Úloha III.S … numerická

6 bodů; průměr 4,35; řešilo 17 studentů

1. *Podívejte se na rovnice Lorenzova modelu a sepište skript na jeho simulaci v Octave (na to si případně osvěžte i druhý díl seriálu). Spolu s vykreslujícím příkazem by váš skript měl vypadat zhruba takto:*

```
...
function xidot = f(t,xi)
...
xdot=...;
ydot=...;
zdot= ...;
xidot = [xdot;ydot;zdot];
endfunction
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
pocPodminka=[0.2,0.3,0.4];
reseni=ode45(@f,[0,300],pocPodminka,nastaveni);
plot3(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2),reseni.y(:,3));
```

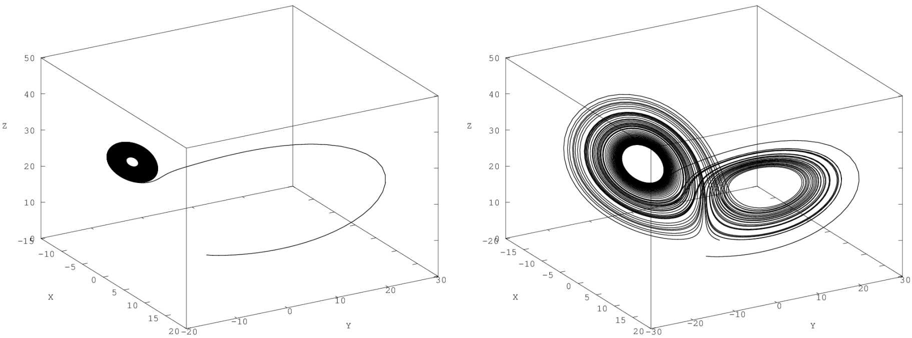
Jen místo tří teček doplňte zbytek programu podobně jako v druhém dílu seriálu a použijte $\sigma = 9{,}5$, $b = 8/3$. Pak zjistěte alespoň s přesností na jednotky, pro jaké kladné r přechází systém z asymptotického zastavování se na chaotickou oscilaci (na počátečních podmínkách nezáleží).

2. *Zde je plný text octavovského skriptu pro simulaci a vizualizaci pohybu částice v gravitačním poli hmotného tělesa v rovině xy, kde všechny parametry a konstanty jsou rovny jedné:*

```
clear all
pkg load odepkg
function xidot = f(t,xi)
alfa=0.1;
vx=xi(3);
vy=xi(4);
r=sqrt(xi(1)^2+xi(2)^2);
ax=-xi(1)/r^3;
ay=-xi(2)/r^3;
xidot = [vx;vy;ax;ay];
endfunction
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
x0=0;
y0=1;
vx0=...;
vy0=0;
pocPodminka=[x0,y0,vx0,vy0];
reseni=ode45(@f,[0,100],pocPodminka,nastaveni)
plot(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2));
pause()
```

   a) *Zvolte počáteční podmínky `x0=0,y0=1,vy0=0` a počáteční rychlost ve směru x nenulovou tak, aby byla částice vázaná, tj. neulétla z dosahu centra.*
   b) *Přidejte ke gravitační síle ve skriptu sílu $-\alpha \boldsymbol{r}/r^4$, kde α je malé kladné číslo. Volte postupně několik zvětšujících se α počínaje $\alpha = 10^{-3}$ a ukažte, že způsobují kvaziperiodický*

pohyb.



Obr. 1: Výstup skriptu pro `r=23.8` (vlevo) a `r=24` (vpravo). Na obrázku vlevo zjevně trajektorie konverguje ke stacionárnímu cyklu, zatímco napravo pozorujeme složité neperiodické chování. Předělové r tedy leží mezi těmito hodnotami a s přesností na jednotky jej určujeme jako $r_\mathrm{p} = 24$.

1. Váš kód pro Lorenzův model by měl s pomocí rovnic z třetího dílu seriálu vypadat zhruba takto

```
clear all
pkg load odepkg
function xidot = f(t,xi)
r = 23;
sigma = 9.5;
b=8/3;
xdot=sigma*(xi(2)-xi(1));
ydot=-xi(1)*xi(3) + r*xi(1)-xi(2);
zdot= xi(1)*xi(2)-b*xi(3);
xidot = [xdot;ydot;zdot];
endfunction
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
pocPodminka=[0.2,0.3,0.4];
reseni=ode45(@f,[0,100],pocPodminka,nastaveni);
plot3(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2),reseni.y(:,3));
```

   Tento kód jste pak mohli spouštět s různými `r=...` a pozorovat, pro která je už pohyb chaotický a pro která ještě ne. Asi nejlepší technika pro nalezení parametru bylo kontrolovat trajektorii pro hrubá `r` a pak postupně půlit interval mezi dvěma body, mezi kterými docházelo k předělu od stacionárního chování k chaosu. K vyřešení úlohy stačilo nalézt předěl jako na obrázku 1 a pak samozřejmě zaokrouhlit na počet platných cifer, tj. máme přibližně předělové $r = 24$. Jemnějším dělením intervalu jste mohli dojít třeba až k $r = 23{,}90$.
2. Skript s pozměněnou silou byl téměř identický tomu ze zadání, změnila se pouze funkce `xidot` následujícím způsobem

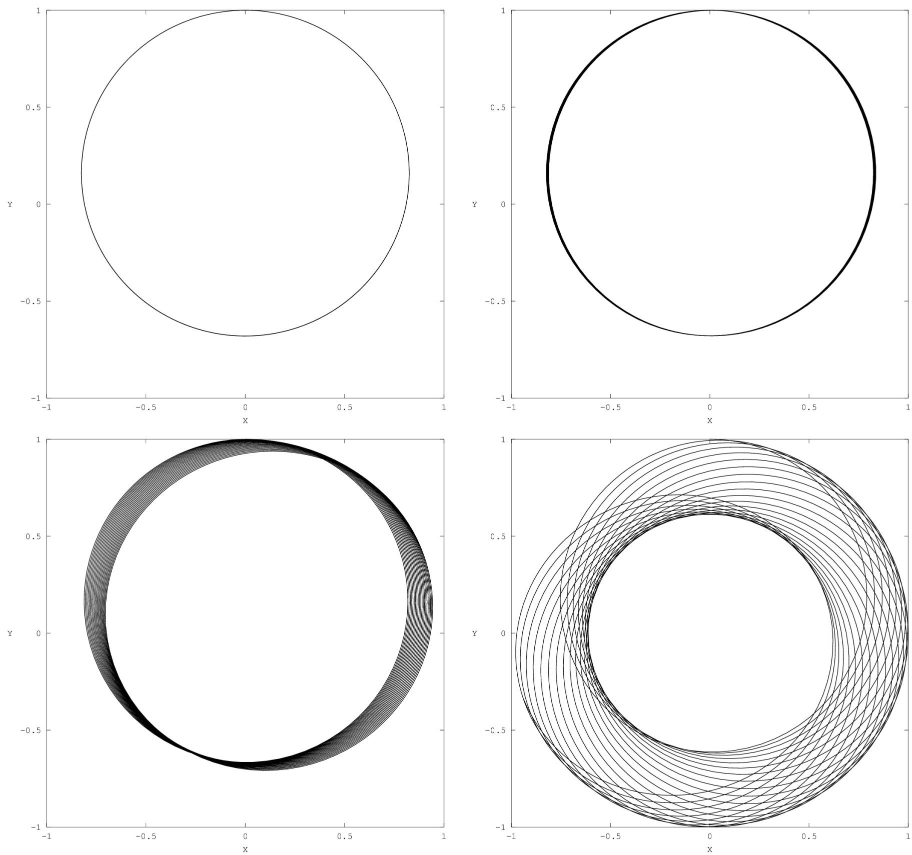
```
function xidot = f(t,xi)
alfa=0;
vx=xi(3);
vy=xi(4);
r=sqrt(xi(1)^2+xi(2)^2);
ax=-xi(1)*(1/r^3+alfa/r^4);
ay=-xi(2)*(1/r^3+alfa/r^4);
xidot = [vx;vy;ax;ay];
endfunction
```

Pokud jste zvolili `vx0` o hodně jiné než `1`, skript vám začal hlásit, abyste se pokusili změnit `MaxStep` nebo `InitialStep`, aby se dokázal prointegrovat skrze oblast poblíž $r = 0$, kde na částici působí vysoké síly a má vysokou rychlost. Pro některé počáteční podmínky se dokonce mohlo stát, že integrátor neintegroval trajektorii dobře a vycházela vám kvaziperiodická už pro `alfa=0`. Pokud se vám toto přihodilo a stejně jste to dobře zdokumentovali spolu s různými hodnotami `alfa`, určitě dostanete plný počet bodů.

Pokud jste ale tuto smůlu neměli a zvolili třeba `vx=0.9`, získali jste grafy jako na obrázku 2. Vidíte, že i pro zcela maličká α se trajektorie začíná stáčet a není periodická. Takováto efektivní síla s nenulovým α působí například při zahrnutí obecně-relativistických korekcí k newtonovské gravitaci a lze ji pozorovat již ve sluneční soustavě na stáčení perihelia Merkuru.

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.



Obr. 2: Grafy pro pohyb částic v téměř newtonovském gravitačním poli s $\alpha = 0; 10^{-3}$ (vlevo a vpravo nahoře v pořadí respektive) a $\alpha = 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-2}$ (vlevo a vpravo dole v pořadí respektive). Pro $\alpha = 10^{-3}$ je efekt téměř nepostřehnutelný, zatímco pro $\alpha = 5 \cdot 10^{-2}$ již o kvaziperiodicitě nemůže být žádných pochyb.