Úloha IV.S ... Ljapunovská

6 bodů; průměr 4,79; řešilo 14 studentů

1. *Uvažujte propisku o délce* 10 cm *s těžištěm přesně v půlce a* $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Nyní si představte, že jste propisku postavili na stůl s nulovou výchylkou* δx *s přesností na* n *desetinných míst a s nulovou rychlostí. Za jak dlouho po postavení propisky si budete moct být jisti pouze s* $n-1$ *desetinnými místy nulovostí výchylky?*
2. *Uvažujte model počasí s největším Ljapunovovým exponentem* $\lambda = 1{,}16\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}$. *Předpověď počasí přestává být použitelná, pokud je její chyba více než* 20 %. *Pokud jste dokázali změřit stav počasí s přesností na* 1 %, *na jak dlouho byste odhadovali, že bude dobrá vaše předpověď? Odpověď podejte v dnech a hodinách.*
3. *Vezměte si Lorenzův model konvekce z minulého dílu, opište si z něj funkci* `f(xi,t)` *a nasimulujte a vykreslete si hodnotu parametru* $X(t)$ *pro dvě různé trajektorie pomocí příkazů*

```
X01=1;
Y01=2;
Z01=5;
X02=...;
Y02=...;
Z02=...;
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
pocPodminka1=[X01,Y01,Z01];
reseni1=ode45(@f,[0,45],pocPodminka1,nastaveni);
pocPodminka2=[X02,Y02,Z02];
reseni2=ode45(@f,[0,45],pocPodminka2,nastaveni);
plot(reseni1.x,reseni1.y(:,1),reseni2.x,reseni2.y(:,1));
pause()
```

Místo tří teček u `X02,Y02,Z02` *musíte zadat počáteční podmínky pro druhou trajektorii. Pusťte kód alespoň pro pět řádově odlišných, ale malých odchylek a poznamenejte si čas, ve kterém se druhá trajektorie od první kvalitativně odlepí (tj. směřuje například na úplně druhou stranu). Odchylku nezmenšujte pod řád cca* 10^{-8}, *protože pak se začnou projevovat nepřesnosti numerické integrace. Načrtněte závislost odlepovacího času na řádu odchylky.*

Bonus *Pokuste se ze získané závislosti odlepovacího času na velikosti odchylky odhadnout odpovídající Ljapunovův exponent. Budete potřebovat víc než pět běhů a můžete předpokládat, že v okamžiku odlepení velikost odchylky pokaždé zrovna překročila nějaké konstantní* Δ_c.

1. Přesný vývoj linearizovaných rovnic ze seriálu nám dává, že při $\delta v(0) = 0$ se počáteční výchylka propisky δx_0 vyvíjí jako[1]

$$\delta x(t) = \delta x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)\,.$$

My chceme vědět, kdy v nejhorším případě výchylka zasáhne i $(n-1)$-té desetinné místo, i přestože začínala o řád níže. Zajímá nás tedy, v jaký okamžik se počáteční odchylka de-

[1] Vzpomeňte na definici kosinu hyperbolického $\cosh x = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$.

setkrát zvětší, neboli hledáme čas T, kdy je $\delta x(T) = 10\delta x_0$. Nemusíme tedy do rovnic vůbec dosazovat nějaké konkrétní δx_0 a řešíme jen rovnici

$$10 = \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}T\right) ,$$

což lze pomocí inverzního kosinu hyperbolického arccosh obrátit jako

$$T = \operatorname{arccosh}(10)\sqrt{\frac{L}{g}} .$$

Pro $L = 5\,\mathrm{cm}$ a $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ pak máme $T \doteq 0{,}2\,\mathrm{s}$.

2. Náš model počítá vývoj počasí $\boldsymbol{z}(t)$, ale kvůli tomu, že jsme počasí změřili s nějakou odchylkou, doopravdy se vyvíjí jako $\boldsymbol{z}'(t) = \boldsymbol{z}(t) + \delta\boldsymbol{z}(t)$. Díky tomu, že má ale tento systém největší Ljapunovův exponent λ větší než nula, bude se výchylka v nejhorším případě vyvíjet zhruba jako

$$|\delta\boldsymbol{z}(t)| \approx |\delta\boldsymbol{z}(0)|\mathrm{e}^{\lambda t} .$$

Pokud je na začátku relativní chyba měření 1 % a ptáme se po chybě 20 %, vlastně nás zajímá, za jak dlouho se relativní odchylka v nejhorším případě zdvacetinásobí. Předpis pro $\delta\boldsymbol{z}(t)$ je platný jenom pro *absolutní* odchylku, a pokud neznáme $|\boldsymbol{z}(t)|$ v ve všech časech, není možné relativní odchylku $|\delta\boldsymbol{z}(t)|/|\boldsymbol{z}(t)|$ přesně sledovat. My tu ale už tak děláme hodně jednoduchý odhad, a proto si můžeme tipnout, že relativní odchylka se zdvacetinásobí zhruba v ten okamžik, co se zdvacetinásobí[2] $|\delta\boldsymbol{z}(t)|$. Hledáme tedy čas T takový, že

$$20 = \mathrm{e}^{\lambda T} .$$

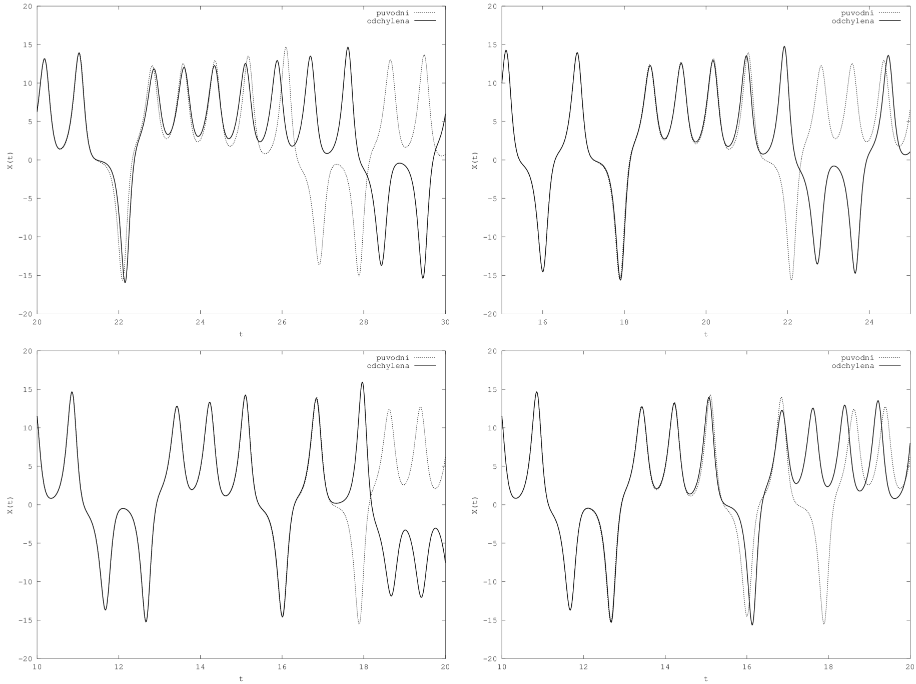
To je jednoduché počítání, získáváme pro tento čas

$$T = \frac{\ln(20)}{\lambda} .$$

Pro $\lambda = 1{,}16 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}$ dostáváme T jako 3 dny a nula hodin. Přesnost výsledku samozřejmě není vzhledem k hrubosti odhadu na počty hodin, ale na jednotky dní můžeme brát odhad poměrně vážně. Hodnota exponentu byla také vybrána tak, aby zhruba vystihovala spolehlivost předpovědi počasí v praxi, ale doopravdy je samozřejmě odhadování spolehlivosti předpovědi ještě o něco složitější.

3. Tato úloha by měla být přímočarým použitím kódu ze zadání a z minulého vzorového řešení. Jak vidíte na obrázku 1, „odlepovací čas“ není úplně precizní pojem; trajektorie se často viditelně odchylovala už před kvalitativním „odlepením“, a proto nemělo cenu čas odlepení T zachycovat na přesnost větší než jednotky.
V tabulce 1 je zachyceno několik odlepovacích časů spolu s vybranými počátečními výchylkami δX_0. Výchylku jste ale mohli vnést do libovolné počáteční souřadnice, ne jen do X_0. Místo δX_0 v tabulce píšeme $\log_{10}(\delta X_0)$, protože nejlepší bylo odchylky posouvat o celé řády. Náčrt závislosti najdete v grafu na obrázku 2.
V grafu je také načrtnuta přímka přibližně vystihující sklon závislosti T na $\log_{10}(\delta X_0)$, protože z tohoto sklonu lze odhadnout největší Ljapunovův exponent systému (což byla

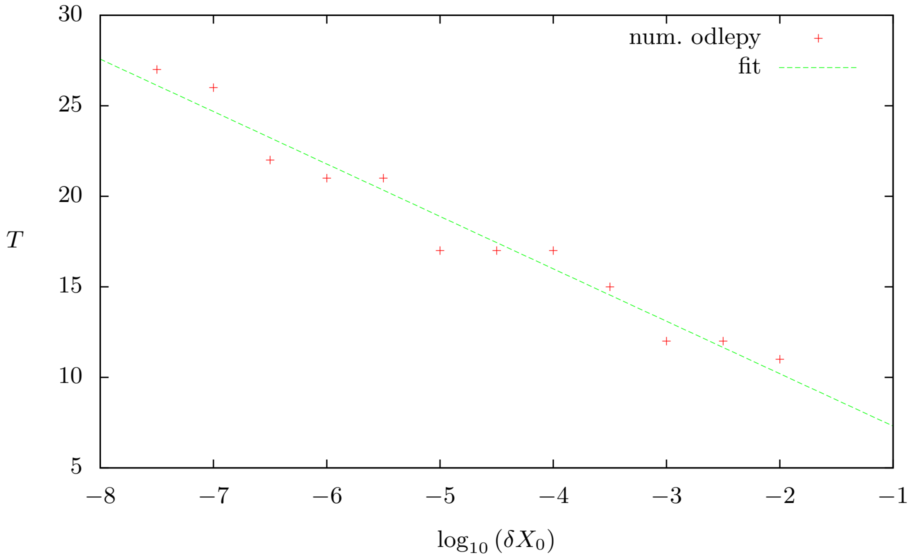
[2] Tj. předpokládáme, že $|\boldsymbol{z}|$ bude po zdvacetinásobení zhruba stejné jako na začátku.



Obr. 1: Zleva doprava a shora dolů postupně odlepení souřadnice $X(t)$ Lorenzova modelu tak, jak mi to spočítalo a nakreslilo Octave. Odchylky jsou $\delta X_0 = 10^{-7}; 10^{-6}; 10^{-5}; 10^{-4}$.

Tabulka 1: Časy odlepení pro vybrané počáteční výchylky.

$\log_{10}(\delta X_0)$	T
$-7{,}5$	27
$-7{,}0$	26
$-6{,}5$	22
$-6{,}0$	21
$-5{,}5$	21
$-5{,}0$	17
$-4{,}5$	17
$-4{,}0$	17
$-3{,}5$	15
$-3{,}0$	12
$-2{,}5$	12
$-2{,}0$	11



Obr. 2: Zleva doprava a shora dolů postupně odlepení souřadnice $X(t)$ Lorenzova modelu s odchylkou δX_0 z tabulky 1.

bonusová část úlohy). Předpokládáme-li totiž, že zhruba platí $\Delta_\mathrm{C} = \delta X_0 \mathrm{e}^{\lambda T}$ a závislost zlogaritmujeme a algebraicky upravíme, dostáváme

$$T = -\frac{1}{\log_{10}(\mathrm{e})\lambda}\log_{10}(\delta X_0) + \frac{\log_{10}(\Delta_\mathrm{C})}{\log_{10}(\mathrm{e})\lambda}\,.$$

My ale předpokládáme, že poslední člen na pravé straně rovnice je konstantní, proto by měla být mezi T a $\log_{10}(\delta X_0)$ lineární závislost se sklonem $-1/(\log_{10}(\mathrm{e})\lambda)$.
Dobře vidíte na obrázku 2, že závislost není tak úplně lineární, ale naopak taková hrbolatá. Nějaký sklon ale dokážeme body proložit a z toho dostáváme přibližné $\lambda = 0{,}8$. Doopravdy je největší Ljapunovův exponent spočítaný sofistikovanějšími metodami $\lambda = 0{,}9$, což je vzhledem k hrubosti metody opravdu dobrá shoda.

Vojtěch Witzany
`witzanyv@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.