Úloha IV.3 ... nerozlučné pouto

4 body; průměr 2,90; řešilo 49 studentů

Dva sešity A460 zasuneme do sebe tak, že se střídají listy jednoho a druhého sešitu, a položíme je na vodorovný stůl. Jakou práci musíme vykonat, abychom sešity od sebe oddělili, jestliže na sebe listy působí pouze vlastní vahou? Předpokládejte, že taháme v rovině sešitů kolmo na hřbet jednoho z nich a že se na začátku listy zcela překrývají.

Mirkovi se nedařilo oddělit algebru od analýzy.

Cílem úlohy bude zjistit, jakou třecí silou na sebe listy sešitů při pohybu působí a jak se tato síla během pohybu mění. Z této informace potom určíme práci vykonanou během celého pohybu. Než však začneme úlohu řešit, zavedeme si několik předpokladů. Jednak nebudeme uvažovat tlak vazby sešitů (představujme si například dva kroužkové bloky) a vlastní tíhu vazby. Dále budeme předpokládat, že je třecí koeficient mezi vazbou a listy stejný jako mezi listy navzájem. Nakonec uvažujme, že jsou listy velmi tenké, a proto každý z nich nese pouze část váhy listu nad ním, úměrnou styčné ploše zmíněných listů.

Označme dynamický třecí koeficient mezi listy f; zrychlení na počátku pohybu, způsobené vyšším koeficientem statického tření, zanedbáme. Nechť má každý list hmotnost m, tíhové zrychlení je g. Potom bude na vrchní list na začátku pohybu působit třecí síla $F_1 = mgf$. Následující list stejného sešitu (tedy třetí list celkem) bude na vrchní styčné ploše pociťovat třecí sílu $F_2 = 2mgf$, neboť na něm leží dva listy o hmotnosti m. Na spodní styčné ploše již bude mít síla velikost $F_3 = 3mgf$ atd. Sešit A460 má 62 listů včetně desek, máme proto celkem $n = 123$ styčných ploch, neboť vrchní plocha se žádné další nedotýká. Na i-té styčné ploše působí třecí síla $F_i = imgf$, celková síla je potom

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i = \frac{n(n+1)}{2} mgf\,,$$

přičemž jsme zanedbali tření o stůl.

Při vzájemném posunutí listů y ve směru kolmém na hranu listů bude klesat tíha, kterou listy nesou. Celková síla bude

$$F(y) = \frac{n(n+1)}{2}\frac{a-y}{a} mgf\,,$$

kde a je délka hrany v daném směru. Práci vykonanou při oddělování listů můžeme určit buď jako plochu trojúhelníku v grafu závislosti F na y, nebo ji spočíst z definice jakožto integrál

$$W(a) = \int_0^a F(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a \frac{n(n+1)}{2}\frac{a-y}{a} mgf\,\mathrm{d}y = \frac{n(n+1)}{4} mgfa\,.$$

Zamysleme se nyní nad smysluplností našich předpokladů. Je pravděpodobné, že tření mezi deskami a tření mezi listy bude mít různé hodnoty třecího koeficientu. Vrchní desky celkovou sílu příliš neovlivní, zajímají nás především ty spodní. Potom by poslední člen sumy měl obsahovat jisté f' obecně různé od f. Jedná se o poslední člen aritmetické řady – bude-li poměr koeficientů $f'/f = \kappa$, bude poměr celkových sil, a tedy i prací, roven $W'/W \approx 1+2(\kappa-1)/n$ pro velká n. Lze předpokládat, že hodnoty f, f' se neliší více než dvojnásobně, zanedbání tedy bylo oprávněné. Podobný odhad bychom mohli provést pro tření mezi deskami a listy, tj. předposlední člen.

Pokud bychom chtěli být precizní, museli bychom také započíst třecí sílu mezi vazbou a stolem, která navíc v průběhu tažení může zůstávat konstantní, táhneme-li „spodním“ sešitem (a v případě vrchního sešitu tato síla roste, místo aby klesala). Jednalo by se však pouze o přičtení speciálního členu na konec řady, resp. rozšíření sčítacího indexu. Výsledné vztahy by byly méně přehledné a relativní změna by byla řádově v jednotkách procent.

Předpoklad úměrnosti $F(y) \propto (a - y)/a$ úzce souvisí s vlivem vazby sešitu. V případě kroužkového bloku je oblast ohybu jednoho z listů doléhajícího na hranu listu pod ním velmi malá, tíha pak bude skutečně dobře odpovídat styčné ploše. U běžného sešitu způsobí vazba ohnutí listů, na hraně v blízkosti vazby proto bude tlak vyšší a bude se s rostoucím y měnit. Charakter této závislosti je však obtížně popsatelný.

Zkusme nakonec ještě provést číselný odhad. Sešit A460 má rozměry $a = 21{,}0\,\mathrm{cm}$, $b = 29{,}7\,\mathrm{cm}$ a gramáž listů $\sigma = 80\,\mathrm{g{\cdot}m^{-2}}$. Pro $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a dynamický koeficient tření[1] $f = 0{,}4$ dostaneme $F(0) \doteq 150\,\mathrm{N}$ a $W(a) \doteq 16\,\mathrm{J}$. Hodnota $F(0)$ nám říká, že pro roztažení sešitů musíme vyvolat sílu odpovídající tíze tělesa o hmotnosti 15 kg, a to není úplně málo.[2] Také si uvědomme, že síla potřebná k oddělení sešitů roste s kvadrátem počtu listů. Že k oddělení dvou telefonních seznamů o několika stech stranách již lidská síla nestačí, ukazuje následující video: `https://www.youtube.com/watch?v=hOt-D_ee-JE`.

Komentáře k došlým řešením

Většina řešitelů si se součtem aritmetická řady poradila, ačkoli často dost rozličnými způsoby. Problémy ponejvíce činilo tření o desky sešitu a o stůl. Zde ve vzorovém řešení jsme horní desky neuvažovali a naspodu jsme diskutovali detailněji pouze tření mezi deskami a listy, nikoli tření mezi deskami a stolem. Všechny tyto vlivy jsou však zanedbatelné, zvláště uvážíme-li fakt, že třecí koeficienty dokážeme odhadnout s ještě menší přesností.

Při výpočtu práce jste ve svých řešeních často zapomínali, že přítlačná síla bude záviset na ploše a dostávali jste proto nadhodnocené odhady.

Miroslav Hanzelka
`mirek@fykos.cz`

[1] `http://www.paperonweb.com/paperpro.htm`

[2] Navíc bychom zde měli použít statický koeficient tření, který by odhad ještě zvýšil.