

Řešení páté série

Úloha V . 1 ... vesmírná katastrofa

(maximum počtu bodů 5, bonusu 1; řešilo 21 studentů)

Planetky mají stejné hmotnosti, jsou umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka a nemají počáteční rychlosti. Z těchto podmínek plyne, že při pohybu planetek zůstane tvar rovnostranného trojúhelníka zachován. Označíme-li délku strany trojúhelníka x , bude velikost síly F působící na planetku $F = 2 \cos 30^\circ \kappa M^2/x^2$. Mezi vzdáleností r planetky od těžiště a stranou trojúhelníka platí vztah $r = (2/3) \cdot (\sqrt{3}/2) x = x/\sqrt{3}$. Po dosazení do vztahu pro sílu F dostaneme $F = \kappa M^2/(\sqrt{3} r^2)$. Pohyb planetky je tedy stejný, jako pohyb v radiálním gravitačním poli vyvolaném tělesem o hmotnosti $m = M/\sqrt{3}$ pevně umístěném v těžišti. Tato situace je podobná jako v případě Slunce a planet. Slunce sice není pevně umístěné, ale jeho hmotnost vůči hmotnosti planet je tak velká, že se vzhledem k těžišti prakticky nehýbe. Nebo si můžeme uvědomit, že v pevném gravitačním poli nezávisí pohyb tělesa na jeho hmotnosti. Proto planetku o hmotnosti M můžeme nahradit tělesem o hmotnosti $\mu \ll m$. V tomto případě můžeme „uvolnit“ centrální těleso od těžiště. Opět je to situace obdobná jako v naší Sluneční soustavě, což nás opravňuje k použití III. Keplerova zákona.

Volný pád tělesa si lze představit jako pohyb po velmi protáhlé elipse s pericentrem v těžišti trojúhelníka a s apocentrem v počáteční poloze planetky. Velká poloosa této elipsy je $a_1 = l/(2\sqrt{3})$. V Keplerově zákoně však vystupuje ještě doba oběhu T_2 a velká poloosa dráhy a_2 dalšího tělesa. Představme si planetku, která obíhá kolem centra po kružnici o poloměru $\rho = a_2$. Dostředivé zrychlení $a_d = v^2/\rho$ je rovno gravitačnímu zrychlení $a_g = \kappa m/\rho^2$. Rychlost tělesa v je tedy $v = \sqrt{\kappa m/\rho}$. Oběžná doba pak je $T_2 = 2\pi\rho/v = 2\pi\sqrt{\rho^3/\kappa m}$. Z III. Keplerova zákona pak pro naši planetku dostáváme

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\rho^3}{24\kappa m\sqrt{3}}}$$

Doba pádu T planetky je polovičkou doby oběhu T_1 po pomyslné elipse : $T = \pi\sqrt{l^3/(24\kappa M)}$.

Číselně: $T = 7,85 \cdot 10^9 \text{s} = 249 \text{let}$.

Saša Kupčo

Úloha V . 2 ... obvod ze zdrojů (maximum počtu bodů 3; řešilo 23 studentů)

A) Obvod je rotačně symetrický vůči svému středu. Z toho vyplývá, že středy vodičů mají stejný potenciál. Proto je rozdíl potenciálů mezi libovolnými dvěma středy vodičů nulový.

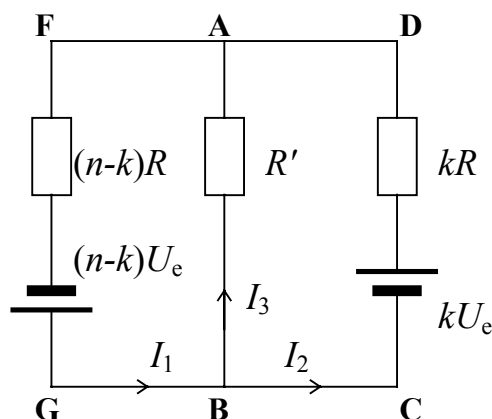
B) Daný obvod můžeme ekvivalentně překreslit (viz Obr. 1), což odpovídá tomu, že jsme dané dva středy spojili drátem o konečném odporu R' . Bude-li proud I_3 nulový, je rozdíl potenciálů mezi body A a B také nulový, v opačném případě by protékal nějaký proud. První a druhý Kirchhoffův zákon dají tři rovnice pro tři neznámé proudy.

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$(n-k)U_e = (n-k)RI_1 + R'I_3$$

$$kU_e = kRI_2 - R'I_3$$

Obr. 1



Řešením těchto rovnic získáme $I_3 = 0$. Q.E.D.

Tomáš Sýkora

Úloha V . 3 ... Ondrova stavebnice (maximum počtu bodů 6; řešilo 20 studentů)

Jakmile těleso (koule nebo válec) dopadne na zem, začne na něj působit odporová síla a to tak dlouho, dokud se bude smýkat po podložce, dokud nenabyde obyčejného valivého pohybu s úhlovou frekvencí $\omega = vr$, kde v je konečná rychlost (zanedbáváme valivé tření) a r poloměr tělesa. Pro malé rychlosti je splněno, že třecí síla nezávisí na rychlosti, je přímo úměrná tlaku na podložku, tedy $F = \mu mg$, kde m je hmotnost tělesa, μ součinitel smykového tření a g tíhové zrychlení. Zároveň zde působí moment třecí síly M , který roztáčí těleso kolem jeho těžiště, $M = \mu mgr$. Nyní můžeme napsat s použitím II. Newtonova zákona pohybové rovnice posuvného a otáčivého pohybu (a a ε jsou zrychlení posuvného a otáčivého pohybu, t čas a J moment setrvačnosti):

$$v = v_0 - at \Rightarrow \omega r = v_0 - \mu gt \quad (1)$$

$$\omega = \varepsilon t = \frac{M}{J} t \Rightarrow \omega = \frac{\mu mgr}{J} t \quad (2)$$

Z těchto dvou rovnic můžeme spočítat neznámé čas t i frekvenci ω :

$$\omega = \frac{mv_0 r}{mr^2 + J}, \quad t = \frac{J}{J + mr^2} \frac{v_0}{\mu g} \quad (3)$$

Odtud již snadno nalezneme vzorec pro konečnou rychlost posuvného pohybu tělesa, bude-li se jednat o homogenní válec ($J_V = \frac{1}{2}mr^2$) a kouli ($J_K = \frac{2}{5}mr^2$).

$$v_V = \frac{2}{3}v_0, \quad v_K = \frac{5}{7}v_0 \quad (4)$$

Porovnáním dvou zlomků snadno nalezneme že rychlost koule bude větší o $\frac{1}{21}v_0$.

V případě, že bychom uvažovali závislost třecí síly F na rychlosti (a tím také na čase), museli bychom modifikovat naše pohybové rovnice takto:

$$\omega r = v_0 - \int_0^t \frac{F}{m} dt \quad (1')$$

$$\omega = 0 + \int_0^t \frac{Fr}{J} dt \quad (2')$$

Integrály v těchto rovnicích mají tento význam: za malý čas dt se sníží rychlost o $dv = -F/m \cdot dt$ a zároveň vzroste úhlová rychlost o $d\omega = Fr/J \cdot dt$. Takový problém znamená řešit soustavu dvou diferenciálních rovnic 1. řádu s počátečními podmínkami $v(0) = v_0$ a $\omega(0) = 0$. Tato soustava je natolik triviální, že kupodivu jejím řešením obdržíme výsledek (3), ať je závislost $F(v)$ jakákoliv.

Tomáš Kočka

Úloha V . 4 ... kolik máme krve? (maximum počtu bodů 3; řešilo 22 studentů)

Aktivita radioaktivního vzorku je definována jako počet úbytků za jednotku času: $A = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$. Je

zřejmé, že takto definovaná aktivita je přímo úměrná počtu částic v daném čase, tedy $A = \lambda N$, kde λ je rozpadová konstanta. Úvaha, že úbytek částic za jednotku času je přímo úměrný počtu částic ($-\Delta N = \lambda N \Delta t$), potom vede na zákon radioaktivního rozpadu (integrací rovnice v limitě $\Delta t \rightarrow 0$) $N = N_0 \exp(-\lambda t)$. Pro aktivitu vzorku pak máme: $A = A_0 \exp(-\lambda t)$.

Vpravíme-li do těla pokusné osoby radioaktivní vzorek o aktivitě A_1 , bude toto tělo za čas t vykazovat aktivitu $A = A_1 \exp(-\lambda t)$. Tato doba musí být dostatečná na to, aby se radioaktivní látka rovnoměrně promísila s krví. Potom bude platit, že v objemu V_2 odebrané krve je NV/V_2 částic, kde V je celkový objem krve. Odtud již snadno dostaneme:

$$V = V_2 \frac{A_1}{A_2} \exp(-\lambda t).$$

Poslední nástrahou bylo správně interpretovat poločas rozpadu, chytil se na to jen jeden z vás (λ není $1/T$, to by byl čas, za který dostaneme $1/e$ -tinu vzorku). $N_0/2 = N_0 \exp(-\lambda T) \Rightarrow \lambda = \ln 2 / T$.

Výsledek tedy je: $V = V_2 \frac{A_1}{A_2} 2^{-\frac{t}{T}}$. Číselně je $V = 7,9$ l.

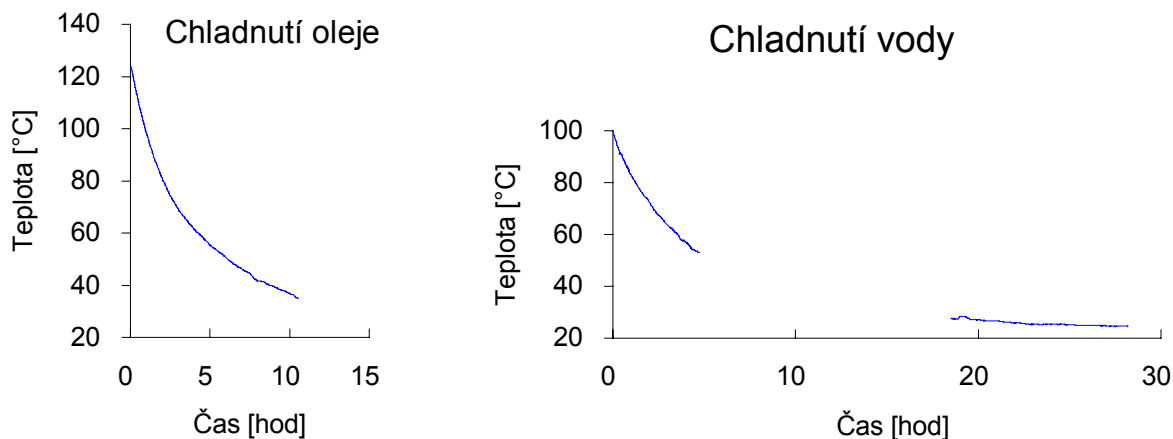
Velice se mi líbilo, jak jste se všichni snažili zdůvodnit nepřiměřenost výsledku lidskému tělu. Ve skutečnosti můj záměr byl právě opačný, ale omylem jsem přehodil hodnoty objemů V_1 a V_2 , potom by číselný výsledek vyšel méně nežli poloviční a odpovědí by bylo, že pokusnou osobou byl malý či nedospělý jedinec. Přiznejme si, že jestli něco doktoři takhle měří, mají tam nějaké poloempirické vzorce s n konstantami započítávajícími látkovou výměnu a bůhví co ještě. Jen někteří z vás si všimli, že měření aktivity musí být hodně nepřesné v tak malých hodnotách, jako bylo A_2 . Při přesnosti měření aktivity na $0,5 \text{ s}^{-1}$ je výsledek s chybou (8 ± 2) l. Tohle je dobré fyzikální zdůvodnění a vůbec zpochybnění našeho výsledku v daných hodnotách.

Mirek Beláň

Úloha V . 5 ... *chlazení kapalin* (maximum počtu bodů 8; řešilo 10 studentů)

Bylo zajímavé sledovat rozložení názorů na průběh tak zajímavého jevu, jako je samovolné ochlazování kapaliny. Rozdělili jste se totiž na dvě skupiny: jedné vyšlo rychlejší ochlazování vody a druhé rostlinného oleje (je také zajímavé, že nikdo nepoužil olej minerální ani neprováděl srovnávací měření pro různé druhy oleje). Popíši tedy experiment, který jsem prováděl sám, rozeberu jeho výsledky, ale neprovedu teoretické zdůvodnění a nerozdělím experimenty na „správné“ a „špatné“, protože experiment vychází vždy dobře, je jen otázkou, co z něj plyne. Zkuste sami vymyslet, proč Vám ten který pokus vyšel zrovna tak, jak vyšel.

Graf 1 a, b



Při sestavování experimentu jsem dbal toho, aby použité zařízení bylo pokud možno dostupné na každé trochu slušné střední škole. Od katedry didaktiky fyziky jsem si zapůjčil teplotní kontroler s odporovým čidlem používaný k demonstračním účelům, ponorný ohřivač se stojanem a XY-zapisovač, na který jsem dvěma vodiči přivedl signál z teploměrného čidla. To je tedy registrační a pomocná část vybavení. Při chladnutí kapaliny hraje samozřejmě roli mnoho vnějších faktorů v uspořádání experimentu a uplatňuje se vícero mechanismů odvodu tepla, mou snahou tedy bylo potlačit co nejvíce náhodné vnější faktory a dosáhnout co nejlépe definovaných podmínek po celou dobu měření i při jeho opakování. Toho jsem dosáhl tím, že dané množství kapaliny, v mém případě vždy 1/2 kg, jsem ohřál ponorným vařičem v termosce, do které jsem do dané

hloubky (vždy stejné) ponořil robustní skleněnou tyčinku s teploměrným čidlem a termosku zakryval kvůli odvodu tepla odpařováním. Pak jsem na zapisovači označil bod počátku měření s danou teplotou odečtenou na teploměru a nechal zapisovač pracovat. Pro představu o rychlosti — válec zapisovače odvíjel papír rychlostí 3 cm/hod. po dobu cca 30 hodin na jedno měření, přičemž data, z nichž jsou vykresleny křivky ve zde uvedených grafech (viz Graf 1 a, b), jsou získána ze dvou měření na každou křivku. Chybí zde pouze nepříliš zajímavá koncová část křivky, která byla navíc zatížena značnou relativní chybou danou malou citlivostí zapisovače a nepřesností teploměru a střední část křivky pro vodu, což je dáno výpadkem teploměru. Nicméně data ukazují velmi dobrou korelaci výsledků s předpokládanou závislostí v podobě exponenciály. Z grafů je vidět, že v takto uspořádaném experimentu chladne rychleji rostlinný olej (v našem případě slunečnicový Vegetol), nežli voda. Výsledky zpracování hodnot jsou v příložené tabulce (viz Tab. 1).

Přepočtené závislosti pak mají tvar:

$$\text{Voda: } T = 76,7 \exp(-0,047 \cdot t)^\circ\text{C} \quad \text{Olej: } T = 105,9 \exp(-0,117 \cdot t)^\circ\text{C}$$

Tab. 1 – Koeficienty regrese závislosti $\ln T = a \ln(t) + b$

	a [$\ln(\text{hod})^{-1} \ln(^\circ\text{C})$]	b [$\ln(^\circ\text{C})$]	koef. kor.
Voda	$-0,0473 \pm 0,0005$	$4,3 \pm 0,1$	95,6%
Olej	$-0,117 \pm 0,001$	$4,66 \pm 0,07$	96,3%

S pomocí termosky se nám tedy povedlo „odfiltrvat“ špatně definované procesy probíhající při chladnutí např. v tenké skleněné nádobě, zaplatili jsme za to řádově delší dobou experimentu. Zajímavým řešením potlačujícím vypařování a dávajícím do souvislosti povrchové jevy při pokusu s vodou a s olejem, bylo nalití tenkého filmu oleje na volnou hladinu vody před započítáním ohřevu.

Teď k tomu, jak jste se s experimentem vyrovnali vy. Velice hezké bylo řešení J. Kolorenče, který část výsledků naměřil pomocí soupravy ISES, což bych (pokud k ní máte přístup) doporučil i ostatním. Jinak každý z vás ví, jaké přednosti a nedostatky měla jím použitá metoda. Celkově jsem ale postrádal detailnější rozbor výsledků a odhad chyb způsobených experimentálním uspořádáním a bylo jen málo pokusů o vysvětlení toho, proč se ta kapalina chová tak, jak se chová.

Někteří z Vás si všimli toho, že zadání pokračuje povídáním o čemsi, co se jmenuje lineární regrese. Ba co více, našli se i tací, kteří se nebáli tohoto „zvířete“ použít ke zpracování výsledků. Zde se ukázala jistá potřeba praxe, protože se objevovala téměř nesmyslná numera na n desetinných míst (kde n je velké přirozené číslo) na straně jedné a absence údajů (jako je např. koeficient korelace) na straně druhé. To je ale jen otázka praxe a rutiny, tu získáte jen dalšími experimenty. Proto doufám, že se příště u experimentálních úloh sejdeme zase.

Petr Žemla

Úloha M. 1 ... kvadratická regrese (maximum počtu bodů 2; řešilo 6 studentů)

První a poslední speciální úlohu tohoto ročníku moc lidí neřešilo a není se co divit, řešení rovnice o třech neznámých byla asi pěkná otrava, stačilo jen přepisovat výsledek podle Kramerova pravidla. Musím se vám také omluvit za chybu, která se nenápadně vloudila do mého článku o metodě nejmenších čtverců z 5. série. Z Kramerova pravidla plyne také to, že v čitateli i ve jmenovateli řešení dvou rovnic o dvou neznámých musí být rozdíl dvou členů, není-li soustava singulární. Jak dále uvidíte, soustava tří rovnic pak dává v čitateli i jmenovateli výsledků členů šest.

Lineární regrese $y = ax + b$:

$$a = \frac{\sum y_i \sum x_i - N \sum x_i y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - N \sum x_i^2}, \quad b = \frac{\sum x_i \sum x_i y_i - \sum x_i^2 \sum y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - N \sum x_i^2}$$

Kvadratická regrese $y = ax^2 + bx + c$:

$$a = \frac{\sum x_i^2 y_i \left[N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 \right] - \sum x_i^3 \left[N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \right] + \sum x_i^2 \left[\sum x_i y_i \sum x_i - \sum y_i \sum x_i^2 \right]}{\sum x_i^4 \left[N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 \right] - \sum x_i^3 \left[N \sum x_i^3 - \sum x_i^2 \sum x_i \right] + \sum x_i^2 \left[\sum x_i^3 \sum x_i - \left(\sum x_i^2\right)^2 \right]}$$

$$b = \frac{\sum x_i^4 \left[N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i \right] - \sum x_i^2 y_i \left[N \sum x_i^3 - \sum x_i^2 \sum x_i \right] + \sum x_i^2 \left[\sum x_i^3 \sum y_i - \sum x_i^2 \sum x_i y_i \right]}{\sum x_i^4 \left[N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 \right] - \sum x_i^3 \left[N \sum x_i^3 - \sum x_i^2 \sum x_i \right] + \sum x_i^2 \left[\sum x_i^3 \sum x_i - \left(\sum x_i^2\right)^2 \right]}$$

$$c = \frac{\sum x_i^4 \left[\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i \right] - \sum x_i^3 \left[\sum x_i^3 \sum y_i - \sum x_i^2 \sum x_i y_i \right] + \sum x_i^2 y_i \left[\sum x_i^3 \sum x_i - \left(\sum x_i^2\right)^2 \right]}{\sum x_i^4 \left[N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 \right] - \sum x_i^3 \left[N \sum x_i^3 - \sum x_i^2 \sum x_i \right] + \sum x_i^2 \left[\sum x_i^3 \sum x_i - \left(\sum x_i^2\right)^2 \right]}$$

To je hrůza, co? Ale pro počítač to je hračka, stačí jednou napsat program a běží to. Existují i jiné způsoby, jak provádět regresi polynomem n -tého stupně, které jsou založené na rekurentních výpočtech. Do programu potom napíšete elegantní cykly, ve kterých vyznat se je velice těžké.

Pozn: Při psaní výsledků jsem použil „formát“ vzorců vynalezený Lubošem Zrnečkem, kterýžto byl nejstravitelnější.

Halef

Seriál na pokračování

Úloha S. 5 se zabývala metodou prosté iterace. Řešitelé (kterých pravda nebylo mnoho) se často zabývali otázkou, pro jaké k ve vyjádření fce $g(x) = f(x)k + x$ je konvergence nejrychlejší. Protože je to otázka zajímavá a i pro další problémy poučná, věnujme se jí trochu více. Z podmínky kontraktivnosti $|g'(x)| = |f'(x)k + 1| < 1$ pro všechny body x v námi zvoleném intervalu plyne, že k musí ležet v intervalu ohraničeném 0 a $(-2f'_{\max})$ – maximum derivace na daném intervalu. Přitom musíme požadovat, aby byla fce monotónní, tj. derivace neměnila znaménko. V našem případě při přesném omezení kořene (0,88;1,02) zde fce $f(x)$ klesá, maximum derivace je v pravém krajním bodě zhruba 5,9. Přitom čím je derivace $g'(x)$ menší, tím rychleji spějeme k cíli — optimální hodnota je tedy $k = -1/f'_{\max}$, jak dokazuje i „experimentální“ srovnání rychlostí konvergence pro různá k . S menší hodnotou k se k cíli přibližujeme „opatrněji“ — tj. pomalu, ale s jistou konvergencí.

Úloha S. 6 (problémová) se týkala otázky více rovnic (v našem případě sice šlo dosazením převést na rovnici jedinou a tu pak řešit známými metodami, ale obecně tomu tak být nemusí). Podle předchozího vzoru nebyl problém napsat soustavu iteračních rovnic pro fci $f(x)$ a její derivaci. Mohli jsme (hledáme čas dopadu X a amplitudu A) volit např. tuto kombinaci

$$X = -(A - V * X + G * X^2 / 2 - A * \cos(2 * \pi / T * X)) * K + X$$

$$A = (V - G * X - A * \sin(2 * \pi / T * X) * 2 * \pi / T) * J + A$$

Parametry K a J (analogicky parametr k v předcházejícím příkladu) volíme raději malé (spíš než o rychlost nám jde o spolehlivost). Podstatná je ale volba znamének před závorkami — musíme

je volit podle znamének derivace funkce na okolí kořene. To znamená, že musíme mít již jistou představu o chování funkce a nalézt takové okolí předpokládaného kořene, kde je fce monotónní. V našem případě činil počáteční odhad $x = 0,20$ a $A = 0,45$. Pro přesnost výsledku máme buď podmínku $|f(x)|^2 + |f'(x)|^2 < \varepsilon$, nebo sledujeme rozdíl hodnot spočtený ve dvou následujících krocích. Po několika set krocích jsme pak dospěli k výsledku $x = 0,20500$ a $A = 0,44403$.

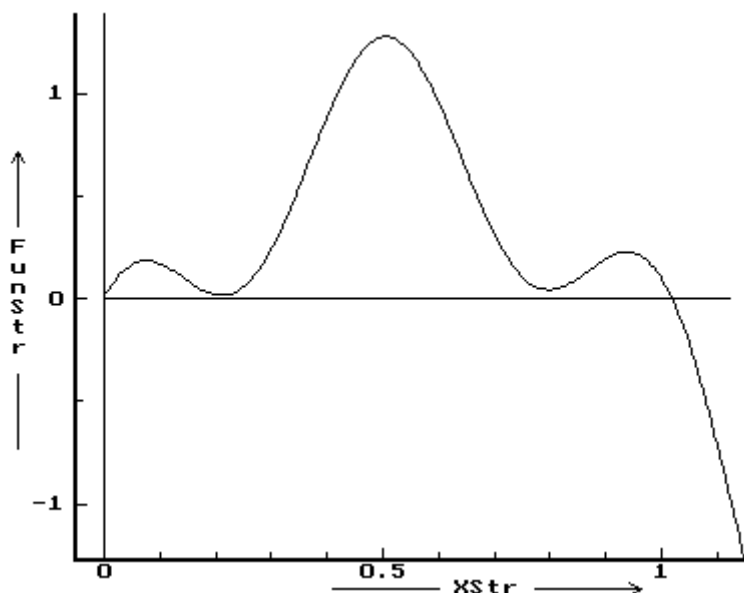
Uspokojeni touto přesností si zobrazíme, jak se mění v čase vzdálenost skokana a desky. Tato kontrola je nutná, neboť se může stát, že se skokan k desce blíží zespodu (což pochopitelně není přípustné). Jak ukazuje Graf 2, v našem případě je vše v pořádku a navíc nám napovídá ještě jedno řešení v okolí $x = 0,79$. Při aplikaci nových počátečních podmínek musíme ale změnit obě znaménka před závorkami — při všech jiných volbách nedostaneme kontraktivnost a řešení nám „ujede“. Další řešení tedy má hodnotu $x = 0,87819$ a

$$A = 0,74182.$$

Podíváme-li se však na situaci podrobněji, zjistíme, že jsme skokanův

problém s tvrdostí dopadu vyřešili poněkud svérázně: prkno dostihlo skokana ještě během jeho letu vzhůru, jenom ho „lízlo“ a zůstalo pod ním. K podobné situaci došlo při letu dolů a nakonec skokan dopadl na desku tvrdě jako předtím. Nicméně podmínky úlohy byly splněny a proto i ti řešitelé, kteří dospěli k podobným výsledkům, byli náležitě odměněni.

Graf 2



Pořadí řešitelů po pátém kole

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Hand	1	2	3	4	5	M	S5	S6	V	BB	PB
	Student	Pilný	☺☺	MFF UK Praha	100%	5	3	6	3	8	2	5	5	37	144	144
1	Jindřich	Koloreňč	4.G	G Nová Paka	63%	5	3	4	3	8	2	5	6	23	129	82
2	Rudolf	Sýkora	3.A	G Hejčín	78%	5	3	6	3	6	2	-	-	23	105	81
3	Matouš	Jiráček	3.A	G Říčany	83%	4	3	4	3	5	-	-	-	19	91	75
4	Přemysl	Koloreňč	kvinta	G Nová Paka	94%	3	3	5	3	5	-	4	6	19	72	68
5	Pavel	Bubák	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	82%	4	3	4	3	-	2	4	-	14	75	61
6 - 7	Martin	Hadrávek	3.A	G Jírovceva České Budějovice	85%	1	3	4	3	1	2	-	-	12	64	54
6 - 7	Jakub	Machek	3.A	G Žďár nad Sázavou	85%	3	3	2	3	2	-	-	-	13	63	54
8 - 9	Jiří	Franta	3.A	G Příbram	85%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	60	51
8 - 9	Vlastík	Křápek	2.C	G Křenová Brno	96%	-	3	6	3	4	-	3	3	16	53	51
10 - 11	Michal	Fabinger	4.E	G Nad Alejí Praha	65%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	75	49
10 - 11	Jiří	Walek	4.B	G soukromé Havířov	75%	2	3	4	3	5	-	-	-	17	66	49
12	Martin	Krsek	4.A	G J.K.Tyla Hradec Králové	74%	1	3	4	3	-	2	5	-	11	62	45
13 - 14	Peter	Macák	4.A	G Jur. Hronca Bratislava	72%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	56	40
13 - 14	Václav	Porod	kvinta	G	97%	5	3	6	3	4	-	-	-	21	41	40
15	Jaroslav	Brzák	3.?	G Nový Bydžov	86%	2	3	-	3	-	-	-	-	8	44	38
16	Josef	Šeda	2.C	G Křenová Brno	97%	-	0	6	3	-	-	-	-	9	38	37

17 - 18	Robert	Šámal	4.D	G Zborovská Praha	73%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	50	36
17 - 18	Martin	Hála	kvinta	G Rumburk	97%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	37	36
19 - 20	David	Nečas	4.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	75%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	47	35
19 - 20	Verča	Štulíková	3.B	G Beroun	87%	1	0	2	3	-	-	-	-	6	40	35
21 - 22	Marta	Bednářová	4.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	72%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	47	34
21 - 22	Zdeňka	Broklová	kvinta	G Polička	95%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	36	34
23	Lubomír	Zrnečko	4.?	G Rumburk	77%	6	3	4	3	4	2	5	5	20	43	33
24 - 25	Michal	Bursa	3.B	G Jana Keplera Praha	87%	1	3	4	3	-	-	-	-	11	37	32
24 - 25	Robert	Špalek	3.A	G Brno	87%	5	3	4	3	-	-	-	-	15	37	32
26	Petr	Vejhoda	3.A	G Brno	87%	1	3	-	3	-	-	-	-	7	35	31
27 - 28	Jan	Foretník	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	87%	-	3	3	1	-	-	-	-	7	35	30
27 - 28	Michal	Vopálenský	3.D	G Jihlava	87%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	34	30
29	David	Stanovský	4.D	G Pardubice	74%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	38	28
30 - 31	Martin	Vohralík	4.D	G Pardubice	77%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	35	27
30 - 31	Karel	Kolář	kvarta	G Sušice	118%	5	-	4	3	-	-	-	-	12	23	27
32	Martin	Čada	4.B	G Jeseník	78%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	31	24
33 - 34	Pavel	Klang	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	87%	1	3	-	3	-	-	-	-	7	25	22
33 - 34	Marie	Mášková	3.?	G PORG Praha - Libeň	88%	5	3	-	-	-	-	-	-	8	25	22
35	Jan	Rychtář	4.C	G Strahonice	78%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	24	19
36	Anna	Jančaříková	3.C	G Zborovská Praha	87%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	21	18
37 - 38	Kristýna	Kupková	4.C	G Nad alejí Praha 6	78%	-	0	-	3	-	-	-	-	3	22	17
37 - 38	David	Bača	3.A	G Frýdlant n. O.	88%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	19	17
39	Tomáš	Kolský	2.C	G Zborovská Praha	99%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	14	14
40 - 41	Jana	Koláčková	oktáva	PORG Praha 8 - Libeň	77%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	17	13
40 - 41	Gabriela	Randáková	4.A	G Brandýs nad Labem	79%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	16	13
42 - 45	Matěj	Liszka	4.A	G Frýdecká Český Těšín	78%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	16	12
42 - 45	Martin	Čížek	3.?	SUSSt Sezimovo ústí	89%	1	0	1	-	-	-	-	-	2	13	12
42 - 45	Pavel	Kraus	kvinta	G Masarykovo Plzeň	99%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	12	12
42 - 45	Kamil	Řezáč	kvinta	G J. Vrchlického Klatovy	109%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	11	12
46 - 49	Jan	Horáček	4.A	G Valašské Meziříčí	78%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	14	11
46 - 49	Tomáš	Vojta	4.?	G	79%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	14	11
46 - 49	Jiří	Sulovský	3.D	G F.X.Šaldy Liberec	89%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	12	11
46 - 49	Tomáš	Bílek	kvinta	G J. Vrchlického Klatovy	99%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	11	11
50 - 52	Josef	Janovec	4.B	SPSt Pelcla Rychnov n. Kn.	79%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	12	9
50 - 52	Martin	Navrátil	4.A	G Karlovy Vary	78%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	11	9
50 - 52	Jiří	Smola	Q	G J. Vrchlického Klatovy	109%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	8	9
53 - 54	Zdeněk	Hrnčíř	4.A	G Brandýs nad Labem	79%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	10	8
53 - 54	Kateřina	Nohavová	2.C	G Jana Keplera Praha	99%	1	-	3	-	-	-	-	-	4	9	8
55 - 58	Petr	Doubek	4.D	G Pardubice	78%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	9	7
55 - 58	Blanka	Janoušová	4.A	G Na Vítězné pláni Praha 4	78%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	9	7
55 - 58	Miroslav	Jílek	3.A	G Polička	88%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	8	7
55 - 58	Viktorie	Šlísová	kvinta	G Rumburk	110%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	6	7
59 - 62	Karel	Švadlenka	4.A	G České Budějovice	79%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	8	6
59 - 62	Zdeněk	Žabokrtský	4.C	G F.M.Pelcla Rychnov n. Kn.	79%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	8	6
59 - 62	Radek	Podhajský	3.A	G Mariánské Lázně	89%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	7	6
59 - 62	Miloš	Roškot	2.C	G BN Benešov	100%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	6	6
63 - 64	Tomáš	Belza	3.D	0 F.X.Šaldy Liberec	90%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	6	5
63 - 64	Josef	Marcel	Q	G J. Vrchlického Klatovy	100%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	5	5
65	Karel	Borovička	3.D	G F.X.Šaldy Liberec	90%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4	4
66 - 69	Kristina	Bartková	4.C	G J.A.Komenského Uh. Brod	79%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4	3
66 - 69	Matouš	Borák	4.C	G Čs. Exilu Ostrava - Poruba	80%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4	3
66 - 69	Tomáš	Černoch	4.C	G Nad štolou Praha	78%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	4	3
66 - 69	Petr	Hladík	2.A	SPSa Mělník	100%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	3	3

70	Monika	Štásková	4.A	G Praha	80%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	2	2
71 - 72	Pavel	Kristen	kvarta	G Týn n. Vltavou	110%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	1	1
71 - 72	Petr	Sedláček	2.C	G Benešov	100%	-	-	-	-	-	-	-	-	0	1	1

Řešení šesté série

Úloha VI. 1 ... Jupiter a kometa (maximum počtu bodů 5; řešilo 9 studentů)

Pád komety z nekonečna, kde měla původně nulovou rychlost, lze rozdělit na tři etapy:

- 1) pohyb v gravitačním poli Slunce až do okamžiku vstupu do sféry vlivu Jupitera,
- 2) pohyb ve sféře vlivu Jupitera,
- 3) opět pohyb v grav. poli Slunce.

Sféra vlivu Jupitera je oblast, ve které převažuje gravitační působení Jupitera nad působením Slunce. Budeme předpokládat, že poloměr této sféry je velmi malý vůči vzdálenosti R Jupitera od Slunce (ve skutečnosti má oblast, kde je gravitační síla Jupitera větší než gravitační síla Slunce, poloměr asi $0,17\text{AU}$). Dále si situaci zjednodušíme tím, že v oblasti sféry vlivu Jupitera zanedbáme vliv Slunce a naopak mimo tuto sféru zase zanedbáme gravitační působení Jupitera.

Rozeberme si teď pohyb komety v jednotlivých úsecích:

ad 1) Ze zákona zachování energie (ZZE) plyne, že rychlost v_1 vzhledem ke Slunci, s níž kometa vstupuje do sféry vlivu Jupitera, je rovna $v_1 = \sqrt{2\kappa M_S/R}$. Rychlost Jupitera v_J vzhledem ke Slunci vypočteme z rovnosti dostředivého a gravitačního zrychlení: $v_J^2/R = \kappa M_S/R^2 \Rightarrow v_J = \sqrt{\kappa M_S/R}$. Rychlosti v_1 a v_J svírají pravý úhel, a tak z Pythagorovy věty dostáváme pro rychlost komety \tilde{v}_1 vzhledem k Jupiterovi při vstupu do sféry vlivu Jupitera vztah $\tilde{v}_1 = \sqrt{3\kappa M_S/R}$, kde M_S je hmotnost Slunce.

ad 2) Ze ZZE plyne, že rychlost komety \tilde{v}_2 , se kterou opouští sféru vlivu Jupitera, vzhledem k Jupiteru má velikost stejnou jako \tilde{v}_1 . Ze zadaní je zřejmé, že tato rychlost v_2 vzhledem ke Slunci má velikost $v_2 = \tilde{v}_1 - v_J = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{\kappa M_S/R}$.

ad 3) Ze zadání je v_2 kolmé na průvodič, což může nastat jen v aféliu nebo periheliu. Jelikož však je rychlost komety menší než kruhová rychlost, odpovídá poloha, kde kometa opustila sféru vlivu Jupitera, aféliu: $v_a = v_2$ a $r_a = R$. Vzdálenost r_p perihelia od Slunce vypočteme ze ZZE a z II. Keplerova zákona. Jak jsem se již zmínil, pro afélium a perihelium platí, že průvodič je kolmý na směr rychlosti. Plocha S , kterou průvodič opíše za malý časový úsek t , pak je $S = r_a v_a t/2 = r_p v_p t/2$, kde v_p je rychlost v periheliu. Celkem tedy máme dvě rovnice pro dvě neznámé r_p a v_p :

$$\text{II. Keplerův zákon} \quad r_a v_a = r_p v_p$$

$$\text{ZZE} \quad \frac{1}{2} v_a^2 - \frac{\kappa M_S}{r_a} = \frac{1}{2} v_p^2 - \frac{\kappa M_S}{r_p}$$

Z těchto rovnic hravě vypočteme $r_p = R \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$, číselně $r_p = 1,9\text{AU}$.

Velikost velké poloosy a dráhy komety je rovna $a = (r_a + r_p)/2$, číselně $a = 3,55\text{AU}$. Dobu oběhu komety T pak spočteme z III. Keplerova zákona: $T = 6,7$ let.

Saša Kupčo

Úloha VI. 2 ... reálný zdroj (maximum počtu bodů 4; řešilo 26 studentů)

A) Celkový výkon (I je proud v obvodu):

$$P_C = U_i I = \frac{U_i^2}{R + R_i} = \frac{U_i^2}{R_i} \frac{1}{1 + R/R_i} = A \frac{1}{1 + t}; \quad A = \frac{U_i^2}{R_i}; \quad t = \frac{R}{R_i}$$

B) Výkon na zátěži (U_Z je napětí na zátěži):

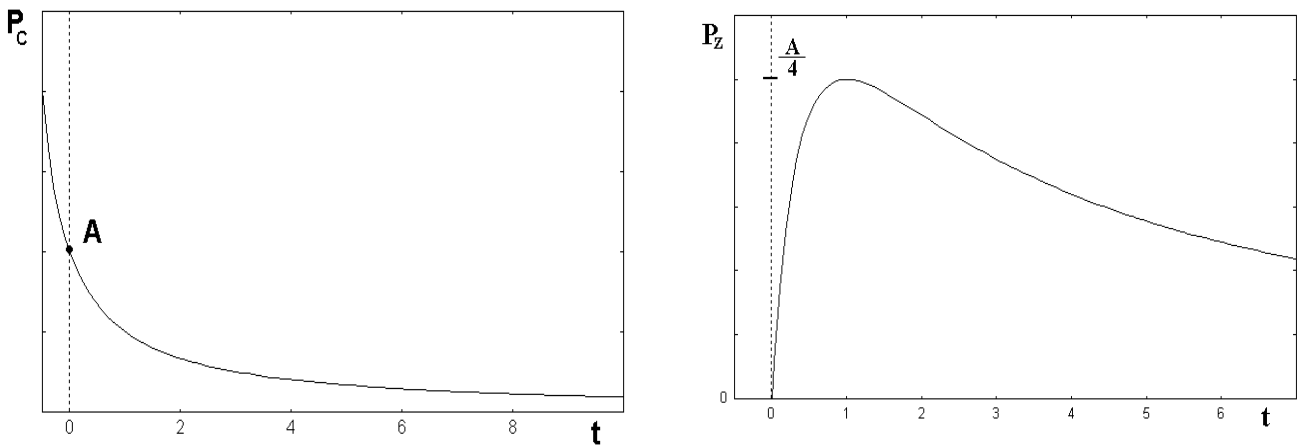
$$P_Z = U_Z I = I^2 R = \frac{U_i^2}{(R + R_i)^2} R = \frac{U_i^2}{R_i} \frac{R}{R_i} \frac{1}{(1 + R/R_i)^2} = \frac{A}{4} \frac{4t}{(1 + t)^2}$$

C) Účinnost (přímo z definice):

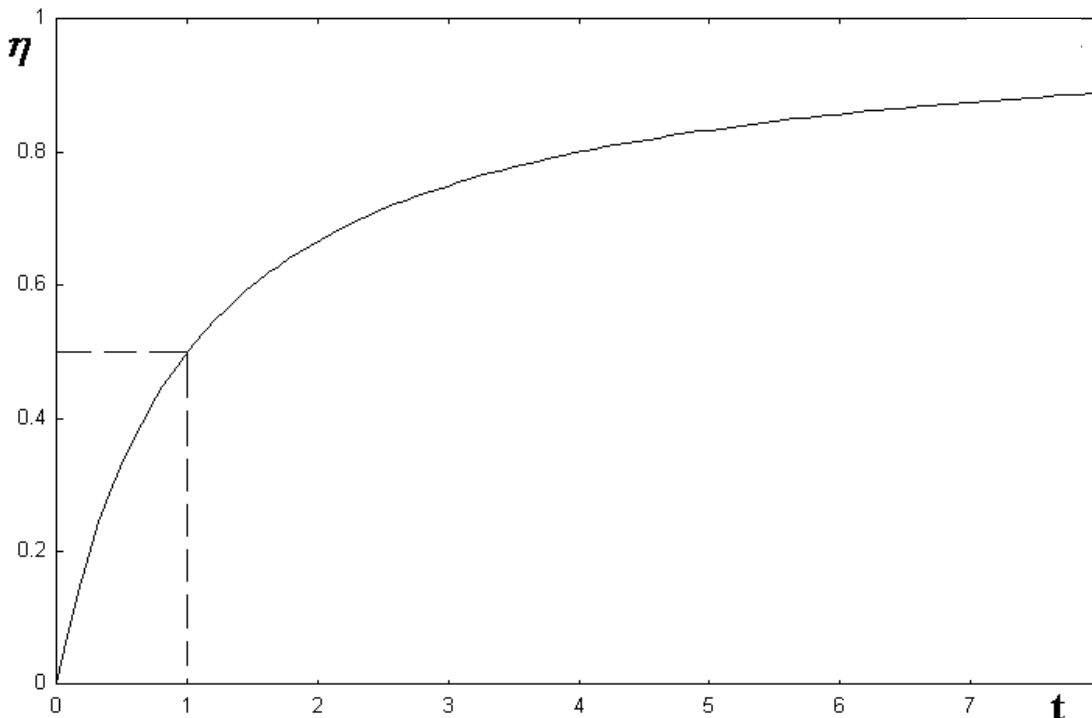
$$\eta = \frac{P_Z}{P_C} \frac{R}{R + R_i} = \frac{t}{1 + t}$$

Parametr t je bezrozměrný. Funkční závislosti celkového výkonu na zátěži a účinnosti obvodu jsou zakresleny v grafech (viz Graf 3 a Graf 4).

Graf 3



Graf 4



Diskuse:

Ad A) Celkový výkon je maximální při $t = 0$ ($t < 0$ samozřejmě není možné), tj. $R = 0$, což je cítit při zkratu, že?

Ad B) Maximum funkce snadno zjistíme zderivováním. Pro neznalce tohoto účinného nástroje při vyšetřování průběhu funkcí uveďme následující odůvodnění. P_Z nabyde svého maxima, když bude funkce $(1 + t)^2/t$ minimální. Tato funkce není nic jiného než součet hyperboly $1/t$ a lineární funkce $2 + t$. Snadno nahlédnete, že ať děláte, co děláte je funkce $1/t + t$ minimální jen pro hodnotu $t = 1$, tj. $R = R_i$. Výkon P_Z potom dosahuje hodnoty $A/4$.

Ad C) Opět kromě derivování můžeme uvést toto odůvodnění. (Nezapomeňte, že stále pracujeme na intervalu $t \in \langle 0, \infty \rangle$!) Účinnost bude maximální, když funkce $1 + 1/t$ (obyčejná posunutá hyperbola) bude minimální, to je právě při $t \rightarrow \infty$ a naopak hyperbola nabývá maximum při $t \rightarrow 0$. Účinnost pak je monotónně rostoucí funkcí asymptoticky se blížíci hodnotě $\eta = 1$.

Co je tedy nejvýhodnější? Jak snadno zjistíte při pohledu na grafy, nemá smysl uvažovat o oblasti $t < 1$, neboť stejný výkon při vyšší účinnosti dosáhneme i při $t > 1$. Na druhou stranu s rostoucím odporem zátěže roste sice účinnost obvodu, ale zároveň klesá výkon na zátěži i výkon obvodu. Nejlepší je skutečně (jak napsal jeden váš kolega) pohybovat se v oblasti $t \in (1, 3)$. Účinnost je potom $\eta \in (1/2, 3/4)$ a výkon $P_Z \in (A/4, 3A/16)$.

Ach jo. Příliš jste mě nepotěšili. Takový jednoduchý příklad. Matyku ovládáte všechna čest, derivujete, jen to fičí, ale to je skutečně jen to nejjednodušší. Interpretace výsledků (správná), to je teprve fyzika!

Ahoj, zdraví vás váš oddaný Tom Sýkora

Úloha VI. 3 ... před plechem, za plechem (maximum počtu bodů 5; řešili 4 studenti)

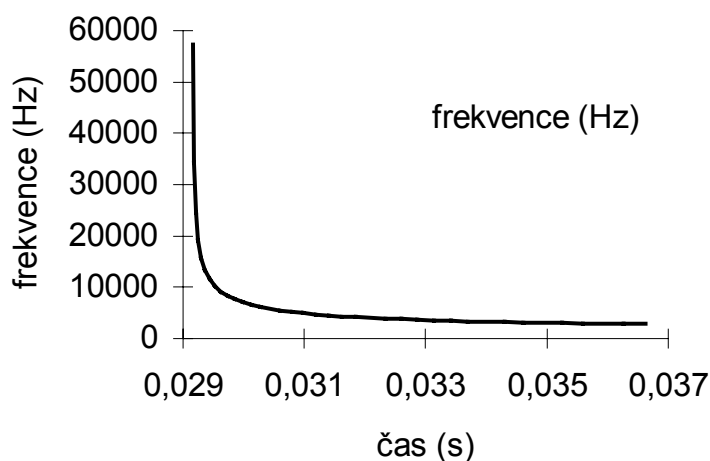
Úloha měla překvapivě málo řešitelů a pouze jediný z nich, Jindřich Kolorenč, dospěl ke konečnému výsledku. Přitom úloha byla jednoduchá, vystačili jste se znalostmi šíření signálu a Pythagorovou větou.

V nejjednodušší představě je zvuk dán sérií rázů vzniklých odrazem jednoho krátkého dupnutí od různých míst plochy. V jednom řešení se objevila idea vlastních kmitů plechu — lze však předpokládat, že energie předaná vzduchem plechu je dost malá a rychle se utlumí (narozdíl od okenních tabulek, které jsou uchyceny v pružném tmelu). Dále lze prohlásit, že k odrazu zpět k matfyzákovi dojde jen v případě, že odrážející plocha je kolmá na směr dopadu. Dle našeho obrázku svírá tento směr s „rovinou“ plechu úhel $\varphi = \arctg l/s$.

Vzdálenost s lze brát rovnu nd pro dostatečně velká n , kdy zanedbáváme rozdíl mezi středem

a obvodem oblouku plechu (max. $d/2$). Je-li vrcholový úhel těchto oblouků 120° , je $\varphi_{\min} = 30^\circ$, tedy poslední v sérii úderů bude mít pořadové číslo $n_{\max} = l/(d \operatorname{tg} \varphi_{\min}) = l/(d\sqrt{3})$. Problém je v tom, že pro každé n jsou dvě místa nastavená pod příslušným úhlem, jedno patří konvexní a jedno konkávní části. Tedy jde o sadu dvojic úderů, které pro n_{\max} splynou v jeden. V počáteční

Graf 5



fázi jsou však odrazy obou druhů vůči sobě postaveny tak, že vychází frekvence rovna dvojnásobku frekvence jednotlivých sérií. Pro nás je však spíš než tato oblast (která leží mimo rozsah slyšitelný uchem) zajímavá koncová část — zde jsou dvojice již blízko sebe a frekvence odpovídá případu odrazů jediného druhu (tj. se vzdáleností následujících odrazových ploch d).

Pak n -tý odraz dojde zpět k matfyzákovi za dobu $t_n = 2(l^2 + n^2 d^2)^{1/2} / v$. Interval mezi následujícími příchody odražené vlny pro nás ale znamená periodu slyšeného zvuku: $T(n) = (t_{n+1} - t_n)$, resp. jeho frekvence $f(n) = 1 / (t_{n+1} - t_n)$. Okamžik t_{n+1} si můžeme vyjádřit nejen pomocí n , ale i t_n :

$t_{n+1} = 2(l^2 + n^2 d^2 + 2nd^2 + d^2)^{1/2} / v = (t_n^2 v^2 + d^2 + 2d(t_n^2 v^2 - l^2)^{1/2})^{1/2} / v$ — po dosazení pak dostáváme explicitní závislost frekvence na čase t :

$$f(t) = v / ((t^2 v^2 + d^2 + 2d(t^2 v^2 - l^2)^{1/2})^{1/2} - tv).$$

Pro velká t by bylo možné zanedbat l vůči tv a dostáváme logické dolní omezení klesající fce rovno v/d , přičemž v počátečních fázích lze očekávat i podstatně vyšší frekvence (diskutované dvě série odrazů). Průběh této fce je na přiloženém grafu (viz Graf 5).

Celková doba ozvěny je zřejmě dle vypočteného n_{\max} rovna $t_{n_{\max}} - t_0 = 2(1 + \text{tg}^2 \varphi_{\min})^{1/2} l/v - 2l/v = 2l/v = 2,9 \cdot 10^{-2}$ s. Ovšem matfyzák jsa vybaven pouze svým uchem, vnímá jen část ležící pod prahem slyšitelnosti (asi 16 kHz), změna s tím spojená je ale jen asi desetitisícina sekundy.

Filip Münz

Úloha VI. 4 ... *expozice* (maximum počtu bodů 4; řešilo 15 studentů)

To, jak se povede každá fotografie, záleží na několika faktorech. Clona objektivu určuje, jak velký svazek paprsků od každého bodu před námi zobrazí na dané místo filmu v ohniskové rovině objektivu (v ideálním případě by to měl být bod). Expozice je v podstatě doba, po kterou necháme dopadat světlo na film, můžeme předpokládat, že míra zčernání negativního filmu je přímo úměrná expozici. V naší úloze záleží pouze na tom, jak se změní intenzita I světla

dopadající na celkovou plochu filmu σ , tzv. osvětlení $E = \frac{I}{\sigma}$. Většina z vás správně vysoudila, že

toto osvětlení se se vzdáleností od fotografovaného objektu nemění za předpokladu, že tento objekt je rovnoměrně nasvícen. Objasněme si tento fakt poněkud podrobněji:

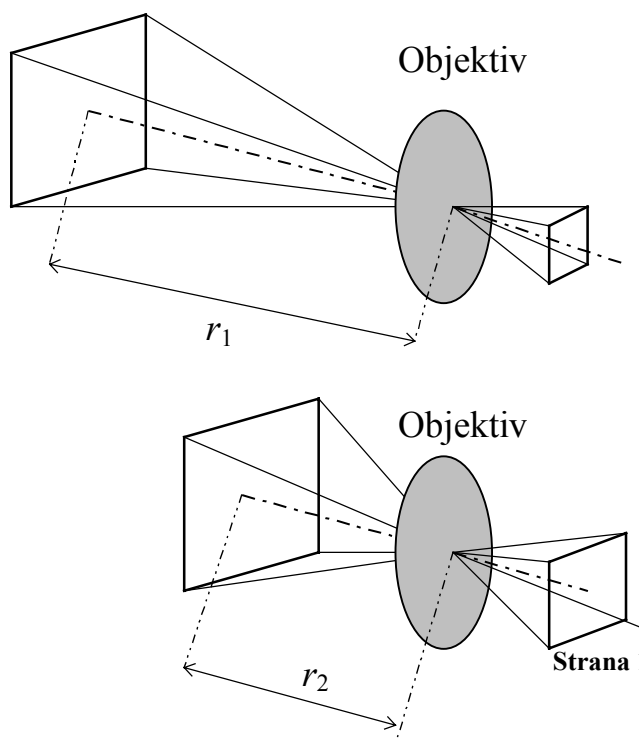
Každá elementární ploška domu září do poloprostoru před sebou stejné množství energie za jednotku času (výkon) P a to izotropně (na každý elementární prostorový úhel případně stejně). Toto je předpoklad naší úlohy, je splněn pro drsné povrchy, které dopadající světlo dobře rozptylují. Zrcadlo, či nějaký vyleštěný plech tento předpoklad nespĺňují. Intenzita světla I dopadající na jednotku plochy za jednotku času ve vzdálenosti r potom

je: $I = \frac{P}{2\pi r^2} = \frac{I_0}{r^2}$, ubývá tedy se

čtvercem vzdálenosti.

Fotograf zabírá stále stejný prostorový úhel (nemění parametry svého přístroje). Prostorový úhel 1 steradián je definován tak, že na jednotkové kulové ploše vytkne plochu o obsahu 1 m^2 . V našich vzdálenostech bereme obsah kulového vrchlíku přibližně shodný s obsahem plochy S ve vzdálenosti r . Fotograf zabírající prostorový úhel Ω tak vymezí na objektu ve vzdálenosti r plochu o obsahu $S = \Omega r^2$. (Kontrola: plný prostorový úhel je 4π , obsah kulové plochy je skutečně $4\pi r^2$.) Odtud plyne, že v poloviční vzdálenosti se plocha zabíraného okolí zmenší čtyřikrát. Jak je

Obr. 2



vidět na obrázku (viz Obr. 2), plocha domu se v poloviční vzdálenosti zobrazí na čtyřikrát větší plochu filmu, ale zároveň celková intenzita světla odražená od domu (součet intenzit od jednotlivých elementárních plošek), kterou je schopen objektiv pohlít, vzroste také čtyřikrát. Fotograf expozici tedy měnit neměl.

Halef

Úloha VI . 5 ... *hustota vzduchu* (maximum počtu bodů 8; řešilo 6 studentů)

Ach jo. Vy jste tomu dali. Experimentální úloha je zaměřena na to, abyste si prověřili své teoretické znalosti a uplatnili je v praxi. Experimentovat je od slova experiment, zkouška, pokus. Není cílem se přiblížit co nejvíce tabulkovým hodnotám za každou cenu, ale spíše si něco zkusit. Experimentální fyzika není obor ryze fyzikální, většinou je potřeba použít i znalostí z jiných oborů — chemie, elektroniky... Navíc, není třeba objevovat objevené, od toho je literatura. Ale dost lamentací. Jak tedy mělo řešení úlohy vypadat?

Všichni, kdož poslali řešení, měli jeden společný nápad. Napustit balónek plynem lehčím vzduchu (např. vodík, helium, methan) a ze změřené vztlakové síly určit hustotu vzduchu. Vztlakovou sílu můžeme určit třeba takto. Na váhu dáme závaží o hmotnosti M_0 , např. 100 g. K závaží připevníme balónek s plynem. Neb na balónek působí vztlaková síla, naměříme hmotnost závaží M_1 . Rozdíl $M_0 - M_1$ určuje spolu s hmotností balónku m vztlakovou sílu F_{vz} . Máme tedy rovnováhu síly gravitační a vztlakové $F_{vz} = V(\rho_{vz} - \rho_{pl})g = (m - M_0 - M_1)g$, kde g je gravitační zrychlení, ρ_{pl} je hustota použitého plynu a ρ_{vz} je hustota vzduchu, V je objem balonku. Úpravou dostaneme pro hledanou hustotu vzduchu:

$$\rho_{vz} = \frac{m + M_0 - M_1}{V} + \rho_{pl}.$$

Neznámými zde zůstávají objem balónku V a hustota použitého plynu ρ_{pl} . Pokud použijeme obyčejný balónek (žádná zvířátka či jiné komplikované tvary) můžeme tvar balónku aproximovat např. koulí nebo rotačním elipsoidem. Ale co hustota ρ_{pl} ? Zde jsou dvě možnosti. Buď použijeme tabulky, kde jsou uvedeny hodnoty hustot plynů většinou pro teplotu 0°C a tlak $101\,325\text{ Pa}$. Anebo si můžeme hustotu plynu odhadnout. Jak? Je známo, že 1 kmol ideálního plynu zabírá za normálních podmínek objem 22,4 krychlového metru. Molární hmotnost souvisí s „normální“ hmotností vztahem $m = nM_m$, kde n je počet molů a M_m je molekulová hmotnost. Například pro vodík H_2 je přibližně $M_m = 2,013\text{ kg/kmol}$ a tedy pro hustotu máme

$$\rho_{\text{H}_2} = \frac{m}{V} = \frac{M_m}{V_m} = \frac{2,013\text{ kg}\cdot\text{kmol}^{-1}}{22,4\text{ m}^3\cdot\text{kmol}^{-1}} = 0,0899\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3},$$

přičemž tabulková hodnota je stejná. Větší odchylky nastanou zejména pro víceatomové molekuly. Poněvadž objem balonku budeme v nejlepší případě aproximovat, stačí na určení hustoty vzduchu použít podobný odhad hustoty použitého plynu ρ_{pl} .

V experimentální fyzice bývá zvykem alespoň velice zhruba odhadnout, jak velká bude měřená veličina, a tím třeba i zvolit patřičnou metodu. Víme, že vzduch se skládá ze 70% z dusíku, asi z 21% z kyslíku. Zbýlých 9% přisoudíme oxidu uhličitému. Hustoty dusíku, kyslíku a oxidu uhličitého určíme výše popsaným postupem a dostaneme

$$\rho_{\text{N}_2} = 1,25\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}, \quad \rho_{\text{O}_2} = 1,43\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}, \quad \rho_{\text{CO}_2} = 1,96\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

a pro hustotu vzduchu

$$\rho_{vz} = 0,7\rho_{\text{N}_2} + 0,21\rho_{\text{O}_2} + 0,09\rho_{\text{CO}_2} = 1,35\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

Pro měření hustoty vzduchu se tedy nejlépe hodí plyny s co nejmenší hustotou, tj. vodík, helium nebo methan. Vodík lze v malém množství vyrobit elektrolýzou vody popř. některou z chemických reakcí, např. $\text{Zn} + 2\text{HCl} \rightarrow \text{ZnCl}_2 + \text{H}_2$. Helium lze v „polních“ podmínkách získat jen velice těžko. Methan se vyskytuje asi z 80% v zemním plynu. V laboratoři se dá vyrobit dvěma způsoby:

a) zahříváním směsi octanu sodného s hydroxidem sodným:



b) nebo působením vody na karbid hlinitý: $\text{Al}_4\text{C}_3 + 12\text{H}_2\text{O} \rightarrow 4\text{Al}(\text{OH})_3 + 3\text{CH}_4$.

Při práci s vodíkem a methanem je třeba být velice opatrný, neboť oba plyny tvoří se vzduchem silně výbušné směsi!!!!!!

Další metoda, jak určit hustotu vzduchu je popsána v knize **Brož, Jaromír a kol.: Základy fyzikálních měření I., SPN 1983, strana 103** (viz příloha k této sérii). Je založena na platnosti Bunsenova zákona. Je daleko univerzálnější než výše uvedená, neboť neklade omezení na použitý plyn. Hustotu vzduchu tak můžeme určit i třeba srovnáním s chlorem, který má asi 3× větší hustotu než vzduch. Pokud byste chtěli tuto metodu vyzkoušet dodatečně, stačí vám k tomu např. láhev od Dobré vody, kterou zbavíte dna a do uzávěru vyvrtáte (či jinak uděláte) malinkou díрку. Čím menší, tím lepší. Díрку zalepíte modelínou nebo kvalitní lepicí páskou. Láhev pak ponoříte do větší nádoby s vodou (např. 5-ti litrová sklenice od okurek). V láhvi zůstal vzduch, a tak hladina vody uvnitř láhve bude nižší než vně láhve. Nyní díрку otevřete a změříte čas t_1 , za který se hladina vody zvedne např. o 5 cm. Pak láhev ze spoda zavedenou hadičkou naplníte dalším plynem. Jakým? No třeba oxidem uhličitým. Stačí vydechnout do vody. Nebo si jej vzít ze sifonové bombičky. Anebo opět vyrobit nějakou chemickou reakcí (např. uhličitánu vápenatého s kyselinou chlorovodíkovou). Láhev několikrát plynem propláchněte abyste se zbavili zbytku vzduchu. Pak proveďte měření času t_2 , za který se hladina vody zvedne o 5cm. Bunsenův zákon pak dává

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$$

Chybu měření můžeme zmenšit opakováním měření, anebo použitím více plynů.

Tak co, bylo to tak těžké? Příště se nebojte podívat se do literatury a nebojte se experimentovat v laboratoři na škole. Neboť jak pravil Jan Neruda v „Písních kosmických“:

... je to jako dobrodružství na moři uzavíratí se v laboratoři ...

Dodatek (pro ty, co chtějí vědět jak si některé plyny vyrobit na „koleně“)

- *kyslík* – rozklad peroxidu vodíku na burelu (oxid manganický)
 - elektrolýza vody
 - přidáváním roztoku manganistanu draselného do okyseleného peroxidu vodíku

$$5 \text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{KMnO}_4 + 3\text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow 2\text{MnSO}_4 + \text{K}_2\text{SO}_4 + 8\text{H}_2\text{O} + 5\text{O}_2$$
- *chlor* – mírným zahříváním kyseliny chlorovodíkem
 - reakcí kyseliny chlorovodíkové s burelem (nebo manganistanem draselným)

$$4\text{HCl} + \text{MnO}_2 \rightarrow \text{MnCl}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + \text{Cl}_2$$
- *dusík* – zahřívání koncentrovaného roztoku dusitanu amonného nebo směsi chloridu amonného a dusitanu amonného na asi 70°C

$$\text{NH}_4\text{NO}_2 \rightarrow \text{N}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$$

Standa Daniš

Seriál na pokračování

Zbývá nám poslední **úloha S . 7**, kterou k mému zklamání nikdo celou nevyřešil do konce. Pouze jeden z vás dostal nějaké body za řešení problémů, které zde byly zadány před sestavením celého algoritmu.

Řešení prvního z nich (nebylo ho vlastně k výpočtu zapotřebí) bylo jednoduché: k úpravě Hornerova schematu pro polynomy s komplexními koeficienty stačilo přidat v šestém řádku jeden sčítanec $a_{\text{imag}}[i]$. Pro úsporu paměti přepíšeme celý algoritmus tak, abychom vystačili se dvěma vstupními poli koeficientů $a[i]$ a $b[i]$ (reálná a imaginární část); výsledkem je hodnota $fce [c, d]$ a derivace $[e, f]$. Je třeba upozornit (v minulém díle to vypadlo), že z důvodů jednoduché implementace jsou koeficienty polynomu v poli v „opačném“ pořadí, tj. $a[0]$ je koef. u nejvyšší mocniny.

```

c0=a[0]
d0=b[0]
e0=a[0]
f0=b[0]
zaccyklu
    c=c0*x-d0*y+a[j]
    d=d0*x+c0*y+b[j]
    c0=c
    d0=d
    pokud j<n potom
        e=e0*x-f0*y+c
        f=f0*x+e0*y+d
        e0=e
        f0=f
    konec
    j=j+1
    pokud j>n potom skonci konec
koncyklu

```

Dalším problémem bylo snížení stupně polynomu v případě, že známe jeden kořen a , tj. vydělením našeho polynomu výrazem $(x - a)$. Opět z důvodu jednoduchosti algoritmu máme indexy v opačném pořadí — v daném okamžiku pro polynom $(n - m)$ -tého stupně jsou nenulové od m -té do poslední n -té pozice. Nalezený komplexní kořen a má hodnotu $[x, y]$. Vlastní výpočet je relativně jednoduchý, pro méně zkušené čtenáře však doporučujeme si jeho činnost promyslet a ověřit zpětně správnost získaných koeficientů .

```

k=m
a1=a[k-1]
b1=b[k-1]
a[k-1]=0
b[k-1]=0
zaccyklu
    a0=a[k]
    b0=b[k]
    a[k]=a[k-1]*x-b[k-1]*y+a1
    b[k]=b[k-1]*x+a[k-1]*y+b1
    a1=a0
    b1=b0
    k=k+1
    pokud k>n potom skonci konec
koncyklu

```

Nyní již můžeme sestavit celý algoritmus. Používáme Newtonovu metodu „zpomalenou“ faktorem 20 tak, že při kroku neskočíme přímo do předpovězeného místa kořene, ale jen se

posuneme o malý kus v tomto směru. Takto se metoda podobá iterační s „automatickou“ volbou znaménka koeficientů. Přesto je stabilita činnosti algoritmu problematická — protože nemáme žádné počáteční informace o kořenech, volíme počáteční polohu náhodně s očekáváním, že k některému z nich dokonvergujeme. Možná vás překvapí, že zde máme dvě podmínky na opuštění smyčky — splnění první z nich však neznamená nalezení kořene, ale fakt, že jmenovatel v následujících výpočtech je příliš malý a došlo by k „ústřelu“, proto raději začneme hledat znovu na jiném místě.

zacyklu

```
{zde je volána procedura s Hornerovým schématem}
pokud (e^2+f^2)<feps potom {spec} skonci konec
  x=x0-(c*e-d*f)/20/(e*e+f*f)
  y=y0-(c*f+d*e)/20/(e*e+f*f)
pokud sqrt((x-x0)^2+(y-y0)^2)<eps potom skonci konec
  x0=x
  y0=y
```

koncyklu

Takto tedy (i když často po velmi dlouhé době, neboť rychlost konvergence je s retardací velmi malá a ke kořenům se často dostáváme po dlouhých spirálách) získáme výsledky

$$-1,3898 \pm 2,1885 i$$

$$0,38969 \pm 5,4258 i.$$

Využili jsme faktu z algebry, že je-li kořenem číslo $a + bi$, je jím i komplexně sdružené $a - bi$ (to se potvrdilo i na získaných výsledcích, zde jsou uvedeny střední hodnoty).

Tolik tedy k poslední úloze tohoto ročníku. Ti, kteří dospěli až sem (a řešili alespoň některé zadané problémy), se doufám přesvědčili, že i suchopárná řešení matematických rovnic v sobě skrývají nemalou dávku dobrodružství při překonávání zásludných úskalí a hledání nejlepších cest k jejich řešení. I na „jednoduchých“ příkladech (vzhledem k úlohám, které dnes řeší největší počítače) jsme mohli ukázat, kdy jsou které metody vhodnější a kdy je třeba se vyrovnávat i s prvkem náhody. Možná se téma počítače objeví v SNP za čas znovu, např. spolu s řešením pohybových rovnic, oblíbeným modelováním. Ale to se už bude týkat spíše vašich nástupců v roli řešitelů semináře.

Filip Münz

Konečná výsledková listina

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Handi	1	2	3	4	5	S7	VI	BB	PB
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	☺.☺	<i>MFF UK Praha</i>	<i>100%</i>	<i>5</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>4</i>	<i>8</i>	<i>5</i>	<i>31</i>	<i>175</i>	<i>175</i>
1	Jindřich	Kolorenč	4.G	G Nová Paka	63%	3	3	5	2	2	-	15	144	91
2	Matouš	Jirák	3.A	G Říčany	83%	0	4	-	4	7	3	18	109	90
3	Rudolf	Sýkora	3.A	G Hejčín	78%	-	-	-	-	-	-	0	105	81
4	Přemysl	Kolorenč	kvinta	G Nová Paka	94%	2	2	-	1	1	-	6	78	74
5	Pavel	Bubák	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	82%	-	2	-	1	-	-	3	78	64
6	Jakub	Machek	3.A	G Žďár nad Sázavou	85%	-	4	-	4	-	-	8	71	60
7	Martin	Krsek	4.A	G J.K.Tyla Hradec Králové	74%	2	4	-	4	7	-	17	79	58
8	Martin	Hadrávek	3.A	G Jírovcova České Budějovice	85%	0	2	-	1	-	-	3	67	57
9 - 10	Jiří	Walek	4.B	G soukromé Havířov	75%	-	3	-	-	-	-	3	69	52
9 - 10	Jiří	Franta	3.A	G Příbram	85%	-	1	-	-	-	-	1	61	52
11	Vlastimil	Křápek	2.C	G Křenová Brno	96%	-	-	-	-	-	-	0	53	51
12	Michal	Fabinger	4.E	G Nad Alejí Praha	65%	-	-	-	-	-	-	0	75	49

13	Václav	Porod	kvinta	G	97%	-	2	-	-	-	-	2	43	42
14	Jaroslav	Brzák	3.?	G Nový Bydžov	86%	-	-	2	1	-	-	3	47	41
15 - 16	Marta	Bednářová	4.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	72%	2	3	-	4	-	-	9	56	40
15 - 16	Peter	Macák	4.A	G Jur. Hronca Bratislava	72%	-	-	-	-	-	-	0	56	40
17 - 18	Veronika	Štulíková	3.B	G Beroun	87%	0	2	-	-	2	-	4	44	38
17 - 18	Martin	Hála	kvinta	G Rumburk	97%	-	2	-	-	-	-	2	39	38
19	Josef	Šeda	2.C	G Křenová Brno	97%	-	-	-	-	-	-	0	38	37
20 - 23	Robert	Šámal	4.D	G Zborovská Praha	73%	-	-	-	-	-	-	0	50	36
20 - 23	Jan	Foretník	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	87%	-	3	-	4	-	-	7	42	36
20 - 23	Robert	Špalek	3.A	G Brno	87%	-	1	-	4	-	-	5	42	36
20 - 23	Zdeňka	Broklová	kvinta	G Polička	95%	-	1	-	1	-	-	2	38	36
24	David	Nečas	4.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	75%	-	-	-	-	-	-	0	47	35
25	Michal	Bursa	3.B	G Jana Keplera Praha	87%	-	3	-	-	-	-	3	40	34
26	Lubomír	Zrnečko	4.?	G Rumburk	77%	-	-	-	-	-	-	0	43	33
27 - 29	Michal	Vopálenský	3.D	G Jihlava	87%	-	2	-	-	-	-	2	36	31
27 - 29	Petr	Vejchoda	3.A	G Brno	87%	-	-	-	-	-	-	0	35	31
27 - 29	Karel	Kolář	kvarta	G Sušice	118%	2	2	-	-	-	-	4	27	31
30	Pavel	Klang	3.A	G tř. kpt. Jaroše Brno	87%	-	3	1	4	-	-	8	33	29
31	David	Stanovský	4.D	G Pardubice	74%	-	-	-	-	-	-	0	38	28
32	Martin	Vohralík	4.D	G Pardubice	77%	-	-	-	-	-	-	0	35	27
33	Martin	Čada	4.B	G Jeseník	78%	-	3	-	-	-	-	3	34	26
34 - 35	Kristýna	Kupková	4.C	G Nad alejí Praha 6	78%	-	2	-	4	-	-	6	28	22
34 - 35	Marie	Mášková	3.?	G PORG Praha - Libeň	88%	-	-	-	-	-	-	0	25	22
36	Jan	Rychtář	4.C	G Strahonice	78%	-	-	-	-	-	-	0	24	19
37	Anna	Jančaříková	3.C	G Zborovská Praha	87%	-	-	-	-	-	-	0	21	18
38	David	Bača	3.A	G Frýdlant n. O.	88%	-	-	-	-	-	-	0	19	17
39 - 40	Martin	Čížek	3.?	SUSSt Sezimovo ústí	89%	-	1	0	1	1	-	3	16	14
39 - 40	Tomáš	Kolský	2.C	G Zborovská Praha	99%	-	-	-	-	-	-	0	14	14
41 - 44	Jan	Horáček	4.A	G Valašské Meziříčí	78%	-	3	-	-	-	-	3	17	13
41 - 44	Jana	Koláčková	oktáva	PORG Praha 8 - Libeň	77%	-	-	-	-	-	-	0	17	13
41 - 44	Gabriela	Randáková	4.A	G Brandýs nad Labem	79%	-	-	-	-	-	-	0	16	13
41 - 44	Kamil	Řezáč	kvinta	G J. Vrchlického Klatovy	109%	-	1	-	-	-	-	1	12	13
45 - 46	Matěj	Liszka	4.A	G Frýdecká Český Těšín	78%	-	-	-	-	-	-	0	16	12
45 - 46	Pavel	Kraus	kvinta	G Masarykovo Plzeň	99%	-	-	-	-	-	-	0	12	12
47 - 49	Tomáš	Vojta	4.?	G	79%	-	-	-	-	-	-	0	14	11
47 - 49	Jiří	Sulovský	3.D	G F.X.Šaldy Liberec	89%	-	-	-	-	-	-	0	12	11
47 - 49	Tomáš	Bílek	kvinta	G J. Vrchlického Klatovy	99%	-	-	-	-	-	-	0	11	11
50 - 52	Josef	Janovec	4.B	SPSt Pelcla Rychnov n. Kn.	79%	-	-	-	-	-	-	0	12	9
50 - 52	Martin	Navrátil	4.A	G Karlovy Vary	78%	-	-	-	-	-	-	0	11	9
50 - 52	Jiří	Smola	Q	G J. Vrchlického Klatovy	109%	-	-	-	-	-	-	0	8	9
53 - 54	Zdeněk	Hrnčíř	4.A	G Brandýs nad Labem	79%	-	-	-	-	-	-	0	10	8
53 - 54	Kateřina	Nohavová	2.C	G Jana Keplera Praha	99%	-	-	-	-	-	-	0	9	8
55 - 59	Tomáš	Černocho	4.C	G Nad štolou Praha	78%	1	4	-	-	-	-	5	9	7
55 - 59	Petr	Doubek	4.D	G Pardubice	78%	-	-	-	-	-	-	0	9	7
55 - 59	Blanka	Janoušová	4.A	G Na Vítězné pláni Praha 4	78%	-	-	-	-	-	-	0	9	7
55 - 59	Miroslav	Jílek	3.A	G Polička	88%	-	-	-	-	-	-	0	8	7
55 - 59	Viktorie	Šlísová	kvinta	G Rumburk	110%	-	-	-	-	-	-	0	6	7
60 - 63	Karel	Švadlenka	4.A	G České Budějovice	79%	-	-	-	-	-	-	0	8	6
60 - 63	Zdeněk	Žabokrtský	4.C	G F.M.Pelcla Rychnov n. Kn.	79%	-	-	-	-	-	-	0	8	6
60 - 63	Radek	Podhajský	3.A	G Mariánské Lázně	89%	-	-	-	-	-	-	0	7	6
60 - 63	Miloš	Roškot	2.C	G BN Benešov	100%	-	-	-	-	-	-	0	6	6
64 - 65	Tomáš	Belza	3.D	0 F.X.Šaldy Liberec	90%	-	-	-	-	-	-	0	6	5
64 - 65	Josef	Marcel	Q	G J. Vrchlického Klatovy	100%	-	-	-	-	-	-	0	5	5

66	Karel	Borovička	3.D	G F.X.Šaldy Liberec	90%	-	-	-	-	-	-	0	4	4
67 - 69	Kristina	Bartková	4.C	G J.A.Komenského Uh. Brod	79%	-	-	-	-	-	-	0	4	3
67 - 69	Matouš	Borák	4.C	G Čs. Exilu Ostrava - Poruba	80%	-	-	-	-	-	-	0	4	3
67 - 69	Petr	Hladík	2.A	SPSa Mělník	100%	-	-	-	-	-	-	0	3	3
70	Monika	Šťástková	4.A	G Praha	80%	-	-	-	-	-	-	0	2	2
71 - 72	Pavel	Kristen	kvarta	G Týn n. Vltavou	110%	-	-	-	-	-	-	0	1	1
71 - 72	Petr	Sedláček	2.C	G Benešov	100%	-	-	-	-	-	-	0	1	1

Adresa FKS: KTF MFF UK, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha

Dodatek k úloze V . 5:

Možná Vám chybí vysvětlení, proč voda chladne pomaleji než olej. Stačí si uvědomit, že o tom, jak rychle se bude nějaké těleso ohřívat nebo chladnout, rozhoduje jeho *tepelná kapacita*. Čím je jeho tepelná kapacita vyšší, tím pomaleji bude chladnout nebo se ohřívat. Pokud již umíte zacházet s derivacemi, tak časová změna teploty je dána rovnicí

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\Phi}{mc} \cdot T,$$

kde T je teplota tělesa, Φ je tepelný tok (pro chlazení je Φ záporné, pro ohřev kladné), m je hmotnost tělesa a c je jeho tepelná kapacita. Řešením této diferenciální rovnice je

$$T(t) = T(0) \cdot \exp\left(\frac{\Phi}{mc} t\right),$$

v našem případě chlazení je Φ , a tedy celý exponent, záporné. Budeme-li srovnávat chlazení dvou látek o stejné hmotnosti, zahřáté na stejnou počáteční teplotu $T(0)$ za stejných podmínek (tj. Φ je u obou látek stejné), pak pomaleji bude chladnout látka s vyšší tepelnou kapacitou. Φ je obecně funkcí teploty, v dobře izolovaných nádobách však můžeme předpokládat, že Φ je konstanta daná vlastnostmi nádoby.

Pozn.: Regresní koeficienty uvedené v Tab. 1 jsou určeny vzhledem k pokojové teplotě, tzn. funkce popisující experimentálně zjištěnou závislost má tvar

$T = T(\text{regr}) + T(\text{pokojová})$, kde $T(\text{regr})$ je teplotní závislost určená koeficienty v Tab. 1 (viz str.4).