

Především se omlouváme za jisté zpoždění, se kterým se k vám tato série dostává. Důvodů je několik. Za prvé, počkali jsme si na vaše řešení, zda se v nich neobjeví více. S druhou sérií jsme dostali jen jedno dodatečné řešení úlohy Y.1 a s reakcí na nápovědu u úlohy Y.2 to bylo jen o málo lepší. Ukázalo se také ne vždy snadné najít vhodnou problémovou úlohu (a zvolit odpovídající nápovědu), takže v následujících sériích se budou takové úlohy objevovat jen příležitostně (s upozorněním ohledně termínů řešení a bodování). Velice nás potěšily vaše odpovědi na úlohu Y.3 (která byla problémová jen částečně) a proto můžete posílat vaše řešení ještě s touto sérií (ale učiňte tak včas, abychom je mohli už s další sérií ohodnotit).

Dalším důvodem zdržení jsme ovšem vinni my - termín odeslání padl do začátku zkouškového období a ukázalo se velmi obtížné v tomto čase sehnat všechny opravovatele a shromáždit jejich úlohy do kompletního řešení. A posledním důvodem mohla být snaha odstranit co nejvíce chyb z tohoto zadání. Předchozí série vzbuzovaly dojem (ne úplně chybný), že si po sobě zadání ani nečteme - alespoň ne tak pečlivě jak někteří z vás, kteří nás na chyby upozornili. Šlo z části o záležitosti gramatiky a vynechaných slov (například v úloze Y.3 na posledním řádku první strany slova "kritický pohled"), místy ale i vážnější chyby ve vzorcích a odvozeních (konkrétní opravy dále v textu). Opět se za to omlouváme a pozorným řešitelům děkujeme za připomínky.

Zadání

Úloha IV . 1

Dlouhá vlaková souprava délky l jede po dráze, která z vodorovného úseku přechází ve svah se sklonem α . V okamžiku, kdy se vlak zastavil, byla na svahu přesně polovina vagonů. Jaká byla doba, za kterou vyjely tyto vagony na svah. Tření zanedbejte.

Úloha IV . 2

Hmotný bod se v tíhovém poli Země pohybuje po vnitřku kuželové plochy s vrcholovým úhlem 2α , jejíž osa symetrie má svislý směr (viz. obr. 1). V čase $t=0$ se částice nachází ve výšce z_0 a má rychlost v_0 , tato rychlost má směr tečny ke kružnici na průniku kužele s vodorovnou rovinou $z = z_0$.

- Obíhá-li částice v konstantní výšce z_0 , dokažte, že velikost rychlosti je určena pouze touto výškou a nezávisí na úhlu α .
- při obecném pohybu určete body obratu z_1 a z_2 , tj. maximální a minimální výšku, do které částice vystoupí.

Diskutujte trajektorii částice v soustavě spojené s částicí a soustavě spojené se Zemí. Tření neuvažujte.

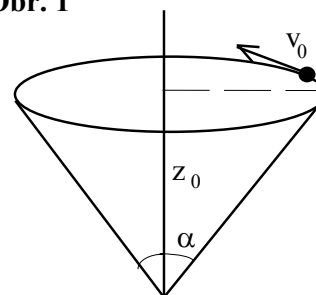
Úloha IV . 3

Roztržitý cyklista nezapomínal, že v plné rychlosti najel do betonové zídky stojící kolmo k jeho dráze. Jakou nejvyšší rychlostí mohl jet, když nedošlo k deformaci ráfku.

Úloha IV . 4

V této experimentální úloze je našim záměrem, abyste si všichni své navržené postupy také prakticky vyzkoušeli. Vymyslete a proveďte co nepřesnější metodu měření

Obr. 1



momentu setrvačnosti kuchyňského smetáku (s dlouhou násadou a příčkou na konci) vzhledem k ose rovnoběžné s násadou i ke kolmé na ni (procházející těžištěm). Pokuste se odhadnout přesnost vašeho měření.

Úloha IV . 5

Čočka je věc natolik známá, že si asi každý myslí, že zde již žádné problémy nejsou. Opak je pravdou. Čočky mají spoustu vad a jedna z nich je způsobena závislostí indexu lomu na vlnové délce. V praxi se vyrábějí takové čočky, aby pokud možno lámaly světlo všech vlnových délek stejně. Takové čočky se vyrábějí z více materiálů a požadavkem je, aby několik zadaných vlnových délek prošlo stejně. Vaším úkolem bude navrhnout takovou plosko-vypouklou čočku (plochá je u 1. materiálu).

1) Máte 2 materiály o indexu lomu n a dvě zadané vlnové délky λ_1, λ_2 :

	1. materiál	2. materiál
λ_1	n_{11}	n_{12}
λ_2	n_{21}	n_{22}

Z těchto materiálů navrhnete plosko-vypouklou čočku (tj. najdete vhodné poloměry křivosti ploch při daném pořadí materiálů) o optické mohutnosti D . Čočka bude ve vzduchu, tj. $n=1$.

2) Jelikož lidské oko je citlivé hlavně na tři barvy (červená, zelená a modrá), je velmi důležitá tato úloha: Máte 3 materiály s indexy lomu

	tavený křemen	Schott K3	Eastman Kodak - 110
červená	1,454	1,512	1,689
zelená	1,459	1,518	1,697
modrá	1,470	1,533	1,718

Naleznete příslušné poloměry křivosti r_1, r_2, r_3 . (Pořadí materiálů je 1., 2., 3. a čočka je plochá u 1.).

3) Pokuste se napsat obecný postup řešení (rovnici a algoritmus řešení) tohoto problému pro x vlnových délek pomocí matic. (Tento postup je např. velmi vhodný u 2)).

Seriál na pokračování

Napřed bych měl uvést na pravou míru chyby, které se objevily v SNP v 2. sérii. Šlo o odvození Lorentzovy transformace a v uvedených vzorcích se podařilo na několika místech pomíchat označení bodů C a D (odvození se vlastně týkalo vzorce $ct' = \gamma (ct - \beta x)$ a ještě nebylo zcela bez chyb). Správně mělo být (za úvahami o podobnosti, jež jsou v pořádku) uvedeno:

Platí $PD' = OC' = \gamma OC = \gamma (AO - AC) = \gamma (PB - \beta PA)$, tedy $x' = \gamma (x - \beta ct)$ a obdobně také $ct' = \gamma (ct - \beta x)$.

Další vaše připomínka se týkala toho, že jsme celkem bez komentáře přešli problém škálování os. Vracíme se k němu nebo se nám bude zanedlouho hodit.

Označíme si body stejně jako na obr. 1 (shodný s obrázkem v druhé sérii).

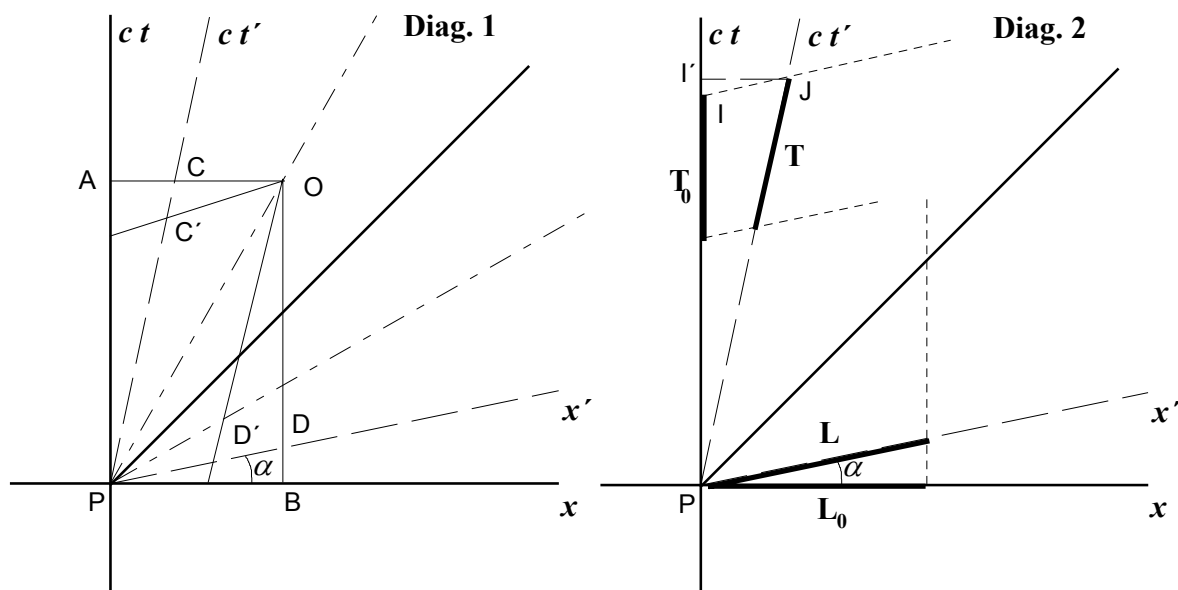
Pak s použitím goniom. fci pro úhel α

$PB = PD \cos \alpha + DO \sin \alpha = PD \cos \alpha + PC \sin \alpha$, obdobně

$PA = PC \cos \alpha + CO \sin \alpha = PC \cos \alpha + PD \sin \alpha$.

Můžeme si odtud zpětně vyjádřit

$PD = (PB \cos \alpha - PA \sin \alpha) / (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$ a $PC = (PA \cos \alpha - PB \sin \alpha) / (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$.



Vidíme, že situace není symetrická.

Vyjádříme-li si fce sinus a cosinus pomocí $\beta = \text{tg } \alpha = v/c$, dostáváme $\sin \alpha = \beta/\sqrt{1+\beta^2}$, $\cos \alpha = 1/\sqrt{1+\beta^2}$ a odtud $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1-\beta^2)/(1+\beta^2) = \delta^2$. Pak lze usoudit, že poměr měřítka na osách základních (zde je přímo $PB = x$ a $PA = ct$ - jak jsme zvyklí) a skloněných pod úhlem α je roven δ (dosadíme-li do odvozených vztahů $PD = \delta x'$, $PC = \delta ct'$, dostaneme ihned Lorentzovy transformace).

U tohoto diagramu se ještě vrátíme k úloze S.4, která se týkala skládání pohybů. Zakreslili jsme osy ještě jedné vztažné soustavy, jejíž relat. rychlost určíme takto:

v nečár. soustavě: $u/c = PB/PA$

v nečár. soustavě: $w/c = PC/PD$ (zde škálování nevadí) $= (PB \cos \alpha - PA \sin \alpha) / (PA \cos \alpha - PB \sin \alpha) = (\text{zkrácením } PA \cos \alpha \dots) (u/c - \text{tg } \alpha) / (1 - u/c \text{ tg } \alpha) = (u - v)/(c - uv/c)$ (někteří namítali, že mezi tímto zkrácením a odvozením z Lorentz. trans. není vlastně žádný rozdíl, ale tento postup se mi zdá poněkud názornější).

Můžeme přistoupit k odvození vztahů známých jako kontrakce délky a dilatace času. Prvnímu odpovídá tato situace: tyč délky L_0 je v nečár. soustavě v klidu; zjišťujeme, jakou délku naměříme v čárkované soustavě (tečkovaná svislá čára zachycuje polohy jednoho konce tyče v čase - i v okamžiku měření v čárkované soustavě): z poměrů délek (při uvážení měřítka) $L_0/\delta = L \cos \alpha$, tedy $L = L_0 \sqrt{1-\beta^2} = L_0/\gamma$. Tyč se jeví kratší než v klidové soustavě (přestože se to z obrázku nezdá).

Druhý vztah se týká případu, kdy dvě události, které proběhly v nečárkované soustavě na stejném místě a dělí je čas T_0 , jsou sledovány v druhé soustavě s časovým rozdílem T . Zde je poměr délek složitější např. PI'/PJ určíme jako $(PI' - II')/PJ = \cos \alpha - (II'/I'J)$ $(I'J/PJ) = \cos \alpha - \text{tg } \alpha \sin \alpha = 1/\sqrt{1+\beta^2} - \beta/\sqrt{1+\beta^2} = (1-\beta^2)/\sqrt{1+\beta^2}$.

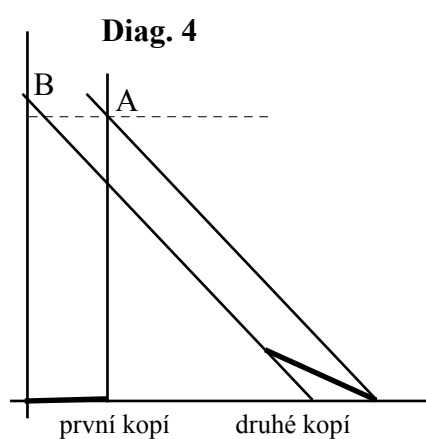
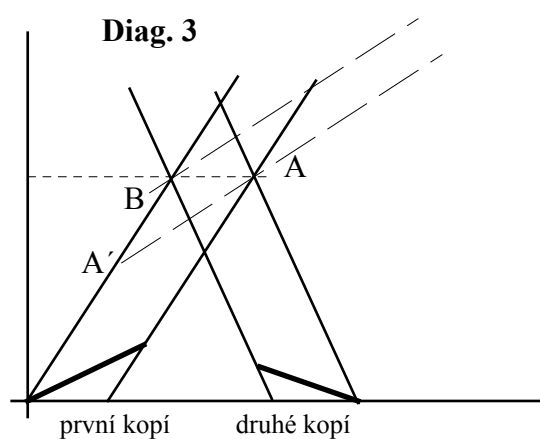
Tedy $T_0 = T (1-\beta^2)/\sqrt{1+\beta^2} \delta = T \sqrt{1-\beta^2}$, čili $T = T_0 \gamma$, tedy se zdá být čas delší než v klidu.

Podívejme se teď na paradox, který jste měli objasnit v úloze S.6. Trochu předbíhal látku (ti, kteří byli zkracováním délek zaskočení, si to mohou vynahradiť na úloze tohoto dílu), ale k jeho vysvětlení stačilo správně zakreslit některé okamžiky. Událost nárazu hrotu dřevce prvního rytíře na pancíř druhého označíme A, symetrický úder druhého rytíře označíme B. Na diag. 3 (zakresleném v soustavě spojené se zemí) odpovídá oběma úderům stejný čas (rovnoběžné čáry ukazují polohy pancířů a hrotů

kopí obou - pokud jedou rytíři různě rychle, odpovídá tomu také různá délka jejich kopí v naší soustavě, takže je vzdálenost rovnob. přímků různá). Podle čárkovaných os patřících soustavě spojené s 1. rytířem však událost A proběhla v jeho soustavě před událostí B (je současná s událostí A') - je to zřejmý důsledek relativity současnosti. Zároveň to říká, že události A a B nemohou být kauzálně propojeny - zásah do hrudi druhého rytíře už nemůže nikterak ovlivnit úder hrotu jeho dřevce. Na diag. 4 ukazujícím jeho soustavu jako klidovou je sokovo kopí zkráceno značnou rychlostí (součtem obou) tak, že k jeho úderu dojde skutečně později.

Úloha S . 7: Po objasnění problému rytířů pro vás nebude obtížné vysvětlit následující paradox. Tyč délky d , která se pohybuje vysokou rychlostí (ve směru své délky) vodorovně těsně nad zemí, prolétá nad ústím kanálu, jehož klidová délka je taktéž d . V klidu by tyč do kanálu přesně zapadla, za pohybu se ale situace komplikuje. Z hlediska kanálu (klidová soustava) se tyč zkracuje, takže by měla hladce propadnout (tyč letí tak nízko, že nemůže kanál jednoduše přeletět a přitom jsou všechny její body stále ve stejné výšce), naopak pro tyč se zkrátil kanál a tedy nepřichází v úvahu, že by se do něj vešla. Jak to tedy dopadne?

Úloha S . 8: Opusťme již pozorování jen v jednom směru a podívejte se kolem sebe. Přeneste se do automobilu jedoucího značnou (tedy relativistickou) rychlostí dlouhou ulicí. Uvážíte-li relativistické efekty a konečnou rychlost šíření světla, jak se změni podoba ulice, okolních domů i silnice v dálce?



Řešení

Errata:

V řešení úlohy I.2 se vyskytly nepřesnosti v zápisu vztahů mezi veličinami - použití vektorového součinu naznačovalo, že tučná písmena jsou určena pro vektory, ve skutečnosti však mnohé vztahy platily jen v rámci velikostí. Navíc nám na závěr vypadl jeden vzorec (a místo něj se objevil jiný dvakrát - chyba vznikla ovšem až při tisku),

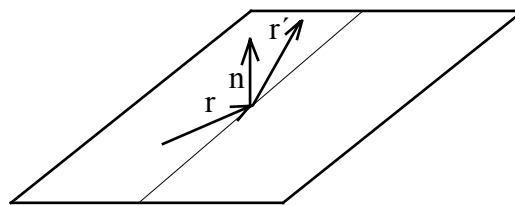
správně tam mělo být

$$m_1 = \frac{(m_2 - F_0 g^{-1})^2}{\frac{k}{\omega_0^2} - m_2}$$

Řešení úlohy II.1

(maxim. počet bodů 3, řešili 32 studenti)

Stačilo správně pochopit zadání a znát zákon odrazu. Pro názornost zvolíme souřadnou soustavu s počátkem v rohu, kde se stěny a strop stýkají a osami v jejich průsečnicích. Dopadající paprsek popíšeme vektorem \mathbf{r} , odražený vektorem \mathbf{r}' a normálový vektor k ploše zrcadla (jednotkový) označíme \mathbf{n} . Z obrázku je vidět, že pro odražený paprsek platí:



$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - 2\mathbf{n}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}).$$

Plyne to ze zákona odrazu a podobnosti trojúhelníků vymezených vektory \mathbf{n} , \mathbf{r} a \mathbf{r}' . Už nyní lze říci, že po každém odrazu se změní pouze složka vektoru ve směru \mathbf{n} a to na opačnou - po třech odrazech od kolmých stěn se tedy změní všechny složky. Výsledný vektor \mathbf{r}' bude rovnoběžný s původním a bude mít opačný směr. Na tomto principu fungují například odrazky.

Řešení úlohy II.2

(maxim. počet bodů 5, řešili 23 studenti)

Podstatnou částí této úlohy bylo zjištění, že voda není ideální tekutina. Tento poznatek nebyl potřeba v první části úlohy, tj. za jak dlouho se naplní vana, pustíme-li oba dva kohouty, nicméně má zásadní význam pro řešení druhé části. Malá odbočka pro některé řešitele - neznám vodovodní baterii, z níž by bylo možno *současně* pouštět vodu skrze sprchu a přímo, a proto i tato řešení nemají valného smyslu...

Při průtoku potrubím je kladen vodě odpor daný její viskozitou. Pro válcovou rouru a pro laminární proudění lze pro průtok odvodit tento vztah: $Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{3\eta l}$, kde η je

dynamická viskozita vody, r je poloměr potrubí, l jeho délka a Δp je rozdíl tlaků na začátku a na konci potrubí. (Průtok vyjadřuje, jaký objem proteče za časovou jednotku).

Pro jiné, nežli přímé potrubí lze předchozí vztah zobecnit na $Q = \frac{\Delta p}{K}$, kde konstanta K

je dána geometrií potrubí a dále ji nazýváme odpor.

V prvním případě (obr. r2) sčítáme průtok teplé vody s průtokem vody studené, přičemž tlaky na začátku potrubí jsou P_1 a P_2 a na konci vodovodu je považujeme za nulové. Pro průtoky dostáváme tyto rovnice:

$$Q_3 = \frac{P_3}{K_3} = \frac{V}{T_3} \quad \text{a} \quad Q_2 = \frac{P_2}{K_2} = \frac{V}{T_2}$$

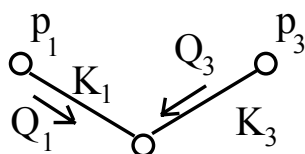
a ježto $V = Q_1/T_1 = Q_3/T_3$, platí pro čas T_{13} , že $Q_1 + Q_2 = \frac{V}{T_1} + \frac{V}{T_3} = \frac{V}{T_{13}}$, což po dosazení

$$\text{a zkrácení } V \text{ dává hledaný výsledek } T_{13} = \frac{T_1 T_3}{T_1 + T_3}.$$

Ve druhém případě je situace složitější (viz. obr. r3). Zkoumejme nejprve případ, kdy natéká voda pouze jedním kohoutem. Vidíme, že voda nejprve teče potrubím s odporem K_1 až do místa s tlakem p' , a odtud potrubím s odporem K k ústí. Ježto průtok v obou částech potrubí je stejný (nedochází-li k teplotním změnám), můžeme je srovnat a určit

$$\text{tlak } p': \quad Q = \frac{p'}{K} = \frac{P_1 - p'}{K_1} \Rightarrow p' = \frac{P_1}{1 + \frac{K_1}{K}}.$$

Obr. r2



Analogický výsledek dostaneme i pro teplou vodu.

Nyní vyřešíme případ, kdy jsou puštěny oba kohouty (viz. obr. r4) Pokud zanedbáme změny hustoty vody s objemem (což lze

s dostatečnou přesností, jak mnozí z vás ověřili), můžeme napsat, že součet průtoků do místa spojení se rovná průtoku z tohoto místa. Opět můžeme porovnat a dostaneme vyjádření pro tlak p

$$Q_4 = \frac{p_3 - p}{K_3}, \quad Q_2 = \frac{p - p_1}{K_1}, \quad Q_2 + Q_4 = \frac{p}{K}$$

$$\text{a pro celkový tok } Q = \frac{1}{1 + \frac{K}{K_1} + \frac{K}{K_3}} \left(\frac{p_1}{K_1} + \frac{p_3}{K_3} \right).$$

$$\text{Předně vidíme, že } \frac{p_1}{K_1} + \frac{p_3}{K_3} = \frac{V}{T_1} + \frac{V}{T_3}$$

a dále se pokusíme upravit vztah pro T_2 a T_4 tak, aby obsahoval poměr K/K_1 a K/K_2 , což dává

$$T_2 = \frac{V}{p_1} (K_1 + K) = \frac{V}{\frac{p_1}{K}} \left(1 + \frac{K}{K_1} \right) = T_1 \left(1 + \frac{K}{K_1} \right) \Rightarrow \frac{K}{K_1} = \frac{T_2}{T_1} - 1,$$

kterýžto výsledek můžeme dosadit do rovnice pro celkový průtok dostávající tak

$$\text{výsledný výraz: } T_{24} = \frac{T_1 T_3}{T_1 + T_3} \left(\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_4}{T_3} - 1 \right)$$

Závěrečné poznámky: Možná Vám přišly úpravy v poslední části poněkud "znebespadlé", ale vše bylo motivováno snahou zbavit se všech neznámých, tedy konstant K a tlaků p . Další poznámka se týká role teploty. Samozřejmě, že jsem nechtěl po Vás nějaké kalorimetrické rovnice, ale šlo mi o teplotní závislost viskosity, která je oproti hustotě mnohem výraznější, a se vzrůstající teplotou silně klesá, a tedy i odpor potrubí vůči pohybu vody. To by mělo svůj význam především ve sprše, kde by odpor byl menší, nežli u studené vody, ale větší, nežli u vody teplé. Pro problémy tohoto typu existuje pěkná analogie s elektrickými obvody, kde průtok hraje roli proudu, tlak úlohu napětí a odpor zůstává odporem (viz. obr. r4).

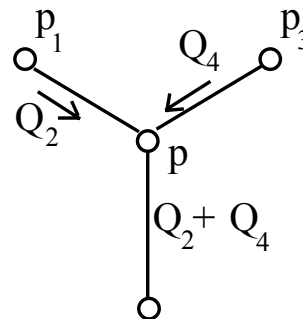
Komentář k úloze II. 3

(maxim. počet bodů 6, řešilo 15 studentů)

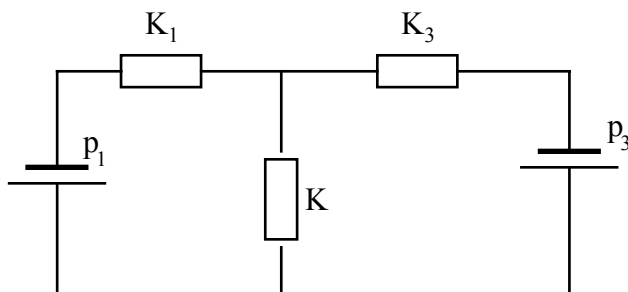
Smyslem této úlohy bylo přiblížit vám řešení fyzikálních problémů z praxe. Vždy je třeba nejprve zvolit vhodný model situace (zanedbání některých jevů a uvědomění si jejich významu pro výsledný efekt) a v tomto modelu pak počítat. Jedná-li se o odhad, není cílem přesné číslo ale spíše kvantitativní představa o jejíž přesnosti rozhodují nejen použité údaje ale také zvolený model. Některé z vás zřejmě neurčitost zadání odradila a z několika řešení byla cítit značná skepse, ale vyskytly se i zajímavé nápady.

Mocnost atmosféry - prvním problémem je stanovení, kde vlastně atmosféra končí. Jedno kritérium je kinetická energie částic atmosféry dostatečná k úniku z gravitačního vlivu planety do nekonečna (střední kvadratická rychlost = druhá kosmická).

Obr. r3



Obr. r4



Výsledný vzorec je $h = \frac{2\kappa Mm}{iKT} - R$, kde kromě hmotnosti planety M vystupuje i

hmotnost jedné částice atmosféry m , počet stupňů volnosti i , teplota T a poloměr planety R . Pokud vhodně zvolíme tyto parametry (což není triviální), můžeme dostat řádově správné výsledky - např. v naší atmosféře ve velkých výškách převládá helium a později jen vodík a teplota od 1000km nabývá hodnot kolem 1000 K. Pak dostaneme řádový odhad h několik 1000km (odpovídá exosféře). Tento odhad lze zpřesnit například spočtením energie potřebné ne na únik do nekonečna, ale pouze do výšky, kde odstředivá síla vyruší gravitační. Další odhad se zakládá na sepsání rovnice pro závislost tlaku (či hustoty) na výšce a předpokladem, že atmosféra končí tam, kde tlak (hustota) poklesne na velice malou část své hodnoty u povrchu. Představíme-li si sloupec plynu, pak přírůstek tlaku s klesající výškou vyrovnává přírůstek tíhy plynu nad ním. S použitím stavové rovnice (např. ideálního plynu) dostaneme $S dp = gpS dh$, $pV = NkT$, $p m_s/\rho = NkT = (m_s/m) kT$ z toho $\rho = p m / kT$ a diferenciální rovnice pro tlak: $p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \frac{dp}{dh} = -\frac{pmg}{kT}$.

Samozřejmě, že pro vyřešení je třeba učinit nějaké předpoklady - například konstantnost teploty, gravitačního zrychlení či stálé složení plynu (konstantnost m). Tyto závislosti lze též aproximovat nějakou dobře integrovatelnou funkcí a pro zvýšení přesnosti je lépe upravit odvození ne pro sloupec plynu ale pro celou sféru kolem planety. Po

vyřešení dostaneme např. $p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$. Po stanovení poměru p/p_0 a dosazení údajů u povrchu dostaneme hranici oblasti obsahující většinu atmosféry a zachovávající stejné složení. Pro Zemi např. řádově několik 10km (konec troposféry).

Výška hory - pomínu-li odhady z rovnosti gravitační a odstředivé síly, které jsou přece jen poněkud nadnesené, pokoušela se většina z vás odhadnout, při jaké výšce ji ještě základy unesou. Jako model lze zvolit sloupec horniny sahající do výšky h . Opět si můžeme vybrat mezi počítáním s konstantním g , nahradit ho závislostí na $(R+h)$ či započítat i odstředivou sílu. Můžeme zavést i jiný tvar hory, ale při předpokládaných výškách se asi změny g příliš neprojeví a koeficient způsobený změněným tvarem nemá velký vliv na řádový odhad. Jinou variantou je nepočítat s pevností materiálu, ale s možným roztavením - rozbitím elementárních vazeb (rovnost energií vazeb v základně a uvolněné potenciální energie hory při poklesu o výšku základny). Někteří se pokusili modelovat vznik hor a z procesů vrásnění či sopečné činnosti určit výšku. Vliv také bude mít stabilita takovýchto útvarů a další...

Jeden z možných výsledných vzorců je $h = \frac{R^2 \sigma}{\rho k M - R \sigma}$, kde R je poloměr planety, ρ

hustota materiálu hory a σ mez pevnosti. Při zvolení vhodných konstant (např. čedič) dostaneme řádově správný odhad pro Zemi asi 10 km.

Komentář k úloze II . 4

Úvodem několik poznámek. Nešlo nám ani tak o samotnou hodnotu c_x tak, jak jste ji někteří až podezřele přesně určili, ale o to, nakolik je spolehnutí na vámi naměřené výsledky. To zahrnovalo návrh postupu a jeho rozbor z hlediska věrohodnosti získaných výsledků. Jsme si vědomi toho, že měření c_x pro plyny představuje řádově obtížnější úkol nežli pro pevné látky či kapaliny. To ale neznamená, že navrhnete postup, provedete rozbor, hodíte po nás strašlivými ciframi chyb a na samotné měření se vykašlete. Z toho důvodu jste získali mnohem méně bodů, než bylo ve vašich možnostech. Zase na druhou stranu jedno měření žádného měření a to, co jste prezentovali

jako výsledky měření mi osobně připadalo mírně řečeno spíše šťastně uhodnuté než jakkoli změřené.

Každé měření jsem koneckonců opatřil dle mého mínění dostačujícím komentářem. S případnými nejasnostmi se samozřejmě obraťte na opravujícího.

Pokud jde o použité metody. Až na dva případy všichni užívali k výpočtu c_x kalorimetrickou rovnici $Q=U$, kde $U = cm \Delta T$, m odpovídalo buď objemu uzavřené krabice (určení c_v), nebo ji určujeme z rychlosti proudění vzduchu na výstupu fěnu $m = v \Delta T Sp$. V určení rychlosti v se projevila invence experimentátora. V jednom případě bylo užito Pitotovy trubice, jindy rovnováhy zavěšeného pongpongového míčku či pouhého papírku. I tato věc byla hodnocena. Samostatnou kapitolu tvořily ti, kteří se snažili něco nafukovat, a z toho určovat rychlost objemového toku plynu. Všichni obdrželi příslušné komentáře, protože nikoho jaksi nenapadlo vůbec uvažovat práci plynu při nafukování pytlů či balónků, t.j. rovnici $Q = U + p\Delta V$, tedy to, že jaksi výtoková rychlost při rovnosti tlaků bude zřejmě jiná, nežli tehdy, bude-li mezi vstupem a výstupem fěnu existovat Δp . Nejen že to nikdo kvantitativně nezhodnotil, nikdo to ani neuvedl. Také se mnohdy stalo, že někdo v rovnici $U = cm\Delta T + c_k\Delta T$ bez dalšího zanedbal člen $c_k\Delta T$, neuvědomuje si, že může být pro váš kalorimetr řádově větší, nežli člen $cm\Delta T$. Měření teploty prováděli všichni klasicky rtuťovým nebo lihovým teploměrem, ale mnozí jste zapomněli uvažovat z toho plynoucí chybu. Další problém byl s tím, kolik tepla předá fén vzduchu, tedy jakou má vlastně účinnost. U měření, při nichž je fén umístěn "v krabici", je dobré uvažovat, že veškerý výkon fěnu jde na teplo, protože kinetická energie sloupce vzduchu hnaného fěnem se disipuje. Jinak je tomu u měření, kde je fén uložen volně a kde je třeba brát zvlášť výkon ventilátoru a topných spirál. Vesměs jste si s tím nějak poradili, např. měřením spotřeby fěnu se zapnutou a vypnutou spirálou a pod.

Vyskytla se vlastně jen dvě originální řešení. Jedno vycházelo z rovnice vedení tepla a určovalo c_x z rychlosti úniky tepla z plechového hrnce. Potřebovalo by však ještě po experimentální stránce dotáhnout. Druhé bylo po experimentální stránce při užití dostupných prostředků asi nejlépe promyšlené ze všech. Vycházelo z rovnice $pV^\kappa = \text{konst.}$ pro adiabatický děj, což mi přijde jako velice rozumné, protože se neopírá o ošidnou termodynamickou rovnováhu, ale o rozumnou aproximaci adiab. děje.

Obecným nedostatkem však bylo to, jak vypadalo zpracování měření. To se dá ale snadno odstranit častým cvičením. Proto nashledanou u dalších experimentálek.

Komentář k úloze Y . 1

(maxim. počet bodů 10, řešilo 10 studentů)

Drobná chybička, která se vloudila do zadání této úlohy způsobila, že se stala tvrdým oříškem jak pro ty nejlepší z vás, tak i pro opravovatele. Na druhou stranu úloha, která rozhodně neměla jednoznačné řešení, ukázala, jak je třeba vhodně problém zjednodušit, abychom dospěli alespoň k přibližným výsledkům.

Označme si $\beta = h/l$, vzdálenost tělíska od osy budeme značit r (počáteční hodnota je tedy c , konečná l); v uvažovaném zjednodušení goniom. funkcí a zanedbání r' dostáváme zrychlení

ve směru kolmém k desce $a_n = g - r\omega^2\beta \cos\omega t$,

kdy podmínka pro setrvání na desce je tedy $g > r\omega^2\beta$ (*)

a pak ve směru desky $r'' = r\omega^2\beta^2 \sin^2\omega t - g\beta \cos\omega t - \mu a_n$

přičemž v koeficientu μ je též efekt, že tření má směr závislý na rychlosti. Odhlédneme-li od periodických funkcí, jsou třecí síly k ostatním v poměru μ/β , tedy bude záviset na

těchto počátečních konstantách, jak se ochotně se bude tělisko pohybovat. Lze například určit, že při $r\omega^2\beta^2 < \mu\omega^2\beta - g\beta$ se tělisko ani nepohne.

Při splnění podmínky * máme $r'' = r\omega^2\beta^2 \sin^2 \omega t - g\beta \cos \omega t + \mu\omega^2\beta \cos \omega - \mu g$

Pak můžeme (při téměř konstantním r během jedné periody) integrovat

Tělisko musí překonat několik počátečních period (kdy se ještě zastaví), aby získalo rychlost, při které už se nezastavuje. Pak bude změna rychlosti v průběhu jedné periody

$$r' = \frac{r\omega^2\beta^2}{4\omega} \cos 2\omega t - \frac{g\beta}{\omega} \sin \omega t + \mu \frac{r\omega^2\beta}{\omega} \sin \omega + \frac{g\beta}{\omega} - \mu \frac{r\omega^2\beta}{\omega} + \left(\frac{r\omega^2\beta^2}{4\omega} - \mu g \right) t.$$

Periodické závislosti se do celkového posunutí neprojeví, takže dostáváme nepříliš komplikovanou integraci, z níž dostaneme (Michal Fabinger)

$$t = \left[\frac{\sqrt{2}}{\omega\beta} \ln \left| \sqrt{2}\omega\beta \sqrt{\frac{1}{2}\omega^2\beta^2 r^2 - 2\mu gr + C} + \omega^2\beta^2 r - 2\mu g \right| \right]_c^l, \text{ kde } C = 2\mu gc - \omega^2\beta^2 c^2.$$

Zajímavější je ovšem případ, kdy se tělisko pravidelně zastavuje...o tom, včetně numerických řešení příště.

Řešení úlohy Y.2

(maxim počet bodů 7, řešilo 15 studentů)

Tato úloha byla problémová spíše kvůli fyzikální úvaze, nežli kvůli matematické obtížnosti. Jak již bylo uvedeno v nápovědě, existují v zásadě dva možné přístupy řešení problému - jednak pomocí variačního počtu (kterýžto postup nevede k přijatelnému výsledku, a lze pochybovat o možnosti analytického dopočtení, nicméně jest tento obecnější), jednak pomocí nějaké jednoduché úvahy. Mnozí z Vás při řešení uvažovali, že se vektor zrychlení a v průběhu pohybu nemění ani co do směru, ani co do velikosti, což je sice pravda, nicméně takřka nikdo se nesnažil toto nějak objasnit. Jedna z Vámi navržených možností bylo kupříkladu rozdělit dráhu na dvě části a ukázat, že nejrychleji auto dosáhne cíle, bude-li zrychlení v obou částech trajektorie stejné (Petr Žalský a Jindřich Koloreň), nicméně ani zde jste nedospěli ke zcela jednoznačným výsledkům.

Druhý přístup --- značně jednodušší, a asi i fyzikálnější - spočíval ve zvolení si vhodné vztažné soustavy, a to soustavy pevně spojené s jedoucím autem. V této soustavě se pohybuje cílový bod po přímce (viz. obr. r5) a auto na počátku stojí. Poté se začne pohybovat rovnoměrně zrychleně tak, aby zastihlo cílový bod.

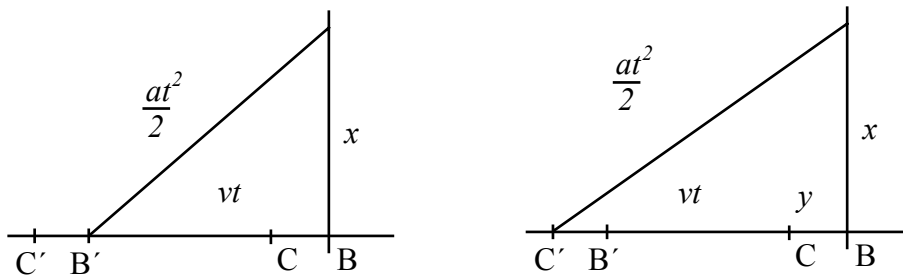
Pro první případ (do bodu B) dostaneme tuto rovnici $\left(\frac{at^2}{2}\right)^2 - (vt)^2 - x^2 = 0$

z čehož pro čas t máme $t = \sqrt{\frac{v^2 + \sqrt{v^4 + a^2 x^2}}{2a^2}}$, což po dosazení dává 50 vteřin.

Pro druhý případ (bod C) dostáváme obdobnou rovnici $\left(\frac{at^2}{2}\right)^2 - (vt - y)^2 - x^2 = 0$,

jež ovšem není tak snadno řešitelná (v obecnosti je, leč obtížně), a proto je jednodušší nalézt její řešení nějakou vhodnou numerickou metodou (v tomto případě např. Newtonova metoda - těm z vás, kteří ji doposud neznají doporučuji, aby jste se s ní seznámili). Jako výsledek poté dostaneme čas 59,207 sekund.

Otázkou, jakým způsobem musí řidič točit volantem, či jak přidávat plyn jste se nezabývali (až na Michala Fabingera, jež se zamýšlel nad tím, může-li auto vytočit kolo), faktem je, že pohyb po parabole patří k obtížněji navigovatelným pohybům...

Obr. r5

Pořadí řešitelů po druhém kole

		Y II Y S												
	Jméno	Příjmení	Ročník	Škola	1	1	2	3	4	2	3	4	Σ_{II}	Σ
0	Student	Pilný	88	MFF Univerzita Karlova	10	3	5	6	6	7	2	3	32	67
1	Michal	Fabinger	3E	G Nad alejí Praha	9	3	3	5	6	8	3	2	30	64
2	Jindřich	Kolorenč	3G	G Nová Paka	9	3	5	5	7	8	2	2	32	63
3	František	Šanda	4D	G Klatovy	5	3	3	5	7	7	2	3	30	56
4	Petr	Žalský	4?	G Nová Paka	5	3	1	5	6	7	-	-	22	50
5	Rudolf	Sýkora	2A	G Hejčín	-	3	-	5	6	5	2	2	23	43
6	Peter	Macák	3A	G Jur. Hronca Bratislava	-	3	-	5	6	6	2	1	23	42
7	Tomáš	Vinař	4A	G Šrobárova Košice	-	3	5	5	5	6	2	3	29	39
8	Jaroslav	Hamrle	4B	G Pelhřimov	5	3	2	5	6	6	-	-	22	38
9	Miloš	Gáj	4A	G Poprad	-	3	4	3	-	6	2	3	21	36
10	Marta	Bednářová	3A	G tř. kpt. Jaroše Brno	-	3	4	3	4	7	-	-	21	33
11	Robert	Šámal	3D	G Zborovská Praha	-	3	3	-	-	4	0	2	12	26
12	Miroslav	Panoš	4D	G Klatovy	-	3	3	5	4	-	-	-	15	24
13 - 14	Tomáš	Černoch	3C	G Nad štolou Praha	-	3	-	3	1	-	-	-	7	19
13 - 14	David	Drozd	3A	G tř. kpt. Jaroše Brno	-	3	-	-	-	-	-	-	3	19
15 - 16	Zdeňka	Broklová	kvarta	G Polička	-	3	4	-	-	-	-	-	7	17
15 - 16	Petr	Častulík	??	G Arabská Praha	2	-	-	-	-	-	-	-	0	17
17 - 19	Urban	Kováč	4B	G Grösslingova Bratislava	5	-	-	-	-	-	-	-	0	16
17 - 19	David	Nečas	3A	G tř. kpt. Jaroše Brno	-	3	-	-	-	1	-	-	4	16
17 - 19	Petr	Šimíček	3B	G tř. kpt. Jaroše Brno	-	3	4	-	-	-	-	-	7	16
20 - 21	Jiří	Lambert	??	G Hlučín	-	3	3	-	-	3	-	-	9	15
20 - 21	Mikuláš	Vejlupek	3D	G Zborovská Praha	-	3	-	-	1	-	-	-	4	15
22 - 25	Jan	Hradil	4A	G tř. kpt. Jaroše Brno	2	3	-	-	2	-	-	-	5	14
22 - 25	Tomáš	Hrnčíř	??	G Jos. Jungmana	-	3	-	-	3	-	-	-	6	14
22 - 25	Matěj	Liszka	??	G Frýdecká Český Těšín	-	-	-	-	-	-	-	-	0	14
22 - 25	Martin	Niepel	4B	G Grösslingova Bratislava	3	-	-	-	-	-	-	-	0	14
26 - 27	Peter	Feher	4A	G Poštová Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	0	13
26 - 27	Slávka	Jendrejová	3A	G Poštová Košice	-	-	-	-	-	-	-	-	0	13
28 - 29	Pavel	Klang	2A	G tř. kpt. Jaroše Brno	-	3	2	-	3	-	-	-	8	12
28 - 29	Zuzana	Pokorná	oktáva	PORGLinderova Praha	-	3	3	-	-	1	-	-	7	12
30	Vilém	Pulc	??	Semily II	-	2	3	1	5	-	-	-	11	11
31 - 32	Pavel	Bubák	2A	G tř. kpt. Jaroše Brno	-	3	3	-	4	-	-	-	10	10
31 - 32	Petr	Doubek	3D	G Pardubice	-	3	3	-	-	-	-	-	6	10
33 - 34	Jana	Koláčková	septima	PORGLinderova Praha	-	3	3	-	-	3	-	-	9	9
33 - 34	Petr	Novák	4A	G tř. kpt. Jaroše Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	0	9
35 - 37	Michal	Hvězda	4D	G Pardubice	-	3	5	-	-	-	-	-	8	8
35 - 37	Miroslav	Jílek	??	Bystré u Poličky	-	-	-	-	-	-	-	-	0	8
35 - 37	Vít	Žďára	2?	G Polička	-	-	-	-	-	-	-	-	0	8
38 - 40	Anna	Jančaříková	4A	G Kladno 2	-	0	-	-	-	-	-	-	0	7
38 - 40	Martin	Krsek	3A	G J.K. Tyla Hradec Králové	-	3	2	2	-	-	-	-	7	7
38 - 40	David	Stanovský	3D	G Pardubice	0	-	2	-	-	-	-	-	2	7
41 - 42	Martin	Navrátil	??	G Karlovy Vary	-	-	-	-	-	-	-	-	0	6
41 - 42	Alena	Píšová	3D	G Pardubice	-	-	-	-	-	-	-	-	0	6
43 - 45	Jan	Horáček	??	Rožnov p. Radhoštěm	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5

43 - 45	Martin Ján	2A	G tř. kpt. Jaroše Brno	-	-	2	0	2	-	-	-	4	5
43 - 45	Milada Kouřilová	??	G dr. Šmerala Ostrava	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5
46 - 49	Pavla Fabiánová	3C	G Vídeňská Brno	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4
46 - 49	Jitka Pagáčová	4B	G Krnov	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4
46 - 49	Antonín Rozsypal	??	G Rožnov pod Radhoštěm	-	3	-	-	1	-	-	-	4	4
46 - 49	Jaroslav Štrunc	??	G Chomutov	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4
50	Miroslav Poláček	4D	G Pardubice	-	3	-	-	-	-	-	-	3	3
51	Miroslav Šváb	??	G Polička	-	-	-	-	-	-	-	-	0	2

Termín odeslání: 7. března 1994

Adresa: FKS, dr. Leoš Dvořák, KTF MFF UK, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha