Úloha III.4 ... rychlá kráska

4 body; průměr 0,58; řešilo 48 studentů

Terka se ve svém autě blíží relativistickou rychlostí v k rovinnému zrcadlu. Blíží se kolmo na rovinu zrcadla v kolizním kurzu. Přitom se samozřejmě dívá na sebe, jak se k zrcadlu blíží. Jaká je rychlost, kterou se Terka blíží ke svému neskutečnému obrazu, a jakou rychlost ona pozoruje svým zrakem?

Bonus *Zrcadlo není rovinné, ale kulové.*

Náhodou napadlo Karla při sledování Dr. Who, když se rozbily hodiny na krbové římse.

Prvním krokem k vyřešení problému je pochopení toho, co je po nás požadováno. Zrádné totiž je, co že se vlastně považuje za obraz Terky. Co vidí Terka svýma očima je poměrně zřejmé. Podotázka „jak rychle se blíží ke svému obrazu“ je poněkud záludnější. Touto otázkou je myšleno, jak se přibližuje ke svému obrazu v klidové soustavě. Avšak pohybuje-li se Terka relativistickou rychlostí, potom poloha jejího obrazu záleží na poloze pozorovatele! (Rozmyslete si: K různým pozorovatelům dorazí světlo z Terky odražené od zrcadla za různou dobu, proto ve stejném okamžiku uvidí obraz Terky na jiném místě.) Zvolme si tedy nějakého významného pozorovatele v klidové soustavě. Nabízí se pozorovatel na povrchu zrcadla v místě, kde do zrcadla Terka narazí.

Nyní si ujasněme co se v naší situaci děje. Uvědomme si rozdíly mezi relativistickou a klasickou kinematikou. Rychlost světla již není zanedbatelně velká a ztrácíme absolutnost času.

Řešme nejprve situaci s rovinným zrcadlem a klidovým pozorovatelem (spojeným se zrcadlem). Nechť Terka má v soustavě spojené se zrcadlem rychlost v. Jelikož však tato rychlost není v porovnání s velikostí rychlosti světla zanedbatelná, bude se pozorovateli ze zrcadla jevit její rychlost jiná. Nechť v čase t dorazí k pozorovateli světlo od Terky ve vzdálenosti x. Za čas $\mathrm{d}t$ dorazí k pozorovateli světlo od Terky v poloze o $\mathrm{d}x$ bližší. Uvědomíme-li si pohyb Terky a konstantní rychlost šíření světla, dostaneme se k rovnosti

$$\frac{x}{c} + \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v} + \frac{x - \mathrm{d}x}{c}\,,$$

odkud dostáváme

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\frac{vc}{v-c}\,.$$

Zdánlivá rychlost Terky je tedy

$$v' = \frac{vc}{v-c}\,. \tag{1}$$

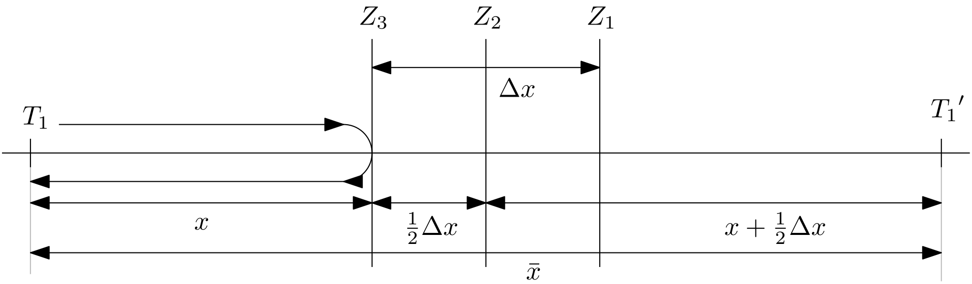
Jelikož se ale pozorovatel nachází na povrchu zrcadla, vidí ve chvíli, kdy k němu dorazí světlo z Terky ze vzdálenosti x, v zrcadle obraz Terky z téže vzdálenosti. A tento obraz bude od pozorovatele taktéž ve vzdálenosti x. Vzdálenost Terky od jejího obrazu se tedy bude snižovat rychlostí w_1

$$w_1 = \frac{2vc}{v-c}\,.$$

Z pohledu Terky situace vypadá jinak. Terka je v klidu, zato se k ní ale blíží zrcadlo rychlostí v.

Doba, za kterou dorazí světlo od Terky k zrcadlu Z_2 a zpět k Terce, je stejná jako doba, za kterou se zrcadlo posune z polohy Z_1 do polohy Z_3. Dostáváme tedy

$$\frac{2x + \Delta x}{c} = \frac{\Delta x}{v}$$



Obr. 1: Situace s rovinným zrcadlem v soustavě spojené s Terkou. Obloukovými šipkami je naznačen tok světla (samozřejmě vše probíhá na optické ose, šipky jsou obloukovité pouze pro názornost).

neboli

$$\Delta x = \frac{2vx}{c - v}\,, \tag{2}$$

kde rozměry jsou popsané podle obr. 1. Vzdálenost $\bar{x}$, ve které vidí Terka svůj obraz, je

$$\bar{x} = 2x + \Delta x = 2x + \frac{2vx}{c - v} = \frac{2cx}{c - v}\,,$$

zbývá nám už tedy jen spočítat rychlost úbytku této vzdálenosti

$$w_2 = \left|\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{2c}{c - v}\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{2cv}{c - v}\,.$$

Nyní se zamyslíme nad situací s kulovým zrcadlem. V silničním provozu se používají vypuklá kulová zrcadla. Použijeme zobrazovací rovnici kruhového zrcadla ve tvaru

$$x' = \frac{xf}{x + f}\,,$$

kde x je vzdálenost objektu (Terky) od zrcadla, x' je vzdálenost obrazu Terky od hlavní roviny zrcadla (kolmá rovina na optickou osu, procházející bodem průniku optické osy a zrcadla) a f je ohnisková vzdálenost zrcadla. Připomeňme si, že pro kulové zrcadlo je ohnisková vzdálenost polovina poloměru.

Řešme nejprve situaci opět z pohledu pozorovatele na v soustavě spojené se zrcadlem na průsečíku jeho povrchu s optickou osou. Analogicky se dostaneme k rovnici (1), nicméně dále musíme postupovat obezřetněji. Vzdálenost Terky od obrazu $\bar{x}$ můžeme vyjádřit jako

$$\bar{x}(x) = x + x'(x)\,,$$

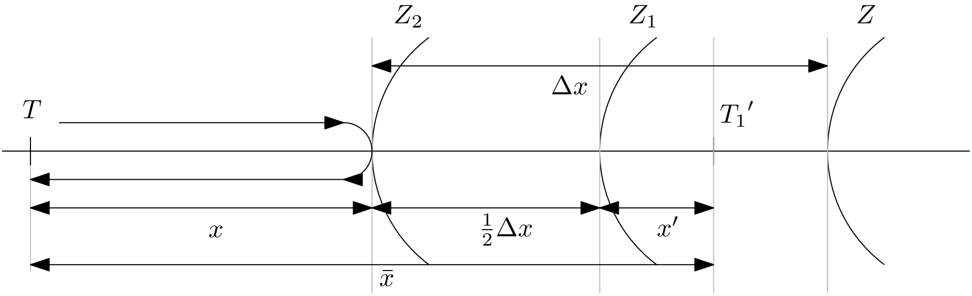
kde x je vzdálenost, ve které vidí pozorovatel Terku a $x'(x)$ je vzdálenost obrazu Terky, jak jej vidí pozorovatel, podle zobrazovací rovnice. Po dosazení zobrazovací rovnice tedy dostáváme

$$\bar{x} = x + \frac{xf}{x + f}\,.$$

Stačí nám tedy najít už jen rychlost změny této veličiny

$$w_3 = \left|\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}t}\right| = \left|v' + \frac{v' f(x+f) - xv' f}{(x+f)^2}\right| = v' \left|\frac{(x+f)^2 + f^2)}{(x+f)^2}\right| = \frac{vc}{v+c}\,\frac{(x+f)^2 + f^2}{(x+f)^2}\,.$$

Nyní se zaměřme na situaci s kulovým zrcadlem z pohledu Terky. Situace je zachycena na obrázku 2.



Obr. 2: Situace s kulovým zrcadlem v soustavě spojené s Terkou

Oproti předchozí situaci bude nyní platit

$$\bar{x}(x) = x + x'(x + \frac{1}{2}\Delta x) + \frac{1}{2}\Delta x = x + \frac{f(x + \frac{1}{2}\Delta x)}{x + \frac{1}{2}\Delta x + f} + \frac{1}{2}\Delta x\,.$$

Analogicky jako v případě rovinného zrcadla dostaneme rovnici (2). Po dosazení

$$\bar{x} = x + \frac{f(x + \frac{vx}{c-v})}{x + \frac{vx}{c-v} + f} + \frac{vx}{c-v}\,,$$

úpravami

$$\bar{x} = \frac{f\,\frac{cx}{c-v}}{\frac{cx}{c-v} + f} + \frac{cx}{c-v} = \left(\frac{f}{x + \frac{c-v}{c}f} + \frac{c}{c-v}\right)x$$

a konečně derivací získáváme

$$w_4 = v \cdot \frac{x^2 + 2\psi f x + 2\psi^2 f^2}{\psi(x + \psi f)^2}\,.$$

kde

$$\psi = \frac{c-v}{c}\,.$$

Rozmyslete si, že rovinné zrcadlo je limitním případem kulového zrcadla s nekonečným poloměrem, a tím pádem i s nekonečnými ohniskovými vzdálenostmi. Tudíž limity w_3, resp. w_4 musí pro $f \to \infty$ dávat hodnoty w_1, resp. w_2.

Nakonec ještě podotýkáme, že zobrazovací rovnice (a tvorba obrazů obecně) nefunguje stejně při relativistických rychlostech jako při těch nerelativistických. Na různá místa zrcadla dopadají paprsky z tělesa za různě dlouhou dobu, a tudíž z jiných poloh tělesa. Obraz se tak deformuje a rozmazává.

Komentáře k došlým řešením

První část úlohy šlo chápat také tak, že jsme uvažovali obraz Terky, který vidí ona sama, ale situaci jsme transformovali do klidové vztažné soustavy (spojené se zrcadlem).

Nejčastější chybou, které se dopustila většina řešitelů, bylo zanedbání pohybu Terky oproti rychlosti světla a špatné uchopení pojmu obraz. Mnohokrát se objevovalo tvrzení, že rychlost obrazu vůči zrcadlu musí být kvůli symetrii stejná jako rychlost Terky. Ale vzhledem k tomu, že intuitivní představa současnosti ve speciální teorii relativity není platná, je potřeba situaci popisovat z pohledu nějakého pozorovatele – určovat vzdálenosti, jaké vidí pozorovatel, v časech, které vidí pozorovatel.

Lubomír Grund
`grund@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.