme odhadnout průměrnou rychlost projektilů vůči zemi jako

$$v_{pp} = \frac{v_p + (v_p + v_a)}{2} = 511,1 \text{ ms}^{-1}.$$

Nyní je ještě třeba zhodnotit změnu hmotnosti auta. Terénní pick-upy, které jsou v některých oblastech běžně používány jako nosiče kulometů, váží kolem 2 t. Pokud by auto vystřelilo celkem 2000 projektilů, jejich celková hmotnost by byla 50 kg. To tedy můžeme vzhledem k celkové hmotnosti auta přibližně zanedbat. Podle zákona zachování hybnosti tedy bude platit

$$p_{celk} = p_a = N p_{pp},$$

$$M v_a = N m v_{pp}.$$

Z toho jednoduchými úpravami získáme počet vystřelených projektilů.

$$N = \frac{M v_a}{m v_{pp}}$$

Po dosazení  $M = 2 \text{ t}$  a zbylých hodnot dojdeme k výsledku, že je potřeba  $N \doteq 3479$  projektilů k zastavení auta. Auto však pravděpodobně úplně přesně nezastaví – jeden výstřel jej zpomalí na minimum rychlosti a následující výstřel jej už bude odtlačovat zpět. Pokud by kulometry střelily naráz, bude situace podobná, jen projektily budou pak 2, tedy nabraná rychlost bude ještě větší. Rychlost však bude poměrně malá, v řádu  $\text{cm s}^{-1}$ . Dá se odhadnout, že jeden výstřel by asi na znovuzopohybování auta nestačil.

Vidíme, že rozdíl v hmotnosti auta bude přibližně 87 kg. Celkově tedy bude k zastavení auta třeba méně projektilů v důsledku ztráty hybnosti snižováním hmotnosti auta.

Ještě může být zajímavé pokusit se úlohu vyřešit pomocí Ciolkovského rovnice a porovnat ji s předchozím výsledkem. Hmotnost projektilů je poměrně malá a kadence je vysoká, takže by spojité aproximace mohla být poměrně přesná. Podle Ciolkovského rovnice platí

$$\Delta v = v_e \log \frac{m_0}{m_1}$$

V našem případě je  $\Delta v = v_a$ ,  $v_e = v_p$ ,  $m_0 = M_0$  je počáteční hmotnost auta a  $m_1 = M_0 - m_p$  je hmotnost auta bez vystřelených projektilů, kde  $m_p$  je hmotnost vystřelených projektilů. To nám po úpravách dává

$$m_p = M_0 \left(1 - e^{-\frac{v_a}{v_p}}\right)$$

Tedy hmotnost je přibližně 87 kg, celkem tedy 3478 projektilů. To se liší od výše spočítané hodnoty jen o 1 projektil. To je vcelku pozoruhodné. V předchozím výpočtu jsme pokles hmotnosti, který je nakonec asi 4 %, neuvažovali, zde jsme však došli k téměř stejnému výsledku.

Tyto výsledky můžeme nakonec porovnat s numerickým výpočtem, který uvažuje změny hmotnosti a rychlosti po každém výstřelu. Došli jsme k výsledku 3478 projektilů. To velmi přesně odpovídá našim předchozím výpočtům, při kterých jsme však použili různé aproximace, aby byl výpočet jednodušší.

**Pavel Blažek**  
pavelblazek@fykos.cz

## Úloha VI.3 ... relativistický Zenonův paradox

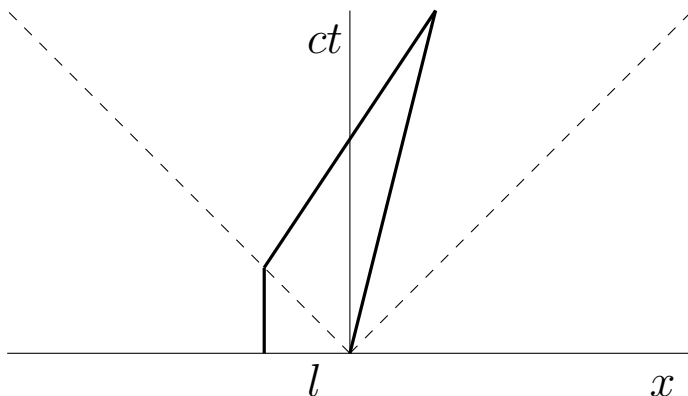
6 bodů; průměr 3,35;

řešilo 23 studentů

Superman a Flash se rozhodli, že si dají závod. Závod se koná v hlubokém vesmíru, protože na Zemi není dostatečně dlouhá rovná pláž. Flash, protože je pomalejší, startuje s délkovým náskokem  $l$  před Supermanem. Flash v jednu chvíli vyběhne s konstantní rychlostí  $v_F$  srovnatelnou s rychlostí světla. Ve chvíli, kdy si Superman všimne, že Flash vyběhl, vyběhne také, a to konstantní rychlostí  $v_S > v_F$ . Za jak dlouho Superman Flashe dožene (z pohledu Supermana)? A za jak dlouho Flashe dožene Superman (z pohledu Flashe)? A byl vůbec závod spravedlivě odstartován, resp. dokázali byste vymyslet spravedlivější způsob (příčemž náskok  $l$  má být ponechán)?

*Ďídi.*

Velmi efektivní metodou, jak řešit kinematické úlohy speciální teorie relativity, jsou prostorčasové diagramy. Jde o graf, kde na vodorovnou osu vynášíme prostorovou souřadnici a na svislou čas, resp. hodnotu  $ct$ . Jedna událost je pak v grafu reprezentována bodem a světočára (historie hmotného bodu) čarou. Protože je rychlost světla v rámci STR významnou konstantou, zakresluje se do diagramu i tzv. světelný kužel, tedy světočáry  $x = \pm ct$ .



Obr. 1: Časoprostorový diagram situace.

Pro řešení naší úlohy bude nejjednodušší vycházet z diagramu 1 vztahového vůči pozorovateli stojícímu v klidu v místě, ze kterého startuje Flash. Na diagramu vidíme, přesně dle zadání, že Superman stojí, než k němu dorazí informace o vyběhnutí Flashe, poté vybíhá také.

Nyní určíme souřadnice událostí, kdy a kde se Superman s Flashem potkají, a také, kdy pro ně začneme měřit čas. Uvědomit si, že záleží na události, odkud pro oba závodníky měříme čas, a tyto události rozumně zvolit bylo součástí zadání. My si zde pro každého ze závodníků zvolíme jako počátek událost, kdy daný hrdina ze svého pohledu vyběhl. Souřadnice těchto počátků jsou  $(ct_{F0}, x_{F0}) = (0, 0)$  pro Flashe a  $(ct_{S0}, x_{S0}) = (l, -l)$  pro Supermana. Souřadnice těchto událostí, ve které Superman dožene Flashe, získáme řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x &= v_F t \\ x + l &= v_S \left( t - \frac{l}{c} \right), \end{aligned}$$

což jsou rovnice příslušných přímk v diagramu. Souřadnice zmíněné události jsou

$$(ct_C, x_C) = l \frac{c + v_S}{v_S - v_F} \left( 1, \frac{v_F}{c} \right).$$

Tyto časy a vzdálenosti jsou ale měřeny v klidové soustavě. Pokud chceme určit časy z pohledu závodníků, tedy jejich vlastní časy, musíme vzít v úvahu dilataci času

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2},$$

kde  $\Delta\tau$  je interval vlastního času,  $\Delta t$  interval času v klidové soustavě a  $v$  rychlost daného hrdiny vůči klidové soustavě. Odečtením časů události v klidové soustavě a aplikací dilatace času pak dostáváme vlastní časy Supermana a Flashe

$$\begin{aligned} \Delta\tau_S &= (t_C - t_{S0}) \sqrt{1 - \left(\frac{v_S}{c}\right)^2} = \frac{l}{c} \frac{c + v_F}{v_S - v_F} \sqrt{1 - \left(\frac{v_S}{c}\right)^2}, \\ \Delta\tau_F &= (t_C - t_{F0}) \sqrt{1 - \left(\frac{v_F}{c}\right)^2} = \frac{l}{c} \frac{c + v_S}{v_S - v_F} \sqrt{1 - \left(\frac{v_F}{c}\right)^2}. \end{aligned}$$

Závod ale nebyl odstartován příliš spravedlivě, z pohledu Supermana i Flashe vyběhl Flash dříve, než Superman.<sup>1</sup> Pokud bychom ale na půli cesty mezi Supermana a Flashe postavili pozorovatele, který by závod odstartoval (např. bliknutím baterky do obou směrů) a oba závodníci by vyběhli ve chvíli, kdy by k nim tento signál dorazil, vyběhli by z pohledu Supermana i Flashe současně. Pro úplnost dodejme, že z jejich pohledu by závod trval  $\Delta\tau_S = l/(v_S - v_F) \sqrt{1 - (v_S/c)^2}$ , resp.  $\Delta\tau_F = l/(v_S - v_F) \sqrt{1 - (v_F/c)^2}$ .

**Lukáš Timko**  
lukast@fykos.cz

## Úloha VI.4 ... zastřel si svého potkana 7 bodů; průměr 3,88; řešilo 32 studentů

Mírek by rád zastřelil potkana, kterého vidá na kolejích. Připravil si tedy jednoduchou vzduchovou pušku, kterou si můžeme modelovat jako trubku s konstantním průřezem  $S = 15 \text{ mm}^2$  a délkou  $l = 30 \text{ cm}$ , která je na jedné straně uzavřená a na druhé otevřená. Do ní se chystá Mírek umístit náboj hmotnosti  $m = 2 \text{ g}$ , který trubku akorát utěsní, a to ve vzdálenosti  $d = 3 \text{ cm}$  od uzavřeného konce. Náboj zde zatím nechá upevněný v klidu a natlakuje uzavřenou část trubky na určitý tlak  $p_0$ . Posléze náboj uvolní. Chce, aby na konci ústí byla rychlost náboje minimálně  $v = 90 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Poradte mu, na jaký tlak by musel vzduchovou pušku natlačit, aby náboj vyšel s takovou rychlostí, pokud by plyn byl ideální, a diskutujte realističnost uspořádání. Předpokládejte, že náboj je uvolňován kvazistatickým adiabatickým dějem, kde  $\kappa = 7/5$ , protože se jedná o dvouatomový plyn. Uvažujte, že z vnějšku působí na náboj atmosférický tlak  $p_a = 10^5 \text{ Pa}$ . Zanedbejte energetické ztráty vyvolané třením, odporem vzduchu a stlačováním plynu před nábojem.

*Karel chtěl zjistit, jestli by řešitelé zvládli přijímací řízení na magisterské studium na Matfyz.*

<sup>1</sup>Poznamenejme, že současnost se nešíří se světelným kuzelem, ale odpovídá konstantní časové souřadnici daného pozorovatele. Superman tedy sice viděl vyběhnout Flashe ve chvíli, kdy vybíhal i on sám, ale stalo se to v jeho minulosti.

V našem prípade je hnacou silou strely stlačený plyn. Budeme sa riadiť Poissonovým zákonom pre ideálny plyn

$$pV^\kappa = \text{konst.}$$

Pri výstrele v Mirkovej pušky plyn zväčšuje svoj objem, čím tlačí náboj dopredu. Z toho vidíme, že objem plynu  $V$  a tlak  $p$  v nejakom čase môžeme popísať ako

$$p = p_0 \frac{V_0^\kappa}{V^\kappa}.$$

Nakoľko je prierez hlavne  $S$  konštantný, môžeme predchádzajúcu rovnicu prepísať ako

$$p = p_0 \left( \frac{Sd}{Sx} \right)^\kappa = p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa.$$

Doteraz sme uvažovali, že náboj je tlačný z jednej strany stlačeným vzduchom, no z druhej proti pohybu nič nekladie odpor, čo ako tušíme, nemôže fungovať. Uvažujeme, že oproti guľke pôsobí atmosférický tlak  $p_a$ . Výsledné silové pôsobenie na projektil v hlavni bude dané rozdielom týchto dvoch tlakov, čiže platí

$$p' = p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa - p_a.$$

Tlak, ako vieme už zo základnej školy, sa prejavuje ako určité silové pôsobenie sily  $F$  na plochu  $S$ . Vďaka tomu, že hlavň má prirodzene konštantný prierez, môžeme silu tlačiacu náboj vyjadriť v tvare

$$F = Sp' = S \left( p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa - p_a \right).$$

Z druhého Newtonovho pohybového zákona platí, že ak na teleso o hmotnosti  $m$  v inerciálnej vzťažnej sústave, pôsobí sila  $F$ , tak potom sa začne pohybovať so zrýchlením o veľkosti  $\frac{F}{m}$ , a teda môžeme písať

$$ma = S \left( p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa - p_a \right).$$

Ako mnohí iste viete, zrýchlenie v určitom čase  $t$  môžeme zistiť ako prvú deriváciu rýchlosti podľa času, alebo druhú deriváciu dráhy podľa času. Z vety o derivácií zloženej funkcie potom získavame

$$ma = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dx} v = S \left( p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa - p_a \right),$$

čo je lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu, ktorú budeme riešiť metódou separácie premenných. Po separácii dostávame

$$\begin{aligned} mvdv &= S \left( p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa - p_a \right) dx \\ \int_0^v mvdv &= \int_d^l S \left( p_0 \left( \frac{d}{x} \right)^\kappa - p_a \right) dx \\ \frac{1}{2}mv^2 &= S \left( p_0 \frac{d^\kappa (d^{1-\kappa} - l^{1-\kappa})}{\kappa - 1} - p_a(l - d) \right), \end{aligned}$$

odkiaľ po vyjadrení tlaku získavame

$$p_0 = \frac{(\kappa - 1) \left( \frac{1}{2} m v^2 + S p_a (l - d) \right)}{S d^\kappa (d^{1-\kappa} - l^{1-\kappa})}.$$

Po dosadení hodnôt dostávame  $p_0 \doteq 1,256 \cdot 10^7$  Pa, teda asi 126 atmosfér.

### *Realistickosť usporiadania*

Ako vidíme, výsledný tlak vyšiel dosť veľký, čiže vzhľadom na usporiadanie nemôžeme považovať plyn za ideálny. Pri počítaní s ideálnym plynom sa zanedbáva vlastný objem molekúl a príťažlivé sily, ktoré zohľadňuje Van der Waalsova rovnica, poprípade môžeme použiť ešte viriálnu stavovú rovnicu. S tým vzniká ďalšia otázka, a to, akým plynom Mirek zbraň natlakoval. (Bežné sú okrem vzduchu  $\text{CO}_2$  a  $\text{N}_2$ .) V prípade, že by išlo o čisto dvojatómový plyn, vychádzali by sme z Daltonovho zákona.

Pri výpočtoch sme zanedbali odpor vzduchu, ktorý by aj tak nemal veľký vplyv. V hlavni sa časť energie ďalej spotrebuje na roztočenie projektilu a zároveň sa vylúči určité teplo pri trení projektilu v hlavni, teda možno očakávať, že tlak bude o niečo málo väčší ako náš výsledok.

Pre informáciu uvedme, že vzduchové zbrane podliehajúce ohláseniu by mali mať ústovú energiu viac ako 16 J. Nakoľko avšak energia projektilu Mirkovej vzduchovky tesne po tom, čo opustí hlavň, je len 8,2 J, Mirek môže naďalej beztriestne strieľať po potkanoch na koleji.

Porovnaním s reálnymi vzduchovkami zistíme, že tlak v komore pre podobné ústové rýchlosti sa skutočne pohybuje v rádovo desiatkach až stovkách atmosfér.

*Peter Kubaščík*

### **Úloha VI.5 ... přetáhni ho přes prsty** 8 bodů; průměr 3,33; řešilo 24 studentů

*Máme homogenní tyč konstantního průřezu délky  $l$  připevněnou na jednom konci k otočnému kloubu. Na počátku směřuje tyč přímo vzhůru a jsme v homogenním tíhovém poli velikosti  $g$ . Tyč se vlivem mírného závanu větru začne otáčet a „padat“ dolů, ale stále je držena otočným kloubem. S jakým zrychlením se bude pohybovat konec tyče v průběhu času? Karel se hrabal ve svých starých námětech co nepřepsal a už si ani nepamatoval, jak je to staré...*

Označme uhol odklonu tyče od nestabilnej rovnovážnej polohy  $\vartheta$ . Z geometrie situácie vidíme, že tiažová sila má voči osi prechádzajúcej kĺbom moment  $\tau = gml \sin(\vartheta)/2$ , kde  $m$  je hmotnosť tyče. Moment zotrvačnosti tyče voči osi prechádzajúcej kolmo jej koncom je  $I = ml^2/3$ . Môžeme teda rovno napísať pohybovú rovnicu

$$\begin{aligned} I \ddot{\vartheta} &= \tau, \\ \ddot{\vartheta} &= \frac{3g}{2l} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (1)$$

Riešenie tejto rovnice ale nie je zjavné, skúsme teda použiť iný prístup. Ak zanedbáme trenie v kĺbe, bude sa v tejto sústave zachovávať energia, z čoho vieme jednoducho napísať diferenciál-

nu rovnici prvého rádu, keďže kinetická energia bude v každom bode rovná poklesu potenciálnej energie

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}I\dot{\vartheta}^2 &= mg\Delta h, \\ l\dot{\vartheta}^2 &= 3g(1 - \cos \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \cos \vartheta}} &= \sqrt{\frac{3g}{l}} dt,\end{aligned}$$

kde  $\Delta h$  je pokles výšky ťažiska tyče. Tu vidíme to, čo by sme čakali, poloha  $\vartheta = 0$  je rovnovážna a teda musíme začať s nejakou konečnou výchylkou  $\varepsilon \ll 1$ , aby tyč začala padať. Treba si ale uvedomiť, že rovniciu sme dostali za predpokladu, že pokles potenciálnej energie voči polohe  $\vartheta = 0$  dáva kinetickú energiu (aspoň približne), čo v prípade, že začíname s výchylkou  $\varepsilon$  znamená, že má tyč v tomto bode kinetickú energiu, akoby do tejto polohy spadla z nehybnej rovnovážnej polohy, a teda v čase  $t = 0$  je jej uhlová rýchlosť nenulová. Toto ale nie je zásadný problém, jednak preto, že predpokladáme malé hodnoty  $\varepsilon$ , kedy rozdiel energií na začiatku závisí od  $\varepsilon^2$ ,<sup>2</sup>, a tiež preto, že takto začíname v situácii, do ktorej by sme sa dostali pádom z menšej počiatkovej výchylky. Teda voľbou nejakej inej (nenulovej) počiatkovej výchylky len posúvame čas  $t = 0$  do iného bodu, ale nemeníme správanie systému. Čím menšiu výchylku ale volíme, tým viac musíme čas posúvať, a nulová výchylka je v čase  $-\infty$ ; vieme spočítať iba čas pádu z nejakej výchylky  $\varepsilon > 0$ . Prípadne by sme si vystačili s predpokladom  $\dot{\vartheta} \neq 0$  v bode  $\vartheta = 0$ .

Integrál  $1/\sqrt{1 - \cos \vartheta}$  ale stále nie je triviálny, použitím vhodných goniometrických identít a substitúcií (alebo vhodného softwaru) dostaneme

$$\int \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \cos \vartheta}} = \sqrt{2} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{4} \right),$$

z čoho dostávame riešenie diferenciálnej rovnice

$$\sqrt{2} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{4} \right) - \sqrt{2} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} \right) = \sqrt{\frac{3g}{l}} t, \quad (2)$$

Presunutím člena s  $\varepsilon$  na druhú stranu rovnice hneď vidíme, že počiatková výchylka je naozaj len posunutie v čase. Z tohto môžeme vyjadriť  $\vartheta(t)$  ako

$$\vartheta = 4 \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{4} e^{\sqrt{\frac{3g}{2l}} t} \right).$$

Tvar tejto funkcie pre 2 rôzne dĺžky tyče vidno na obrázku 2.

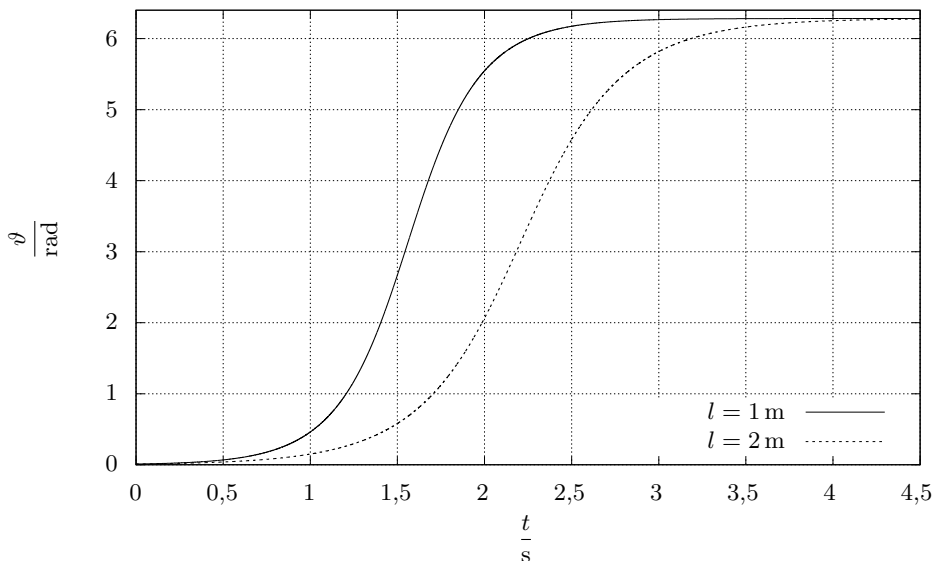
V úlohe sa ale pýtame na zrýchlenie, to môžeme vyjadriť z rovnice (1), keďže vieme že radiálne zrýchlenie je nulové (dĺžka tyče je konštantná), bude zrýchlenie koncového bodu tyče dané

$$a = l\ddot{\vartheta} = \frac{3g}{2} \sin \vartheta$$

kde stačí za  $\vartheta$  dosadiť z predošlého. Použitím

$$\sin(4 \operatorname{arctg} x) = 4 \frac{x - x^3}{(x^2 + 1)^2},$$

<sup>2</sup>Vo výraze pre pokles energie by sme dostali ďalší člen tvaru  $1 - \cos \varepsilon$



Obr. 2: Vývoj uhla odklonu od osi v čase pre 2 dĺžky tyče a počiatočnú výchylku  $\varepsilon = 0,01$  rad

a  $\operatorname{tg} \varepsilon/4 \approx \varepsilon/4$ , označujúc

$$\chi = \sqrt{\frac{3g}{2l}},$$

dostaneme

$$a(t) = 24g\varepsilon \frac{16e^{\chi t} - \varepsilon^2 e^{3\chi t}}{(\varepsilon^2 e^{2\chi t} + 16)^2}.$$

Dostaneme takto graf zrýchlenia na obrázku 3. Ešte môžeme skontrolovať, že tento graf vyzerá tak, ako by sme očakávali; v čase keď tyč prechádza spodnou rovnovážnou polohou je zrýchlenie nulové, v bode s  $\vartheta = \pi/2$  je zrýchlenie maximálne a v bode  $\vartheta = 3\pi/2$  minimálne, pričom v týchto bodoch je jeho veľkosť podľa (1)  $a_{\max} = 3g/2 \doteq 14,7$  m/s nezávisle na dĺžke tyče.

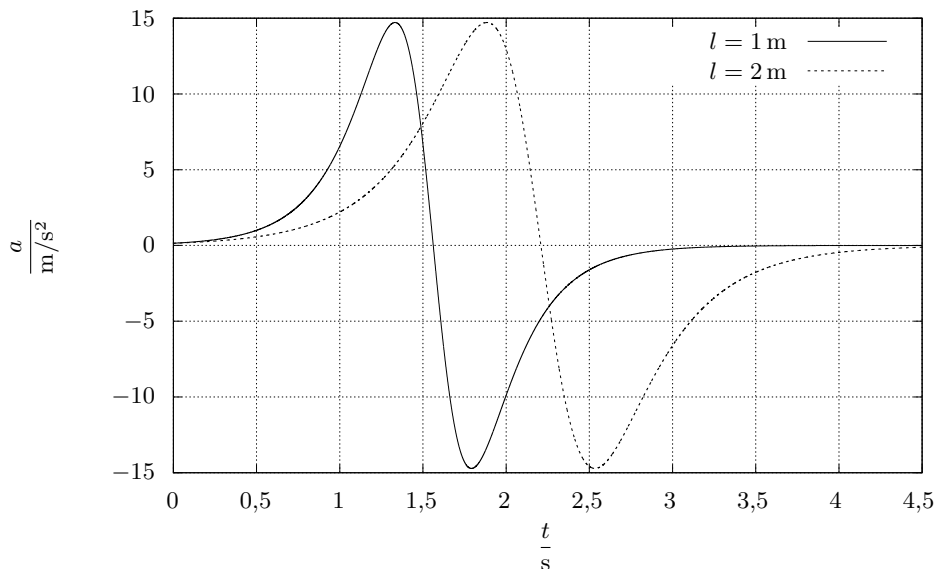
**Filip Ayazi**  
filip@fykos.cz

## Úloha VI.S ... nelineárni

10 bodů; průměr 8,06; řešilo 16 studentů

- a) Zkuste vlastními slovy popsat, k čemu a jak se používá nelineární regrese (postačí vlastními slovy popsat následující: model nelineární regrese, způsob odhadu regresních koeficientů, vyjádření nejistot odhadů regresních koeficientů a hodnot prokládané funkce, statistické testy hodnot regresních koeficientů, identifikovatelnost parametrů a způsob volby prokládané funkce). Není potřeba uvádět přesná matematická odvození, stačí požadované pojmy a vlastnosti stručně popsat.





Obr. 3: Vývoj zrýchlenia koncového bodu v čase pre počiatočnú výchylku  $\varepsilon = 0,01$  rad

- b) V príloženom datovom souboru `regrese1.csv` naleznete dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$ . Těmito daty chceme proložit teoretickou funkční závislost, kterou je v tomto případě sinusoida, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + b \cdot \sin(cx + d).$$

Vykreslete graf naměřených hodnot a proložené funkce a stručně ho okomentujte (takovýto graf musí mít všechny náležitosti). Není potřeba dělat regresní diagnostiku.

Nápověda: Dejte si pozor na identifikovatelnost parametrů v tomto modelu a vhodné omezující podmínky na parametr  $c$ .

- c) V příloženém datovém souboru `regrese2.csv` naleznete dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$ . Těmito daty chceme proložit teoretickou funkční závislost, kterou je v tomto případě exponenciála, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + e^{bx+c}.$$

Určete hodnoty odhadů všech regresních koeficientů včetně nejistot měření.

Nápověda: Grafickou metodou ověřte předpoklad homoskedasticity a v případě potřeby pro určení nejistot měření regresních koeficientů použijte Whiteův (sendvičový) odhad kovarianční matice.

- d) V příloženém datovém souboru `regrese3.csv` naleznete dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$ . Těmito daty chceme proložit teoretickou funkční závislost, kterou je v tomto případě hyperbola, tedy funkce tvaru

$$f(x) = a + \frac{1}{bx + c}.$$

Vykreslete graf naměřených dat v podobě průměrů a chybových úseček a proložené funkce a stručně ho okomentujte (takovýto graf musí mít všechny náležitosti). Proveďte regresní diagnostiku.

Bonus: V příloženém datovém souboru regrese4.csv naleznete dvojice hodnot  $(x_i, y_i)$ . Těmito daty chceme proložit teoretickou závislost, která je ovšem příliš složitá na analytické vyjádření. Proložte těmito daty regresní spliny (s vhodně zvolenými uzly a vhodně zvoleným stupněm).

Pro práci s daty použijte výpočetní prostředí R. Pro vyřešení těchto úkolů postačí drobně upravit příložený skript, ve kterém je pomocí komentářů v kódu vysvětlena potřebná syntaxe jazyka R. *Michal chtěl udělat poslední sérii co možná nejtěžší.*

a) Detailní odpověď na tuto otázku dostaneme jen přečtením pátého dílu seriálu. Na tomto místě popíšeme jen opravdu nezákladnější věci.

Nelineární regrese se použije v případech, kdy chceme naměřenými daty prokládat funkci, která není lineární v neznámých regresních koeficientech. Matematický model nelineární regrese je tedy takový, že uvažujeme měřená data ve tvaru

$$y_i = f(x_i, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) + \varepsilon_i,$$

kde  $y_i$  jsou naměřené hodnoty závisle proměnné,  $x_i$  jsou hodnoty nezávisle proměnné a  $\varepsilon_i$  je náhodná nepřesnost měření, o které předpokládáme, že má rozdělení  $N(0, \sigma^2)$ .

Na odhad regresních koeficientů z naměřených dat používáme metodu maximální věrohodnosti, která je v tomto modelu ekvivalentní metodě nejmenších čtverců. Odhady regresních koeficientů tedy volíme tak, aby celkový součet čtverců

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, \beta_0, \dots, \beta_k))^2$$

byl co možná nejmenší (odtud název metoda nejmenších čtverců). V případě nelineární regrese už neexistují explicitní vzorce na výpočet hodnot odhadnutých koeficientů, tyto odhady musíme hledat za pomoci numerických metod a matematického softwaru.

Podobně jako v lineární regresi můžeme konstruovat intervaly spolehlivosti pro hodnoty neznámých regresních koeficientů i pro hodnoty prokládané funkce. V případě nelineární regrese už jsou ale vzorce na vyjádření těchto nejistot značně komplikované, proto jsme je v textu seriálu neuváděli. Stačilo nám, že nám tyto nejistoty poskytne matematický software na výstupu. Zmíněné intervaly spolehlivosti mají pro dostatečný počet měření (alespoň 4-5 krát více měření než neznámých regresních koeficientů) následující vlastnosti

$$P\left(\beta_i \in \left(\hat{\beta}_i \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} s_n^{K_i}\right)\right) \doteq 1 - \alpha,$$

$$P\left(f(x, \beta_0, \dots, \beta_k) \in \left(f(x, \hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_k) \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} s_n^f(x)\right)\right) \doteq 1 - \alpha,$$

kde  $s_n^{K_i}$  je nejistota měření regresního koeficientu a  $s_n^f(x)$  je nejistota měření funkční hodnoty prokládané funkce v bodě  $x$ .

V případě lineární i nelineární regrese můžeme provádět statistické testy o hodnotách regresních koeficientů. Můžeme tedy testovat hypotézy a alternativy typu

$$\begin{aligned} H : \beta_j &= \vartheta, \\ A : \beta_j &\neq \vartheta, \end{aligned}$$

kde  $\vartheta$  je nějaká předem zvolená konstanta. Jako testová statistika se v tomto případě použije následující transformace naměřených dat

$$T = \frac{\hat{\beta}_j - \vartheta}{s_n^{K_j}},$$

kde  $s_n^{K_j}$  je nejistota měření regresního koeficientu. Kritický obor takového testu má potom tvar

$$C = (-\infty, u_{\frac{\alpha}{2}}) \cup (u_{1-\frac{\alpha}{2}}, \infty).$$

Jednoduchou úpravou by se dal tento test upravit k testování jednostranných modifikací zmíněné hypotézy a alternativy.

Stejně jako v lineární regresi je nutné volit za prokládané funkce jen takové funkce, které mají nějaké fyzikální opodstatnění. V opačném případě se vystavujeme velkému riziku špatné volby prokládané funkce. Všechny závěry by potom byly chybné.

V nelineární regresi navíc ještě vyvstává podmínka identifikovatelnosti parametrů našeho modelu. Jednoduše řečeno musí platit, že pro různé volby regresních koeficientů musí být prokládaná funkce jiná. V opačném případě bychom totiž nemohli jednoznačně určit odhady hodnot regresních koeficientů. Pokud máme model s neidentifikovatelnými parametry, tohoto problému se dá vždy zbavit přeparametrizováním pomocí menšího počtu parametrů.

b) Naměřenými daty chceme prokládat teoretickou funkci tvaru

$$f(x) = a + b \cdot \sin(cx + d).$$

V tomto momentě si musíme uvědomit, že je to přesně případ, který jsme popisovali v textu seriálu jako problémový z hlediska omezení na hodnoty parametrů a identifikovatelnost parametrů.

Když si vykreslíme jednoduchý graf naměřených hodnot bez prokládané funkce, vidíme, že měřená data mají přibližně tvar sinusoidy s periodou řádově  $\pi$ . Pokud bychom nijak neomezili možnou hodnotu parametru  $c$ , který ovlivňuje periodu sinusoidy, velmi pravděpodobně bychom dostali na výstupu z matematického softwaru velmi velkou hodnotu tohoto koeficientu (neboť pro velkou hodnotu periody by funkce sinus prošla naměřenými daty velmi přesně). Jelikož ale z grafu vidíme, že perioda měřených dat bude poměrně nízká, přidáme ještě omezení na hodnotu parametru  $c$ . Přidáme si podmínku, že odhad parametru  $c$  musí ležet v intervalu

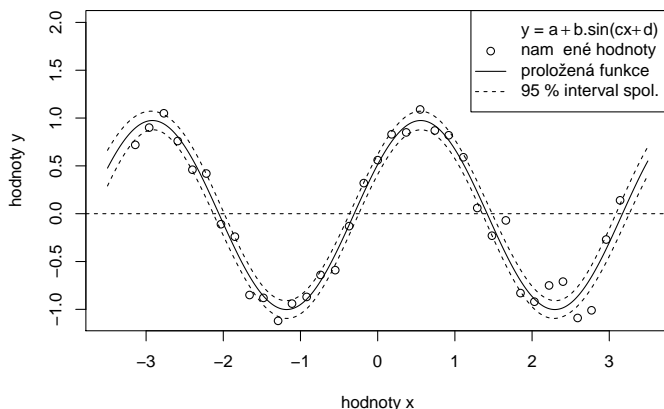
$$(0, 2),$$

což odpovídá periodě sinusoidy větší než  $\frac{\pi}{2}$  (toto je z obrázku jistě splněno). Dále si přidáme omezení na možné hodnoty parametru  $d$ . Budeme chtít, aby odhad tohoto parametru ležel v intervalu

$$(-\pi, \pi).$$

Toto děláme z důvodu identifikovatelnosti parametrů v našem modelu.

S těmito dvěma omezeními jsou už všechny parametry v našem modelu identifikovatelné a můžeme nechat matematický software spočítat jejich odhady. Po dosazení našeho modelu včetně těchto dvou požadavků do výpočetního prostředí  $R$  dostáváme na výstupu odhady regresních koeficientů, pomocí kterých můžeme vykreslit graf prokládané funkce. Takovýto graf společně s intervalovým odhadem pro prokládanou funkci můžeme vidět na Obr. 4. Z tohoto grafu je vidět, že proložená funkce sedí na naměřená data velmi dobře, takže nemusíme přidávat žádné další omezující podmínky a můžeme takovýto model prohlásit za finální. Zároveň je vidět, že jsme prokládanou funkci určili poměrně přesně, jelikož interval spolehlivosti je poměrně úzký.



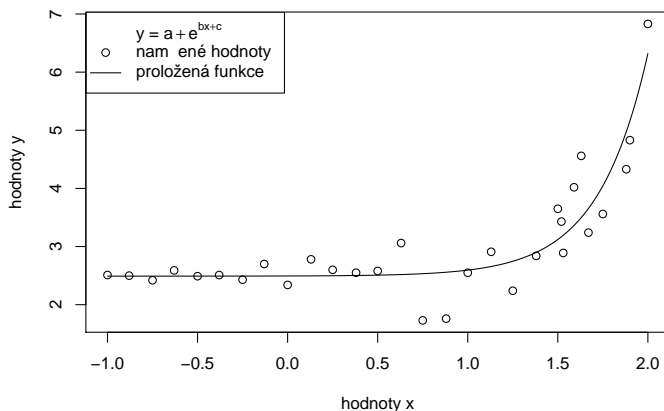
Obr. 4: Graf naměřených hodnot a proložené funkce z příkladu b).

c) Naměřenými daty budeme chtít prokládat teoretickou funkci tvaru

$$f(x) = a + e^{bx+c}.$$

Všechny regresní koeficienty v tomto modelu jsou identifikovatelné a není žádný problém s omezeností některého koeficientu. Vše je tedy připraveno na vložení do výpočetního prostředí  $R$ .

Matematický software nám na výstupu poskytne hodnoty odhadů regresních koeficientů, na základě kterých můžeme vykreslit graf naměřených hodnot a proložené funkce, který můžeme vidět na Obr. 5. Z tohoto grafu dostáváme velké podezření na porušení předpokladu homoskedasticity. Toto ještě pro jistotu ověříme na grafu residuí oproti hodnotám nezávisle proměnné, který můžeme vidět na Obr. 6. Z těchto dvou grafů je nám jasné, že předpoklad homoskedasticity byl porušen a že pro určení nejistot regresních koeficientů budeme muset použít Whiteův (sendvičový) odhad kovarianční matice.



Obr. 5: Graf naměřených hodnot a proložené funkce z příkladu c).

Matematický software *R* poskytl následující odhady regresních koeficientů a příslušných nejistot (vypočítaných na základě Whiteova odhadu kovarianční matice)

$$a = (2,49 \pm 0,08),$$

$$b = (3,6 \pm 0,7),$$

$$c = (-5,9 \pm 1,4).$$

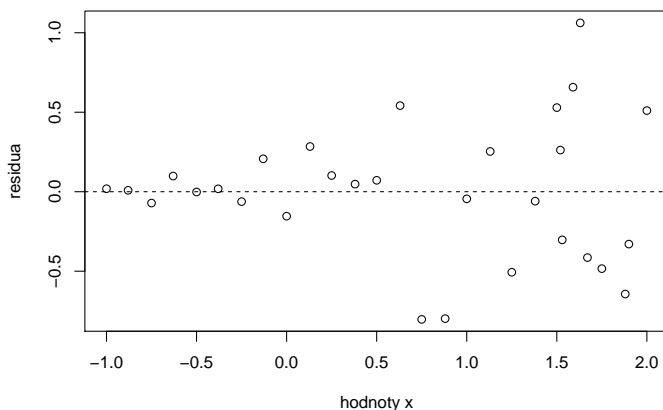
Na závěr tohoto příkladu můžeme konstatovat, že nejistoty měření regresních koeficientů spočítané klasickým postupem (které v případě heteroskedasticity nejsou správné) se od nejistot měření regresních koeficientů spočítaných pomocí Whiteova odhadu kovarianční matice liší maximálně o 45 %.

d) Naměřenými daty budeme prokládat funkci

$$f(x) = a + \frac{1}{bx + c}.$$

Je vidět, že všechny parametry jsou identifikovatelné a že nemůže nastat problém s omezeností jednotlivých parametrů, jelikož prokládaná funkce není periodická. Můžeme tedy rovnou pomocí nelineární regrese proložit tuto funkci naměřenými daty. Graf proložené funkce a naměřených dat ve formě chybových úseček můžeme vidět na Obr. 7. Je vidět, že proložená funkce dobře sedí na naměřená data. Zároveň nejsou vidět žádné známky heteroskedasticity. Můžeme se tedy domnívat, že byly všechny předpokladu nelineárního regresního modelu splněny. Toto ovšem ještě ověříme podrobnější regresní diagnostikou.

Na Obr. 8, resp. 9 můžeme vidět graf residuí oproti hodnotám nezávisle proměnné, resp. graf residuí oproti hodnotám proložené funkce. Na obou grafech vidíme náhodný shluk bodů



Obr. 6: Graf residuí oproti hodnotám nezávisle proměnné z příkladu *c*).

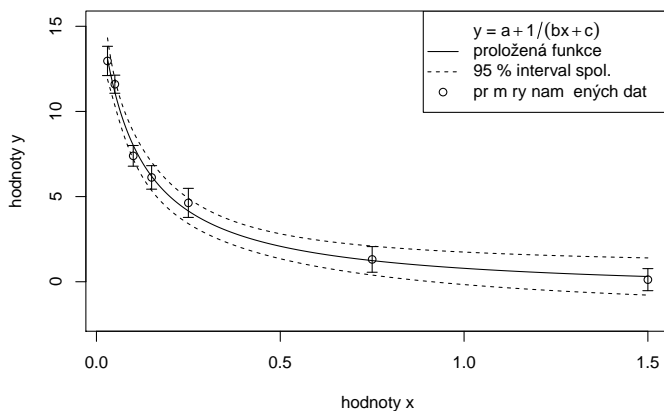
kolem osy  $x$  bez žádné tendence shlukování nad nebo pod osou  $x$  ani různého rozptylu residuí v různých částech grafu. Můžeme tedy usoudit, že jsme prokládanou funkci volili správně a že naměřená data splňují předpoklad homoskedasticity. Dále můžeme na Obr. 10 vidět graf residuí oproti posunutým residuům. Na tomto grafu vidíme jen náhodný shluk bodů kolem počátku souřadnic bez známek shlukování v jednotlivých kvadrantech. Můžeme tedy usoudit, že i předpoklad nezávislosti měření byl pravděpodobně splněn.

Na závěr tedy můžeme říci, že regresní diagnostika neodhalila žádné závažné porušení předpokladů nelineárního regresního modelu. Toto proložení tedy můžeme považovat za splněné a konstatovat, že aplikace nelineárního regresního modelu na tato data byla v pořádku.

*Bonus:* Naším úkolem bude proložit zadanými daty regresní spliny. Než začneme zadávat nějaké příkazy do matematického softwaru, musíme si uvědomit, jakým omezením čelíme. Předně si musíme uvědomit, že náš datový soubor má celkem 89 měření. Z toho vyplývá omezení na počet regresních koeficientů, který by neměl překročit 15, aby na jeden regresní koeficient připadalo alespoň 5 měření. V ideálním případě bychom se měli snažit volit co nejmenší počet regresních koeficientů, ale zároveň musí být proložená funkce dostatečně přesná. Dalším omezením je stupeň prokládaných polynomů. Musíme si uvědomit, že vysoký stupeň prokládaných polynomů zvyšuje počet potřebných regresních parametrů. Musíme tedy opět vyvážit přesnost prokládané funkce a požadavek na co nejnižší stupeň prokládaných polynomů. Podle teorie vyložené v textu seriálu začneme se stupněm 3 a případně budeme dále, pokud to situace bude vyžadovat, stupeň zvyšovat.

Nyní už můžeme začít s prokládáním samotné funkce. Budeme postupovat přesně podle návodu v textu seriálu. Nejprve tedy jako uzly našich regresních splinů zvolíme ty body, ve kterých se nejvíce mění chování měřených dat, následně budeme tuto volbu upravovat (případně přidávat více uzlů), abychom docílili správné podoby proložené funkce.

Tímto postupem jsme po několika iteracích dospěli k modelu, kde prokládáme polynomy



Obr. 7: Graf naměřených hodnot a proložené funkce z příkladu *d*).

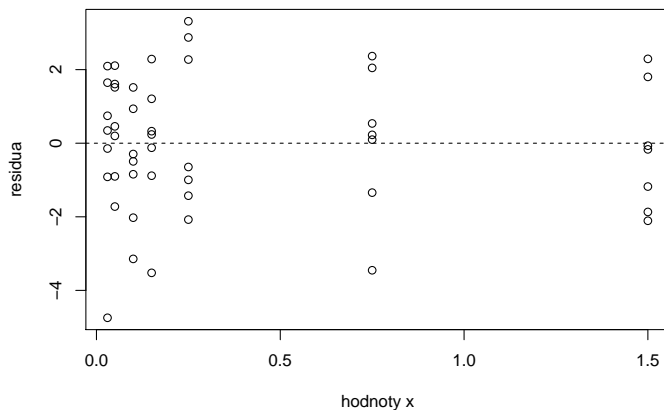
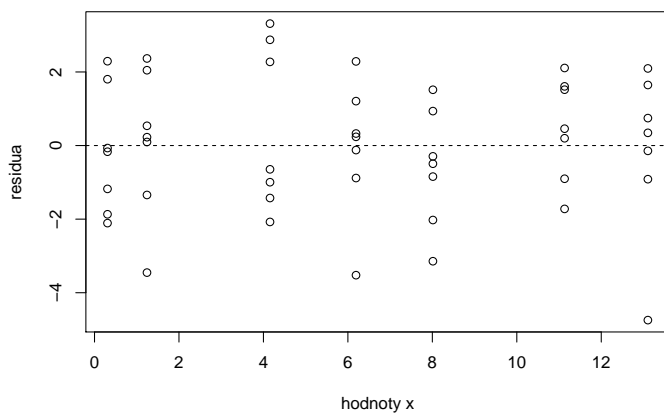
třetího stupně a uzly máme zvolené v bodech

$$1; 1,8; 2,2; 3; 4,5; 5; 6; 6,5.$$

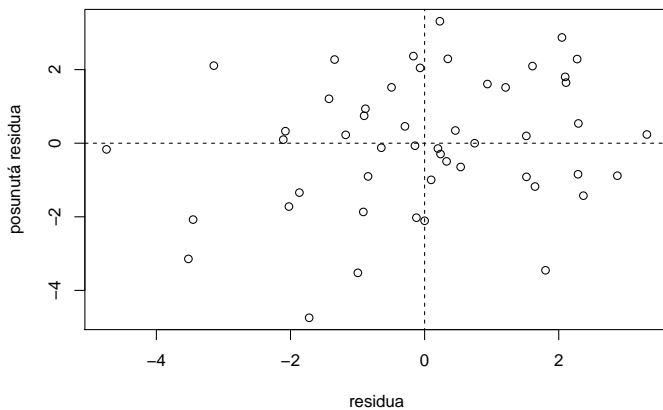
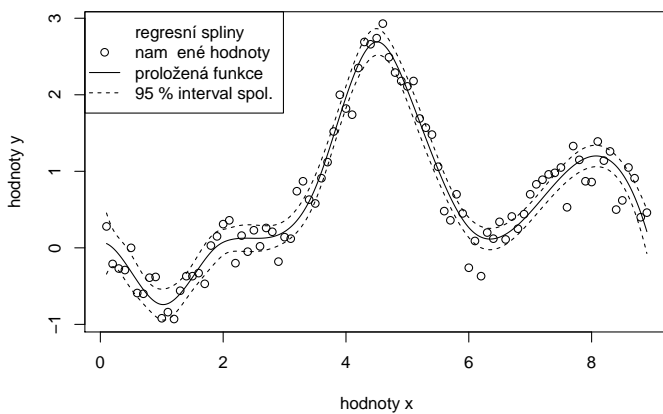
Na Obr. 11 můžeme vidět naměřená data společně s proloženou funkcí. Je vidět, že takto zvolená funkce velice dobře aproximuje naměřená data, můžeme tedy takovýto model prohlásit za finální.

Na závěr jen poznamenejme, že výše popsaná volba uzlů rozhodně není jediná správná. Kdybychom některý z uzlů o trochu posunuli, tvar prokládané funkce by se téměř nezměnil a výsledný model by byl stále správný. Je navíc možné, že podobný graf bychom dostali i pro zcela jinou volbu uzlů.

*Michal Nožička*  
nozicka@fykos.cz

Obr. 8: Graf residuí oproti hodnotám nezávisle proměnné z příkladu *d*).Obr. 9: Graf residuí oproti hodnotám proložené funkce z příkladu *d*).



Obr. 10: Graf residuí oproti posunutým residuům z příkladu *d*).

Obr. 11: Graf proložených regresních splinů naměřenými daty z bonusového příkladu.

## Úloha IV.P ... statistikův denní chléb

9 bodů; průměr 5,30; řešilo 20 studentů

Známe to všichni, krajíc chleba namazaný medem nebo marmeládou, zakousneme se a najednou je kapka mazadla na ruce a jsme za prasata. Spočítejte, jak závisí pravděpodobnost, že v krajíci bude díra skrz naskrz, v závislosti na jeho tloušťce. Model kynutí těsta necháme na vás. (Třeba rovnoměrně rozmístěné bubliny s exponenciálně rozděleným poloměrem je dobrý model.)

*Michal se pobryndal.*

### Model jedné bubliny

Nejdřív je potřeba udělat si pořádek v pojmech. Budeme tedy uvažovat rovnoměrně rozdělené bubliny s exponenciálně rozděleným poloměrem. Počet bublin označíme  $k$ . Bubliny uvažujeme kulovité. Za rovnoměrné rozmístění považujeme to, když středy bublin budou ve vrcholech krychlové mřížky s délkou hrany  $r > 0$ . Exponenciální rozdělení je rozdělení náhodné veličiny  $x$  takové, že:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases},$$

kde  $f(x)$  je hustota pravděpodobnosti a  $\lambda > 0$ . Zintegrováním od minus nekonečna do  $x$  snadno zjistíme, že její distribuční funkce  $F(x)$  (tedy pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny je menší než  $x$ ) je pro  $x$  nezáporné rovna  $1 - e^{-\lambda x}$ . Nyní uvažujme krajíc s danou tloušťkou  $d$ . Rozdělíme si práci na několik případů.

V prvním případě budeme uvažovat velmi zjednodušený model, kdy se v průběhu kynutí žádné dvě bubliny nespojí tak, aby společně vytvořily tunel. Potom nám stačí zanedbat šířku bublin (budeme tedy pro jednoduchoost počítat pouze s jejich výškou). Také se nechceme starat o to, kde mají bubliny střed, proto řekneme, že střed je vždy ve výšce  $d/2$ . Potom lze s výškami bublin počítat jako s poloměry, tedy mají také exponenciální rozdělení, jenom konstanta  $\lambda$  bude poloviční. Výšky jednotlivých bublin jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny. Pravděpodobnost, že výška bubliny bude menší než  $d$ , je:

$$Pr(x < d) = \int_0^d \lambda e^{-\lambda x} dx = [\lambda e^{-\lambda x} (-\lambda^{-1})]_0^d = [-e^{-\lambda x}]_0^d = 1 - e^{-\lambda d}.$$

Tedy pravděpodobnost, že v krajíci nebude díra, tedy že žádná bublina nebude vyšší než  $d$ , je  $(1 - e^{-\lambda d})^k$ .

Abychom měli nějaký odhad, tak nastavme  $k = 800$  (Krajíc buď dlouhý 20 cm a široký 10 cm, bubliny mějte mezi sebou vzdálenost 1 cm. Více bublin nad sebou neuvažují a krajíc si aproximují obdélníkem s danými rozměry. Jeho obsah vynásobím čtyřmi, protože na jeden centimetr čtvereční krajíce připadají čtyři body bublinové mřížky). Nedovolují bublinám, aby se spojovaly, tedy mě tlouška krajíce nezajímá.

Letným pohledem na krajíc chleba (Šumava) vidíme, že děr s průměrem 1 cm je málo, ale kolem je spousta menších bublin, od boku střelme 1 000krát víc. Tedy  $\lambda = 6.9$  (to znamená, že pravděpodobnost, že výška bubliny přesáhne 1, tedy  $e^{-\lambda}$ , je zhruba 0.001). Potom pravděpodobnost, že při tomto modelu kynutí nebude v krajíci díra, je  $(1 - e^{-6.9d})^{800}$ , což je pro malá  $d$  nepříjemně malé číslo. Pokud si  $d$  zvolíme 1 (jednotka je 1 cm), tak je to zhruba 0.446 pro to, že nevznikne díra. Tento model je dostatečně přesný pro krajíc, jehož tloušťka je menší než vzdálenost mřížových bodů.

*Model více bublin*

Ve druhém přiblížení si zpřesníme pojem „rovnoměrné rozmístění“. Nyní za něj budeme uvažovat to, že na jednotku objemu připadá konstantní počet bublin a že lze krajíc rozdělit na několik výškových sloupců, mezi nimiž se bubliny nebudou spojovat. To znamená, že najednou je počet bublin funkcí závislou na tloušťce krajíce, zafixujeme-li si jeho plochu. Za jednotku objemu si zvolíme  $1 \text{ cm}^3$ .

Ve druhém případě dovolíme, aby bubliny mohly být nad sebou a aby se bubliny v jednom výškovém sloupci mohly spojovat. To je ještě poměrně jednoduchý, ale realističtější model. Jediná změna je, že místo výšky jedné bubliny uvažujeme součet jejich výšek a chceme, aby byl menší než  $d$ . Je to ovšem jen horní odhad výšky tunelu, v reálném světě by se bubliny spojily a celková výška by byla menší.

Následuje část s pokročilejší matematikou, pokud chcete, můžete ji s čistým svědomím přeskočit.

Nyní chceme nějak odvodit, jaká bude hustota pravděpodobnosti pro spojené bubliny. Máme-li dvě nezávislé veličiny (výšky bublin jsou zřejmě navzájem nezávislé), pravděpodobnost, že nastanou obě zároveň, je součin jejich pravděpodobností. Chceme-li pravděpodobnost toho, že jejich součet bude roven  $z$ , jednu z veličin volíme nezávisle, tedy bude mít hodnotu  $x$ , a druhá už bude závislá na  $x$  s hodnotou  $z - x$ . Pokud bychom pracovali s diskrétními veličinami, které jsou navíc nezávislé, sečetli bychom takovéto součiny přes všechna  $x$  a měli bychom kýženou pravděpodobnost. Ale výška bubliny je spojitá. Analogie součtu přes všechny hodnoty spojitě veličiny je integrál.

Existuje věta z teorie pravděpodobnosti zabývající se součtem nezávislých náhodných veličin, říká se jí Věta o konvoluci: Jsou-li  $X, Y$  nezávislé náhodné veličiny se spojitým rozdělením s hustotami  $f_X, f_Y$ , pak má veličina  $Z = X + Y$  rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx,$$

kde  $z$  je hodnota součtu, tedy výška celého tunelu. Je sice jen pro součet dvou nezávislých náhodných veličin, ale je vidět (jak ukážeme níže), jak spočítat hustotu součtu tří, čtyř, ... náhodných veličin. Jenom budeme muset odhadnout nějaké rozdělení možného počtu bublin nad sebou. Ten může nabývat kladných celočíselných hodnot, tedy je to diskrétní veličina. Ukrojme si nyní tlustší krajíc o výšce  $1,5 \text{ cm}$  stejných rozměrů, tedy v něm bude  $2400$  bublin a vždy budou tři nad sebou, tedy tam bude  $800$  trojic. To stačí, abychom ukázali, jak se počítá rozdělení součtu výšek více než dvou bublin nad sebou. Potřebujeme nyní spočítat hustotu rozdělení pro součet tří výšek bublin. Nejdřív to tedy spočítáme pro součet dvou (hustota pro hodnoty menší než nula je nulová, tedy integrál uřízneme z jedné strany v nule ( $f(x)$ ) a z druhé v  $z$  ( $f(z-x)$ ),  $g$  bude pro záporné hodnoty také identická nula):

$$g(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda z + \lambda x} dx = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}.$$

Teď to spočítáme pro tři bubliny nad sebou, tedy sečteme jednu a dvě bubliny:

$$h(z) = \int_0^z \lambda^2 x e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda z + \lambda x} dx = \int_0^z \lambda^3 e^{-\lambda z} x dx = \lambda^3 \frac{z^2}{2} e^{-\lambda z}.$$

Nyní potřebujeme spočítat pravděpodobnost, že tři bubliny nad sebou nepřesáhnou výšku  $d$ , využijeme metodu per partes:

$$\begin{aligned} Pr(x < d) &= \int_0^d \lambda^3 \frac{x^2}{2} e^{-\lambda x} dx = -\lambda^2 \frac{1}{2} d^2 e^{-\lambda d} + \int_0^d \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = \\ &= -\lambda^2 \frac{1}{2} d^2 e^{-\lambda d} + \lambda d e^{-\lambda d} + \int_0^d \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda d} \left( \frac{1}{2} \lambda^2 d^2 + \lambda d + 1 \right). \end{aligned}$$

Takto jsme spočítali pravděpodobnost, že bubliny v jednom výškovém sloupci společně nevytvorí tunel. Pro výpočet finální pravděpodobnosti stačí příslušné pravděpodobnosti vynásobit, tedy v našem případě pro  $k = 800$ ,  $\lambda = 6.9$  a  $d = 3$  (teď počítáme s krajícem tloušťky 3 cm, předtím to bylo jen 1 cm) vyjde víc než 0.999 pro to, že nevznikne díra.

Obecně, když kombinujeme několik exponenciálně rozdělených veličin, vznikne náhodná veličina s gamma rozdělením. To je ještě pokročilejší partie matematiky, tedy se gamma rozdělením tady nebudeme zabývat a zájemci nechtě si ho najdou na internetu.

### Obecný model

Pro úplnost jenom zmíníme model, ve kterém se bubliny mohou protínat, tedy se jejich výšky mohou překrývat. Potom neplatí, že když součet výšek přesáhne  $d$ , tak v krajici musí vzniknout díra. V tomto modelu je to, zda vznikne díra, závislé na poloze středů a je nad výpočetní i časově možnosti autorů alespoň přibližně určit hledanou pravděpodobnost. Jenom podotkneme, že ani tento model není přesný, neboť při opravdovém kynutí se středy bublin v chlebu navzájem pohybují v závislosti na více faktorech, například na hustotě a viskozitě těsta a na aktuální velikosti okolních bublin, což je dynamicky se vyvíjející model (všechny dosud zmíněné modely byly statické). V obecném modelu musíme navíc uvažovat náhodný počet bublin (třeba řídicí se Poissonovým rozdělením).

### Simulace

Napsali jsme simulaci Modelu více bublin v jazyce C++, zde uvádíme pseudokód:

```
int sloupec(double d, double lambda){
    int pocet := poissonovo_rozdeleni(d);
    for i := 0 to pocet-1 do vygeneruj_bublinu();
    //stred rovnomerne na (0,d), polomer exponencialne s parametrem lambda
    double horni_mez := dira_odspodu();
    //nastavi si horni mez na 0 a hleda, jestli ji nejaka bublina protne
    //pokud ano, nastavi si horni mez na horni okraj te bubliny a opakuje
    if (horni_mez>1) return 1; //vznikla dira
    return 0; //nevznikla dira
}

int main(void){
    int p_sloupcu := poissonovo_rozdeleni(800);
    int uspech := 0;
    for i := 0 to p_sloupcu-1 do uspech := uspech + sloupec(d,6.2);
}
```

Raději ještě slovně popíšeme, co se v kódu děje. Nejprve si vytvoříme funkci `sloupec`, která simuluje jeden výškový sloupec. Vrábí 1, když v krajíci vznikla díra, a 0, když díra nevznikla. Tuto funkci pak dokola voláme tolikrát, kolik máme sloupců.

Výsledky vygenerované funkčním kódem pro různé poloměry ( $\lambda = 6.9$ ) jsou k vidění v tabulce 1. Každé měření jsme zopakovali 10 000krát, tedy můžeme říci, že jsme to změřili pro deset tisíc krajíců.

Tab. 1: Výsledky simulace

$d$	počet sloupců	počet děr	počet děravých krajíců
1	7 999 638	107 058	9 999
2	7 996 136	7 537	5 250
3	8 002 974	494	484
4	8 000 854	38	38
5	8 001 825	2	2

Tyto hodnoty vypadají rozumně pro hodně bublavý chleba. Vůbec ale nekorespondují s výpočty pro jednu bublinu, s výpočty pro více bublin si rozumí už více, ale stále moc ne. Vyšlo nám, že pro výšku 1 je pravděpodobnost vzniku díry téměř stoprocentní. Bude to nejspíš tím, že více parametrů volíme náhodně, a také to, že vzniká více bublin nad sebou.

Na závěr bychom chtěli uvést tabulku, ve které shrneme výsledky spočtených teoretických modelů. Ve sloupci „hodnota“ jsou uvedené pravděpodobnosti, že nevznikne díra.

Tab. 2: Výsledky měření

model	pravděpodobnost	hodnota pro $d = 1$
jedna bublina	$1 - (1 - e^{-\lambda d})^k$	0.446
více bublin	$1 - (1 - e^{-\lambda d} (\frac{1}{2}\lambda^2 d^2 + \lambda d + 1))^k$	$5.219 \cdot 10^{-12}$

U každého modelu  $k$  označuje počet výškových sloupců. U druhého modelu uvádíme pravděpodobnost pro tři bubliny nad sebou (proto vyšlo tak malé číslo), výpočet pravděpodobnosti pro jiný počet bublin je z výše uvedeného postupu zřejmý.

Ještě si musíme rozmyslet, jak jsou uvedené modely realistické. Model jedné bubliny se tváří, že by mohl být realistický pro hodně tenký chleba, tj. takový, ve kterém bude jen jedna bublina v každém sloupci. To má nevýhodu, že v reálném světě nevíme, jak přesně je takový krajíc tlustý, a bez toho nenastavíme konstanty. Model více bublin se snaží tohoto vyvarovat, ale vlastně trpí tím samým problémem – jak víme, že jsme trefili přesně tu tloušťku, kde jsou tři bubliny nad sebou? Simulující program se to snaží léčit tím, že pro každé zvolené  $d$  vygeneruje náhodně jiný počet bublin, ale i u něj může být problém, že jsme třeba špatně nastavili poměry.

*Markéta Calábková*  
calabkovam@fykos.cz

*Jakub Dolejší*  
dolejsi@fykos.cz

## Úloha V.4 ... na provázku

8 bodů; průměr 3,05; řešilo 22 studentů

Dvě závaží zanedbatelných rozměrů o hmotnosti  $m = 100$  g spojíme pružným nehmotným provázkem o klidové délce  $l_0 = 1$  m s tuhostí  $k = 50$  kg·s<sup>-2</sup>. Jedno závaží držíme na místě

a druhé kolem něj necháme rotovat s frekvencí  $f = 2 \text{ Hz}$ . První závaží se přitom může volně otáčet kolem své osy. V jednu chvíli držené závaží uvolníme. Na jakou minimální vzdálenost se k sobě závaží přiblíží? Neuvažujte vliv gravitačního pole a předpokládejte platnost Hookeova zákona.

*Mírek pozoroval dítě s kachničkou na provázku.*

Před uvolněním závaží, které rotuje pouze kolem své osy, koná druhé závaží kruhový pohyb kolem prvního závaží. V tento okamžik platí rovnost mezi odstředivou silou  $F_d$  a silou pružnosti  $F_p$ :

$$m\omega^2 l = k(l - l_0), \quad (3)$$

kde  $l$  je délka nataženého provázku. Úpravou rovnice (3) dostáváme:

$$l = \frac{k}{k - m\omega^2} l_0. \quad (4)$$

V okamžiku, kdy původně statické závaží uvolníme, začne se soustava pohybovat volně prostorem ve směru okamžité rychlosti původně rotujícího závaží. Aby se nám popis situace zjednodušil, představíme si, že se „postavíme“ do hmotného středu soustavy a budeme pozorovat, jak se závaží pohybují okolo nás. Úlohu pak vyřešíme úvahou.

Těsně před uvolněním závaží se druhé závaží pohybovalo kolem druhého závaží úhlovou rychlostí  $\omega$ . Tím, že si „stoupneme“ do středu provázku (pozorovatele spojíme s hmotným středem soustavy) a budeme pozorovat, jak se závaží otáčí kolem nás, se nezmění úhlová rychlost, s jakou se závaží kolem nás zdánlivě pohybují.<sup>3</sup>

Při rovnoměrném pohybu po kružnici by této úhlové rychlosti odpovídala odstředivá síla, která by se rovnala síle pružnosti provázku. Úvahou, výpočtem nebo jenom zkušeností můžeme rozhodnout, že takto pojatá odstředivá síla, která je určena s okamžitě hodnoty úhlové rychlosti závaží a jeho hmotnosti, bude menší než síla pružnosti a rozdíl těchto sil uvede závaží v radiálním směru (vůči pozorovateli stojícím uprostřed provázku) do pohybu.<sup>4</sup>

Napíšeme pohybovou rovnici pro radiální směr

$$F = -k(l - l_0) + m\omega^2 \frac{l}{2}. \quad (5)$$

*Pozn.:* Při našich úvahách přitom předpokládáme, že provázek splňuje Hookův zákon a že provázek se nemůže nějak jinak (příčně) deformovat či prověsit.<sup>5</sup> Stejně tak, jako se provázek může prodloužit, může se i zkrátit a síla pružnosti bude působit ven.

Dále s výhodou využijeme zákona zachování momentu hybnosti, přičemž moment hybnosti určíme z okamžiku těsně po upuštění:

$$L = 2m \left( \frac{l}{2} \right)^2 \omega, \quad (6)$$

kde  $L$  je moment hybnosti závaží pohybujících se kolem středu provázku (tj. středu naší soustavy).

Okamžitou vzdálenost závaží od středu otáčení zdefinujeme jako  $r = r(t) = l(t)/2$ .

<sup>3</sup>Což není na první pohled zcela zřejmý fakt, je potřeba si ho rozmyslet.

<sup>4</sup>Pozn.: Touto úvahou jsme se elegantně vyhnuli počítání Eulerových rovnic, které vystupují při popisu pohybu těles v korotující soustavě (zde nemá větší smysl rovnice a jejich význam rozebírat, zvědavý čtenář si jistě dohledá sám). Je dobré si uvědomit, že i kdyby si popsané síly byly rovny, tak na dalším postupu by to nic neměnilo, jen by vycházel nulový rozdíl sil. Náš postup je tedy obecný.

<sup>5</sup>Což je splněno, protože nejsme v žádném gravitačním poli

Vyjádřením  $\omega$  z (6) a dosazením do (5) dostáváme pohybovou rovnici

$$\ddot{r} = \frac{F}{m} = \frac{kl_0}{m} - \frac{2kr}{m} + \frac{L^2}{4m^2r^3}. \quad (7)$$

Dostali jsme diferenciální rovnici druhého řádu, což není výsledek, který by nás na první pohled potěšil.

Obecně je analytické řešení diferenciálních rovnic složitější záležitostí, nemluvě ani o tom, že některé diferenciální rovnice analytické řešení nemají. Budeme proto problém řešit numericky, což je velice hojně používaná metoda. K řešení problému použijeme nejjednodušší numerickou metodu a to *Eulerovu metodu*.<sup>6</sup>

K tomu bude nutné všechny ostatní proměnné, které v rovnici (7) vystupují, určit číselně. Začneme momentem hybnosti, ten určíme z počátečních podmínek:

$$L = J\omega = 2m \left(\frac{l}{2}\right)^2 2\pi f. \quad (8)$$

Po dosazení dostáváme  $L = 1,342 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ . Do rovnice (7) zbývá už jen dosadit číselné hodnoty ze zadání.

Eulerova metoda ze znalosti vzdálenosti  $r_i$  v čase  $t_i$  určí zrychlení  $a_i$  (rovnice (7)) a pak jednoduše dopočítáme novou rychlost

$$v_{i+1} = v_i + a_i\Delta t,$$

kde  $\Delta t$  je časový krok.

Stejně tak určíme polohu v čase o  $\Delta t$  později:

$$r_{i+1} = r_i + v_i\Delta t.$$

Výpočet pak provádíme iterativně. Dosazením do (7) dostáváme pro zrychlení výraz

$$a_i = -500(2r_i - 1) + \frac{45,02}{r_i^3}.$$

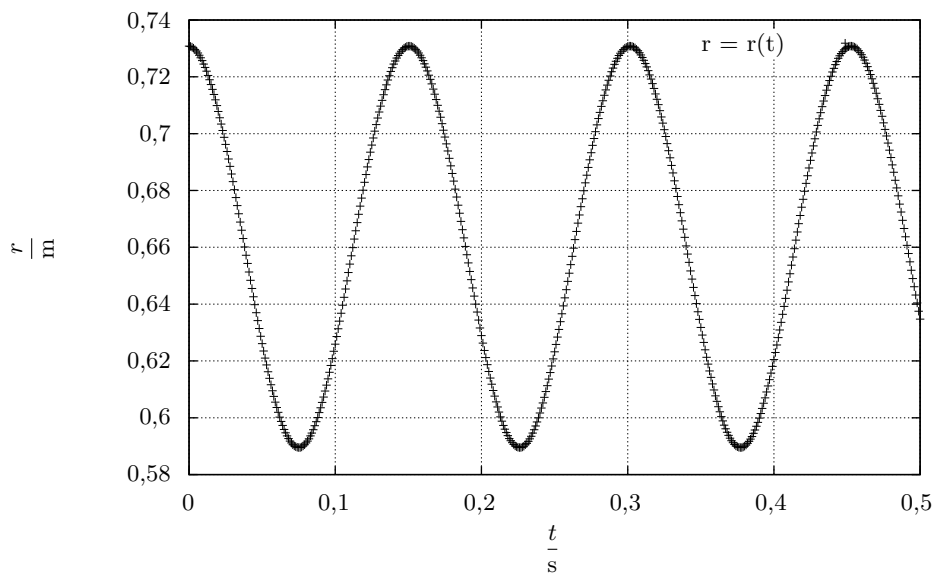
Jak vypadá takový rekurentní výpočet, je vidět v tabulce 3. Graf závislosti polohy na čase je pak na obr. 12. Z grafu vidíme, že závaží vykonávají kmitavý pohyb a jsme schopni určit minimální vzdálenost závaží od středu provázku:  $r_m = 0,59 \text{ m}$ . Nejkratší délka provázku je tedy  $l_m = 1,18 \text{ m}$ .

**Pavel Kůs**  
pavelk@fykos.cz

<sup>6</sup>Podrobněji např. v textu <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/modelov.pdf>

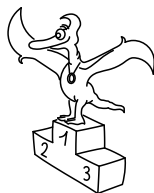
Tab. 3: Numerický výpočet

$\frac{t}{s}$	$\frac{r}{m}$	$\frac{a}{m \cdot s^{-2}}$	$\frac{v}{m \cdot s^{-1}}$
0,000	0,7308	-115,4	-0,1154
0,001	0,7307	-115,3	-0,2307
0,002	0,7305	-114,9	-0,3456
0,003	0,7301	-114,4	-0,4601
0,004	0,7296	-113,7	-0,5738
0,005	0,7291	-112,9	-0,6867
0,006	0,7284	-111,9	-0,7986
0,007	0,7276	-110,7	-0,9093
0,008	0,7267	-109,3	-1,0186
0,009	0,7257	-107,8	-1,1265
0,010	0,7245	-106,2	-1,2326



Obr. 12: Závislost prohybu trámku na přiložené hmotnosti.





## Pořadí řešitelů po VI. sérii



Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

## Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
		6	6	6	7	8	9	12	10			
1. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	4	8	5	5	0	3	12	12	49	82	313
2. <i>Václav Zvoníček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	6	4	4	3	5	10	6	42	82	305
3. <i>Jakub Jobus</i>	G PdC, Piešťany	4	8	2	2	2	3	12	11	44	77	284
4. <i>Martin Schmied</i>	G Jihlava	4	8	6	3	3	4	11	12	51	76	283
5. <i>Radka Křížová</i>	G J. Heyrovského, Praha	4	8	2	4	–	2	11	–	31	71	231
6. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	6	–	–	–	–	12	–	22	74	206
7. <i>Matěj Prokop</i>	G Dašická, Pardubice	4	6	–	7	–	–	–	–	17	80	191
8. <i>Jiří Zelenka</i>	G Z. Wintra, Rakovník	2	4	2	2	1	3	13	8	35	57	156
9. <i>Miroslav Macko</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	4	–	–	–	–	–	–	–	4	71	117
10.–11. <i>Jakub Pravda</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	4	–	–	–	–	0	–	–	4	52	111
10.–11. <i>Eva Vochozková</i>	Biskupské G, Brno	4	2	1	2	–	–	–	–	9	62	111
12. <i>Pavla Rudolfová</i>	G, Vídeňská, Brno	6	6	3	3	9	0	–	–	27	69	93
13. <i>Matěj Krátký</i>	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	80	90
14. <i>Šimon Brázda</i>	G, Hlinsko	2	–	–	–	–	–	5	–	7	54	89
15. <i>Kateřina Barotová</i>	G, Olomouc-Hejčín	4	2	–	–	2	–	13	–	21	73	87
16. <i>Richard Hamerlik</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	65
17. <i>Petr Doubravský</i>	Akademické G, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	58
18. <i>Filip Novotný</i>	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	48
19. <i>Tímea Szöllősová</i>	G Grösslingova, Bratislava	4	2	–	–	–	5	–	–	11	43	43
20.–21. <i>Lukáš Hronek</i>	G, Písek	4	8	–	–	–	–	–	–	12	80	39
20.–21. <i>Jan Vondra</i>	G Týn nad Vltavou	2	0	–	–	0	0	5	–	7	31	39
22. <i>Adam Vavrečka</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	37
23. <i>Filip Wagner</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	61	34
24. <i>Joyee Chen</i>	Portola HS, Irvine, USA	4	6	5	5	3	1	6	2	32	50	32
25. <i>Viktor Fukala</i>	G Jana Keplera, Praha	6	6	–	5	–	–	–	–	17	86	30
26. <i>Lucia Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	28
27. <i>Viktor Vařeka</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	–	–	–	76	25
28. <i>Marco Souza de Jood</i>	G Nad Štolou, Praha	4	4	–	–	–	–	–	–	8	61	23
29. <i>Marek Černoch</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	84	21
30. <i>Lucia Krajčovičková</i>	G Jura Hronca, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	17
31. <i>Ján Šrejbr</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	16
32. <i>Vojtěch Ježek</i>	G Legionářů, Příbram	–	–	–	–	–	–	–	–	–	117	14
33.–34. <i>Soňa Curylová</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	12
33.–34. <i>Milan Tichavský</i>	Slezské G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	12
35.–36. <i>Anna Hollmannová</i>	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	10
35.–36. <i>Bohumír Žůrek</i>	G Volgogradská 6a, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	17	10
37. <i>Tomáš Salavec</i>	BG B. Balbína, Hradec Králové	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	8

## Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	6	6	6	7	8	9	12	10	64	100	380
1. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	4	8	3	3	2	2	13	12	47	91	344
2. <i>Ladislav Trnka</i>	G, Havlíčkův Brod	–	8	2	5	3	3	12	12	45	87	320
3. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	4	6	3	4	5	1	–	8	31	78	264
4. <i>Ivan Hudák</i>	ESŠ, Lip. Mikuláš	4	8	5	6	–	–	12	9	44	84	252
5. <i>Lucie Kundraťová</i>	G, nám. TGM, Zlín	4	2	–	4	3	–	12	3	28	73	243
6. <i>Josef Minařík</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	6	3	4	–	–	11	6	34	79	240
7. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	81	177
8. <i>Kristian Matuščík</i>	G, Benešov	6	4	3	3	–	1	11	–	28	55	157
9. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	86	142
10. <i>Marie Grunová</i>	G Moravský Krumlov	4	4	–	1	–	–	11	–	20	62	101
11. <i>Jakub Smolka</i>	Slezské G, Opava	4	0	–	1	–	–	–	–	5	57	98
12. <i>Dominik Beňo</i>	G L. Svobodu, Humenné	4	6	–	–	–	–	–	–	10	98	88
13. <i>Marek Jankola</i>	G M. Hattalu, Trstená	–	4	–	6	–	–	–	–	10	74	81
14. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	4	4	–	1	–	–	11	–	20	65	73
15.–16. <i>Karel Balej</i>	G a SOŠ, Rokycany	–	–	–	–	–	–	–	–	–	95	59
15.–16. <i>Tereza Pavlišová</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	59
17. <i>Veronika Vohníková</i>	Nový PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	35
18. <i>Jakub Zemek</i>	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	61	28
19. <i>Jakub Rajnštajn</i>	G F. M. Pelcla, Rychnov n. Kn.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	25
20.–22. <i>Martin Dinh</i>	G, Třinec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	17
20.–22. <i>Daniel Martyněk</i>	G, Třinec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	17
20.–22. <i>Štěpán Stryja</i>	G, Třinec	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	17
23. <i>Šimon Kondrk</i>	SPŠ Dubnica nad Váhom	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	16
24. <i>Andrea Bínová</i>	G, Česká Lípa	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	15
25.–26. <i>Josef Sabol</i>	G Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	12
25.–26. <i>Marie Vaňáková</i>	G Botičská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	39	12
27.–28. <i>Máté Eke</i>	Gymnázium, sSOŠ a jazyková škola	–	–	–	–	–	–	–	–	–	58	11
27.–28. <i>Michal Jireš</i>	G F. M. Pelcla, Rychnov n. Kn.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	85	11
29. <i>Klára Nechanická</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	10
30. <i>Václav Bulín</i>	G, Plasy	–	–	–	–	–	–	–	–	–	82	9

## Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ		
<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	MFF	UK	3	3	6	7	8	9	12	10	58	100	344
1. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	3	4	6	6	8	7	-	-	34	90	273		
2. Tomáš Dulava	Matičín G, Ostrava	3	4	2	6	3	-	12	3	33	71	238		
3. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	-	3	-	6	8	-	-	-	17	91	188		
4. Zuzana Richterová	G, Pelhřimov	2	3	3	1	1	0	11	4	25	48	165		
5. Dominik Starý	G, Benešov	3	4	2	5	-	2	12	-	28	78	164		
6. Martin Okáník	G Tajovského, B. Bystrica	-	-	-	-	-	-	-	-	-	86	136		
7. Katarína Častulíková	1. súkromné G v Bratislave	2	2	-	2	1	2	9	-	18	55	131		
8. David Košťák	G, Josefská, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	71	114		
9. Ondřej Knopp	G Christiana Dopplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	96	91		
10. David Dvořák	ZŠ a G, Konice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	54		
11. Daniela Hrbáčová	Wichterlovo G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	48	47		
12. Ján Pavlech	G sv. Jozefa Nové Mesto n. V.	2	1	-	-	-	-	-	-	3	66	37		
13. Ondřej Buček	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	-	-	-	-	-	-	-	-	-	65	34		
14. John Richard Ritter	G Masarykovo nám., Třebíč	-	-	-	-	-	-	-	-	-	92	33		
15. Jiří Löffelman	G, Litoměřická, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	70	31		
16. Pavla Trembulaková	G Jírovceva, České Budějovice	-	1	-	2	1	-	-	-	4	37	27		
17. Andrej Holmes	G Ružomberok	-	-	-	-	-	-	-	-	-	43	24		
18. Martina Kopecká	G J. Barranda, Beroun	-	-	-	-	-	-	-	-	-	96	22		
19. Markéta Jirmanová	BG B. Balbína, Hradec Králové	-	-	-	-	-	-	-	-	-	59	20		
20. Filip Keller	G P. de Coubertina, Tábor	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	18		
21.-22. Jaroslav Páidar	SPŠ Masarykova, Liberec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	52	17		
21.-22. Matej Parada	G Jura Hronca, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	74	17		
23. Katarína Žatková	Evanjelické G JAK, Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	62	16		
24. Veronika Funková	G L. Jaroše, Holešov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	15		
25.-26. Dominick Ivan	ŠG PinkHarmony, Zvolen	-	-	-	-	-	-	-	-	-	24	12		
25.-26. Ondřej Komora	G Mikulášské n. 23, Plzeň	-	-	-	-	-	-	-	-	-	71	12		
27.-28. Kristýna Davidková	Biskupské G, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	85	11		
27.-28. Jakub Kovářik	G, Hodonín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79	11		
29. Ondřej Bílek	SPŠ, Vlašim	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	9		
30.-32. Tomáš Hudcovic	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	117	7		
30.-32. Štěpán Kastowský	G, Hlučín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	7		
30.-32. Petr Semerák	Jiráskovo G, Náchod	-	-	-	-	-	-	-	-	-	117	7		
33.-37. Miroslav Hrabal	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	6		
33.-37. Štěpán Kohl	Klasické a španělské G, Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	6		
33.-37. David Němec	G, Tanvald	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	6		
33.-37. Tereza Poláková	G, Budějovická, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	27	6		
33.-37. Martin Repčík	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	6		
38. Lukáš Vávah	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	42	5		
39.-41. Ondřej Hajnýš	G, Dvůr Králové n. L.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	3		
39.-41. Jan Lindauer	První české G, Karlovy Vary	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	3		
39.-41. Aneta Němcová	G, Boskovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	3		
42. Filip Geib	G M. M. Hodžu, Liptovský Mikuláš	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	2		

## Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	VI	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	6	7	8	9	12	10	58	100	344
1. Jáchym Bárták	G, Havlíčkův Brod	2	4	5	6	8	9	13	11	58	103	354
2. Daniela Pittnerová	G L. Svobodu, Humenné	3	4	3	4	4	5	12	10	45	92	315
3. Štěpán Stenclák	G, Třinec	-	-	-	-	-	-	-	-	-	102	194
4. Klára Ševčíková	G, Uherské Hradiště	2	1	-	-	-	-	12	-	15	77	187
5. Matěj Mezera	G, Havlíčkův Brod	-	4	5	6	7	-	-	-	22	91	166
6. Jan Střeleček	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	69	146
7. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2	2	2	1	2	3	-	-	12	46	123
8. Filip Novotný	G Masarykovo nám., Kroměříž	-	-	-	-	-	-	-	-	-	77	116
9. Karel Jókai	G, Špitálská, Praha	-	-	-	-	-	-	12	-	12	64	68
10. Alžběta Andrášková	G, Olomouc-Hejčín	-	-	-	-	-	-	-	-	-	72	48
11. Přemysl Šlastný	G, Žamberk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	85	46
12. Jonáš Fuksa	PORG, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	82	42
13. Samuel Šipikal	G Milana Ráfusa	-	-	-	-	-	-	-	-	-	53	40
14. Petr Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	-	-	-	-	-	-	-	2	81	34
15. Matěj Rzehulka	Wichterlovo G, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	63	33
16. Martin Vejvoda	G Dobruška	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	31
17. Branislav Belko	G Milana Ráfusa	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68	28
18. Veronika Gintnerová	G Sv. Františka, Žilina	-	-	-	-	-	-	-	-	-	68	19
19. František Zach	G, Litomyšl	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	18
20. Kateřina Stodolová	G Dašická, Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	-	87	13
21. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	91	10
22. Václav Mikeska	G F. Palackého, Val. Mez.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	6
23. Tomáš Tesař	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	27	4


**FYKOS**

UK, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)FYKOS je také na Facebooku <http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.