Úloha V.1 ... tuhost pana Plancka

2 body; průměr 1,46; řešilo 50 studentů

Možná jste už někdy slyšeli o takzvaných Planckových jednotkách, tj. jednotkách vyjádřených na základě fundamentálních fyzikálních konstant – rychlosti světla $c \doteq 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, *gravitační konstanty* $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$ *a redukované Planckovy konstanty* $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$. *Takto bývá často zmiňován Planckův čas, Planckova délka a Planckova hmotnost. Co kdyby nás ale zajímala „Planckova tuhost pružiny“? Sestavte na základě rozměrové analýzy z c, G a ħ vzorec jednotky odpovídající tuhosti pružiny* $[k] = \mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}$. *Pro určení vzorce uvažujte, že neznámá a z rozměrové analýzy neurčitelná multiplikativní bezrozměrná konstanta je rovna 1.*

Karel se učil kvantovku...

V zadání jsou k dispozici fundamentální konstanty v základních jednotkách SI, proto není potřeba jednotky dál převádět. Zapišme si Planckovu tuhost pomocí, zatím neznámých, mocnin α, β a γ těchto konstant

$$k_\mathrm{P} = C c^{\alpha} G^{\beta} \hbar^{\gamma}\,,$$

kde C je v zadání zmíněná multiplikativní konstanta, kterou považujeme za $C = 1$. Přepišme si rovnici pomocí jednotek příslušných veličin

$$\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}} = \mathrm{m^{\alpha}{\cdot}s^{-\alpha}{\cdot}m^{3\beta}{\cdot}kg^{-\beta}{\cdot}s^{-2\beta}{\cdot}kg^{\gamma}{\cdot}m^{2\gamma}{\cdot}s^{-\gamma}}\,.$$

Vzhledem k tomu, že se musí rovnat mocniny u každé jednotky na levé i pravé straně rovnice, získáváme tři rovnice o třech neznámých, které můžeme snadno vyřešit.

$$\begin{aligned} 1 &= -\beta + \gamma\,,\\ 0 &= \alpha + 3\beta + 2\gamma\,,\\ -2 &= -\alpha - 2\beta - \gamma\,. \end{aligned}$$

Sečtením všech tří rovnic eliminujeme neznámé α, β a vypočteme γ. Dosazením γ do první rovnice získáme β a dosazením například do druhé rovnice získáme α:

$$\begin{aligned} -1 &= 2\gamma\,,\\ \beta &= \gamma - 1\,,\\ \alpha &= -3\beta - 2\gamma\,; \end{aligned}$$

$$\gamma = -\frac{1}{2}\,,\quad \beta = -\frac{3}{2}\,,\quad \alpha = \frac{11}{2}\,.$$

Hledané vyjádření tuhosti tedy je

$$k_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{c^{11}}{G^3\hbar}}\,.$$

Po dosazení vyjde Planckova tuhost pružiny $k_\mathrm{P} \doteq 7{,}54 \cdot 10^{78}\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}$.

K řešení úlohy lze také využít přímo soustavy Planckových jednotek. Obdobným způsobem jako výše lze získat Planckovu hmotnost m_P a čas t_P:

$$m_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \doteq 2{,}18 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg}\,,$$

$$t_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \doteq 5{,}39 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{s}\,.$$

Aplikací rozměrové analýzy, tj. porovnáním mocnin jednotek hmotnosti a času u tuhosti, jednoduše získáme vzorec pro výpočet tuhosti pomocí Planckových jednotek. Číselný výsledek samozřejmě vyjde stejně.

$$k_\mathrm{P} = \frac{m_\mathrm{P}}{t_\mathrm{P}^2} \doteq 7{,}54 \cdot 10^{78}\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}\,.$$

K poslednímu vzorci lze také dojít úvahou: Planckova energie oscilátoru E_P souvisí s Planckovou délkou a Planckovou tuhostí vztahem $E_\mathrm{P} = k_\mathrm{P} l_\mathrm{P}^2/2$. Protože budeme úlohu řešit rozměrovou analýzou a v zadání je hodnota bezrozměrné konstanty volena 1, budeme polovinu ve vzorci ignorovat. Vyjádříme z něj tuhost a energii vyjádříme pomocí známého Einsteinova vzorečku $E = mc^2$. Dále využijeme vztahu mezi rychlostí, vzdáleností a časem $c = l_\mathrm{P}/t_\mathrm{P}$. Těmito úpravami se dostáváme ke stejnému výsledku jako výše:

$$k_\mathrm{P} = \frac{E_\mathrm{P}}{l_\mathrm{P}^2} = \frac{m_\mathrm{P} c^2}{l_\mathrm{P}^2} = \frac{m_\mathrm{P}}{t_\mathrm{P}^2} \doteq 7{,}54 \cdot 10^{78}\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Na závěr poznamenejme, že Planckova soustava má využití především v kvantové teorii gravitace a v teorii strun, kde pomocí Planckových jednotek převedeme rovnice do bezrozměrného tvaru, který často výrazně zjednoduší algebraický zápis.

Komentáře k došlým řešením

Hodnocení bylo v případě této úlohy celkem přímočaré. Dva body jsme udíleli za správné řešení, jeden bod za částečně správné nebo vůbec neokomentované řešení.

Došlá řešení většinou používala některý z postupů uvedených ve vzoráku nebo metodu pokus-omyl. Někteří neupravili výsledek až do nějakého hezkého tvaru, tedy vzorce, kde by se každá veličina vyskytovala jen jednou a s příslušným exponentem.

Pro všechny úlohy platí, že je třeba jejich řešení slovně okomentovat, vysvětlit svůj postup, kde se vzaly použité vzorečky, co znamenají jednotlivé veličiny, zkrátka provést čtenáře svým řešením tak, aby na konci přesně věděl, odkud a jak jste došli k výsledku. Při psaní jednotek a veličin si dávejte pozor na typografii – obecně platí, že veličiny a proměnné se píšou kurzívou a jednotky a konstanty stojatým písmem.

Dominika Kalasová
`dominika@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.