Úloha VI.3 ... pracovní pohovor

4 body; průměr 2,39; řešilo 36 studentů

Jedna z pracoven lorda Vetinariho má kruhový půdorys o poloměru R a je umístěna na ložiscích, díky nimž se může otáčet kolem své osy. Pro zajištění otáčení se používá motor, který může působit libovolným momentem síly. Při otáčení působí na podlahu místnosti třecí moment M_0, nezávislý na rychlosti, který je shodný se statickým třecím momentem. Židle pro návštěvy je umístěna tak, že člověk na ní sedící pocítí účinky rotace pouze tehdy, přesáhne-li úhlové zrychlení hodnotu ε_0. Určete, za jakou nejkratší dobu se může místnost otočit o 180°, aby návštěva nic nepoznala, a jaká práce je k tomuto otočení potřeba. Celková hmotnost místnosti, kterou můžete považovat za homogenní disk, je m.

Bonus *Předpokládejte, že návštěvník pocítí vliv rotace tehdy, přesáhne-li úhlový ryv (změna zrychlení) hodnotu j_0.*

Mirek si už zase spletl dveře od pokoje.

Úloha má poněkud delší zadání, rozebereme si proto nejprve jednotlivé části a rozmyslíme si, co se po nás chce a jak budeme postupovat. Důležité je uvědomit si, že motor je schopen nastavit libovolný moment síly, s nímž se místnost bude otáčet. Pro hledání nejmenšího času tedy nemusíme uvažovat vůbec třecí moment M_0, ten sehraje roli až při výpočtu práce. Naše úloha tedy vypadá následovně: máme integrál

$$\varphi_{\mathrm{ot}} = \int_0^T \omega(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} < \varepsilon_0 \,\forall t \in [0, T]\,,$$

kde $\varphi_{\mathrm{ot}} = \pi$ a ω je úhlová rychlost, a naším úkolem je minimalizovat celkový čas T, za který se místnost otočí. Zadání by šlo přeformulovat jako variační úlohu na hledání minima s danými podmínkami. My si však vystačíme s elementárními úvahami, přičemž si pomůžeme náčrtky rychlostních diagramů.

Ještě si uvědomme jednu podstatnou věc – ačkoli to zadání explicitně nezmiňuje, je přirozené předpokládat, že po otočce o $\varphi_{\mathrm{ot}} = \pi$ místnost nerotuje. Kdyby tomu tak nebylo, Vetinariho host by po vyměřeném čase T vstal a nejpozději při otevření dveří by si rotace všiml (pravděpodobně by se před ním otáčela nějaká část vnější stěny).

Nyní budeme předpokládat, že řešení má jednoduchý tvar, kdy první polovinu času zrychlujeme s konstantním zrychlením ε_0 a druhou polovinu času se stejných zrychlením zpomalujeme, a ukážeme, že tak skutečně dosáhneme minimálního času. Podívejme se na obrázek 1. Víme, že zrychlení je definováno jako první časová derivace rychlosti a že si tuto derivaci můžeme v grafu znázornit jako tečnu, jež udává sklon křivky $\omega(t)$ v daném bodě. Obsah plochy pod grafem je rovný úhlu, o který se místnost otočí. Zrychlení je konstantní ε_0, resp. $-\varepsilon_0$, graf se proto skládá ze dvou úseček, které spolu s časovou osou vytvářejí rovnoramenný trojúhelník. Výšku tohoto trojúhelníku, tj. maximální rychlost, můžeme snadno spočítat. Pro rovnoměrně zrychlený pohyb máme

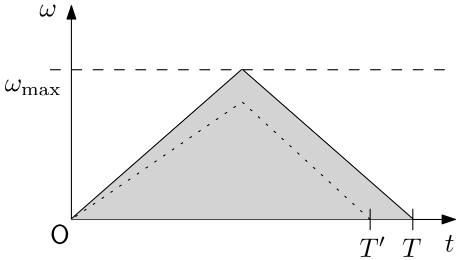
$$\frac{\varphi_{\mathrm{ot}}}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{T}{2}\right)^2\,,$$
$$\omega_{\max} = \varepsilon_0 \frac{T}{2}\,, \tag{1}$$

z čehož snadno vyjádříme

$$\omega_{\max} = \sqrt{\varepsilon_0 \varphi_{\mathrm{ot}}}\,.$$

Nyní si představme, že základnu trojúhelníku zmenšíme, tj. zkrátíme čas T na $T' < T$. Pak zřejmě klesne obsah plochy pod grafem (polovina základny krát výška), nedojde tedy k otočení o celé φ_{ot}. Co kdyby plocha neměla tvar trojúhelníku, tj. zrychlení by nebylo po částech konstantní? Obsah by se poté také nutně zmenšil, argument[1] je snadný: pokud by křivka $v(t)$ protla pravou odvěsnu trojúhelníku, již bychom se nestihli vrátit zpět v čase T, protože sklon křivky nemůže být větší než sklon odvěsny. Podobně, kdybychom se na začátku někdy pohybovali se zrychlením menším než ε_0, nestihli bychom v čase $T/2$ dosáhnout maximální rychlosti a pak jsme již omezeni pravou odvěsnou. V žádném menším čase tedy nedokážeme místnost otočit o φ_{ot}. Hledaný minimální čas je tedy podle rovnice (1)

$$T = 2\sqrt{\frac{\varphi_{\mathrm{ot}}}{\varepsilon_0}}\,.$$



Obr. 1: Náčrtek závislosti úhlové rychlosti rotace místnosti na čase. Čárkovaná čára ilustruje, proč nelze dosáhnout kratšího času T potřebného k otočce o π.

Když už nyní máme jasno v tom, jak bude vypadat pohyb místnosti, můžeme spočítat práci motoru, kterou musí na jednu otočku o φ_{ot} vykonat. Analogicky k translačnímu pohybu je práce při rotaci definována jako integrál

$$W = \int_0^{\pi} M_{\mathrm{motor}}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

kde M_{motor} je moment síly, kterým působí motor. Při roztáčení je na místnost potřeba působit momentem

$$M = I\varepsilon_0 + M_0\,,$$

jelikož kromě roztáčení disku ještě působíme proti brzdnému třecímu momentu. Platí

$$I = \frac{1}{2}mR^2\,,$$

kde m, R jsou hmotnost a poloměr místnosti ze zadání. Při zpomalování disku máme

$$M = I\varepsilon_0 - M_0\,,$$

jelikož zde tření napomáhá zpomalování. Celková práce je potom

$$W = W_1 + W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}mR^2\varepsilon_0 + M_0\right)\mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left|\frac{1}{2}mR^2\varepsilon_0 - M_0\right|\mathrm{d}\varphi\,.$$

[1] Kdybychom chtěli být exaktnější, mohli bychom zde zužitkovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě diferenciálního počtu, ale již jsme si slíbili, že se budeme pohybovat na elementární úrovni.

Absolutní hodnota zde vyjadřuje skutečnost, že práci motoru považujeme vždy za kladnou – může totiž dojít k situaci, kdy $M_0 > mR^2\varepsilon_0/2$, místnost by tedy samovolně zpomalovala příliš prudce a je proto potřeba její rotaci i během brzdění urychlovat. Po výpočtu[2] dostaneme

$$W = \frac{1}{2}\pi mR^2\varepsilon_0$$

pro $M_0 \leq mR^2\varepsilon_0/2$ a

$$W = \pi M_0$$

pro $M_0 \geq mR^2\varepsilon_0/2$.

Jistě jste si všimli, že naše řešení má ve funkci $\varepsilon(t)$ nespojitost $2\varepsilon_0$ v bodě $T/2$. Tuto prudkou změnu zrychlení by návštěvník sedící na židli dozajista pocítil. Proto v bonusové části požadujeme, aby úhlový ryv, tj. časová derivace úhlového zrychlení, nepřesáhl hodnotu j_0. Závislost $v(t)$ bude nyní reprezentována hladkou funkcí. Při konstrukci grafu $\varepsilon(t)$ budeme postupovat podobně jako v první části při konstrukci grafu $\omega(t)$ (předpokládáme nulové zrychlení na konci pohybu); zde však budeme navíc požadovat rovnost plochy pod a nad časovou osou, čímž docílíme taky nulové rychlosti na konci pohybu. Ryv a zrychlení budou vypadat následovně:

$$j(t) = \begin{cases} j_0 & \text{pro } t \in [0, T/4] \cup [3T/4, T]\,, \\ -j_0 & \text{pro } t \in (T/4, 3T/4) \end{cases}$$

a

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} j_0 t & \text{pro } t \in [0, T/4]\,, \\ j_0 T/2 - j_0 t & \text{pro } t \in (T/4, 3T/4)\,, \\ -j_0 T + j_0 t & \text{pro } t \in [3T/4, T]\,. \end{cases}$$

Graf $\omega(t)$ je načrtnut na obrázku 2. V obrázku je sugestivně zaznačeno, jak budeme postupovat při výpočtu integrálu pro celkový úhel φ_{ot}. Jedná se o obsah obdélníku

$$\varphi_{\mathrm{ot}} = \omega_{\max}\frac{T}{2}\,, \tag{2}$$

kde

$$\frac{\omega_{\max}}{2} = \frac{1}{2} j_0 \left(\frac{T}{4}\right)^2 . \tag{3}$$

Z rovnic (2) a (3) pak snadno vyjádříme

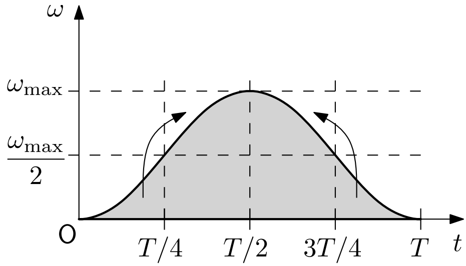
$$T = 4\sqrt[3]{\frac{\varphi_{\mathrm{ot}}}{2j_0}}\,. \tag{4}$$

Práci budeme psát nyní jako integrál ve tvaru

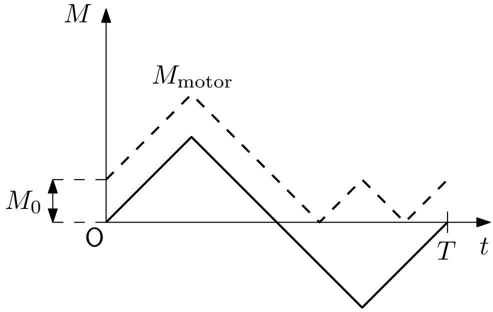
$$W = \int |I\varepsilon(t) + M_0|\,\mathrm{d}\varphi = \int |I\varepsilon(t) + M_0|\omega\,\mathrm{d}t\,. \tag{5}$$

přičemž stále $I = mR^2/2$. Integrovat budeme tři úseky o délce $T/4$, $T/2$ a $T/4$. Časový vývoj momentu M_{motor} je pro názornost uveden na obrázku 3.

[2] Pokud ještě neumíte dobře integrovat, uvědomte si, že vlastně počítáme plochu pod grafem funkce $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ násobenou momentem setrvačnosti, přičemž jedna strana obdélníku je zvětšena/zmenšena o M_0.



Obr. 2: Náčrtek závislosti úhlové rychlosti na čase pro podmínku $|j| < j_0$. V obrázku je vyznačeno, jak získat obsah plochy pod grafem bez integrace.



Obr. 3: Náčrtek závislosti momentu síly na čase. Plná čára značí výsledný moment působící na místnost, přerušovaná čára představuje absolutní hodnotu momentu síly motoru.

Nyní je potřeba vyjádřit rychlosti a zrychlení v jednotlivých úsecích v závislosti na čase. U zrychlení jsme to již provedli, pro rychlosti dostaneme integrací zrychlení

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} j_0 t^2 & \text{pro } t \in [0, T/4]\,, \\ -\frac{1}{16} j_0 T^2 + \frac{1}{2} j_0 t T - \frac{1}{2} j_0 t^2 & \text{pro } t \in (T/4, 3T/4)\,, \\ \frac{1}{2} j_0 T^2 - j_0 t T + \frac{1}{2} j_0 t^2 & \text{pro } t \in [3T/4, T]\,. \end{cases}$$

Jak se bude chovat absolutní hodnota v integrálu? Pro druhý úsek bude motor působit nulovým momentem síly v čase

$$t_1 = T/2 + \frac{2M_0}{j_0 m R^2}$$

a v třetím úseku ze symetrie podle obrázku 3 v čase

$$t_2 = T - \frac{2M_0}{j_0 m R^2}\,.$$

Pokud třecí moment M přesáhne hodnotu

$$M_{\text{mez}} = \frac{1}{8} j_0 m R^2 T\,,$$

bude motor působit vždy momentem síly pouze ve směru úhlové rychlosti. Teď už nezbývá než provést integraci. Celkem integrujeme pro případ $M_0 \leq M_{\mathrm{mez}}$ přes pět úseků (druhý a třetí se rozštěpily na dva přes absolutní hodnotu). Vzhledem k počtu členů v jednotlivých integrandech a tvaru mezí se jedná o velmi pracný výpočet, uvedeme zde proto pouze výsledek pro $M_0 \geq M_{\mathrm{mez}}$, který po dosazení z (4) vypadá následovně:

$$W = \frac{1}{32} j_0 T^3 M_0 = \pi M_0 \,.$$

Tento výsledek by nás neměl překvapovat, stejně bude vypadat při jakémkoli pohybu z klidu do zastavení, kdy po celou dobu pohybu nepřekročí příslušný mezní moment zadaný brzdný třecí moment M_0.

Ještě poznámka na závěr: pokud bychom i v bonusu uvažovali omezení na ε_0 (což bychom měli), museli bychom řešit situaci, kdy $j_0 T/4 > \varepsilon_0$. Potom by v grafu $\varepsilon(t)$ došlo k „uříznutí špiček“ a v grafu $v(t)$ by přibyly lineární úseky. Celkový čas T by se zřejmě prodloužil. Podrobný přepočet práce motoru je jenom další úmorné cvičení na integraci polynomů a nic nového do úlohy nepřináší, proto ho zde neuvádíme.

Komentáře k došlým řešením

Jak je ze zadání zřejmé, lord Vetinari chce, aby návštěva po otočení nic netuše vstala a vyšla ven z místnosti špatnými dveřmi. Je proto nutné, aby po otočení místnost již nerotovala. Jelikož to však nebylo v zadání přímo zmíněno, naprostá většina z vás tuto podmínku neuvažovala a řešila tak jinou, jednodušší úlohu. Za vyřešení základní části za zjednodušených předpokladů byly uděleny dva body, za bonus byl další bod navíc, celkem tedy tři body. Obvykle jste se zjednodušenou verzí neměli problémy, nejčastěji docházelo k chybě při výpočtu dráhy za konstantního ryvu, kdy jste u kubického členu chybně uváděli koeficient 1/4 namísto 1/6.

Miroslav Hanzelka
mirek@fykos.cz