Úloha VI.4 ... těžkotonážní deska na želvě 5 bodů; průměr 3,27; řešilo 37 studentů

Předtím, než byl dosažen a překročen okraj Zeměplochy a začaly být podnikány vědecké výpravy za potvrzením existence čtyř slonů, želvy a určení jejího pohlaví, si některé primitivní kmeny myslely, že síla, která je drží na Zeměploše, je dána superhustou deskou z koncentrovaného bylonebylia. Byla to opravdu velice primitivní představa, protože jak dnes již víme, například výprava, která potvrdila existenci želvy, neslavně dopadla tak, že se jejich člun utrhl a upadl. Tedy vlastně nedopadl...

Nicméně by nás zajímalo – jakou plošnou hustotu σ by bývala byla musela taková deska mít, aby na povrchu Zeměplochy blízko jejímu středu byl obyčejný předmět, při zanedbání magie, přitahován stejnou silou, jakou je gravitační síla na povrchu Zemneplochy? Uvažujte, že superhustá deska je opravdu velice tenká, a jak tvrdí pověsti, je umístěna $H = 8^4\,\mathrm{m} = 4\,096\,\mathrm{m}$ pod povrchem Zeměplochy. Deska má být dle bájí homogenní a hmotnosti jiných těles zanedbatelné.

Zanedbejte pohyby želvy a slonů. Za Zemneplochu si dosaďte slovo Země, pokud jste nečetli dílo autora, pro kterého si přišel Smrť. Zeměplocha má pro účely této úlohy průměr přibližně přesně $d = 10\,000\,\mathrm{km}$. *Karel má rád gravitační úlohy.*

Naším úkolem je zjistit plošnou hustotu desky σ, která je zdrojem gravitačního pole, o které se budeme nyní zajímat. Dle zadání nás zajímá pouze síla gravitačního pole na ose desky, a to ve výšce H. Ve výpočtu budeme postupovat tak, že nejprve vyjádříme celkovou sílu, kterou působí deska na hmotný bod hmotnosti m v udaném místě pomocí σ, d a H, následně tuto sílu dáme do rovnosti se silou, jakou by působila Země na stejný předmět (hmotný bod). Celkovou sílu získáme zintegrováním příspěvků od infinitesimálních elementů desky.

V řešení zanedbáme všechny další vlivy, jako je hmota ostatní látky Zeměplochy, jejích slonů a želvy, rotaci Zeměplochy atd.

Element (a odteď myslíme jenom infinitesimálně malé elementy) síly, kterou působí element desky na náš hmotný bod, můžeme dle Newtonova gravitačního zákona psát jako

$$\mathrm{d}F_\mathrm{G} = G\frac{\sigma m}{R^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

kde G je gravitační konstanta, R je vzdálenost daného čtvercového elementu desky od pozorovatele stojícího ve středu Zeměplochy a x a y jsou kartézské souřadnice v rovině desky. Ovšem R je funkce x a y:

$$R = \sqrt{H^2 + x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}F_\mathrm{G} = G\frac{\sigma m}{H^2 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

Předtím, než si to pěkně zintegrujeme, si však můžeme uvědomit, že naše úloha má válcovou symetrii. Mohli bychom sice úlohu řešit v kartézských souřadnicích, ale převedením problému do válcových souřadnic si usnadníme hledání integračních mezí i integraci. Z kartézských souřadnic (x, y) v desce můžeme tedy přejít do polárních souřadnic (r, φ) a třetí souřadnice z zůstane kartézská. Vztah mezi souřadnicemi je $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Pro transformaci musíme určit její jakobián[1] J. Zde je uveden výpočet

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r\,.$$

[1] Více k jakobiánu naleznete například na `http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_determinant`.

Nyní již můžeme vyjádřit silový element pomocí cylindrických souřadnic

$$\mathrm{d}F_\mathrm{G} = G\frac{\sigma m}{H^2 + r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,.$$

Není to ale přesně to, co bychom chtěli integrovat. Je nutné totiž ještě uvážit, že se uplatní pouze vertikální složka gravitační síly, protože horizontální složka se, díky válcové symetrii, vyruší. Pokud označíme α úhel, který svírá vektor elementu gravitační síly s osou z, pak můžeme psát

$$\cos\alpha = \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2}}\,.$$

Budeme integrovat pouze průmět elementu gravitační síly do osy z, pro který platí

$$\mathrm{d}F = \cos\alpha\,\mathrm{d}F_\mathrm{G} = G\frac{\sigma m}{H^2 + r^2}\cos\alpha\, r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = G\frac{\sigma m H}{\left(H^2 + r^2\right)^{3/2}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,.$$

Zintegrujeme tedy celou desku.

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{d}{2}} G\sigma m\frac{H}{\left(H^2 + r^2\right)^{3/2}} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = G\sigma m H\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{d}{2}}\frac{r}{\left(H^2 + r^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}r =$$

$$= G\sigma m H\left[\varphi\right]_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\frac{-1}{\sqrt{H^2 + r^2}}\right]_{r=0}^{\frac{d}{2}} = 2\pi G\sigma m\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2}}\right].$$

Abychom zjistili hodnotu σ, dáme tuto sílu do rovnosti s $F = mg$, dostáváme

$$2\pi G\sigma m\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2}}\right] = mg \quad\Rightarrow\quad \sigma = \frac{g}{2\pi G}\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2} - 1} =$$

$$= \frac{g}{2\pi G}\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2}}}\,,$$

což vzhledem k $d \gg H$ můžeme aproximovat jako

$$\sigma \approx \frac{g}{2\pi G} \doteq 2{,}3\cdot 10^{10}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}\,.$$

Plošná hustota desky tedy vychází $\sigma = 2{,}3\cdot 10^{10}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$ při dosazení tíhového zrychlení na Zemi $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Řešení pomocí integrálu bylo v zásadě přesné. Na konci jsme sice použili aproximaci, ale ta byla při přesnosti na dvě platné cifry oprávněná. Stejně tak jsme použili hodnotu tíhového zrychlení, které je složeno z gravitační a odstředivé složky, přitom bychom měli korektně použít hodnotu gravitačního zrychlení, která se ovšem liší až na třetí platné cifře. Samozřejmě, že řešení není přesné, protože neuvažuje přitažlivé gravitační působení dalšího materiálu, želvy a slonů, takže náš odhad hustoty desky je vlastně horní odhad.

Alternativní řešení – Gaussův zákon

Vzhledem k tomu, že jsme blízko desky ($d \gg H$), tak bychom desku mohli považovat za nekonečnou rovinu a použít Gaussův zákon. Ten se obvykle zapisuje jako

$$\oint_\Sigma \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -4\pi GM\,,$$

kde Σ je uzavřená plocha, přes kterou se integruje, $\boldsymbol{K}$ je intenzita gravitačního pole na povrchu plochy, $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ element povrchu této plochy orientovaný ven a M je celková hmotnost uzavřená plochou. Za plochu si zvolíme povrch válce, jehož podstavy jsou rovnoběžné s deskou. Hmotnost uzavřená tímto válcem je $M = \sigma S$, kde S je obsah podstavy válce. Jelikož uvažujeme nekonečnou desku, bude vektor gravitační intenzity směřovat kolmo k desce. Potom můžeme uvažovat pouze tok podstavami válce, které mají dohromady obsah $2S$. Dostaneme

$$\oint_\Sigma \boldsymbol{K} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -K \cdot 2S = -4\pi G\sigma S \quad \Rightarrow \quad K = 2\pi\sigma G\,.$$

Znaménko mínus za prvním rovnítkem vzniklo ze skalárního součinu dvou antiparalelních vektorů, tj. normály podstavy a intenzity. Jelikož jsme neuvažovali tok pláštěm, má výsledné pole stejnou velikost nezávisle na vzdálenosti od desky, tj. na povrchu je stejné, jako všude jinde. Abychom určili σ, tak si vezmeme hodnotu gravitační intenzity na povrchu Země, která je g, a snadnou úpravou získáme

$$g = 2\pi\sigma G \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{g}{2\pi G}\,.$$

Obdrželi jsme tedy stejný výsledek, jako když jsme postupovali přesně a následně jsme provedli aproximaci. To jsme mohli očekávat, neboť aproximace $d \gg H$ aplikovaná při přímé integraci odpovídá předpokladu o nekonečných rozměrech desky (schválně zkuste integrovat podle r v mezích $[0, +\infty]$).

Komentáře k došlým řešením

Někteří si neuvědomili, že vzdálenost bodu, kde nás gravitační zrychlení zajímá od samotné desky není vzdáleností od většiny hmoty desky. Respektive je to velice špatný odhad nějaké střední vzdálenosti. Samozřejmě, pokud neumíte integrovat, můžete se pokusit udělat alespoň nějaký takový odhad střední vzdálenosti a do vztahů dosazovat právě střední vzdálenost. Tím, že tam zbrkle dosadíte vzdálenost H ukážete, že Newtonovu gravitačnímu zákonu příliš nerozumíte.

Alternativní řešení pro ty, co integrovat umí, ale neumí vícerozměrné integrály, je uvědomění si, že můžeme integrovat jednotlivá tenká mezikruží, jejichž obvod je $2\pi r$, tedy počítáme rovnou integrál

$$F = \int_0^{\frac{d}{2}} G\sigma m \frac{2\pi r}{\left(H^2 + r^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}r$$

a výsledek bude stejný jako v autorském řešení.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.