Úloha III.2 ... bubliny

2 body; průměr 1,72; řešilo 60 studentů

Určete rozdíl potenciální povrchové energie blány kulaté bubliny a bubliny ve tvaru pravidelného čtyřstěnu. Oba útvary mají stejný vnitřní objem V.

Karel si vzpomněl na čtyřstěnné bubliny z Eureky!

Změna potenciální povrchové energie je přímo úměrná změně plochy s konstantou úměrnosti σ (povrchové napětí). U bublin máme povrchové vrstvy dvě, takže výsledný rozdíl je

$$\Delta E = 2\sigma\Delta S\,.$$

Musíme tedy spočítat rozdíl povrchu koule a pravidelného čtyřstěnu o stejném objemu V.

Pro výpočet objemu pravidelného čtyřstěnu o hraně délky a potřebujeme znát tělesovou výšku h. Ta prochází těžištěm podstavy, takže tvoří pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona je délka hrany a a odvěsny jsou tělesová výška h a dvě třetiny výšky (těžnice) stěny $2v/3 = a\sqrt{3}/3$. Tělesovou výšku získáme pomocí Pythagorovy věty

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}\,.$$

Pravidelný čtyřstěn je vlastně trojboký jehlan, takže pro objem použijeme známý vzorec *třetina obsahu podstavy krát výška*:

$$V = \frac{1}{3}S_\mathrm{p}h = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}\,.$$

Povrch čtyřstěnu je

$$S_1 = 4S_\mathrm{p} = a^2\sqrt{3}\,.$$

Závislost povrchu na objemu získáme umocněním povrchu na třetí a objemu na druhou a vydělením:

$$\frac{S_1^3}{V^2} = \left(a^2\sqrt{3}\right)^3\left(\frac{12}{a^3\sqrt{2}}\right)^2 = 6^3\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad S_1 = V^{2/3}6\sqrt[6]{3}\,.$$

Pro kouli o objemu V a obsahu S_2 provedeme obdobný postup:

$$\frac{S_2^3}{V^2} = \left(4\pi r^2\right)^3\left(\frac{3}{4\pi r^3}\right)^2 = 36\pi \quad\Rightarrow\quad S_2 = V^{2/3}\sqrt[3]{36\pi}\,.$$

Nyní už můžeme spočítat rozdíl potenciální povrchové energie. Bubliny mají tendenci zaujmout tvar s nejmenší potenciální energií. Z pozorování víme, že je tímto tvarem koule, a proto pro kladný výsledek odečteme povrch koule od povrchu čtyřstěnu.

$$\Delta E = 2\sigma(S_1 - S_2) = 2\sigma V^{2/3}\left(6\sqrt[6]{3} - \sqrt[3]{36\pi}\right) \doteq 4{,}74\cdot\sigma V^{2/3}\,.$$

Výsledek je podle očekávání kladný. Pro lepší představu výsledek vydělíme povrchovou energií koule E_2:

$$\frac{\Delta E}{E_2} = \frac{S_1 - S_2}{S_2} = \frac{6\sqrt[6]{3} - \sqrt[3]{36\pi}}{\sqrt[3]{36\pi}} \doteq 0{,}49\,.$$

Povrchová energie se tedy zvětší zhruba o polovinu.

Komentář k došlým řešením

Pro většinu z vás nebyl s úlohou problém, ale často se vyskytovaly některé chyby. I !když to v zadání není explicitně uvedeno, bublinou se většinou myslí tenká dvojblána většinou z mýdlové vody, která má zevnitř i zvenku vzduch, a tudíž má dva povrchy. Naproti tomu bublina vzducu pod hladinou má jenom jeden povrch. Naprostá většina řešitelů počítala se vztahem $E = \sigma S$, aniž by uvedla, jestli myslí mýdlovou bublinu nebo bublinu pod hladinou. I když je zde uveden výpočet pro mýdlovou bublinu, body jsem za to nestrhával. Dalším nedostatkem byl tvar výsledku. Hodně řešení obsahovalo výrazy se zlomky pod odmocninami, které navíc byly ještě umocněné. Nejlepší způsob, jak tyto výrazy upravit, je převést je na racionální mocniny prvočíselných činitelů a konstant a pak případně zapsat odmocninami.

Viktor Skoupý
`skoupy@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.