Úloha II.5 ... gravitační manévry

5 bodů; průměr 1,89; řešilo 47 studentů

Máme družici, která obíhá Slunce po eliptické dráze. Pokud zmenšíme rychlost v afelu v_{a} na 4/5 původní rychlosti (tj. na $4/5v_{\mathrm{a}}$), jak se změní rychlost družice v periheliu? Vyjádřete novou rychlost za pomoci původní rychlosti v_{p} a parametrů elipsy (hlavní poloosa a a relativní excentricita ε).

Karel byl na přednášce o gravitačním praku.

Pripomeňme si niektoré vlastnosti pohybu družice v gravitačnom poli Slnka:

- Dráha družice je kužeľosečka – elipsa (kružnica je taká špeciálna elipsa), parabola alebo hyperbola.
- Ťažisko sústavy (v našom prípade sa prakticky zhoduje so Slnkom) leží v jednom ohnisku kužeľosečky.
- Mechanická energia E sa zachováva; typ kužeľosečky určíme podľa jej znamienka: $E < 0$ pre elipsu, $E = 0$ pre parabolu a $E > 0$ pre hyperbolu.
- Mechanická energia je daná ako súčet kinetickej energie E_{k} a potenciálnej energie v gravitačnom poli[1] E_{p}. Ak je družica hmotnosti m od Slnka hmotnosti M vzdialená r a má rýchlosť v, platí
$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}\,. \tag{1}$$
- Pre elipsu existujú dva body, v ktorých je rýchlosť družice kolmá na jej spojnicu so Slnkom: perihélium a afélium. Pre parabolu a hyperbolu existuje len jeden taký bod, a to perihélium.
- Vzdialenosť od Slnka v perihéliu je $r_{\mathrm{p}} = a(1-\varepsilon)$ a v aféliu $r_{\mathrm{a}} = a(1+\varepsilon)$.
- Na družicu pôsobia sily len v smere spojnice družica – Slnko (tzv. radiálne sily). Gravitačná sila $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$ pôsobí smerom ku Slnku, odstredivá $\boldsymbol{F}_{\mathrm{o}}$ od neho.
- Z predošlého bodu vyplýva, že moment hybnosti družice sa zachováva.
- V perihéliu platí $|\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}| \geq |\boldsymbol{F}_{\mathrm{o}}|$, v aféliu $|\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}| \leq |\boldsymbol{F}_{\mathrm{o}}|$; rovnosť nastáva len pre kružnicu.

Prvé dva body sú len 1. Keplerov zákon. Platnosť tretieho bodu vidíme z toho, že v nekonečne (kde $E_{\mathrm{p}} = 0$) musí byť mechanická energia nezáporná, čo sa zhoduje so zjavným faktom, že len pri pohybe po elipse družica nedokáže uletieť do nekonečna.

Ďalšie dva body vidno z geometrie elipsy – apsidy sú na opačných koncoch hlavnej osi a ťažisko sústavy leží tiež na tejto osi. Vyjadrenie r_{p} a r_{a} cez ε plynie priamo z definície excentricity ako „vzdialenosť ohnísk/dĺžka hlavnej osi“. Tiež vieme, že v perihéliu musí byť radiálna zložka rýchlosti družice nulová. Ak by smerovala k Slnku, resp. od Slnka, družica by sa k nemu ešte približovala resp. bola ešte bližšie pred chvíľou, čo pre najbližší bod dráhy nie je možné. Podobná úvaha platí pre afélium.

Nasleduje rozbor síl. To, že v perihéliu pôsobí na družicu výslednica síl smerom preč od Slnka a v aféliu zasa ku Slnku, je jasné. Zo zachovania momentu hybnosti vyplýva rovno 2. Keplerov zákon. Ak je totiž zložka rýchlosti kolmá na spojnicu družica – Slnko rovná $v_{\perp}$, je moment hybnosti[2] daný vzťahom
$$L = mv_{\perp}r \tag{2}$$
a plocha, ktorú táto spojnica prejde za daný čas, je priamo úmerná konštantnému výrazu $v_{\perp}r$.

Tieto vlastnosti (plus 3. Keplerov zákon) stačia na vyriešenie veľkej väčšiny úloh z nebeskej mechaniky. Vrátane tejto.

[1] Užitočná konvencia je považovať ju za nulovú v nekonečne.

[2] Všeobecne ide o vektor, v rovine stačí uvažovať jeho zložku kolmú na tú rovinu.

Zo zadania vieme, že dráha družice je eliptická, teda $E < 0$. Slnko leží približne v jednom z ohnísk tejto elipsy. Po zmenšení rýchlosti v aféliu musí družica stále obiehať po elipse (lebo mechanická energia sa len zmenší), ale už po úplne inej.

To, čo majú tieto dve elipsy spoločné, je afélium. Keď je rýchlosť zmenšená, je totiž kolmá na spojnicu so Slnkom, a kolmá ostane aj po zmenšení. Perihéliom novej elipsy sa tento bod nemôže stať, lebo platila podmienka pre afélium $|\boldsymbol{F}_\mathrm{g}| \geq |\boldsymbol{F}_\mathrm{o}|$ a ak sa zmenší rýchlosť, zmenší sa aj odstredivá sila a podmienka pre afélium stále platí.[3] Tým pádom majú naše elipsy spoločnú aj vzdialenosť od Slnka v aféliu.

Naším hlavným cieľom je teraz vyjadriť pôvodné rýchlosti družice v perihéliu v_p a v aféliu v_a pomocou daných parametrov. Vyjdeme zo zákonov zachovania mechanickej energie a momentu hybnosti v týchto bodoch.

Z (1) dostávame

$$E = \frac{1}{2}mv_\mathrm{p}^2 - \frac{GmM}{r_\mathrm{p}} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{a}^2 - \frac{GmM}{r_\mathrm{a}}\,,$$

z (2) zasa

$$L = mv_\mathrm{a}r_\mathrm{a} = mv_\mathrm{p}r_\mathrm{p} \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{p} = v_\mathrm{a}\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}}\,,$$

keďže v týchto bodoch je $v_\perp$ rovná celej rýchlosti. Dosaďme do týchto rovníc $r_\mathrm{p} = a(1-\varepsilon), r_\mathrm{a} = a(1+\varepsilon)$ a po pár úpravách sa dopracujeme k

$$v_\mathrm{a}^2 = GM\frac{r_\mathrm{p}}{ar_\mathrm{a}}\,, \tag{3}$$

$$v_\mathrm{p}^2 = GM\frac{r_\mathrm{a}}{ar_\mathrm{p}}\,. \tag{4}$$

Teraz spravme menšiu odbočku a dosaďme z (4) do výrazu pre energiu v perihéliu. Dostaneme

$$E = \frac{GmMr_a}{2ar_p} - \frac{GmM}{r_p} = -\frac{GmM}{2a}\,,$$

energia teda závisí len na dĺžke hlavnej osi.

Ale naspäť k pôvodnej úlohe: keď rýchlosť v aféliu klesne na $v_\mathrm{a}' = 4/5v_\mathrm{a}$, bude družica obiehať po elipse s hl. polosou a', excentricitou ε' a rovnakou vzdialenosťou $r_\mathrm{a}' = r_\mathrm{a}$. Z (3) teda dostaneme

$$\frac{GM(1-\varepsilon')}{r_\mathrm{a}} = \left(v_\mathrm{a}'\right)^2 = \frac{16}{25}v_\mathrm{a}^2 = \frac{16GM(1-\varepsilon)}{25r_\mathrm{a}}\,,$$

$$\varepsilon' = \frac{9+16\varepsilon}{25}\,.$$

Vzdialenosť r_a sa nezmení, preto si ju môžeme vyjadriť pred a po zmenšení rýchlosti:

$$r_\mathrm{a} = a(1+\varepsilon) = a'(1+\varepsilon')\,,$$

$$a' = a\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon'} = a\frac{25(1+\varepsilon)}{34+16\varepsilon}\,.$$

Z (4) potom dostávame

$$\left(v_\mathrm{p}'\right)^2 = \frac{GMr_\mathrm{a}}{a'r_\mathrm{p}'} = v_\mathrm{p}^2\frac{a^2(1-\varepsilon)}{(a')^2\left(1-\varepsilon'\right)}\,,$$

[3] Pozor, táto úvaha sa nedá použiť, ak by sme zmenšovali rýchlosť v perihéliu!

do čoho stačí dosadiť a' a ε', odmocniť a dostaneme

$$v_{\mathrm{p}}' = v_{\mathrm{p}} \frac{17 + 8\varepsilon}{10(1 + \varepsilon)} \,.$$

Vidíme, že parameter a vo výsledku vôbec nevystupuje, čo je pochopiteľné z rozmerovej analýzy.

Jakub Šafin
`xellos@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.