Úloha II.4 ... Boeing

4 body; průměr 2,00; řešilo 47 studentů

Uvažujte pneumatiku válcovitého tvaru o poloměru R s vnitřním otvorem o poloměru r šířky d huštěnou na tlak p. Pneumatiku zatížíme silou F. Při tomto zatížení se změní tvar pneumatiky z válce na válcovou úseč se stejným vnitřním i vnějším poloměrem. Předpokládejte, že se teplota pneumatiky zatížením nezmění. Určete plochu styku pneumatiky s vozovkou.

Lukáš si v noci hraje v postýlce s letadýlkem.

Uvažujme ideální plyn v pneumatice. Je-li pneumatika po zatížení v klidu (např. zaparkované auto), bude platit stavová rovnice $pV = NkT$, kde V je objem plynu v pneumatice, N je počet částic plynu v pneumatice, k je Boltzmannova konstanta a T je teplota plynu v pneumatice. Počet částic i teplota plynu zůstává konstantní, takže bude platit

$$pV = p_1 V_1 \,,$$

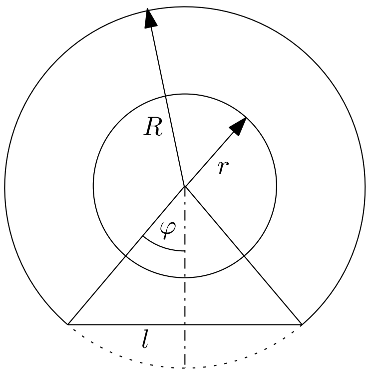
kde p_1, resp. V_1 je tlak, resp. objem pneumatiky po zatížení a V je objem pneumatiky před zatížením. Bude se také hodit vyjádření

$$V = \pi \left(R^2 - r^2\right) d \,, \tag{1}$$

kde d je šířka pneumatiky. Dále musí být soustava v mechanické rovnováze, čemuž odpovídá rovnost velikostí tlakové a zatěžovací síly $F = F_\mathrm{p}$, tedy

$$F = (p_1 - p_\mathrm{a})\, S \,. \tag{2}$$

Nyní diskutujme, jaké různé případy mohou nastat. K tomu využijeme náčrt situace na obrázku 1.



Obr. 1: Náčrt pneumatiky.

Zaprvé teoreticky může nastat situace, v níž by pneumatika byla zdeformovaná až za vnitřní poloměr r. Tato situace je vzhledem k technické realizaci většiny vozidel a letounů nemožná (a navíc přináší do problému další složitost), proto se jí zabývat nebudeme.

Dále je možné, aby pneumatika byla dostatečně nahuštěná vzhledem ke svým rozměrům a zatěžovací síle. Tím je myšleno, že deformace pneumatiky je v porovnání s objemem pneumatiky zanedbatelná, takže plyn má téměř stejný objem, a tím pádem i tlak jako nezatížená pneumatika ($p_1 \approx p$). Pro tento případ lze nalézt řešení jednoduše z (2) jako

$$S \approx \frac{F}{p - p_\mathrm{a}}\,.$$

Pokud tento předpoklad není splněn nebo z nějakého důvodu potřebujeme přesnější řešení, je nutné uvažovat změnu tlaku v pneumatice. Užijme notace podle obrázku. Rovnici (2) lze rozepsat jako

$$F = (p_1 - p_\mathrm{a})\,S = (p_1 - p_\mathrm{a})\,ld = 2Rd\,(p_1 - p_\mathrm{a})\sin\varphi\,, \tag{3}$$

kde d je šířka pneumatiky.

Úbytek objemu ΔV odpovídá válcové (kruhové) úseči, jejíž objem lze vypočítat z obsahů příslušné kruhové výseče a obvodového trojúhelníku se středovým úhlem 2φ jako

$$\Delta V = d\left(\frac{2\varphi}{2\pi}\pi R^2 - \frac{1}{2}Rl\cos\varphi\right)\,,$$

odkud dosazením za l

$$\Delta V = d(\varphi R^2 - R^2\sin\varphi\cos\varphi)\,.$$

Po vytknutí R^2 a užitím $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ dostaneme

$$\Delta V = R^2 d\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\,. \tag{4}$$

Jak tvar této rovnice napovídá, vyjádříme-li pomocí ní přes stavovou rovnici tlak p_1 a dosadíme-li do (2), dostáváme analyticky neřešitelnou rovnici. Proto je nyní třeba zamyslet se nad tím, co vlastně od našeho řešení očekáváme. Potřebujeme-li nalézt řešení pro konkrétní případy velice přesně, tak bude zapotřebí nejen numerické řešení, ale také zpřesnění našich předpokladů. Například tím, že místo stavové rovnice použijeme van der Waalsovu rovnici, která nám dává

$$\left(p + \frac{N^2}{V^2}a\right)(V - Nb) = \text{konst.}$$

kde a a b jsou konstanty příslušného plynu v pneumatice (parametrizují interakci částic plynu mezi sebou a objem, který tyto částice zabírají). Do této rovnosti dosadíme $V_1 = V - \Delta V$ a dostáváme

$$\left(p + \frac{N^2 a}{V^2}\right)(V - Nb) = \left[p_1 + \frac{N^2 a}{(V - \Delta V)^2}\right]\left[(V - \Delta V) - Nb\right]\,.$$

Dosazením za p_1, resp. V, ΔV z (3), resp. (1), (4) dostaneme (tam, kde jsme ponechali V, resp. ΔV, mějme na paměti, že tyto jsou funkcí φ)

$$\begin{aligned}\left[p_\mathrm{a} + \frac{F}{2Rd\sin\varphi} + \frac{N^2 a}{(V - \Delta V)^2}\right]\left[\pi d\left(R^2 - r^2\right) - R^2 d\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) - Nb\right] = \\ = \left(p + \frac{N^2 a}{V^2}\right)\left[\pi d\left(R^2 - r^2\right) - Nb\right]\,,\end{aligned} \tag{5}$$

kde počet částic N určíme z počátečních podmínek (například z van der Waalsovy rovnice pomocí teploty T numericky). Tuto rovnici je pro konkrétní případy třeba vyřešit pro φ numericky s požadovanou přesností například pomocí Newtonovy metody.

Nejsou-li nároky na přesnost tak velké, lze pokračovat ve výpočtu za použití několika aproximací. Nejprve se opět vrátíme k ideálnímu plynu (odpovídá zanedbání členů s a a b). Dostáváme

$$\left(p_{\mathrm{a}} + \frac{F}{2Rd\sin\varphi}\right)\left[\pi d\left(R^2 - r^2\right) - R^2 d\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right] = \pi p d\left(R^2 - r^2\right) .$$

Nyní je třeba aproximovat sinus. Povšimněme si, že použitím přiblížení $\sin x \approx x$ se anuluje člen $\varphi - \sin(2\varphi)/2$, čímž dostáváme řešení pro konstantní tlak. V tomto členu je tedy třeba rozvinout sinus do vyššího řádu. S rozvojem do pátého či dokonce ještě vyššího řádu umírají naše veškeré snahy o explicitní řešení a nikdy nedostaneme přesnější výsledek než numerickým řešením (5), proto jiný rozvoj než do třetího řádu nedává smysl. Je třeba ale dbát i na to, za jakých podmínek je naše aproximace funkční. Rozvojem sinu do třetího řádu přejde výše zmiňovaný člen do tvaru $(2/3)\varphi^3$. Porovnáním aproximovaných hodnot s původním členem zjistíme, že již pro $\varphi = 30^\circ$ se dopouštíme chyby 5 % (a pro větší φ rychle roste). Dobře nahuštěná pneumatika by tuto podmínku měla snadno splňovat, nicméně pro podhuštěné pneumatiky by již toto přiblížení mohlo zanést značnou chybu do výsledku. Nyní vyvstává otázka, jak aproximovat člen $\sin\varphi$. Pro rozvoj do prvního řádu je chyba této aproximace menší než rozvinutí $\varphi - \sin(2\varphi)/2$ do třetího řádu, takže tato možnost je určitě validní, nicméně jak se ukáže dalším postupem, rozvoj do třetího řádu nepřinese žádnou další významnější složitost do výpočtu a ještě dále tím nepřesnost snížíme, proto rozviňme i $\sin\varphi$ do třetího řádu. Z praktických důvodů ještě rovnici vydělme $R^2 d$. Získáme

$$\left[p_{\mathrm{a}} + \frac{F}{2Rd\left(\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3\right)}\right]\left[\pi\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - \frac{2}{3}\varphi^3\right] = p\pi\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) .$$

Zaveďme si substituce

$$\pi\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = A\,, \quad \frac{F}{2Rd} = B$$

a roznásobme. Vyjde nám

$$\left[p_{\mathrm{a}}\left(\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3\right) + B\right]\left(A - \frac{2}{3}\varphi^3\right) = pA\left(\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3\right)$$

neboli

$$\frac{2}{3}p_{\mathrm{a}}\varphi^6 - 4p_{\mathrm{a}}\varphi^4 + \left[A\left(p - p_{\mathrm{a}}\right) - 4B\right]\varphi^3 - 6A\left(p - p_{\mathrm{a}}\right)\varphi + 6AB = 0\,.$$

Pohybujeme-li se v naší oblasti $\varphi < 30^\circ \approx 0{,}5\,\mathrm{rad}$, můžeme člen $(2/3)p_{\mathrm{a}}\varphi^6$ zanedbat (je minimálně 20krát menší než člen $4p_{\mathrm{a}}\varphi^4$).

Dostáváme tak kvartickou rovnici, kterou můžeme vyřešit například pomocí Cardanových vzorců či pomocí programu WolframAlpha. Pozor! Je třeba ze čtyř kořenů identifikovat ten, který dává fyzikálně smysl.

Komentáře k řešením

Všechna (opakuji všechna) řešení opomněla atmosferický tlak. Rozhraní pneumatika–vozovka (runway) rozhodně není vzduchotěsné. Asfalt, panel či jiné materiály, ze kterých se vozovky vyrábějí, nejsou dokonale hladké a ani pneumatiky nemají patřičné elastické vlastnosti, aby tyto nerovnosti vyplnily. Mezi styčnou plochou pneumatiky a vozovkou si tedy můžeme představit vrstvičku vzduchu (o atmosferickém tlaku).

Když se nyní zamyslíme nad silami působícími na styčnou plochu S pneumatiky a uvědomíme si, že jejich výslednice musí být nulová, dostáváme

$$F_{\mathrm{pneu}} = F_{\mathrm{norm}} + F_{\mathrm{atm}}\,,$$

kde normálová síla vozovky na pneumatiku F_{norm} musí být rovna F. Odtud získáme

$$p_2 = \frac{F}{S} + p_{\mathrm{a}}\,.$$

Další častou chybou bylo užití plochy celého vnitřního povrchu pneumatiky ve výpočtu tlaku. Tlaková síla sice působí na každý element povrchu, nicméně ty mimo styčné plochy jsou vyrovnány normálovými (elastickými) silami pláště pneumatiky.

Také se nemohu ubránit pocitu, že mnoho z vás pojmu tlak vůbec nerozumí. Mnoho z vás uvádělo úvahy typu „síla F způsobí zvýšení tlaku o. . . “. Tlak není něco, co se někde nachází (na rozdíl např. od látkového množství) a co lze nějak jednoduše přidávat. Tlak je veličina popisující silové účinky látky na svoje okolí. Dáme-li si toto do souvislosti s mechanickými vlastnostmi tekutin (žádné vzdálené silové vazby mezi elementy tekutiny, žádná vnitřní struktura), získáváme představu, že tlak odpovídá silovým působením na styčnou plochu a nijak přímo nezávisí na předchozím tlaku uvnitř pneumatiky – nic nepřičítáme, tlak počítáme rovnou ze sil.

Nakonec bych rád upozornil na stanovování podmínek při aproximacích. Důležité je si říct, jak která odchylka daného výrazu ovlivní celkový výsledek, jaká odchylka výsledku je přijatelná, a jak tato odchylka závisí na parametrech úlohy. V této úloze, kde je parametrů více, je potřeba být obzvláště opatrný. Například při aproximaci výrazů se sinem středového úhlu je třeba uvažovat i o koeficientu u sinu. Často pomáhá si situaci představit. Například je vidět, že (v postupu ve vzorovém řešení) aproximace $\sin\varphi \approx \varphi$ odpovídá zanedbání deformace oproti celkovému objemu pneumatiky. Z toho vyplývá, že přesnost tohoto přiblížení nezávisí pouze na velikosti φ, ale také na poměru vnitřního a vnějšího poloměru.

Lubomír Grund
grund@fykos.cz