

## Drazí řešitelé

Musíme se nejprve omluvit těm řešitelům, kteří svá řešení poslali již koncem října a druhá série se k nim dostává až nyní. Podle zkušeností z loňska jsme v tomto roce věnovali více času distribuci zadání semináře na všechna místa, kde by na ně mohli čekat případní řešitelé. Z toho důvodu jsme dodatečně posunuli termín pro nové zájemce o čtrnáct dnů a tím i zkrátili čas na ostatní série. Ale ta příští by se k vám měla dostat ještě do vánoc.

Chceme vás (zejména nové řešitele, kterých je kupodivu podstatně více než těch starších) požádat, aby jste opravdu psali každé řešení na zvláštní papír a každý takový list podepsali. Nemusí to být plýtvání přírodními zdroji, můžete psát klidně na nestandardně malé formáty (nikoli na úkor čitelnosti). Důvod je ten, že každou úlohu opravuje někdo jiný a oboustranně popsany papír se špatně rozděljuje.

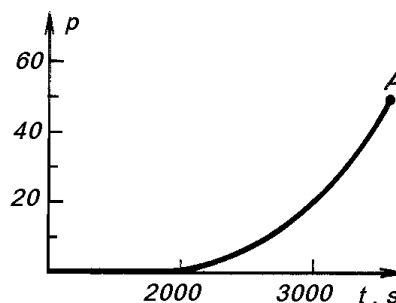
Co se týče bodování, rozhodli jsme se posečkat se zveřejněním detailů až do příště, kdy budeme moci systém aplikovat na výsledky první série. Předem lze prozradit, že základní ohodnocení, které je rovnocenné pro všechny řešitele, se doplňuje *bonusy* pro ty, kteří vyřeší něco nad požadavky zadání, a následně je upraveno podle koeficientu *handicapu*, který vychází z možných zkušeností řešitele, t.j. věku a úspěšnosti při řešení loňského a letošního ročníku FKS.

### Zadání

#### Úloha II.1 ... přistání kosmické sondy

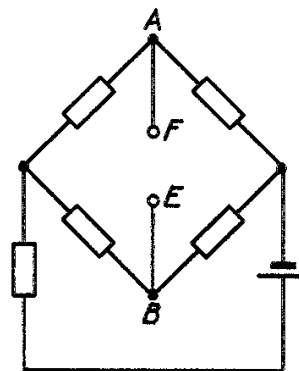
Přistávací modul kosmické lodi se přibližuje k povrchu planety s konstantní rychlostí, přičemž předává na kosmickou loď údaje o tlaku atmosféry. Graf závislosti tlaku na čase je na obrázku 1. Při přistání na povrchu planety modul naměřil teplotu  $T=700\text{ K}$  a tíhové zrychlení  $g=10\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Určete rychlost  $v$ , kterou modul přistává, když se atmosféra skládá z oxidu uhličitého. Určete teplotu  $T_h$  ve výšce  $h=12\text{ km}$  nad povrchem planety.

Obrázek 1



**Úloha II.2 ... schémátka**

Mezi body E a F schematu zobrazeného na obrázku 2 je nejprve zapojen ideální voltmetr a poté ideální ampérmetr. Jejich údaje jsou rovny  $U_0$  a  $I_0$ . Určete velikost proudu  $I$ , který bude téct rezistorem  $R$  zapojeným mezi body E, F.

**Obrázek 2****Úloha II.3 ... nehoda ve vakuu**

Dva kosmonauti se nacházejí v otevřeném mezihvězdném prostoru. Neočekávaně dojde k přetržení přívodní hadice u jednoho z nich a následně úniku veškerého vzduchu ze skafandru. Jeho přítel duchaplně připojí ventil ze svého skafandru na utržený konec hadice. Jenže ouha! Hadice je ucpaná a ke zprůchodnění trubice je třeba přetlaku alepoň 1,1 atm. Přitom standartní tlak udržovaný přístroji ve skafandru je roven 1 atm. Rozhodnou se k následujícímu kroku: vypnou přívod vzduchu nepoškozeného skafandru a společně se vystaví velmi intenzivnímu záření blízké hvězdy, čímž se jejich teplota zvýší z původních  $27^\circ\text{C}$  na  $107^\circ\text{C}$ . Po vyrovnání tlaku rozpojí hadice a rychle se vrátí do stínu solárního článku, kde jejich teplota klesne k normálu. Jakého tlaku dosáhnou touto operací v poškozeném skafandru?

(Pozn.: Komu se zdá tato příhoda příliš fantastická nebo málo vědecká, může stejnou úlohu počítat pro dvě identické nádoby spojené hadicí s jednosměrně propustnou klapkou.)

**Úloha II.4 ... pavouk a moucha**

Na povrchu skleněné koule je pavouk a moucha. Kde musí být moucha, aby ji pavouk uviděl? Počítejte s tím, že koule je větší než pavouk a moucha (dohromady), přičemž mnohokrát. Index lomu pro sklo je 1,43.

**Úloha II.5 ... problém líftboye**

Líftboy v mrakodrapu jsa perfekcionista si pověsil na stěnu svého výtahu přesné kyvadlové hodiny, aby viděl, kdy mu končí pracovní doba. Doba pohybu výtahu se zrychlením vzhůru a dolů je stejná. Zrychlení taktéž. Co si myslíte: bude mít chlapec pracovní dobu delší, kratší nebo stejnou?

**Seriál na pokračování**

Již od minulého dílu Seriálu víte, že jeho letošní námět je praktického rázu, a sice výklad některých výpočetních metod pro řešení matematických problémů. Avšak úplné pojednání, dostatečně ilustrující i pro ty, kteří do „vyšší“ matematiky teprve pronikají, by zaplnilo mnohasetstránkovou knihu (např. [1]). My se na nemnoha stranách ve zbývajících pěti dílech seriálu budeme muset trochu uskromnit. Ze dvou nejpoužívanějších oblastí numerických metod si tedy zvolíme tu první, která se týká problémů spojených s řešením rovnic: od prostého hledání kořene přes minima a maxima funkcí až k řešení lineárních soustav. Druhou oblast, kterou je řešení vývojových úloh od obyčejných diferenciálních rovnic po komplexní modelování, si asi necháme na některý příští ročník.

### Kořen rovnice

Většinu úloh na hledání kořene, přestože jejich původ může být různý, lze zapsat v jednotné podobě, kdy na levé straně rovnítky stojí nějaká funkce jedné proměnné  $x$ , a napravo její hledaná hodnota, nejčastěji 0. Podobný tvar může dostat i úloha pro hledání extrému ( $f'(x)=0$  pro znalce derivací), dokonce budeme-li namísto s čísly pracovat s vektory, lze i celou soustavu rovnic shrnout do zápisu  $\mathbf{f}(\mathbf{x})=0$ . Ale pozor, přes zdánlivou formální podobnost se metody řešení jmenovaných problémů dosti liší, ba dokonce i u příbuzných úloh je třeba pečlivě zvažovat volbu té které metody řešení.

Za skutečnost, že jsme na počítači schopni řešit i dosti komplikované nelineární rovnice, musíme platit tím, že každé číslo lze zadat jen s konečnou přesností. Všechna racionální i iracionální čísla jsou zaokrouhlena na jistý počet desetinných míst a chyba tímto způsobená se při matematických operacích a výpočtech hodnot funkcí stále zvětšuje. Proto je vhodné uchovávat všechny vstupní údaje i mezivýsledky na co největší počet míst. Abychom potom mohli zaručit dostatečnou přesnost výsledku, je také třeba, aby byla úloha tzv. *dobře podmíněná*, to znamená, aby malé změny v zadaných hodnotách způsobily jen malé změny výsledků.

Společným prvkem všech metod je snaha co nejlépe se přiblížit přesnému řešení, které neumíme vyjádřit vzorcem. Obsahuje návod, jak z jistého odhadu řešení  $x_i$  dostaneme přesnější odhad  $x_{i+1}$ . Takovýto proces opakujeme, dokud hodnota nějakého kritéria, kterým se snažíme určit odchylku našeho a přesného řešení (nejčastěji rozdíl dvou následujících odhadů  $|x_i - x_{i+1}|$ , někdy třeba funkční hodnota  $f(x_i)$ ), neklesne (v absolutní hodnotě) pod stanovenou mez  $\varepsilon$ . Pro použitelnost metody je nyní rozhodující otázka, zda se sledovaná hodnota skutečně opakovaním kroků zmenšuje. Fakt, že po určitém počtu kroků se dostaneme pod libovolnou zvolenou hranici, se odborně nazývá *konvergence*. Při hodnocení metody nás kromě spolehlivosti konvergence zajímá také její rychlost - tj. jak rychle získáváme další platné cifry (ty odpovídající přesnému řešení) našeho odhadu kořene opakovaním daných kroků. U nejjednodušších metod roste lineárně, mocnější předpisy vám mohou třeba každým krokem počet platných cifer zdvojnásobit.

Požadavky rychlosti a spolehlivosti často stojí proti sobě. Metody slibující rychlé nalezení kořene mohou u některých funkcí zcela selhat. Buď se při opakování kroků ocitneme v kruhu, nebo nám dá tato metoda odhad naprosto mimo. Proto je záhodno vědět co nejvíce o průběhu uvažované funkce a co nejpřesněji odhadnout polohu kořene. Stanovíme-li interval, ve kterém má uvažovaná rovnice skutečně kořen, můžeme se k tomuto kořenu spolehlivou metodou dostatečně přiblížit a v jeho okolí, kde se funkce chová způsobně, rychle zpřesnit výsledek nějakou mocnější metodou.

Vezměme si funkci  $f(x)$ , jejíž graf je tvořen jednou souvislou čarou - taková funkce se nazývá *spojitá* (např. polynomy jako  $x^2+5x-1$ , nebo fce  $\sin(x)$ ). Ve většině metod, jež budeme popisovat, se omezíme právě na funkce, které jsou spojité všude až na několik (předem známých) bodů (jako třeba  $1/(x^2-1)$  nebo  $\operatorname{tg}(x)$ ). Kořen rovnice  $f(x)=0$  hledejme v jistém intervalu  $(a,b)$ . Pokud platí, že  $f(x)$  má v krajních bodech různá znaménka (tj.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ), musí v nějakém bodě tohoto intervalu protínat osu  $x$ . Budeme-li přibližovat body  $a, b$  tak, že tato nerovnost zůstane zachována, zůstane nám zaručeně alespoň jeden kořen uvnitř intervalu (říká se tomu *separace kořene*). Dobrým úvodem k aplikaci nějaké metody je rozdělení celé inkriminované oblasti na množství malých intervalů, zjistit znaménka uvažované funkce v jejich krajních bodech a potom vzít ty z nich, kde je splněna podmínka  $f(a)f(b) < 0$ .

***Bisekce neboli půlení intervalu a metoda regula falsi***

Jako první si ukážeme metodu nejjednodušší a nejpomalejší, ale také nejspolehlivější. Výchozí interval  $(x_1, x_2)$  nám separuje nějaký kořen rovnice  $f(x)=0$ . Postup je zřejmý již z názvu metody. Zvolíme  $x_3 = (x_1 + x_2)/2$  a v tomto bodě určíme hodnotu funkce  $f$ . Nyní z intervalů  $(x_1, x_3)$  a  $(x_3, x_2)$  vybereme ten, pro který je splněna podmínka  $f(a)f(b) < 0$  (v něm alepoň jeden kořen leží), a pokračujeme dále v hledání bodů  $x_4, x_5, x_6, \dots, x_s$  intervalem polovičním, čtvrtinovým, osminovým, ... Konvergence je dosti pomalá ( $\log_2 10 = 3,32..$  kroku na zpřesnění o 1 řád), zato ale bezproblémová.

Ve vlastním výpočtu si nepotřebujeme pamatovat celou posloupnost  $x_1, x_2, x_3$ , stačí nám bohatě tři body  $a, b, c$  a funkční hodnoty v nich  $f_a, f_b, f_c$ . K prvnímu programu, který nám provádí výše popsanou metodu, je potřeba několik poznámek. Funkce, jejíž kořen chceme nalézt, je označena jako **funkce** ( ), vstupní údaje (poč. interval a přesnost) nám zprostředkuje procedura **zadání**. Od původního postupu se odchýlíme v jednom bodě: nebudeme chtít, aby  $(a,b)$  byl regulérní interval, tj. aby  $a < b$ , ale budeme požadovat  $f_a < 0$  a  $f_b > 0$ , což nám usnadní další manipulaci s proměnnými (budeme přímo z  $f_c$  vědět, jestli bod  $c$  brát jako pravý nebo levý bod intervalu).

```

zadání (a,b,eps) {= kraje intervalu a mez přesnosti}
fa= funkce(a) : fb= funkce(b)
pokud fa>0 potom pokud fb>0 potom skonči ①
                                {počáteční interval neseperuje kořen}
                                jinak c=b
                                b=a
                                a=c
                                konec {podmínky 2}
konec {podmínky 1}
začcyklu
c=(a+b)/2
fc=funkce(c)
pokud fc<eps potom skonči konec
pokud (fc<0) potom a=c
                                jinak b=c
konec
koncyklu

```

*Pozn.* Příkaz skonči ozn.① znamená ukončení běhu celého programu. Dvojtečka odděluje dva příkazy stejně jako nový řádek.

Ve snaze zrychlit tuto metodu můžeme vzít v úvahu funkční hodnoty vypočtené v krajních bodech. Odhadneme-li průběh funkce v uvažovaném intervalu nejjednodušším způsobem, to je lineární závislostí, padne nám kořen do bodu

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

Jinými slovy spojíme úsečkou krajní body intervalu a její průsečík s osou  $x$  bereme za další bod. Pro tuto metodu existuje vžitě označení *regula falsi* („chybného předpokladu..“..linearity zkoumané funkce).

V uvedeném programu se příliš mnoho nezmění, kromě výpočtu nového bodu  $c$  je potřeba pohlídat to, aby se při předávání poloh bodů předaly i vypočtené funkční hodnoty (které nyní potřebujeme).

Zdá se, že nyní máme podstatně lepší odhad než při použití bisekce, ale lze se setkat s funkcemi, při kterých je uvedená konvergence velice pomalá: např. když na jedné straně od osy dosahuje podstatně menších absolutních hodnot. Potom je vhodné přejít zpět k půlení intervalu.

**Úloha S.1.** Řešte oběma popsányými metodami (s přesností na 5 desetinných míst) následující problém:

Skokan na můstku se odrazí z prkna rychlostí  $V=5 \text{ ms}^{-1}$  kolmo vzhůru v okamžiku, kdy je deska maximálně prohnutá směrem dolů (o  $A=30 \text{ cm}$  pod rovnovážnou polohou). Za jak dlouho se opět s deskou srazí, pokud prkno kmitá s periodou  $T=0.5 \text{ s}$ . Srovnejte rychlost výpočtu v jednotlivých fázích (hrubé přibližování, doladování).

[1] Press, Flannery, Teukolsky, Vetterling: *Numerical Recipes*, CUP 1986

**Termín odeslání: 19.12.1994**

**Adresa: FKS, KTF MFF UK, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha**