

Naši milí řešitelé

Tentokráte, ve třetím a snad už posledním proslovu, bychom vás chtěli seznámit s novým a skutečně převratným systémem hodnocení, který způsobí, že se pro vás stane vzájemné soupeření ještě zajímavějším než dosud. Tento systém je založen na teorii *bonusu a handicapu*.

Bonus znamená: vymyslíte-li a správně zdůvodníte buďto nějak originální způsob řešení či vyřešíte více než po vás bylo požadováno, můžete dostat určitý počet bodů navíc. Tento bonus se může lišit, neboť úlohy jsou různé obtížnosti a opravují je různí lidé, ale neměl by činit víc než polovinu ocenění příkladu.

Oproti tomu *handicap* odráží skutečnost, že řešitelé z vyšších ročníků (jakož i ti, kteří už seminář řešili v minulém roce) mají teoreticky větší šance na zvládnutí zadaných problémů než nováčci. Snahou bylo zahrnout i úspěšnost v loňském ročníku, abychom podpořili ty, kterým to dosud příliš nevyšlo. Výsledkem je lineární funkce v proměnných *ročník*, *počet_bodů_v_loňském_ročníku*, *počet_bodů_letos*, která určuje vztah mezi součtem obodování jednotlivých úloh (tzv. *běžné_body*) a skutečným ohodnocením (*pravé_body*), které se promítne do pořadí. Handicap tedy plyne z následujícího vzorce

$$\text{pravé_body} = \text{běžné_body} \times \left(1,2 - \alpha \times \text{ročník} - \beta \times \frac{\text{body_loni}}{100} - \gamma \times \frac{\text{běžné_body}}{100} \right)$$

Koeficienty α, β, γ jsou voleny tak aby byly splněny jisté procentuální poměry mezi řešiteli. Pro tento rok jsme se rozhodli za ročník studia strhávat 10% (t.j. $\alpha=0,1$), za 100 bodů získaných vloni 5% ($\beta=0,05$); 100% tedy odpovídá nováčkovi ze 2. ročníku. Navíc jsme k loňským ziskům připočetli paušálních 10 bodů (přeci jen to - i pro ty, kteří skoro nic nevyřešili - nějaká zkušenost). Třetí položku jsme zavedli proto, aby noví řešitelé, kteří se prosadí mezi „mazáky“, nebyli zvýhodňováni příliš dlouho - handicap bude proměnný a časem se ten jejich srovná s úrovní ostatních (jako *body_letos* se berou běžné body). Stovka bodů v letošním ročníku bude znamenat handicap 8%.

Nevýhoda, kterou tento systém znamená pro ty nejlepší, je vyvážena jistou prestiží spojenou s vysokým handicapem (jejich hodnoty se budou zveřejňovat s každou sérií). Nové řešitele a ty z konce tabulky to snad přesvědčí k větší aktivitě a zároveň umožní vyrovnanější soupeření starších a mladších řešitelů.

Pro ty, kteří neměli v ruce zadání prvních sérií nebo je nečetli dost pozorně, bychom rádi připomněli: **řešení každého příkladu pište na zvláštní papír!** Sneseme (i když ne vždy bez protestů), když to bude nějaký neobvyklý formát, ale těžko můžeme oboustranně popsany papír rozdělit mezi více opravovatelů. Pošlete nám také případné chybějící informace o vaší adrese či adrese školy a zejména váš ročník (který, jak vidíte, je dosti podstatný k bodování).

Přejeme vám hodně štěstí v příštím roce nejen při řešení FKS a jako vánoční dárek vám posíláme několik dalších úloh.

Zadání

Úloha III . 1 ... zasněžená

Malý Bobeš přitáhl pod kopec sáňky. Hledí na jeho vrchol, který je o h metrů výše než on a vzdálený (vodorovně) l metrů. Těžké sáňky o hmotnosti m drhnou na čerstvém sněhu s koeficientem tření f . Přemýšlí, při jakém tvaru svahu by se dostal nahoru s vynaložením nejmenší práce. Co mu poradíte (dřív než tam zmrzne, filosof jeden)? Zkuste tuto práci pro zvolený tvar svahu také vypočítat.

Úloha III . 2 ... kostka

Naleznete tvar čela vlny na hladině rybníka, do něhož jsme vhodili pravidelný hexaedr (t.j. šestistěn, pro neznalé krychle) o hraně a tak, že dopadla na hladinu jednou svou stěnou. Jak bude tato vlnoplocha vypadat ve vzdálenosti $r \gg a$?

Úloha III . 3 ... polytropa na zahřátí

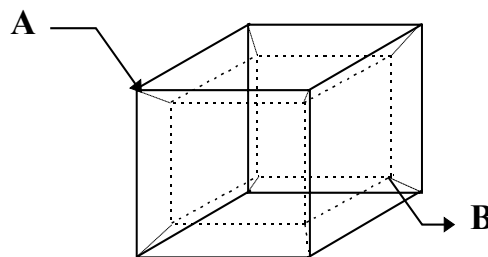
Pozn.: Pod pojmem polytropický rozumíme v termodynamice proces charakterizovaný rovnicí $pV^\alpha = \text{const.}$, kde α je daný parametr. Pro vhodné α dostáváme např. izobarický ($\alpha=0$), izotermický ($\alpha=1$) nebo izochorický ($\alpha=\infty$) děj.

Mějme nejjednodušší případ ideálního jednoatomového plynu. Při jakém polytropickém ději (t.j. pro jakou hodnotu α) se v něm zachovává

- počet srážek atomů v jednotce objemu
- celkový počet srážek?

Úloha III . 4 ... odpor 4-rozměrné krychle

Představte si krychli ve čtyřrozměrném prostoru, jejíž hrany jsou tvořeny odpory R (pomůckou vám bude obr. 1, který zachycuje ekvivalentní zapojení ve třech dimenzích znázorněné na dvourozměrném papíře). Vaším úkolem je spočítat výsledný odpor mezi body na tělesové úhlopříčce (mezi levým horním předním vnějším rohem - na obrázku bod A - a pravým dolním zadním vnitřním rohem - bod B). Zdá-li se vám to příliš snadné, pokuste se zobecnit výsledek pro libovolnou hodnotu dimenze n (a případně určete k jaké hodnotě se jejich odpor blíží pro n rostoucí k ∞).



Úloha III . 5 ... grant strýčka Skrblika

Vaším milovaným strýčkem vám byl zadán úkol zjistit, zda jeho památeční rodinná lžička jest skutečně z ryzího hliníku. Vaše experimentální vybavení je však poněkud skromné: kromě uvedené lžičce dostanete k dispozici závaží o známé hmotnosti, dlouhé pravítko, provázek a dva hřebíky, které můžete zatlouct do zárubně dveří. Navíc zde ještě stojí kbelík plný vody. Navrhněte, výpočty podložte a hlavně proveďte měření, při kterém co nejpřesněji s pomocí jmenovaných pomůcek určíte hustotu materiálu lžičky. Uskutečňte dostatečné množství měření a na základě alespoň nějakých kalkulací také odhadněte věrohodnost vámi obdrženého výsledku.

Nápověda k úloze č. III.5: pokuste se srovnat hmotnost lžice a závaží zavěšováním na provázek, který jste (s mírným průvisem) natáhli mezi zárubní dveří.

Seriál na pokračování

V minulém díle jsme poznali dvě nejjednodušší metody pro hledání kořene - přesněji řečeno postupy, jak z jistého odhadu polohy kořene dospět k odhadu přesnějšímu. Rychlost, s jakou se blížíme přesnému řešení, závisí na mnoha okolnostech; v obecném případě však lze zavést jisté číselné ohodnocení zvané řád konvergence. Označme si odchylku v i -tém kroku $\varepsilon_i = |x_i - \bar{x}|$ (maxim. možná vzdálenost bodu našeho intervalu a přesného řešení x). V případě bisekce platí mezi odchylkami ve dvou následujících krocích: $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i/2$; v případě obecné metody lze psát $\varepsilon_{i+1} = \text{const.} \varepsilon_i^\alpha$, kde právě α je řád konvergence. V případě prvních dvou metod je $\alpha=1$, říkáme, že konvergují lineárně (metoda regula falsi sice často konverguje rychleji, ale v jistých případech je stejně pomalá jako bisekce).

Metoda sečen a tečen

Abychom dostali rychlejší konvergenci, musíme se vzdát požadavku, že dva následující odhady v každém kroku budou oddělovat kořen. Ta podmínka nám sice dává jistotu, že metoda dojde k cíli, často má však za důsledek dosti těžkopádnou konvergenci. Zkusme tedy v posledně diskutované metodě vynechat podmínku separace a výsledek, který dostaneme ze vzorce $x_{i+1} = \frac{x_{i-1}f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$, berme za další odhad bez ohledu na

to, jestli nám interval $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ odděluje kořen či nikoli (t.j. jestli platí $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$).

Takový postup se nazývá *metoda sečen* a konverguje k hledanému řešení (s výjimkou několika patologických případů) s řádem 1,618... Riziko, které s sebou tato metoda přináší, ilustrují dva uvedené grafy: první z nich zachycuje situaci, kdy nám vypočtený bod padne někam daleko za původní hranice (takovéto případy lze snadno ohlídat); druhý graf znázorňuje poměkud vzácnější jev, kdy se metoda ocitne v kruhu (body na sebe odkazují navzájem) - dosáhnout tohoto stavu přesně je téměř nemožné, ale i blízké

situace konvergují značně pomalu... Lze si všimnout, že směr sečny, zejména jsou-li body dostatečně blízko, vystihuje sklon grafu funkce. Hledáme-li tento směr přesně v daném bodě, musíme přejít od sečen k tečně. Sklon tečny, resp. jeho tangenta, se pak rovná derivaci funkce v bodě (vy, kteří jste se s derivacemi ještě nesetkali, si takto můžete představit definici: derivace f v bodě x , psáno $f'(x) = \tan \beta \approx \frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x}$ pro

dva blízké body x a x^*). Tedy známe-li derivaci naší funkce (kterou lze spočítat u naprosté většiny funkcí bez velkých problémů), můžeme namísto metody sečen volit postup následující: v daném bodě spočítáme derivaci a další bod zvolíme podle vzorce $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$, t.j. v místě, kde tečna protíná osu x .

Tak dostáváme *metodu tečen* neboli *Newtonovu metodu*. Je jednodušší v tom, že k určení následujícího bodu stačí počítat jen s jedním namísto dvěma body, zato je třeba znát průběh derivace dané funkce (a v některých bodech ani nemusí derivace funkce existovat - tam, kde neumíme sestrojít tečnu). Tato metoda konverguje dokonce kvadraticky (řád konvergence 2), ale skrývá tatáž nebezpečí jako metoda sečen. Neznáme-li předem derivaci funkce f , je zde možnost nalezení její hodnoty v bodě x podle definice $f'(x)$: za bod x^* vezmeme $x+h$, kde h je dostatečně malé číslo; pak $f'(x) = (f(x+h) - f(x))/h$. To však poněkud zpomaluje výpočet a zatěžuje ho značnou chybou (buď je h příliš malé, a pak hrozí dělení malým číslem, anebo naopak je přiblížení k tečně příliš hrubé). Zkušenost ukazuje, že místo tohoto postupu je vhodnější a v praxi rychlejší metoda sečen.

Zrychlení konvergence (Aitkinův proces)

Podle úvodních poznámek k tomuto dílu můžeme tvrdit, že poměr vzdáleností dvou následujících odhadů kořene od přesného řešení se pro zvyšující se počet kroků blíží nějaké limitní hodnotě C (to platí přesně v případě, že řád konvergence metody je roven 1, ale postup účinkuje i při jiných metodách). V jistém přiblížení můžeme pro tři po

sobě jdoucí odhady psát vztah $\frac{|x_i - \gamma|}{|x_{i-1} - \gamma|} = \frac{|x_{i+1} - \gamma|}{|x_i - \gamma|} \approx C$, přičemž rovnost platí tím lépe,

čím více se i blíží ∞ . Máme-li tři odhady kořene jako výsledky některé z popsaných metod, můžeme odtud vyjádřit odhad pro $\gamma = \frac{x_{i-1}x_{i+1} - x_i^2}{x_{i-1} + x_{i+1} - 2x_i}$. Tuto hodnotu lze vzít

jako následující, $(i+2)$. aproximaci kořene. Tento postup je vhodný zejména pro překonání nějakého obtížného pomalu konvergujícího úseku, do kterého se dostala některá z výše uvedených metod; lze ji však považovat i za samostatnou metodu hledání kořene.

Úloha S . 2: Upravte program uvedený v minulé sérii z metody regula falsi na metodu sečen a zjistěte, jak se zrychlí konvergence metody na stejném příkladu jako v minulé sérii*. Ověřte, jak mnoho je nyní konvergence závislá na volbě výchozího bodu.

Pokuste se metodu zrychlit pomocí Aitkinova procesu: vždy po třech přiblíženích spočtených běžným způsobem proveďte extrapolaci k řešení γ . Jak se uvedený postup vyplatí při metodě regula-falsi a při metodě sečen?

* K zadání tohoto příkladu jen drobné upřesnění - úlohu uvažujte čistě kinematicky, bez počítání hybností a sil: deska kmitá jako volný harmonický oscilátor a skokan se pohybuje jako hmotný bod ve svislém vrhu.

Řešení

Úloha I. 1 ... *golf* (maximum počtu bodů 4, bonusu 2; řešilo 63 studentů)

Vztahy vyjadřující okamžitou rychlost či polohu hmotného bodu vrženého šikmo vzhůru jsou dobře známé (což někdy nebylo z vašich řešení moc patrné), nás zajímá jen vyjádření polohy míčku: $x = v_0 t \cos \varphi$; $y = v_0 t \sin \varphi - \frac{gt^2}{2}$. Z tohoto parametrického vyjádření trajektorie snadno odvodíme explicitní závislost $y = y(x)$ vyloučením parametru t : $y = x \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi}$. Tento vztah především použijeme v dalším řešení.

a) víme, že míček má dopadnout do důlku: $y = 0$ pro $x = d \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{gd}{2v_0^2 \cos^2 \varphi}$. Po

jednoduché úpravě dostáváme $v_0 = \frac{gd}{\sin 2\varphi}$.

b) míček musí také přeletět překážku: $y > h$ pro $x = l \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi > \frac{h}{l} \frac{d}{d-l}$. Vztahy pro

počáteční rychlost v_0 a elevační úhel φ jsou řešením našeho problému.

Druhou část úlohy snadno zodpovíme, podíváme-li se na určení elevačního úhlu. V zadání nebylo řečeno, jak vysoká je přední stěna překážky, automaticky se předpokládalo, že bude vysoká také h . Za předpokladu, že překážka bude mít v kolmém řezu tvar čtyřúhelníka o stranách h_1 , h_2 , $l_2 - l_1$, stačí, aby elevační úhel byl

$\operatorname{tg} \varphi > \max_{i=1,2} \left(\frac{h_i}{l_i} \frac{d}{d-l_i} \right)$. Úloha byla schválně zadána tak, jak před naším golfařem

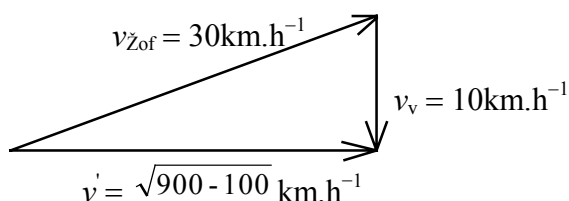
vyplynula během golfování. Proto se musím ohradit proti tomu, že zadání nebylo jasně formulované (až na drobnou chybičku ohledně výšky přední stěny překážky), naopak bylo na vás, jakou si zvolíte dráhu míčku. Pokud jste někdy viděli golf, je vám asi jasné, že výše zmíněné řešení by moc nefungovalo (míček by z důlku vyskočil). Je tedy zapotřebí vzít v potaz koeficient tření míčku (co myslíte, valivého či smykového?) po povrchu hřiště (tráva, beton), koeficient útlumu při dopadu míčku atd. a dělat příslušné modely lépe vystihující danou skutečnost. Fyzika tkví už v tom, jaký model zvolíte, proto není vhodné tento model přesně v zadání stanovovat. Ti z vás, kteří si toto uvědomili a diskutovali nejruznější trajektorie míčku, byli samozřejmě ohodnoceni příslušným bonusem.

Úloha I.2 ... *Mňága a Žďorpa* (maximum počtu bodů 5; řešilo 68 studentů)

Ve všech třech případech se Mňága a Žďorpa potkají za dobu $t = s/(v_M + v_Z) = 1\text{h}$, kde v_M a v_Z jsou rychlosti Mňágy a Žďorpa ($v_M = 15 \text{ km.h}^{-1}$, $v_Z = 25 \text{ km.h}^{-1}$). V případě a) je rychlost Žofky vzhledem k silnici 30 km.h^{-1} a tak za hodinu nalétá 30 km . Příklad c) je obdobný, jenom rychlost Žofky vzhledem k silnici je jiná. Včelku totiž neustále strhává vítr, takže aby letěla podél silnice, musí v soustavě spjaté s větrem letět „našikmo“ (viz. obrázek). Rychlost Žofky vůči silnici je tedy $10 \cdot \sqrt{8} \text{ km.h}^{-1}$, takže včelka za hodinu nalétá $10 \cdot \sqrt{8} \text{ km}$. Nejsložitější je část b), neboť letí-li Žofka od Postoloprta, má rychlost $v_1 = 20 \text{ km.h}^{-1}$, letí-li pak od Kožuchova, má rychlost $v_2 = 40 \text{ km.h}^{-1}$. Spočtíme nejprve její průměrnou rychlost na úseku Mňága-Žďorpa-Mňága. Žofka dorazí

k Žďorpu za dobu $t_1 = l / (v_1 + v_2)$, kde l je vzdálenost Mňága-Žďorpu v okamžiku odletu Žofky od Mňágy. Mňága za tuto dobu urazí dráhu $l_M = v_M \cdot t_1$. Žofka pak dorazí nazpět k Mňágovi

za dobu $t_2 = (v_1 \cdot t_1 - l_M) / (v_2 + v_M)$. Průměrná rychlost na tomto úseku je $v_p = (2 \cdot v_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot v_M - v_2 \cdot v_M) / (v_1 + v_2)$, číselně $v_p = 130/6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Jak jsme mohli očekávat, průměrná rychlost Žofky nezávisí na počáteční vzdálenosti mezi Mňágou a Žďorpem, takže musí být rovna celkové průměrné rychlosti, protože celkovou trajektorii včelky



můžeme složit s těchto úseků. Žofka v případě b) urazí vzdálenost $d = 130/6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Mnozí z vás vyjádřili dráhu včelky ve tvaru nekonečné řady, jejíž součet pak počítali numericky. Ti dostali o bod míň, protože si myslím, že to není tak

náročné jako přímé sečtení řady.

Úloha I. 3 ... disk (maximum počtu bodů 4, bonusu 2; řešilo 44 studentů)

označení:

t - tloušťka vrstvy vod

d - průměr disku

σ - povrchové napětí vody

a) Mezi disky je voda.

V tomto případě voda mezi disky vytvoří jistý meniskus, jehož tvar je parabolický (teor. odvození viz. literatura). Pro malé poloměry křivosti se parabola běžně aproximuje kružnicí.

Síla, působící proti odtržení, má svůj původ v tlaku (resp. podtlaku), který vytváří meniskus vody mezi válci. Jeho velikost je nepřímo úměrná poloměru zakřivení r . Z toho plyne, že největší bude při nejmenším r a jelikož r se s odtrháváním zvětšuje, bude největší na počátku odtrhávání. Můžeme tedy položit $r = t/2$.

Jelikož $d \gg r$ můžeme tlak počítat jako od válcové plochy

(pozn.: kapilára - část koule - $2 \cdot \sigma/r$, mezi deskami - část válce - σ/r).

$$p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \cos \alpha$$
, kde r_1 a r_2 jsou poloměry křivosti dvou na sebe kolmých řezů.

$$p = \sigma \left(\frac{1}{r} - \frac{2}{d} \right) \cos \alpha \approx \frac{\sigma}{r}$$

Disk má plochu $S = p \cdot d^2 / 4$

Pro odtržení je třeba působit na oba disky silou $F = S \cdot p \approx 2.3 \text{ N}$

Pro zajímavost odhadneme vzdálenost, o kterou je třeba oba disky oddálit, aby se voda rozdělila na každý zvlášť. Tím se zvětší povrch kapaliny o $2S$, energie $E = \sigma \cdot 2S$. Energie E musí být rovna vykonané práci $W = F \cdot s$. Z toho dostaneme $s \approx t$. Oba disky se definitivně oddělí po oddálení o vzdálenost t , tedy na vzdálenost $2t$.

b) Mezi disky je hedvábný papír

Jak již bylo v zadání naznačeno, v tomto případě přilnou disky k sobě tak, že se mezi ně nedostane vzduch - takže nemůže působit ani atmosférický tlak z této strany. Důsledkem tohoto je, že síla na odtržení musí překonávat atmosférický tlak.

Na oba disky je třeba působit silou $F = p_a \cdot S = 800 \text{ N}$.

V případě a) atmosférický tlak působí z obou stran, neboť působí z boku na vodní meniskus (tlak se šíří všemi směry) a tedy i z vnitřní strany disků.

Poznámka: Prosím pochopte, že vzorec $F=\sigma \cdot l$ je hezký, ale platí jen v některých speciálních případech. Obecně platí vzorec $E=\sigma \cdot S$, který vychází z definice.

Úloha I. 4 ... *setrvačnost* (maximum počtu bodů 5; řešilo 62 studentů)

Autobus se rozjíždí se zrychlením a vpřed. V rozjíždějícím se autobuse působí na všechno uvnitř autobusu setrvačná síla (ve směru zpětném). Tato síla působí na vše, podobně jako síla gravitační.

Balónek plný helia se ve vzduchu vznáší (je nadlehčován podle známého Archimedova principu - uvolňuje místo dole (ve směru grav. zrychlení) vzduchu, který má větší hustotu než balónek). Kdyby nebyl připevněn na šňůrce, uletěl by vzhůru. Ze zcela stejného důvodu se balónek při rozjíždění autobusu tlačí dopředu (opačně než působí setrvačné zrychlení - následek Arch. zákona). - tolik kvalitativní řešení, které jsme chtěli VIDĚT!

Uvážíme-li, že balónek se tlačí vždy proti působícímu zrychlení, můžeme při rozjíždění autobusu složit zrychlení gravitační se setrvačným a víme, že balónek se bude tlachtit proti této výslednici (tj. nahoru a dopředu). Můžeme také určit přesnou polohu, kterou zaujme. Natáhne totiž provázek, který ho drží, ve směru opačném ke směru výslednice zrychlení. Balónek na provázku se tedy odkloní vpřed o $\varphi=\arctg(a/g)$. - tolik kvantitativní řešení, což jste NEMUSELI!

Úloha I. 5 ... *bungee-jumping* (maximum počtu bodů 5, bonusu 2; řešilo 17 studentů)

Komentáře k bodům a), b):

Především, úloha byla experimentální, což někteří zřejmě nepostřehli a zkoušeli odvozovat „experimentální“ výsledky z přiblížení gumového vlákna coby lineárního harmonického oscilátoru, aniž by si však vůbec uvědomili meze použitelnosti tohoto přístupu. Tedy vezte, vy, kterých se to týká, že guma se vesměs nechová v celé oblasti pružných deformací stejně jako pružinka. Prověření tohoto tvrzení bych přenechal Vaší experimentální erudici, abyste z této úlohy nevyšli tak lehce. Jiným, kteří skutečně nějaká měření provedli, ale zachovali se k plodům své práce více nežli macešsky, bych zase doporučil více se na své výsledky spolehnout a pro evidentně nelineární závislost prodloužení na hmotnosti tvrdošijně nepředpokládat, že guma se bude chovat stejně lineárně jako pružina. Můžete si, ex post, provést následující srovnávací měření: V posledním bodě komentářů k řešení máte odvozen vztah (3) pro maximální hloubku poklesu závaží hmotnosti m při lineárním chování gumy o tuhosti k . Měření k provedete snadno a celkem přesně staticky a srovnáním teoretické předpovědi plynoucí z výše popsaného a Vašich experimentálních výsledků zjistíte, nakolik je ve Vašem případě oprávněná lineární aproximace.

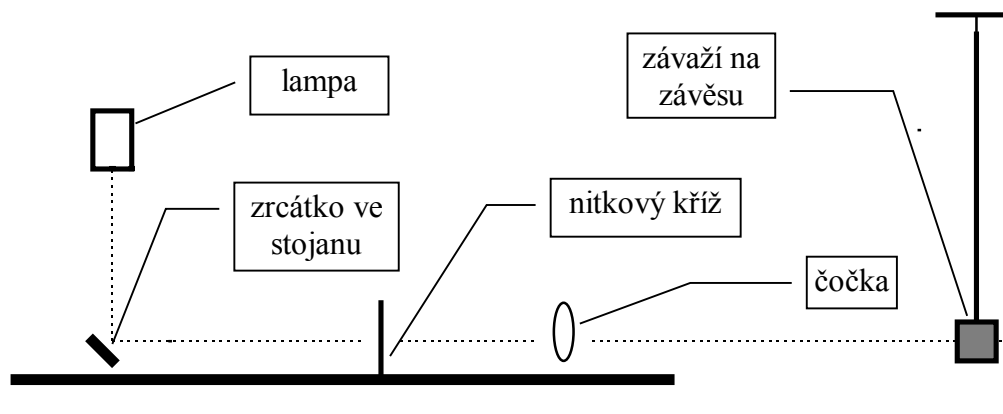
Pro příště prosím všechny řešitele o podrobný komentář a to jak k metodě měření, tak k získaným výsledkům. Myslím, že to pomůže jak nám při opravování, tak i Vám samým, neboť uvidíte sami výhody i nevýhody Vašich metod měření a zpracování výsledků, slabá místa v postupech apod. Tabulka syrových číselných výsledků sice ukazuje, že jste cosi naměřili, ale to je asi tak vše. Málodky se vyskytly grafy, ještě méně tedy odpovídající grafy. Předpokládám-li lineární závislost, pak je přirozené, že zkusím naměřenými body proložit přímkou a tím zjistit, nakolik je můj předpoklad oprávněný. Spojovat výsledné body cikcak úsečkami podle jejich pořadí či hladkou čarou od ruky tak, aby se výsledek na pohled líbil a nerovnosti nebyly tak ostré, mi

přijde přinejmenším zcestné. Pak je zde drobný problém, jakou chybou že jsou tedy ty body zatíženy? To si ale asi necháme na jindy.

Starým seminárním mazákům možná přijdou ty předcházející odstavce notoricky známé a nováčkům třeba nebude jasné, proč dělám tolik povyku, ale musím říct, že řešení shromážděná přede mnou k takovým ohnivým epištolám přímo vybízejí. Pokuste se, prosím, do příště si ty mé připomínky promyslet a akceptovat je, je-li to možné. Děkuji předem.

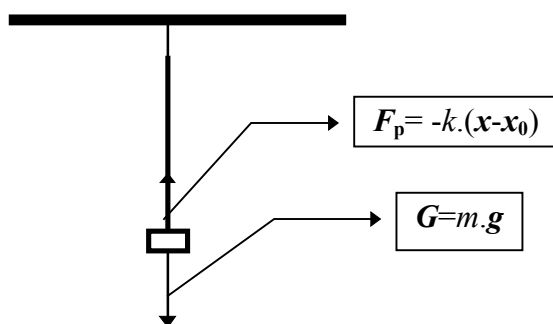
Abych se opět vrátil k věci, totiž k úloze. Abych neshledával pouze nedostatky, musím v zájmu objektivit vydvihnout řešení kolegů Sýkory a Kolorenče, která byla skutečně precizní v provedení a dosti fyzikální. Jen tak dál a více takových řešení!

Co se týká samotného měření v bodech a) a b), shledal jsem problematičtější odečítání maximální hloubky vzhledem k jeho možné nepřesnosti. Řešení, jaké jsem nakonec použil, je popsáno na obrázku. Měřil jsem doma, v improvizovaných podmínkách, takže tomu odpovídaly i použité pomůcky. Jako zdroj světla jsem nasadil stolní lampičku stíněnou kartonovým filtrem se štěrbinou. Obyčejné zrcátko bylo upevněno ve stolku sestaveném ze stavebnice *Merkur*, ke kterému byl připevněn úhломěr, kvůli přesnému (v rámci možnosti) seřízení přístroje, nitkový kříž byl vyroben z kreslicí čtvrtky a nití a nastaven za zrcátko, tak, aby byl promítán na měřítko. K jeho zaostření na plochu jsem použil čočku s delší ohniskovou vzdáleností. Nevýhodou tohoto uspořádání je nutnost manipulovat se závěsem, protože optika zůstává po seřízení de facto pevná. Tato nevýhoda je částečně odstraněna pevným společným závěsem pro měřidlo i gumu. Další věci jsou pak již zřejmé z obrázku.



ad c)

Odhad maximálního zrychlení nebyla jednoduchá věc, pokud jste předem neuvažovali pouze lineární pružnost (tolikrát zmiňovaný harmonický oscilátor). To jste vesměs udělali, ale chyběla z toho plynoucí základní věc: totiž na základě tohoto předpokladu a změřených vlastností gumy určit minimální mohutnost Vašeho lana. Zřejmě šlo o to určit z Vašich křivek, kde že se guma chová (pro jaká m , l_0 , potažmo průřez) jako pružinka o tuhosti k . Máte-li mez lineárního chování a pracujete nyní pro gumové lano, které se pro člověka hmotnosti m chová jako pružinka, lze vydedukovat toto maximální zrychlení snadno a mnozí z Vás to také udělali. Pro ilustraci tedy postup přes energetické úvahy, o kterém jsem dodatečně zjistil, že byl skutečně použit jedním z Vás.



Na těleso působí tíhová síla \mathbf{G} a síla pružnosti gumového vlákna \mathbf{F}_p . Od nich se bude odvozovat zrychlení z hlediska inerciální soustavy spjaté s vnějším pozorovatelem, tedy ne s tím nešťastníkem na konci lana. Hledáme-li extrémní hodnoty zrychlení, pak je zřejmé, že extrémem bude buď zrychlení v průběhu volného pádu, nebo zrychlení v bodě obratu závaží. To uvidíte, jakmile si

napišete druhý Newtonův zákon pro těleso na konci lana :

$$(1) \quad m \cdot a = m \cdot g - k \cdot (x - x_0) \quad \text{pro } x > x_0.$$

v bodě obratu je zrychlení nutně záporné vzhledem k naší orientaci osy x , z čehož plyne podmínka

$$(2) \quad g \cdot m / k + x_0 < x.$$

Pro bod obratu současně platí, že rychlost člověka je v něm nulová, tedy kinetická energie je nulová. Pokud předpokládáme, že onen nešťastník na konci našeho lana začíná skok z klidu, tedy bez vertikální složky počáteční rychlosti, platí zřejmě

$$(3) \quad m \cdot v^2 / 2 = m \cdot g \cdot x \quad \text{pro volný pád,}$$

kinetická energie člověka odpovídá práci vykonané tíhovým polem, během brždění gumovým lanem zřejmě dojde k její "akumulaci" v podobě potenciální energie pružnosti lana. Tedy

$$m \cdot g \cdot x = k / 2 \cdot (x - x_0)^2$$

Řešením odpovídající kvadratické rovnice dostaneme dva kořeny. Ten, který má pro nás smysl určuje podmínka (2):

$$(4) \quad x = x_0 + \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} \sqrt{\frac{2k}{mg} x_0 + 1}.$$

Pro zrychlení snadno obdržíme dosazením do rovnice (1) $a = -g \sqrt{\frac{2k}{mg} x_0 + 1}$.

Toto vše ovšem platí pro statický průřez lana $S \gg S_{\text{MEZNI}}$ při daném x_0 , m s tolerancí určenou volbou S a přesností změřeného k . Pokud vaše guma vykazovala jinou závislost nežli lineární, můžete provést zcela analogické úvahy, jen je třeba dát si pozor, kde končí oblast pružnosti a začíná oblast nevratných deformací, pro něž se nezachovává mechanická energie. Myslím, že bychom mohli tomu chudákovi na konci lana dát větší šanci na přežití a do těchto oblastí deformace se nepouštět!

Pořadí řešitelů po prvním kole

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Handi cap	1	2	3	4	5	B. B.	P. B.
0	Student	Pilný	∞.☺	MFF UK Praha	100%	4	5	4	5	5	23	23
1 - 2	Jindřich	Kolorenč	4.G	G Nová Paka	71%	6	5	6	5	7	29	20
1 - 2	Rudolf	Sýkora	3.A	G Hejčín	86%	5	5	2	5	7	24	20
3	Josef	Šeda	2.C	G Brno	100%	3	2	3	5	4	17	17
4	Matouš	Jiráček	3.?	G Říčany	90%	3	5	2	4	4	18	16
5 - 6	Jiří	Franta	3.A	G Příbram	90%	4	5	-	5	3	17	15
5 - 6	Michal	Fabinger	4.E	G Nad Alejí Praha	71%	4	5	2	5	6	22	15
7 - 9	Vlastimil	Křápek	kvinta	G Brno	100%	3	5	2	4	-	14	14
7 - 9	Přemysl	Kolorenč	1.?	G Nová Paka	110%	5	4	-	4	-	13	14
7 - 9	Pavel	Bubák	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	88%	4	2	3	4	3	16	14
10 - 12	Martin	Krsek	4.A	G J.K.Tyla Hradec Králové	79%	4	5	3	5	0	17	13
10 - 12	Martin	Hadrávek	septima	G Jírovcova České Budějovice	90%	3	5	2	1	4	15	13
10 - 12	Marie	Mášková	3.?	G PORG Praha - Libeň	90%	3	5	1	2	4	15	13
13 - 14	Peter	Macák	4.A	G Jur. Hronca Bratislava	76%	4	5	4	4	-	17	12
13 - 14	Veronika	Štulíková	3.B	G Beroun	90%	3	3	3	1	4	14	12
15 - 17	Marta	Bednářová	4.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	76%	5	5	-	5	-	15	11
15 - 17	Lubomír	Zrnečko	4.?	G Rumburk	80%	4	4	1	5	-	14	11
15 - 17	Jan	Foretník	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	90%	4	5	-	4	-	13	11
18 - 23	David	Nečas	4.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	78%	4	5	-	4	-	13	10
18 - 23	Jan	Rychtář	kvinta	G Strahonice	80%	2	5	2	4	-	13	10
18 - 23	Zdeňka	Broklová	kvinta	G Polička	108%	4	4	-	2	-	10	10
18 - 23	Martin	Hála	2.G	G Rumburk	100%	4	2	3	1	0	10	10
18 - 23	Jakub	Machek	3.A	G Žďár nad Sázavou	90%	4	3	2	1	2	12	10
18 - 23	Jiří	Sulovský	3.D	G F.X.Šaldy Liberec	90%	3	3	2	0	4	12	10
24 - 27	Anna	Jančaříková	3.C	G Zborovská Praha	88%	1	5	-	5	-	11	9
24 - 27	Michal	Vopálenský	3.D	G Jihlava	90%	4	2	2	3	-	11	9
24 - 27	Tomáš	Kolský	??	G Zborovská Praha	120%	4	3	1	-	-	8	9
24 - 27	David	Stanovský	4.D	G Pardubice	77%	1	4	2	1	4	12	9
28 - 29	Gabriela	Randáková	4.A	G Brandýs nad Labem	80%	3	3	2	1	1	10	8
28 - 29	Martin	Čada	oktáva	G Jeseník	80%	4	2	-	1	3	10	8
30 - 40	Jana	Koláčková	4.?	PORG Praha 8 - Libeň	79%	4	4	2	-	-	10	7
30 - 40	Martin	Navrátil	4.A	G Karlovy Vary	79%	4	1	-	5	-	10	7
30 - 40	Petr	Doubek	4.D	G Pardubice	79%	4	5	-	-	-	9	7
30 - 40	Jan	Horáček	4.A	G Valašské Meziříčí	79%	4	1	-	4	-	9	7
30 - 40	Blanka	Janoušová	4.A	G Na Vítězné pláni Praha 4	79%	3	2	-	4	0	9	7
30 - 40	Josef	Janovec	4.B	SPSt F.M.Pelcla Rychnov n. Kn.	80%	4	3	1	1	-	9	7
30 - 40	Jiří	Walek	4.?	G Havířov	80%	3	3	2	1	-	9	7
30 - 40	Miroslav	Jílek	3.A	G Polička	89%	3	2	2	1	-	8	7
30 - 40	Petr	Vejchoda	kvinta	G Brno	90%	3	2	-	3	-	8	7

30 - 40	Pavel	Kraus	kvarta	G Masarykovo Plzeň	100%	3	2	1	1	-	7	7
30 - 40	Karel	Kolář	0.A	G Sušice	120%	4	2	-	-	-	6	7
41 - 47	Karel	Švadlenka	4.A	G České Budějovice	80%	4	-	-	4	-	8	6
41 - 47	Zdeněk	Žabokrtský	4.C	G F.M.Pelcla Rychnov n. Kn.	80%	3	1	-	4	-	8	6
41 - 47	Michal	Bursa	3.B	G Jana Keplera Praha	90%	4	1	1	1	-	7	6
41 - 47	Radek	Podhajský	3.A	G Mariánské Lázně	90%	4	1	0	2	0	7	6
41 - 47	Robert	Špalek	Q	G Brno	90%	1	1	1	4	-	7	6
41 - 47	Jiří	Smola	kvinta	G J. Vrchlického Klatovy	110%	-	3	2	1	-	6	6
41 - 47	Viktorie	Šlísová	1.G	G Rumburk	110%	3	2	-	1	-	6	6
48 - 54	Kristýna	Kupková	4.C	G Nad alejí Praha 6	80%	2	3	1	1	-	7	5
48 - 54	Matěj	Liszka	4.A	G Frýdecká Český Těšín	79%	3	4	-	-	-	7	5
48 - 54	Martin	Vohralík	4.D	G Pardubice	80%	1	4	1	1	-	7	5
48 - 54	Tomáš	Vojta	4.?	G	80%	0	3	-	4	-	7	5
48 - 54	Tomáš	Belza	3.D	0 F.X.Šaldy Liberec	90%	4	1	-	1	-	6	5
48 - 54	Kateřina	Nohavová	2.C	G Jana Keplera Praha	100%	2	1	1	1	-	5	5
48 - 54	David	Bača	3.A	G Frýdlant n. O.	90%	3	1	0	1	1	6	5
55	Robert	Šámal	4.D	G Praha	77%	-	3	-	3	-	6	4
56 - 64	Kristina	Bartková	4.C	G J.A.Komenského Uh. Brod	80%	2	1	-	1	-	4	3
56 - 64	Matouš	Borák	4.C	G Čs. Exilu Ostrava - Poruba	80%	2	1	0	1	-	4	3
56 - 64	Karel	Borovička	3.D	G F.X.Šaldy Liberec	90%	2	1	0	1	-	4	3
56 - 64	Jaroslav	Brzák	3.?	G Nový Bydžov	90%	1	2	0	1	-	4	3
56 - 64	Tomáš	Černoch	4.C	G Nad štolou Praha	79%	1	0	3	-	-	4	3
56 - 64	Martin	Čížek	3.?	SUSSt Sezimovo ústí	90%	1	2	0	1	-	4	3
56 - 64	Petr	Hladík	kvinta	SPSa Mělník	100%	0	2	-	1	0	3	3
56 - 64	Kamil	Řezáč	1.A	G J. Vrchlického Klatovy	110%	-	1	-	2	-	3	3
56 - 64	Miloš	Roškot	2.C	G BN Benešov	100%	0	1	0	1	1	3	3
65 - 67	Zdeněk	Hrnčíř	kvinta	G Brandýs nad Labem	80%	-	1	1	1	-	3	2
65 - 67	Tomáš	Bílek	Q	G J. Vrchlického Klatovy	100%	-	1	0	1	-	2	2
65 - 67	Josef	Marcel	2.A	G J. Vrchlického Klatovy	100%	0	-	1	1	-	2	2
68 - 70	Monika	Šťástková	kvarta	G Praha	80%	1	1	-	-	-	2	1
68 - 70	Pavel	Kristen	1.?	G Týn n. Vltavou	110%	-	1	-	-	-	1	1
68 - 70	Petr	Sedláček	2.C	G Benešov	100%	-	1	0	0	0	1	1

Termín odeslání: 30. ledna 1995

Adresa: FKS, KTF MFF UK, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha