Úloha I.5 ... tisícročná včela

5 bodů; průměr 2,09; řešilo 66 studentů

Spočítejte, jaký výkon potřebuje včela, aby se udržela ve vzduchu, a odhadněte, jak dlouho se vydrží najedená včela vznášet v konstantní výšce.

Michalovi vyplynulo z diskuze o kvadrokoptérách.

Ačkoli se v zadání hovoří o včele, mnozí z vás si jistě při čtení vzpomněli na v laických kruzích populární tvrzení, že není fyzikálně možné, aby čmelák létal. Jelikož čmelák zjevně je schopen letu, dalo by se usuzovat, že je s našimi poznatky v oblasti aerodynamiky něco v nepořádku. Nebudeme zde zastírat, že dynamika tekutin se jako obor fyziky stále rozvíjí a dokážeme v ní najít mnoho jevů, které nejsme schopni exaktně popsat – hlubší vhled do této problematiky dokáže poskytnout teorie chaosu, jak ukážou budoucí díly letošního seriálu. Mýtus o čmelákovi však vznikl na základě několikaminutového výpočtu, který provedl během večeře německý fyzik (jméno se nedochovalo) ve třicátých letech minulého století na přání jednoho biologa. Za předpokladu, že jsou křídla dokonale tuhá a hladká, došel k závěru, že čmelák není schopen vytvořit dostatečný vztlak, aby se mohl vznášet na místě. Přitom potřebné údaje o anatomii čmeláka na místě odhadl.[1]

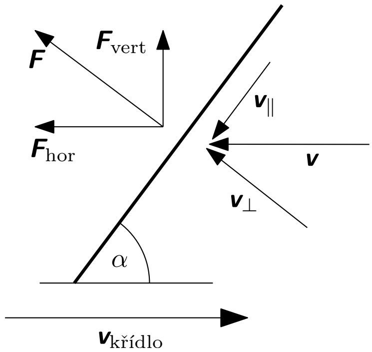
My se zde pokusíme ukázat, že příčinou chybného závěru nebylo fyzikální zjednodušení, ale špatné odhady hodnot potřebných parametrů. Přitom zcela zanedbáme efekty tvorby vzdušných vírů a pohyby v mezní vrstvě vzduchu, která je „přilepená“ k tělesu (Magnusův jev). Tvorba vírů na jednu stranu spotřebovává energii generovanou máváním, na druhou stranu je možné při rychlých změnách úhlu náběhu tyto víry zužitkovat k vytvoření většího vztlaku. Ačkoli se tyto jevy významně projevují na výsledné efektivitě letu, musí být i v případě jejich zanedbání možné získat řádově správný výsledek. Jakmile budeme schopni určit vztlak křídel, snadno dopočteme i energetické ztráty spojené s jejich pohybem. Toliko úvod a nyní k vlastnímu výpočtu.

Nejprve si musíme uvědomit, jak se vlastně křídla včel během letu pohybují. Představa, že se v zásadě jedná o dvě horizontální plošky pohybující se nahoru a dolů, je mylná. Je zde důvod domnívat se, že tato chybná představa byla použita i při původním výpočtu, který dal za vznik mýtu. Před necelými sto lety neexistoval způsob, jak detailně zachytit pohyb hmyzích křídel během letu. V době vysokorychlostních kamer a Internetu stačí zadat na YouTube[2] heslo „Bee in flight slow motion“ a ihned máme přístup k videím zachycujícím vznášející se včely v 7 000 FPS. Vidíme, že křídla mají velmi vysoký úhel náběhu α, tj. včela mává křídly spíše dopředu. Vertikální složka odporových sil tedy bude tvořit pouze malou část celkové síly, jak je znázorněno na obrázku 1. Úhel náběhu při pohybu vpřed uvažujeme konstantní. Pro zjednodušení výpočtu přitom budeme předpokládat (v souladu s videem), že se před zpětným pohybem křídla prudce převrátí tak, že úhel náběhu zůstane stále stejný. Také si zde uvědomme, že změna úhlu náběhu včele umožňuje regulovat svoji horizontální rychlost a setrvávat tak na místě.

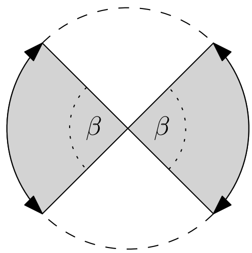
Dále si na videu všimneme, že křídla při rotačním pohybu v horizontální rovině kolem těla hmyzu neopisují plný úhel, ale jenom jeho část. Tuto skutečnost zohledníme koeficientem $c_\mathrm{s} \leq 1$, který bude vyjadřovat opsaný úhel jako zlomek plného úhlu, viz obrázek 2. Další aproximací bude předpoklad konstantní úhlové rychlosti křídla, ačkoli ve skutečnosti se úhlová rychlost mění spíše harmonicky.

[1] `http://www.snopes.com/science/bumblebees.asp`.

[2] Zde vycházíme z videí `http://www.youtube.com/watch?v=2z9F6pVhR5o` a `http://www.youtube.com/watch?v=k3VPfZ6MHe8`.



Obr. 1: Rozbor sil působících na tuhé křídlo při mávání.



$c_\mathrm{s} = \beta/\pi$

Obr. 2: Znázornění úhlu, který křídlo při mávnutí opíše (pohled shora).

Vztah pro výpočet vztlakové síly včelích křídel odvodíme následovně. Při rychlých kmitech včelích křídel je Reynoldsovo číslo Re nejméně v řádech tisíců, a uvážíme-li, že na Re lze pohlížet jako na poměr celkové změny hybnosti masy vzduchu a změny hybnosti molekul, můžeme psát

$$F = \dot{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_\perp) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varrho S v_\perp \mathrm{d}x) = \varrho S v_\perp^2 \,.$$

kde S je plocha křídla, ϱ hustota vzduchu a $v_\perp$ složka rychlosti křídla kolmá na jeho plochu. Ve vztahu by měl správně ještě vystupovat odporový koeficient, který je pro tenkou desku $> 0{,}6$. V dalších výpočtech ho pro jednoduchost položíme roven jedné.

S využitím velikosti celkové rychlosti v potom

$$F = \varrho S v^2 \sin^2 \alpha \,.$$

Velikost horizontální složky síly budeme nazývat F_drag a vertikální F_lift a platí pro ně

$$F_\mathrm{lift} = \varrho S v^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \,,$$
$$F_\mathrm{drag} = \varrho S v^2 \sin^3 \alpha \,.$$

Celkový vztlak vypočteme integrací sil působících na infinitesimální elementy křídla přes délku křídla l. Dokonale tuhé křídlo má po celé délce úhlovou rychlost ω, takže rychlost daného elementu vzdáleného r od osy rotace je $v = \omega r$. Pro jednoduchost si nyní představujme křídlo jako obdélník šířky b, potom $\mathrm{d}S = b\mathrm{d}r$. Element vztlakové síly je vyjádřen vztahem

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{lift}} = b\varrho\omega^2 r^2 \sin^2\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}r\,.$$

Integrací přes obě křídla dostaneme

$$F_{\mathrm{lift}} = 2\int_0^l b\varrho\omega^2 r^2 \sin^2\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}b\varrho\omega^2 l^3 \sin^2\alpha\cos\alpha\,.$$

Pro lepší srovnání s pozorováními budeme pracovat s frekvencí kmitů $fc_{\mathrm{s}} = \omega/2\pi$ (zde jsme vzpomněli na koeficient vyjadřující úhel opsaný křídly). Vztah pro velikost vztlakové síly pak nabude tvar

$$F_{\mathrm{lift}} = \frac{8\pi^2}{3}b\varrho c_{\mathrm{s}}^2 f^2 l^3 \sin^2\alpha\cos\alpha\,.$$

Nyní požadujme, aby se vztlak rovnal tíze včely Mg. Jelikož je frekvence mávání dobře měřitelným parametrem včelího letu, vyjádříme

$$f = \sqrt{\frac{3Mg}{8\pi^2 b\varrho c_{\mathrm{s}}^2 l^3 \sin^2\alpha\cos\alpha}}\,. \tag{1}$$

Zbývá nám už jen vyjádřit energetické ztráty způsobené máváním, tj. výkon potřebný k tomu, aby se včela vznášela. Pro element odporové síly máme

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{drag}} = b\varrho\omega^2 r^2 \sin^3\alpha\,\mathrm{d}r\,.$$

Budeme integrovat ztrátový výkon $F_{\mathrm{drag}}v = F_{\mathrm{drag}}\omega r$ přes obě křídla a dostaneme

$$P_{\mathrm{loss}} = 2\int_0^l b\varrho\omega^3 r^3 \sin^3\alpha\,\mathrm{d}r = 4\pi^3 l^4 b\varrho c_{\mathrm{s}}^3 f^3 \sin^3\alpha \approx \sqrt{\frac{M^3 g^3}{S\varrho\cos^3\alpha}}\,. \tag{2}$$

Tím jsme odvodili vztah potřebný pro vyřešení zadané otázky. Dostáváme se tak do části úlohy, která nemá s fyzikou mnoho společného – je potřeba zjistit hmotnost včely, rozměry včelího křídla, úhel jeho záběru a ještě odhadnout kalorickou hodnotu včelí potravy. Lze dohledat velké množství více či méně důvěryhodných zdrojů, ale i tak není možné dohledat uspokojivá čísla, protože parametry včelího těla se i u dělnic vnitrodruhově (*Apis mellifera*) dosti liší. Budeme převážně vycházet z informací na stránkách University of Michigan[3], avšak získané údaje budeme brát pouze jako odhad.

- Délka křídla: $l = 12\,\mathrm{mm}$
- Plocha křídla[4]: $S = 50\,\mathrm{mm}^2$
- Hmotnost včely: $M = 100\,\mathrm{mg}$
- Hmotnost nasbíraného pylu a nektaru: $m = 40\,\mathrm{mg}$
- Kalorická hodnota včelí potravy[5]: $13\,000\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
- Úhel náběhu: $\alpha \approx 50^\circ$

[3] `http://animaldiversity.ummz.umich.edu/accounts/Apis_mellifera/`

[4] Vám obeznámeným s anatomií blanokřídlých se může zdát divné, proč stále mluvíme o dvou křídlech, když má včela ve skutečnosti čtyři křídla. Uvažujeme prostě, že zadní křídlo je přiložené k přednímu, takže jejich celková plocha je součet mínus překryv a uvedená délka přísluší přednímu křídlu.

[5] Může se nezanedbatelně lišit podle kvetoucí rostliny. Zde zmíněný odhad se však zakládá na kalorické hodnotě medu podle stránky `http://en.wikipedia.org/wiki/Honey#Nutrition`.

Pro výpočet doby, po kterou se včela vydrží vznášet, vyjdeme z poněkud naivní představy, že se bude živit nektarem, který sama nasbírala.[6] Za její hmotnost přitom budeme považovat aritmetický průměr hmotnosti těla a nasbíraného pylu (vzhledem k tomu, že provádíme velmi hrubé odhady, nedojde linearizací k žádné zásadní chybě). Hustota vzduchu při pokojové teplotě je s dostatečnou přesností $\varrho = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Nejprve ale spočtěme frekvenci kmitů včelích křídel. Z výše zmíněných videí odhadneme, že křídla kmitají s frekvencí 80 Hz–120 Hz.[7] Po dosazení odhadnutých hodnot potřebných veličin dostaneme na základě vztahu (1) výsledek

$$f \doteq 230\,\mathrm{Hz}\,.$$

Vypočtená frekvence je oproti skutečnosti zhruba dvojnásobná. To je výborný výsledek, uvážíme-li, že jsme parametry včelího těla pouze velmi hrubě odhadovali. Z rovnice (2) určíme, že výkon potřebný ke vznášení je

$$P_{\mathrm{loss}} \doteq 10\,\mathrm{mW}\,.$$

A konečně z energie dostupné z 40 mg potravy získáme čas, po který se včela dokáže vznášet:

$$t_{\mathrm{hover}} \doteq 14\,\mathrm{h}\,.$$

To se může zdát jako lehce nadhodnocený odhad, ale jak už jsme zmínili, včela nekonzumuje nektar, který nese. Smysluplnější je spočíst hmotnost potravy potřebnou ke vznášení po jednotku času, vychází

$$\frac{m_{\mathrm{food}}}{t_{\mathrm{hover}}} = 3\,\mathrm{mg{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Pokud by včela pracovala osm hodin denně po jeden měsíc, spotřebovala by na let (předpokládejme pro teď, že je stejně energeticky náročný jako vznášení se) asi 0,8 g potravy. Přitom za život vyprodukuje přibližně 0,5 g medu,[8] takže úl našich fyzikálně zjednodušených včel by pracoval na dluh. Spotřeba však převyšuje výrobu méně než dvojnásobně, což je vzhledem k hrubosti našich odhadů velmi dobrý výsledek.

Komentáře k došlým řešením

Nadpoloviční většina řešitelů si neuvědomila, že včela není izolovaný systém a že při mávání křídly předává hybnost okolním masám vzduchu. Nebylo tedy možné položit vykonanou práci do rovnosti s rozdílem v potenciální energii během jedné půlperiody kmitů. Výsledek získaný tímto postupem dával odhad na maximální dobu vznášení několik měsíců, což je, jak nám zdravý rozum napoví, řádově špatně. Další častá chyba v řešení plynula z nepochopení definice mechanické práce. Celková práce je definována jako křivkový integrál ze skalárního součinu síly, která působí na zkoumaný bod (těleso), a dráhového elementu, po kterém se bod vlivem silového působení posunul. Není tedy možné do vztahu dosadit sílu, kterou působí křídlo na vzduch, a dráhu, kterou urazila včela během letu. Této chybě se šlo navíc snadno vyvarovat

[6] Včelí dělnice je ve skutečnosti živena v úle a to pouze tak, aby dokázala létat řádově hodinu, přičemž podává extrémní výkony a zhruba po měsíci uhyne kvůli celkovému vyčerpání organismu.

[7] Různí autoři uvádějí i vyšší hodnoty (viz `http://hypertextbook.com/facts/1999/MichelleFinnegan.shtml`), je však pravděpodobné, že během letu musí včela kmitat křídly s vyšší frekvencí, než když se pouze vznáší.

[8] `http://www.captainjohnshoney.com/trivia.htm`

pozorným čtením zadání, v němž je uvedeno, že se včela pouze vznáší na místě, a tudíž nikam neletí.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`