Úloha I.S ... nejistá

6 bodů; průměr 3,02; řešilo 48 studentů

1. *Sepište si rovnice pro vrh v homogenním gravitačním poli (nemusíte je znovu řešit, ale musíte je umět správně použít). Navrhněte přístroj, který bude vrhat předmět dle vašeho uvážení a určete, pod jakým úhlem a jakou rychlostí tak činí. Můžete například vrhat pomocí pružiny, změřit její tuhost a hmotnost předmětu a vypočítat kinetickou energii, a tudíž i rychlost předmětu. V jakých rozmezích jste si s rychlostí a úhlem jistí? Dosaďte tyto rozsahy do rovnic a ukažte, v jakých rozmezích v důsledku toho můžete očekávat vzdálenost dopadu od vašeho předmětu. Vrhněte svůj předmět daným přístrojem alespoň pětkrát a změřte vzdálenost dopadu – v jakých rozmezích jste si jisti danou vzdáleností? Ukažte, zda se vešly vaše výsledky do toho, co jste předpověděli. (Za odkaz na video s vrhem bonusový bod!)*
2. *Uvažte kyvadlo s výchylkou x, které se efektivně kývá harmonicky, ale frekvence jeho kyvů závisí na maximální výchylce x_0*

$$x(t) = x_0 \cos\left[\omega(x_0)t\right] \,, \quad \omega(x_0) = 2\pi\left(1 - \frac{x_0^2}{l_0^2}\right) \,,$$

   kde l_0 je nějaká délková škála. Myslíme si, že pouštíme kyvadlo z $x_0 = l_0/2$, ale ve skutečnosti jej vypouštíme z $x_0 = l_0(1+\varepsilon)/2$. O kolik se liší argument kosinu od 2π po jedné námi předpokládané periodě? Po kolika periodách bude kyvadlo vychýlené na druhou stranu, než bychom předpokládali?

   Tip *Argument kosinu se bude v tu chvíli od předpokládaného lišit o víc než $\pi/2$.*
3. *Vezměte do ruky propisku a postavte ji na stůl na špičku. Proč spadne? A co rozhoduje o tom, že spadne spíš doprava, než doleva? Proč nedokážete předpovědět výsledek hodu kostkou, i když zákony fyziky by jej měly plně předurčit? Když hrajete kulečník, je neschopnost dokončit hru pouze v jednom šťouchu pouze v tom, že to nedokážete propočítat? Sepište svoje odpovědi a zkuste vyjmenovat fyzikální jevy ze života, které jsou v principu předpověditelné, ale ani dobrá znalost situace vám v předpovědi moc nepomůže.*

1. Můžete si lehko ověřit, že pokud vrhnete hmotný bod v homogenním gravitačním poli g s vertikální rychlostíí v_y, dopadne na zem v čase

$$t = \frac{2v_y}{g} \,.$$

   V horizontálním směru se však pohybuje rychlostí v_x a tudíž částice před dopadem dolétne do horizontální vzdálenosti $s = v_x t = 2v_x v_y/g$. Zároveň si ale můžeme složky rychlosti v_x, v_y vyjádřit pomocí velikosti rychlosti v a úhlu φ, který počáteční rychlost svírá s horizontálním směrem. Máme pak $v_x = v\cos\varphi$, $v_y = v\sin\varphi$ a s použitím $2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$ získáváme

$$s = \frac{v^2}{g}\sin 2\varphi \,.$$

   Do tohoto vzorce pak můžete nasázet rozmezí své nejistoty a porovnávat s experimentem. Vidíte, že když máme chybu v rychlosti ε, posune se výsledek úměrně $(v+\varepsilon)^2 = v^2 + 2\varepsilon v + \varepsilon^2$, tj. pro hodně malá ε fakticky úměrně $2\varepsilon v$. U úhlu je to složitější, ale když si vykreslíte funkci $\sin 2\varphi$ v radiánech, můžete zjistit, že posun δ v radiánech nezpůsobí nikdy v této funkci větší chybu než 2δ.

Největší problém je při experimentu s určením počáteční rychlosti v. Pokud máte například pružinu s tuhostí k, víte, že jejím stlačením o d a uvolněním získáte energii

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kd^2\,,$$

a s použitím vztahu pro kinetickou energii $E_\mathrm{k} = mv^2/2$ jste mohli sestavit mrštidlo, které ideálně přesunulo všechnu energii pružiny do vrženého objektu. Změřením stlačení d byste pak získali jednoznačně rychlost v jako

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}d\,.$$

Očekávatelný problém při mnoha realizacích takového pokusu ale je, že se energie všechna nepřesune do předmětu, ale ztratí se při výstřelu třením. Ve výsledcích tedy velmi pravděpodobně máte tendenci k nižším doletům.

2. Při $x_0 = l_0/2$ by se tedy kyvadlo mělo kývat s frekvencí $\omega_0 = 2\pi(1 - 0{,}25)$. Doopravdy se však kývá s frekvencí $\omega = 2\pi\left[1 - 0{,}25(1+\varepsilon)^2\right]$. Jedna perioda je, když je argument kosinu násobek 2π, tedy když t je násobek $2\pi/\omega$. (Pozorný čtenář si jistě všimne, že v této úloze pracujeme s bezrozměrným časem.) Při předpokládané periodě bude však argument kosinu

$$2\pi\,\frac{\omega}{\omega_0} = 2\pi\frac{1 - 0{,}25(1+\varepsilon)^2}{0{,}75} = 2\pi\left(1 - \frac{2\varepsilon + \varepsilon^2}{3}\right)$$

a argument se tedy od 2π liší o $2\pi\left(2\varepsilon + \varepsilon^2\right)/3$. Kyvadlo jsme tedy pustili s maximální výchylkou a postupně jej nalézáme po periodách níže a níže. V úloze se ptáme na to, kdy už při našich kontrolách nebude kyvadlo ani na té správné straně, ale už trochu vychýlené na druhou. Když se podíváte na graf kosinu, najdete tento bod, kdy funkce prochází na druhou stranu do záporných hodnot v bodě $\pi/2$. K výpočtu tedy stačí vzít $\pi/2$ a vydělit to získaným rozdílem. Zjistíme, že kyvadlo překročí tuto hranici vychýlenosti po

$$\frac{3}{4\left(2\varepsilon + \varepsilon^2\right)}$$

periodách, kde musíme zaokrouhlit nahoru, abychom dostali celočíselný počet period. Můžete si spočítat, že pokud bychom udělali třeba 10% chybu v měření a tudíž měli $\varepsilon = 0{,}1$, kyvadlo by se přechýlilo po čtyřech námi předpokládaných periodách. Obecnějším výpočtem lze ukázat, že pro kývání okolo malinkatých x_0/l_0 se obdobná chyba kumuluje podstatně pomaleji. Pokud pouštíme z $(1+\varepsilon)l_0c$ a myslíme si, že z l_0c, dostaneme, že fázový posun kyvadla po jedné periodě bude

$$2\pi\frac{c^2}{1-c^2}\left(2\varepsilon + \varepsilon^2\right)\,.$$

3. Všechny tyto otázky se vás snaží upozornit na něco, čemu se říká *špatně podmíněné problémy* a jak v nich vystupuje naše konečná schopnost vystihnout situaci a počáteční podmínky. Špatně podmíněné problémy jsou okamžiky, kdy nás malá výchylka může svést na úplné scestí v jeho řešení, a přesně proto jsou takové problémy pro fyziku velká obtíž. Na tuto otázku neexistuje žádná vzorová odpověď snad až na snahu se kriticky zamyslet nad tím,

jaké fyzikální příčiny vedou k vyjmenovaným jevům – a podle toho je také tato otázka bodována. Budu o tomto tématu mluvit v příštím seriálu, takže se pro další objasnění se můžete podívat tam.

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz