Úloha V.4 ... lijavec

4 body; průměr 2,85; řešilo 34 studentů

Podzimní počasí je občas stejně rozmařilé, jako to jarní, a tak nás nezřídka může na cestě zastihnout nečekaný liják. Někteří šťastlivci s sebou nosí deštník. Odhadněte, jak velkým tlakem dokáže hustý déšť na deštník působit a porovnejte tíhovou sílu deštníku s tlakovou silou deště. Parametry deštníku vhodně zvolte.

Mirek hledal důvody, proč nezávidět kolemjdoucím jejich záštitu proti dešti.

Najprv si vysvetlíme, ako môže dážď tlačiť na dáždnik, a následne pristúpime k odhadom potrebných veličín. Dopad dažďovej kvapky na dáždnik je klasická zrážka. Ale nevešajme hlavu, nebudeme musieť komplikovane rátať zrážku dvoch telies. Predpokladáme, že v našom prípade držíme dáždnik viac-menej pevne v rukách a stojíme pevne na zemi, teda ide iba o odraz telesa od rovinného povrchu.

Pri riešení zrážok nám často nezáleží na priebehu zrážky, ale iba na stave pred zrážkou a po zrážke. Preto si často vystačíme iba so zákonmi zachovania. Za každých okolností platí *zákon zachovania hybnosti* (ďalej ZZH). Na moment si predstavme, že kvapka je tuhé teleso a dopadá smerom nadol na naklonený rovinný povrch. V prípade takejto zrážky dvoch telies existujú dva extrémne prípady: *dokonale pružná zrážka* a *dokonale nepružná zrážka*.

Pri dokonale pružnej zrážke (predstavte si, že na zem hodíte gumenú skákajúcu loptu) nie je žiadne trenie, žiadna tepelná či iná nevratná strata energie, slovom zachováva sa celková mechanická energia (*zákon zachovania mechanickej energie*, ďalej ZZME). Klamal som, trochu si jednu zrážku zrátame. Pred zrážkou máme jedno teleso hmotnosti m (tuhá kvapka) s rýchlosťou $\boldsymbol{v}_0$ a druhé teleso hmotnosti M (Zem) s nulovou rýchlosťou. Po zrážke má kvapka rýchlosť $\boldsymbol{v}$ a Zem rýchlosť $\boldsymbol{w}$. Zo zákonov zachovania dostávame

$$m\boldsymbol{v}_0 = m\boldsymbol{v} + M\boldsymbol{w}\,,$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mw^2\,.$$

Pre rýchlosť $\boldsymbol{w}$ zo ZZH dostaneme

$$\boldsymbol{w} = \frac{m}{M}\left(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}\right)\,,$$

ktorá v prípade $M \to +\infty$ je rovná nule.[1] Čiastočným dosadením do ZZME dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}|w\,.$$

V prípade $M \to +\infty$ je rýchlosť w nulová, a preto dostávame jednoduchý výsledok

$$v_0 = v\,.$$

Teda v prípade dokonale pružného odrazu od povrchu sa nezmení veľkosť rýchlosti telesa, iba jej smer. Pri dopade na naklonenú rovinu sa odrazí rovnakou rýchlosťou, ale ktorým smerom? Ak nepôsobí trenie, pôsobí rovina na teleso iba normálovou (kolmou na rovinu) silou. Zložka rýchlosti rovnobežná s rovinou preto ostáva konštantná. Jednoducho teda zistíme, že na to,

[1] Pre úplnosť treba ešte dodať, že vektor $(\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v})$ je konečný. Rýchlosť na začiatku $\boldsymbol{v}_0$ je konečná a rýchlosť $\boldsymbol{v}$ nemôže byť nekonečná, lebo by bol porušený zákon zachovania energie (pred zrážkou je energia sústavy konečná, po zrážke musí byť tiež rovnaká, konečná). Zo ZZME môžeme dokonca priamo povedať, že $v \leq v_0$.

aby bola zachovaná veľkosť rýchlosti, sa teleso musí odraziť pod rovnakým uhlom, pod akým dopadlo (rovnako ako v prípade odrazu svetla na rovinnom zrkadle).

Poďme sa pozrieť na druhý extrém, dokonale nepružnú zrážku (predstavte si, že na zem hodíte lepivú slizkú loptu). Vtedy nastáva nevratná strata energie a telesá sa po zrážke pohybujú spoločne, rovnakou rýchlosťou. V takom prípade platí len ZZH.[2] Riešiť túto zrážku je však jednoduché. Po zrážke sa telesá musia pohybovať spolu, preto má po zrážke kvapka nulovú rýchlosť a je „prilepená“ k povrchu.

Skutočné zrážky sú však vždy niekde medzi týmito dvoma extrémami. Nazývajú sa *nedokonale pružné zrážky*. Vtedy zároveň existuje nejaké trenie (pre ktoré neplatí ZZME), ale zároveň trenie nespôsobí pričapenie telesa na povrch.

Ako však z toho získame tlakovú silu? Sila je spojená so zmenou hybnosti. Keďže ZZH platí stále, stačí zistiť, ako sa zmenila hybnosť kvapky, a zo ZZH poznáme, akú hybnosť preniesla na dáždnik + človeka + Zem. Pri dokonale pružnom odraze od roviny pod uhlom α je zmena hybnosti $\Delta\boldsymbol{p}$

$$\Delta\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0 = m\left[(0, v_0\sin 2\alpha, v_0\cos 2\alpha) - (0,0,-v_0)\right] = mv_0\left(0, \sin 2\alpha, 1+\cos 2\alpha\right) .$$

V prípade dáždnika je uhol α odhadom v rozsahu $\langle 0^\circ, 45^\circ\rangle$.[3]

Pri dokonale nepružnom odraze je zmena hybnosti

$$\Delta\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0 = m\left[(0,0,0) - (0,0,-v_0)\right] = mv_0(0,0,1) .$$

Potom sila pôsobiaca na dáždnik je

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\Delta t} ,$$

kde je znamienko mínus, lebo celková zmena hybnosti je nulová a zaujíma nás zmena hybnosti sústavy dáždnika, človeka a Zeme; Δt je čas, za ktorý na dáždnik dopadli kvapky hmotnosti m. Takisto sa zameriame iba na silu pôsobiacu v smere nadol.[4] Dostávame teda pre veľkosť zvislej zložky

$$|F_z| = \frac{mv_0k}{\Delta t} ,$$

kde sme zaviedli konštantný faktor k. V prípade dokonale pružného odrazu pre $\alpha = 0^\circ$ je $k = 2$, pre $\alpha = 45^\circ$ je $k = 1$, pre dokonale nepružný odraz je pre všetky uhly $k = 1$.

Teraz nasleduje malá diskusia ku správnej hodnote faktora k. V prípade skutočných odrazov (nedokonale pružných) sa bude k pohybovať medzi extrémnymi hodnotami 1 a 2. Rovnako väčší počet kvapiek dopadá vo väčšej vzdialenosti od osi dáždnika, čo rovnako ovplyvní strednú hodnotu k.

Tu však ešte treba dodať, že zatiaľ sme všetko rátali pre tuhú kvapku. Dynamika zrážky môže byť komplikovaná (rôzne sily povrchového napätia na povrchu kvapky; deformačné, tlakové sily pôsobiace vo vnútri kvapky…) Po zrážke sa kvapka môže rozpadnúť na viacero drobných kvapiek, ktoré môžu ešte rotovať. Nejaká časť kvapky môže ostať „prilepená“ na povrchu dáždnika (a keďže pri daždi sú dáždniky zvyčajne mokré, tak aj nejaká ostane). Môžeme

[2] ZZME neplatí. Platí však všeobecnejší princíp, zákon zachovania energie. ZZME nezahŕňal napríklad tepelnú energiu a iné.

[3] Samozrejme, existujú aj dáždniky s väčším rozsahom až ku 90°, ale nám ide iba o odhad.

[4] To, že niekedy sa nejaká kvapka odrazila do boku a strčila do dáždnika nabok, nás netrápi. V časovom priemere sa pri veľkom počte kvapiek bočné sily vykompenzujú.

teda povedať, že skutočnosť je niekde medzi tým a hodnota faktora k je medzi 1 a 2. To nám na odhad stačí.

Teraz potrebujeme odhadnúť, akou rýchlosťou padajú kvapky v_0 a aký je hmotnostný prítok kvapiek na dáždnik $m/\Delta t$.

Kvapky vznikajú v mrakoch na kondenzačných jadrách, postupne sa spájajú do väčších a vplyvom tiaže padajú v podobe zrážok. Pri páde na nich pôsobí odporová sila vzduchu a pomerne skoro dosiahnu rovnovážnu rýchlosť (vtedy sú tiažová a odporová sila rovnako veľké a pôsobia v opačnom smere). Veľkosť kvapiek je zhora obmedzená kombináciou povrchového napätia a aerodynamiky. Kvapky sa postupne spájajú a zväčšujú, ale od určitej veľkosti sú väčšie kvapky vplyvom turbulentného prúdenia vzduchu rozdelené na menšie (povrchové napätie ich nestačí držať pokope). Polomer kondenzačných jadier je približne $0{,}1\,\mathrm{\mu m}$, polomer kvapiek v oblakoch je približne $10\,\mathrm{\mu m}$ a polomer dažďových kvapiek je približne $r = 1\,\mathrm{mm}$.

Aká je teda terminálna rýchlosť kvapiek? Budeme predpokladať guľaté kvapky. Vypočítame to z rovnosti odporovej a tiažovej sily

$$F_{\mathrm{od}} = G\,,$$

$$\frac{1}{2}\varrho_{\mathrm{vz}} v_0^2 C S = mg\,,$$

kde $\varrho_{\mathrm{vz}} = 1{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu, $C = 0{,}47$ odporový koeficient gule, $S = \pi r^2$ plošný prierez kvapky, $m = 4\varrho\pi r^3/3$ hmotnosť kvapky (kde $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vody) a $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ tiažové zrýchlenie. Po dosadení dostávame priamo vzťah pre terminálnu rýchlosť kvapiek

$$v_0 = \sqrt{\frac{8}{3C}\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{vz}}} r g}\,.$$

Pre kvapky v oblakoch vychádza približne $0{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Dynamika v oblakoch je komplikovanejšia. V oblakoch prúdia vzdušné prúdy, ktoré sú rýchlejšie ako táto terminálna rýchlosť.

Pre dažďové kvapky $r = 1\,\mathrm{mm}$ to vychádza približne $6{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, pre $r = 2\,\mathrm{mm}$ približne $9{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Aký je hmotnostný prítok kvapiek na dáždnik $m/\Delta t$? To vieme určiť z hustoty vody, úhrnu zrážok na plochu počas dažďa a plochy dáždnika. Plocha dáždnika, na ktorú dážď dopadá, je približne $S_{\mathrm{d}} = \pi R^2$, kde R je polomer dáždnika. Po malom prieskume rozmerov dáždnikov na internetovom obchode dôjdeme k odhadu polomeru R 40 cm – 50 cm. Hodinový úhrn zrážok U pri daždi je bežne $1\,\mathrm{mm{\cdot}m^{-2}{\cdot}h^{-1}}$ až $5\,\mathrm{mm{\cdot}m^{-2}{\cdot}h^{-1}}$; pri poriadnom lejaku, či nárazovo je aj niekoľkonásobne väčší. Ale dážď môže byť ešte krutejší. Rekord v úhrne zrážok za 1 minútu namerali 26. novembra 1970 na karibskom ostrove Guadeloupe, a síce $U_{\max} = 2\,280\,\mathrm{mm{\cdot}m^{-2}{\cdot}h^{-1}}$. Hmotnostný prítok už potom ľahko vyjadríme ako

$$\frac{m}{\Delta t} = \varrho S_{\mathrm{d}} U\,.$$

Pre dážď $U = 5\,\mathrm{mm{\cdot}m^{-2}{\cdot}h^{-1}}$ dostávame $0{,}9\,\mathrm{g{\cdot}s^{-1}}$, pre karibské „mrholenie“ $0{,}4\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$.

Nakoniec nastáva porovnanie jednotlivých síl. Na odhad tiažovej sily potrebujeme hmotnosť dáždnika. Po predchádzajúcom malom prieskume vieme, že hmotnosť dáždnika m_{d} je približne 0,30 kg až 0,35 kg, teda tiažová sila pôsobiaca na dáždnik je

$$G_{\mathrm{d}} = m_{\mathrm{d}} g \approx 3\,\mathrm{N}\,.$$

Pre tlakovú silu pri daždi ($k \approx 1{,}5$; $v_0 = 6{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; $m/\Delta t = 0{,}9\,\mathrm{g{\cdot}s^{-1}}$) dostávame

$$|F_z| = v_0 k \frac{m}{\Delta t} \approx 10\,\mathrm{mN} = 0{,}003 G_\mathrm{d}\,.$$

Pre tlakovú silu pri karibskom „mrholení“ ($k \approx 1{,}5$; $v_0 = 9{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; $m/\Delta t = 0{,}4\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$) dostávame

$$|F_z| = v_0 k \frac{m}{\Delta t} \approx 6\,\mathrm{N} = 2 G_\mathrm{d}\,.$$

Aký je odhad tiažovej sily dažďovej vody, ktorá sa zachytila na dáždniku a spôsobuje záťaž? Hmotnosť vody na dáždniku po lejaku odhadneme ako $m_\mathrm{voda} = 50\,\mathrm{g}$.[5] Teda tiažová sila dažďovej vody je

$$G_\mathrm{vod} = m_\mathrm{vod} g \approx 0{,}5\,\mathrm{N} = 0{,}15 G_\mathrm{d}\,.$$

Tlaková sila pri daždi vyzerá pomerne malá. Dôvod je ten, že zatiaľ je všetko uvažované v pokojnej bezveternej atmosfére. Terminálna rýchlosť kvapiek je rýchlosť kvapiek voči vzduchu. Búrky, či lejaky sú spojené so silným vetrom. Vietor v nárazoch môže mať $20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ až $35\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, rekordný vietor bol zas nameraný 3. mája 1999 počas tornáda v Oklahome: $134\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Aká je samotná odporová sila vzduchu pri vetre? Pri odporovom koeficiente polgule $C_\mathrm{pol} = 0{,}42$, priereze dáždnika $S_\mathrm{d} = \pi R^2$ dostávame pre silný vietor $10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ hodnotu

$$F = \frac{1}{2} \varrho_\mathrm{vz} v^2 C_\mathrm{pol} S_\mathrm{d} \approx 21\,\mathrm{N} = 7 G_\mathrm{d}\,,$$

pre nárazy $35\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ máme

$$F \approx 257\,\mathrm{N} = 86 G_\mathrm{d}$$

a pre oklahomské tornádo v priamom zábere

$$F \approx 3{,}8\,\mathrm{kN} = 1\,300 G_\mathrm{d}\,.$$

Môžeme z toho usúdiť, že tlaková sila mierneho dažďa je zanedbateľne malá voči tiaži dáždnika, ale pri silnejúcom daždi môže dosiahnuť aj porovnateľnú hodnotu. Stále však významnejšiu rolu hraje sila vetra.

Jakub Kocák
`jakub@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[5] Môžeme to odhadnúť jednoducho. Ak rozlejeme na rovný povrch vodu, tak vďaka povrchovému napätiu má vrstva vody nejakú výšku. Maximálna výška vodnej kaluže je $h_\mathrm{max} = 2\sqrt{\sigma/(\varrho g)} \approx 5\,\mathrm{mm}$, kde σ je povrchové napätie. Ak aproximujeme dáždnik guľovým vrchlíkom, tak jeho plocha vychádza $S_\mathrm{vr} = 2\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}-1)R^2 \approx 0{,}92\,\mathrm{m^2}$. Ak by bol dáždnik pokrytý súvislou vrstvou vody, dostaneme hmotnosť $m_\mathrm{max} = h_\mathrm{max} S_\mathrm{vr} \varrho \approx 5\,\mathrm{kg}$. Odhadom však je pokryté približne jedno percento $p = 0,01$, preto dostaneme $m_\mathrm{voda} = p m_\mathrm{max} \approx 50\,\mathrm{g}$.