Úloha II.S ... numerická

6 bodů; průměr 3,50; řešilo 32 studentů

1. *Délkové veličiny zadáváme v metrech, časové v sekundách a hmotnostní v kilogramech. Úhlovou rychlost Ω zadáváme v radiánech za čas. Když vezmete ze seriálu rovnice pro pohyb míče, nachází se v nich ale ještě tři parametry: α, β, γ. Jaké jsou jejich rozměry?*
2. *Uvažujte volný pád míče s $\Omega = 0$ a $v_x = 0$. Existuje pak konečná rychlost v_z^{t}, při které se vyrovná třecí síla a tíhové zrychlení a pád míče už nezrychluje.*
   a) *Určete tuto rychlost pomocí parametrů z rovnic pohybu pro míč.*
   b) *Obraťte tuto rovnost tak, aby vyjadřovala β. v_z^{t} se dá dobře měřit a pro fotbalový míč o hmotnosti $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ je typicky okolo $25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Kolik je pak β?*
3. *Vyjádřete si počáteční v_x a v_z pomocí úhlu výstřelu φ při fixní počáteční rychlosti $v = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Sepište program podle seriálu a vyzkoušejte měnit počáteční podmínky a parametry následovně*
   a) *Zvolte nějaké kladné β, vypněte rotaci $\Omega = 0$ a zjistěte, zda je úhel výstřelu, pod kterým doletí míč nejdál, menší nebo větší než 45°. Svoje zjištění demonstrujte pomocí grafů letu.*
   b) *Zvolte nenulové kladné α s numerickou hodnotou v daných jednotkách stejnou jako β, $\gamma = 0{,}01$ (v daných jednotkách) a $\Omega = \pm 5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Jak se v daných případech změní optimální úhel výstřelu?*
   c) Bonus *Jak byste tedy nejdále dohodili kriketákem? Je náš model pro tuto úvahu dostatečný?*

1. V této úloze stačilo vzít rovnice z prvního dílu a uvědomit si, že každý člen na levé i pravé straně jedné rovnice musí mít ten samý rozměr. Z rovnice pro zrychlení míče tedy dostáváme

$$\mathrm{m\cdot s^{-2}} = [\alpha]\cdot\frac{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{\mathrm{kg}}\cdot\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\cdot\mathrm{m\cdot s^{-1}} \quad\Rightarrow\quad [\alpha] = \mathrm{rad^{-1}\cdot kg\cdot m^{-1}\cdot s}\,,$$

$$\mathrm{m\cdot s^{-2}} = [\beta]\cdot\frac{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{\mathrm{kg}}\cdot\mathrm{m\cdot s^{-1}} \quad\Rightarrow\quad [\beta] = \mathrm{kg\cdot m^{-1}}\,,$$

kde vůbec nevadí, pokud jste vypustili radiány, protože to je pouze odvozená jednotka SI. Rozměr γ pak plyne z rovnice pro úhlové zrychlení

$$\mathrm{rad\cdot s^{-2}} = [\gamma]\cdot\frac{\mathrm{m^3\cdot s^{-3}}}{\mathrm{kg\cdot m^2}}\cdot\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \quad\Rightarrow\quad [\gamma] = \mathrm{kg\cdot m^{-1}\cdot s^2}\,.$$

2. Při dosažení terminální rychlosti má míč nulové zrychlení a rychlost pouze zápornou ve směru z. Tj. pokud máme $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v} = (0, 0, -v_z)$, pak máme z rovnice pro zrychlení z prvního dílu seriálu

$$0 = -g + \frac{(v_z^{\mathrm{t}})^2}{m}\beta \quad\Rightarrow\quad v_z^{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \quad\Rightarrow\quad \beta = \frac{mg}{(v_z^{\mathrm{t}})^2}\,.$$

Když do této rovnice dosadíme hmotnost $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, gravitační zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a $v_z^{\mathrm{t}} = 25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, dostáváme $\beta = 0{,}008\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$.

3. a) Když zapnete pouhé tření, je nejlepší házet pod úhlem lehce pod 45°. V našem modelu jsme zvolili hmotnost `m=1`, třecí koeficient `beta=0.4`, poloměr míče 10 cm, a tudíž `r2=0.01`, a prostým posouváním úhlu výstřelu jsme našli ideální úhel cca 36°. (Z úlohy nebylo potřeba dělat žádnou vědu, opravdu stačilo jen říct, jestli je úhel pod, nebo nad 45 stupni.)

   b) V tomto případě jsme použili ty samé parametry jako v předchozím a `alfa=0.4`. Daný koeficient `gamma` dost rychle rotaci zbrzdí, takže je výsledek skoro stejný jako v předchozím případě - ideální úhel jsme nalezli jako 37° pro kladnou úhlovou rychlost a 35° pro zápornou.

   c) V případě relativně hustého kriketáku můžeme vliv Magnusovy síly i tření považovat za poměrně slabý, protože po většinu pohybu bude dominovat setrvačnost míče. Z numerických experimentů je poměrně jasné, že vliv rotace na pohyb je dost nepředvídatelný – například v našich simulacích se v realistických mezích rotace nepodařilo nijak podstatně měnit dolet, jen optimální úhel výstřelu. Nedostatek našeho modelu je především v tom, že kriketový míč má výrazný šev, jehož natočení může zásadně ovlivnit strhávání magnusovskou silou při pohybu.

   Realistické modely rychlého pohybu hrubých předmětů ve vzduchu jsou velmi složité a pohyb má typicky řadu nečekaných vlastností, které lze předvídat fakticky jen s pomocí zkušeností. To je důvod, proč rotaci používají jen ostřílení sportovci při fajnovějších kouscích, jako třeba nadhazovači v baseballu. Ti dokáží pouhou pozicí švu na míči a rotací správně vychýlit jeho trajektorii a zmást pálkaře z protějšího týmu. Na čistý, přímý hod kompaktním kriketovým míčem ale není na místě věnovat rotaci svoje soustředění a fyzické síly.

   Nejlepší by tedy bylo změřit terminální rychlost kriketáku, spočítat β a pomocí simulace odhadnout optimální úhel hodu. Ten ale bude záviset na rychlosti, takže navíc musíte úhel počítat pro nějaký odhad maximální rychlosti, se kterou dokážete házet. Vybaveni touto znalostí si pak stačí jen vypůjčit z kabinetu matematiky obří dřevěný úhloměr a donutit své dokonale vycvičené tělo k vrhu pod daným úhlem.

Vojtěch Witzany
`witzanyv@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.