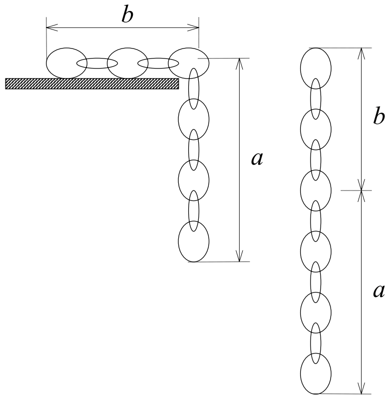
Řešení 5. série

Úloha V. 1 ... *řetízek babičky Julie* *(maximum 5 bodů, řešilo 87 studentů)*

Musím říci, že mne až překvapilo, kolik z vás si vylámalo zuby na tak jednoduché úložce z mechaniky. Mnozí jste se snažili problém řešit pohybovými rovnicemi, ale už vůbec ne každému se podařilo tento postup dotáhnout až do konce. A přitom existuje tak snadná cesta!

Protože platí $H > a + b$, tak v okamžiku opouštění stolu je celý řetízek ve vzduchu. Díky tomu můžeme jeho pohyb rozdělit do pouhých dvou fází, přičemž v první fázi ještě leží nějaká část řetízku na stole, ve druhé jde o prostý volný pád, kdy „sledujeme“ poslední článek řetízku (chceme vědět, v jakém okamžiku leží celý řetízek na zemi, tedy kdy dopadne tento poslední článek). V reálném případě by zřejmě již ležící část řetízku ovlivňovala část nalézající se ještě ve vzduchu (ať už kvůli nějakému tření uvnitř řetízku, nebo jen díky pouhému tvoření „hromádky“), ale od těchto efektů, stejně jako od toho, že řetízek je složen z článků, je radno při řešení odhlédnout. Dále budu řetízek považovat za homogenní.

Obr. A



Zaveďme tedy lineární hustotu $\tau = m/(a + b)$, kde m je hmotnost celého řetízku. Potom hmotnosti jednotlivých částí řetízku budou $m_a = \tau a$, resp. $m_b = \tau b$.

Jelikož stopky mačkáme až v okamžiku, kdy řetízek opouští stůl, stačí nám ve výše zmíněné první fázi pohybu znát pouze koncovou rychlost v_0. K jejímu určení použijeme zákon zachování mechanické energie. Celá část a, a tedy i její těžiště, poklesne o výšku b (viz Obr. A), těžiště části b poklesne o $b/2$. Odtud pro pokles potenciální energie máme

$$\Delta E_p = m_a g b + m_b g \frac{b}{2} = g\tau b\left(a + \frac{b}{2}\right). \qquad (1)$$

Tato se přemění zčásti na energii kinetickou E_k, zčásti na práci W potřebnou k překonání tření. Uvažme třecí sílu ve tvaru $F_t = fF_n$, kde f je koeficient tření a F_n síla působící kolmo na plochu. Rozdělíme-li si řetízek na mnoho malých kousků, můžeme si všimnout, že na každý bude působit stejná třecí síla (je-li řetízek homogenní), ovšem každý urazí po stole jinou dráhu. Je vidět, že vykonaná práce bude táž, jako kdyby celá část b urazila dráhu $b/2$. Bude tedy platit

$$W = F_t \frac{b}{2} = \tau g f \frac{b^2}{2}. \qquad (2)$$

Nyní už můžeme dosadit do zákona zachování mechanické energie $\Delta E_k = \Delta E_p - W$, odkud velice snadnou úpravou získáme hledanou rychlost

$$v_0 = \sqrt{\frac{gb}{a+b}\left(2a + b - fb\right)}. \qquad (3)$$

V druhé fázi pohybu jde o volný pád s nenulovou počáteční rychlostí, pro který platí

$$H = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gH} - v_0}{g}, \qquad (4)$$

přičemž uvedené řešení je jediný fyzikálně smysluplný (= kladný) kořen rovnice. Po dosazení rovnice (4) do (5) a následné malé úpravě získáme výsledek

$$t = \frac{\sqrt{b(2a+b-fb) + 2H(a+b)} - \sqrt{b(2a+b-fb)}}{\sqrt{g(a+b)}}. \qquad (5)$$

Jindřich Kolorenč

Úloha V. 2 ... *sportující elektrony* *(maximum 5 bodů, řešilo 93 studentů)*

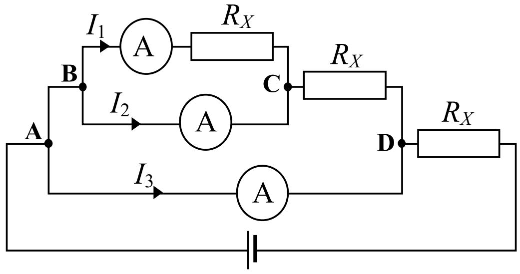
K řešení se můžeme dobrat pomocí Kirchhoffových zákonů (které se ale, pokud se dobře pamatuji, berou až někde ve vyšších ročnících), nebo s pomocí dvou všeobecně známých pouček a Ohmova zákona. Každý ať si vybere, co je jeho srdci bližší.

Nejdřív řešení *„bez Kirchhoffových zákonů“* (ty uvozovky proto, že tyto poučky jsou přímým důsledkem Kirchhoffových zákonů, i když se dají odvodit pouhou úvahou, jak je demonstrováno níže).

Pravidlo 1: V sériovém obvodu je proud ve všech částech obvodu stejný a součet napětí na jednotlivých částech obvodu je roven celkovému napětí v obvodu. Proud představuje množství přeneseného náboje za jednotku času. Toto množství musí být přeneseno všemi částmi obvodu, jinak by se někde náboj hromadil, tedy proud je všude stejný. Druhá část pravidla pak plyne z Ohmova zákona.

Pravidlo 2: V paralelním obvodu je napětí na všech větvích stejné a součet proudů v jednotlivých větvích je roven celkovému proudu v obvodu. Dle definice je napětí mezi dvěma body rovno rozdílu potenciálů v těchto bodech, který je stejný, ať jej měříme na kterékoli větvi obvodu. Druhá část pravidla pak plyne z Ohmova zákona.

Obr. B



Nyní k řešení obvodu. Obvod si můžeme překreslit do tvaru jako na obr. 2, z kterého je zřejmé, že kdyby měly ampérmetry nulový odpor, byl by mezi body **A** a **D** zkrat a muselo by platit $I_1 = I_2 = 0$.

Napětí mezi body **B** a **C** můžeme podle pravidla 2 vyjádřit jako

$$U_{BC} = R_A I_2 \quad \text{nebo}$$
$$U_{BC} = I_1(R_A + R_X).$$

Odtud dostáváme:

$$R_A I_2 = I_1(R_A + R_X), \qquad (1)$$

$$R_A = R_X \frac{I_1}{I_2 - I_1}. \qquad (2)$$

Napětí mezi body **A** a **D** můžeme podle pravidla 1 a 2 vyjádřit jako $U_{AD} = R_A I_3$ nebo $U_{AD} = R_A I_2 + R_X(I_1 + I_2)$, z čehož dostaneme:

$$R_A I_3 = R_A I_2 + R_X I_2 + R_X I_1. \qquad (3)$$

Dosadíme-li nyní za R_A z rovnice (2), máme

$$R_X \frac{I_1}{I_2 - I_1}(I_3 - I_2) = R_X(I_1 + I_2),$$

$$I_3 = \frac{I_2^2 - I_1^2}{I_1} + I_2 = \frac{I_2^2 + I_1 I_2 - I_1^2}{I_1}. \qquad (4)$$

Podle pravidla 1 a 2 vyjádříme celkové napětí

$$U = R_X(I_1 + I_2 + I_3) + R_A I_3 . \qquad (5)$$

Z této rovnice a z rovnic (2) a (4) vyjádříme R_X

$$U = R_X\left(I_1 + I_2 + \frac{I_2^2 + I_1 I_2 - I_1^2}{I_1}\right) + R_X\,\frac{I_1}{I_2 - I_1}\cdot\frac{I_2^2 + I_1 I_2 - I_1^2}{I_1},$$

$$R_X = \frac{UI_1(I_2 - I_1)}{I_2^3 - I_2^2 I_1 + 2I_2^2 I_1 - 2I_2 I_1^2 + I_2^2 I_1 + I_2 I_1^2 - I_1^3},$$

$$R_X = \frac{UI_1(I_2 - I_1)}{I_2^3 + 2I_2^2 I_1 - I_2 I_1^2 - I_1^3}.$$

Řešíme-li úlohu *pomocí Kirchhoffových zákonů* je asi nejvhodnější sestavit rovnice pro smyčky B–I_1–C–I_2, A–B–I_2–C–D–I_3 a A–I_3–D, čímž dostaneme rovnice (1), (3) a (5).

Vnitřní odpor ploché baterie bývá řádově několik ohmů, odpor vodičů je v praxi ještě mnohem menší, a můžeme je tedy zanedbat (i když odvolávání na praxi trochu pokulhává za situace, kdy odpor ampérmetru je 50 Ω).

Někteří z řešitelů považovali obvod za paralelní, což podle obr. 2 zřejmě není pravda. Poměrně dost řešitelů si neuvědomilo, že ampérmetry musí mít nějaký odpor, jinak by mezi body *A* a *B* byl zkrat, všechen proud by tekl větví 3, a platilo by $I_1 = I_2 = 0$. Velké množství vašich chyb také plynulo z toho, že jste sestavili soustavu rovnic, poměrně složitě ji řešili a v úpravách jste udělali chybu. Někteří si také neuvědomili, že proud je v mA, a pak jim vyšel odpor 0,15 Ω.

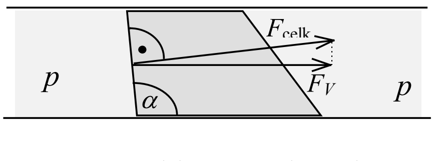
Martin Krsek

Úloha V. 3 ... *ucpaná roura* *(maximum 3 body, řešilo 118 studentů)*

Při řešení této úlohy vyjdeme nejprve z Pascalova zákona. Ten říká, že síla, kterou působí tlak na nějakou plochu je na tuto plochu kolmá a její velikost je rovna pS, kde p je tlak a S je velikost plochy. Levá stěna hranolu má plochu $S_L = S/\sin\alpha$. Velikost síly, která na levou stěnu působí, je tedy $F_{celk} = pS_L = pS/\sin\alpha$. Tato síla však nepůsobí v ose trubky, a proto ji musíme rozložit na dvě složky – vodorovnou a svislou. Svislá složka nás nebude zajímat, protože pohyb v tomto směru nenastane (nebudeme-li uvažovat destrukci roury). Zato vodorovná složka může zapříčinit pohyb kvádru podél trubice. Jaká je však její velikost? Ze situace na obr. 3 plyne, že velikost vodorovné složky síly je $F_V = F_{celk}\sin\alpha = (pS/\sin\alpha).\sin\alpha = pS$. Vidíme tedy, že velikost vodorovné složky síly nezávisí na úhlu α.

Analogický postup můžeme zopakovat pro pravou stranu hranolu. Opět dostaneme $F_V = pS$. Vzhledem k tomu, že tyto složky mají opačnou orientaci, jejich výslednice je tedy nulová a hranol se nemůže pohybovat zrychleně. Jeho zrychlení je tedy nulové.

Obr. C



Jako krásné intuitivní zdůvodnění tohoto výsledku může posloužit trubka se spojenými konci, ve které je umístěn hranol. Ten by se pak pohyboval se zrychlením, a kdybychom jej brzdili, získávali bychom mechanickou práci. Tak by se dalo zkonstruovat perpetum mobile.

Ale zdaleka nejkurióznější využití případného zrychlování hranolu navrhl jeden z vás ve vojenství. Do trubky na obou koncích otevřené (na obou stranách je atmosférický tlak) se vloží nesymetrický náboj. Vzhledem k tomu, že by se v trubici urychloval (podobně jako náš hranol), dostatečná délka trubice by zajistila dostatečnou rychlost výstřelu. Tak by se dalo bez jakéhokoliv hluku a bez střelného prachu střílet. Bohužel se hranol v trubici urychlovat nebude, a proto se nám asi nepodaří revoluci ve vývoji střelných zbraní vyvolat.

Jan Hradil

Úloha V. 4 ... *baron Prášil* *(maximum 4 body, řešilo 98 studentů)*

Úlohu si mírně idealizujeme. Budeme předpokládat, že rychlost dopadu bude nulová (jak snadno zjistíte dosazením do vzorce je, kinetická energie pro rozumnou rychlost výrazně menší než teplo, které koule vydá ochlazením na nulu), dále budeme předpokládat, že se taví led jen takový, který je v přímém styku s koulí, že koule nebude předávat žádné teplo vzduchu, že nedojde k destrukci ledu, že tloušťka ledu bude dost velká na to, aby se koule nepropadla až na dno, a tak podobně. Výsledná hodnota sice příliš přesná nebude, jako horní odhad však poslouží dobře.

Příklad jsme tak zredukovali na obyčejnou kalorimetrickou rovnici. Na jedné straně se ochlazuje koule ze 100 °C na 0 °C, na straně druhé taje led. Tedy $m_k c_k \Delta T = m_l l_t$, kde m_k je hmotnost koule, c_k měrná tepelná kapacita koule, $\Delta T = 100$ °C, m_l hmotnost roztátého ledu a l_t měrné skupenské teplo tání ledu. Uznávám, že zadány všechny tyto údaje nebyly (ale zase tam byly některé navíc!), což vám však nemělo zabránit v tom, abyste je případně vyhledali v tabulkách. Hmotnosti si rozepíšeme jako součin objemu a hustoty a tak dostaneme rovnici

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_k c_k \Delta T = V_l \rho_l l_t \qquad (*)$$

Nyní je třeba se zamyslet nad tím, jaký bude objem ledu. Jsou dvě možnosti: buď se koule ponoří méně než do poloviny svého objemu, a pak bude mít jáma vzniklá táním ledu tvar kulového vrchlíku. Nebo se ponoří hlouběji, a pak bude mít jáma tvar válce, na jehož dně bude „přilepena“ polokoule. Tedy dosazeno do vzorce to bude vypadat takto:

a) V prvním případě $V = \pi h^2 \left(R - \tfrac{1}{3}h\right)$,

kde h je hloubka vrcholu koule pod hladinou ledu, tzn. výška kulového vrchlíku, což dosazeno do vzorce (*) dává kubickou rovnici

$$\rho_l l_t h^3 - 3\rho_l l_t h^2 + 4R\rho_k c_k \Delta T = 0.$$

Tu nejlépe vyřešíme pro zadané hodnoty numericky. Tedy jinými slovy, nic dalšího už nebylo potřeba. Pokud jste si našli hodnoty konstant pro olovo a vyřešili s nimi tuto rovnici, vyšlo $h = 0{,}97\,R$, takže v reálu by to vypadalo tak, že olověná koule by byla v ledu do necelé poloviny.

b) V druhém případě $V = \pi R^2 h + \tfrac{2}{3}\pi R^3$,

kde h je hloubka středu koule pod hladinou ledu, tzn. výška onoho válce, což dosazeno do vzorce (*) dává vztah

$$h = \frac{2}{3}R\left(\frac{2\rho_k c_k \Delta T}{\rho_l l_t} - 1\right).$$

Po dosazení hodnot pro železo dostaneme výsledek $h = 0{,}89\,R$, tedy spodek koule je pod povrchem 1.89R, takže v reálu se železná koule zaboří do ledu skoro celá.

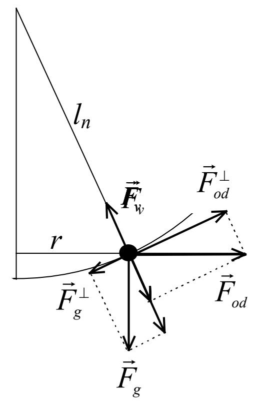
Co se týče došlých řešení, větší část řešitelů uvažovala pouze jednu z těchto dvou variant, za což byla odměněna polovinou bodů. Jak je vidět z dosazených konstant, není rozdělení na případy pustou teorií, skutečně pro dva naprosto běžné materiály se způsob řešení liší.

Je také nesmyslné uvažovat nějak výrazněji vliv regelace – styčná plocha koule s ledem je na to příliš velká. Když se postavíte na hladinu zamrzlého rybníka, tak také neklesnete ke dnu vlivem gravitace (ani na bruslích, kde je styčná plocha už docela malá).

David Stanovský

Úloha V. 5 ... *rotující kyvadýlka* *(maximum 5 bodů, řešilo 59 studentů)*

Obr. D



Předem bych chtěl upozornit na problém správného pochopení zadání úlohy. V zadání je uvedeno, že se kulička může pohybovat po kružnici o poloměru *l*. To mělo vést k úvaze o tom, že závěsy jsou pevné a umožňují pohyb **pouze** (toto slovo bohužel v zadání chybělo) po kružnici kolmé k tyčce. Většina z vás to tak pochopila, ale byli tací, kteří kvůli tomu řešili úlohu špatně.

Po roztočení soustavy na konstantní úhlovou rychlost ω se kuličky vychýlí z rovnovážné polohy na svislé ose (zatím nevíme, zda jde o labilní či stabilní rovnováhu) buď náhodnými fluktuacemi nebo nepatrným šťouchnutím.

Nejlépe soustavu popíšeme v neinerciální soustavě spojené s rotující tyčkou. Tam na kuličku působí síla gravitační, odstředivá a tahová síla vlákna. Rozložíme-li sílu gravitační a odstředivou na složky ve směru vlákna a složky kolmé na něj (viz obr. 4), mají pohybový účinek pouze složky kolmé. Pro velikosti těchto kolmých složek platí

$$F_g^{\perp} = mg \sin \alpha, \qquad F_{od}^{\perp} = m\omega^2 l_n \sin \alpha \cos \alpha.$$

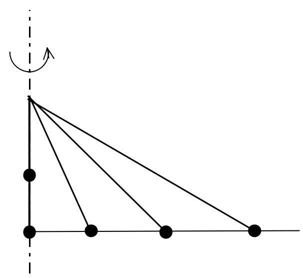
Výsledná síla je dána vztahem

$$F = m \sin \alpha \, (\omega^2 l_n \cos \alpha - g)$$

Je-li po nepatrném vychýlení kuličky gravitační síla větší než síla odstředivá, čemuž odpovídá podmínka (píšeme-li cos α = 1, pro velmi malé úhly vychýlení)

$$l_n < \frac{g}{\omega^2}$$

Obr. E



bude se pohybovat kulička zpět k ose a bude kmitat kolem stabilní rovnovážné polohy na této ose. Uvažujeme-li působení odporu vzduchu, ustálí se kulička na této ose.

Je-li naopak gravitační síla menší než odstředivá, bude se dál vychylovat od osy otáčení a bude kmitat kolem rovnovážné polohy dané podmínkou

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l_n}$$

plynoucí z rovnosti gravitační a odstředivé síly. Uvažujeme-li opět odpor vzduchu, ustálí se kulička v rovnovážné poloze a bude se pohybovat po kružnici se středem na ose otáčení. Rovnovážné polohy jsou tedy v konstantní vzdálenosti od vodorovné roviny procházející tyčkou, neboť platí vztah

$$h = l\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2}$$

Pohled z boku bude po ustálení vypadat jako na obr. 5.

Karel Houfek

Úloha V. 6 ... *exp. úloha z mechu a kapradí* *(maximum 8 bodů, řešilo 47 studentů)*

V této experimentální úloze šlo o to, že jste měli již hotovou „aparaturu" (tj. kapající vodovod) a vašim úkolem bylo odpozorovat vhodné přiblížení, se kterým bylo nutné dále počítat. Řada řešitelů však tento přístup ošidila tím, že prohlásila případ s kohoutkem za nevhodný a počítala si metodu svou. Tak se celkově objevily asi čtyři typy řešení:

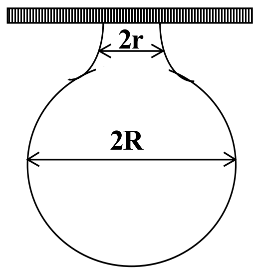
1) Nahrazení vodovodu trubičkou (resp. kapilárou) nebo injekční stříkačkou, tím se úloha převedla na jednoduchý případ, poněvadž kapka vznikala na celém průřezu trubičky, jejíž průměr se dal lépe či hůře změřit.

2) Pomocí kapilární elevace. Tato metoda je poměrně přesná, ale s kapajícím vodovodem toho má pramálo společného.

3) Kapková metoda, kdy necháme kapat určitý počet kapek kapaliny známého povrchového napětí a látky neznámého povrchového napětí. Velikosti povrchových napětí obou látek jsou pak v jistém poměru jako jsou hmotnosti „nakapaných látek". Často se jako kapalina známého povrchového napětí objevoval líh – zřejmě v některých domácnostech teče z kohoutků nejen voda teplá a studená, ale i „ohnivá".

4) Poslední metodou byla metoda s kapajícím vodovodem. Protože někteří z vás (jak již bylo zmíněno) se buď této metodě vyhnuli nebo řadu věcí možná předpokládali, ale neuvedli, probereme tuto metodu podrobněji.

Obr. F



První částí bylo pozorování tvoření kapek a experimentování se „škrcením" kohoutku. Dá to u některých kohoutků trochu více práce (např. u nových s kulovým ventilem), ale nakonec asi lze dobře docílit pravidelného kapání kapiček o průměru asi 3-4 mm. Kapičky se vytvářejí na okraji vodovodu nebo v nejnižším místě síťky perlátoru. To jak se vytvářely kapky přes celý průměr vodovodu (tj. asi 1,5-2 cm) bych docela rád viděl. Pozorováním jednotlivých kapiček si všimneme, že odtrhávající se kapka má tvar jako na obr. 6.

Tlak způsobený zakřivením plochy kapky je $p = 2\sigma/R$ a síla bránící v odtržení kapky je $F_k = p_k S$, kde S je plocha „zaškrcení" kapky, tedy $S = \pi r^2$. Pro F_k pak platí $F_k = 2\pi.\sigma r^2/R$. Odtrhávající síla je síla gravitační $F_g = mg$. K odtržení kapky dojde ve chvíli kdy $F_k = F_g$:

$$2\pi.\sigma r^2/R = mg = V\rho g, \qquad (1)$$

kde ρ je hustota vody.

Požadavkem na kulovitost kapky získáme vztah mezi R a V

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\,. \qquad (2)$$

Objem V zjistíme pomocí kalibrované skleničky. Necháme ji nakapat „po míru" a tento známý objem V_0 vydělíme počtem kapek k. Pak rovnici (1) lze psát

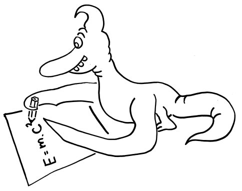
$$\frac{2\pi\sigma r^2}{\sqrt[3]{3V/4\pi}} = \frac{V_0 \rho g}{k}\,. \qquad (3)$$

Nyní stále zůstává problém velikosti r. Zde si opět pomůžeme pozorováním. Při mém měření bylo možno říci, že $r \approx R$ (byly i případy kdy $2r \approx R$ – viz nastavení kapání vodovodu). Finální vzorec má pak tvar

$$\sigma = \rho g.\sqrt[3]{\frac{\pi V_0^{\ 2}}{2k^2}} \qquad (4)$$

Vidíme, že nyní σ závisí jen na počtu kapek nakapaných do kalibrované skleničky. Přesnost tohoto měření není vysoká zvláště u odhadu r a nebo při použití zbytečně velké skleničky (mohli jste se v počtu kapiček poměrně dobře seknout). Přesto se hodnota povrchového napětí dala stanovit „docela slušně“, ale nechápu jak se někomu podařilo σ stanovit touto metodou s přesností na 0,5 % (inu i našvindlovat výsledky se musí umět).

Miroslav Panoš



Řešení 6. série

Úloha VI . 1 ... *gejzír na betoně* *(maximum 4 body, řešilo 75 studentů)*

Úvaha, která vede k cíli, je předpoklad, že jediná energie, kterou pytlík má, je energie potenciální a ta jediná se může případně měnit v teplo, potřebné na ohřátí vody. Kolik té energie je potřeba, vyplývá z kalorimetrické rovnice $\Delta Q = mc\Delta t + ml_t$, kde někteří z vás neuvažovali člen ml_t, podle toho, jak kdo pochopil zadání. Toto teplo musí být v ideálním případě, kdy se veškerá potenciální energie přemění na teplo dodané vodě v pytlíku přesně rovno potenciální energii. Jde o to, jak ji nejlépe odhadnout. Nejprve to zkusíme podle vztahu $E_p = mgh$. Pak z rovnosti $E = \Delta Q$ dostáváme pro výšku

$$h = \frac{c(t_v - t_0) + l_t}{g},$$

což pro $c = 4{,}18\ \mathrm{kJ.kg^{-1}.K^{-1}}$, $l_t = 2{,}26\ \mathrm{MJ.kg^{-1}}$, $g = 9{,}81\ \mathrm{ms^{-2}}$ a teplotu $t_0 = 20^0\mathrm{C}$, $t_v = 100^0\mathrm{C}$ dává $h = 264$ km (resp. $h = 34{,}1$ km nechceme-li, aby se voda změnila v páru). Jistě však uznáte, že při takové výšce se může projevit nehomogenita zemského gravitačního pole, a proto by bylo vhodné podívat se na to, jak se to projeví ve vztahu pro výpočet potenciální energie. Pokud považujeme Zemi a pytlík za koule, platí

$$\Delta E_p = -\kappa\frac{Mm}{R_Z + h} - (-\kappa\frac{Mm}{R_Z}), \qquad \text{a tedy} \qquad h = \frac{R_Z^{\ 2}(c\Delta t + l)}{\kappa M - R_Z(c\Delta t + l)};$$

$h = 275$ km či $h = 34{,}2$ km ($R_Z = 6370$ km, $M = 5{,}98.10^{24}$ kg, $\kappa = 6{,}67.10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$). Vidíme tedy, že tato korekce se projeví významěji pri vyšších výškách.

Co se bude dít, pokud započítáme odpor vzduchu? Tím, že se pytlík bude třít o vzduch, bude se zahřívat již před dopadem na zem, a proto dopadne pomaleji než bez odporu vzduchu. Při dopadu však bude mít již vyšší teplotu než na počátku. Ale část jeho potenciální energie se přemění na tepelnou energii vzduchu, který o něj třel, a proto bude třeba pytlík hodit z ještě větší výšky než bez odporu vzduchu. Také je jistě podstatné, že hustota vzduchu se s výškou značně změní.

Jan Hradil

Úloha VI . 2 ... *rtuťová koupel* *(maximum 5 bodů, řešilo 53 studentů)*

Jak se můžete přesvědčit z výsledků, z celkového množství došlých úloh jen pár jich dostalo plný počet bodů. Důvodem byla u mnohých v první řadě chybná domněnka, že uvolněnou energií se myslí rozdíl potenciálních energií rtuťových sloupců před a po ději. Tento rozdíl jste ani nemohli určit, pokud jste – jako mnozí mlčky – nepředpokládali stejnou výšku hladin před uvolněním záklopky. Kupodivu, za zmíněných předpokladů dala tato chybná úvaha správný výsledek. To už se prostě stává.

Někteří se dokonce snažili tvrdit, že je soustava izolovaná, a žádná energie se tedy neuvolňuje. To se dá odbýt snadno faktem, že soustava zřejmě sama nepřejde zpět do původního stavu, a tedy nemůže jít o rovnovážný děj. Práce, kterou koná plyn v nádobě, se zčásti přemění na potenciální energii (a povrchovou energii rtuti, kterou lze do jisté míry chápat také jako potenciální) a zčásti na kinetickou – pohyb rtuťového sloupce, který se dříve nebo později třením zastaví – což je uvažovaná uvolněná energie.

Ukazuje se nám tady ale cesta ke správnému řešení. Množství uvolněné energie je rovno práci, kterou musíme vykonat, abychom dostali systém z konečného do původního stavu. Proti nám působí tlak plynu v nádobě p_n, který je ovšem po celou dobu konstantní (uvažujeme, že změna hladiny v nádobě je mnohem menší než výška vzduchu v nádobě a relativní změna tlaku, úměrná relativní změně objemu, je zanedbatelná). Naopak pomáhá nám konstantní kapilární deprese rtuťového sloupce (tlak p_k) a rozdíl hydrostatických tlaků v trubici a v nádobě $p_h = x\rho g$ (x je rozdíl hladin). Na počátku naší práce jsou ovšem tyto tlaky vyrovnány ($p_{h0} + p_k - p_n = 0$) a během ní se mění pouze výška rtuťového sloupce: rozdíl tlaků, proti kterým musíme působit, snadno určíme jako tuto změnu: $\Delta p = -(x - x_0)\rho g$. Zároveň se zvyšuje hladina rtuti v nádobě v poměru s/S, což můžeme zanedbat; v opačném případě vynásobíme předchozí výraz faktorem $(1 + s/S)$. Chceme-li určit celkovou práci, musíme pak provést integraci

$$W = \int_{x_0}^{x_0-h} \Delta p\, s\, dx = \int_{x_0}^{x_0-h} -\left(x - x_0\right)\rho g s\left(1 + \frac{s}{S}\right) dx = \int_0^h x\,\rho g s\left(1 + \frac{s}{S}\right) dx = \frac{1}{2} h^2\, \rho g s\left(1 + \frac{s}{S}\right).$$

Integrace je samozřejmě triviální – pokud vám ovšem přesto tento pojem nic neříká, můžete se spokojit s tím, že za velikost Δp, která roste *lineárně* s x, dosadíte střední hodnotu odpovídající $x = x_0 - h/2$. Dostanete pak stejný výsledek, jako při předchozí integraci.

Můžeme se ještě vrátit k otázce energetické bilance. Při přibližně izobarické expanzi vykoná plyn práci $p_n\,\Delta V = p_n\,\Delta h\, S = p_n\, h\, s$, poslední rovnost je dána zachováním objemu rtuti v soustavě. To vede ke zvýšení potenciální energie rtuti o $sh\,(x_0 - h/2)(1 + s/S)\rho g$ (je zajímavé, že někteří se domnívali, že právě tato energie je příčinou celého pohybu). Dále působením proti kapilárnímu tlaku se zvýší povrchová energie o $p_k hs$. Zbylý rozdíl, dosadíme-li za $p_n = p_{h0} + p_k$, je pak roven právě výše uvedenému výsledku.

Filip Münz

Úloha VI . 3 ... *kap, kap* *(maximum 3 body, řešilo 62 studentů)*

Základní problém úlohy byl skryt již v zadání a to ve slovíčku *vypařuje*. Tím jsme mysleli rychlost vypařování, tedy procentní úbytek objemu za čas v závislosti na velikosti kapky. Kdyby nás zajímalo, která kapka se *vypaří* dříve, tak by tam byl právě tento vid dokonavý. Více než polovina řešitelů to pochopila tak, jak jsme chtěli, a tak za tu výrazně jednodušší variantu úlohy jsem dával málo bodů. Řešení by bylo skutečně triviální: než větší kapka zmenší svoji velikost na úroveň té menší, bude to trvat jistý čas. Potom už bude trvat oběma kapkám stejnou dobu, než se zcela vypaří, a tak ta větší kapka bude nad plotnou pochopitelně déle.

Nejprve bych popsal, co se tam vlastně děje. Budu uvažovat kulový tvar kapky. Když dopadá na horkou plotnu, začne se (zejména) na spodní straně intenzivně vypařovat. Tyto páry vytvoří pod ní vzduchový polštář, takže na plotnu nedopadne. Zároveň pára ji i mírně izoluje od výrazně teplejší plotny, takže se hned nevypaří celá. Díku tomuto oblaku páry se celá kapka bude nacházet přibližně ve stejné teplotě (vyšší části kapky budou v menší teplotě, ale to jenom nahrává pomalejšímu vypařování větší kapky). Tedy kapka bude celým svým povrchem přijímat přibližně stejné teplo. Protože ale vzduch je výrazně teplejší než kapka, toto teplo se spotřebuje více na vypaření povrchové vrstvy kapky, než na ohřátí celé kapky na teplotu varu. Mimochodem, teplo potřebné na ohřátí na teplotu varu je stejně možné zanedbat, neboť je celkem výrazně menší, než skupenské teplo varu.

Pusťme se tedy do výpočtu. Větší rychlostí vypařování míníme, že za stejný časový úsek Δt ubyde více procent hmoty kapky $\Delta m/m$. Za čas Δt přijme kapka teplo ΔQ, které je úměrné ploše a času.

$$\Delta Q \approx S\Delta t \approx r^2 \Delta t$$

Toto teplo se využije na vypaření Δm vody.

$$\Delta m = \frac{\Delta Q}{l_t} \approx r^2 \Delta t$$

Ale hmotnost je úměrná objemu, který je úměrný třetí mocnině poloměru kapky, takže lze psát

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta m}{m} \approx \frac{r^2 \Delta t}{r^3} = \frac{\Delta t}{r}$$

Z toho plyne, že čím větší poloměr kapky, tím menší je rychlost vypařování.

Je zde sice nějaké to zjednodušení – zejména tedy opomíjím to, že kapka nejvíce vypařuje na spodní části (tj. na té, která je nejblíže plotně), ale uvědomte si, že tato chyba je taktéž úměrná ploše. Stejně je na tom i to ohřívání celé kapky na teplotu varu (spotřeba tepla opět úměrná objemu).

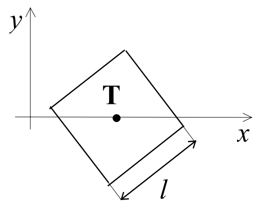
Ke stejnému závěru vede tato zajímavá úvaha: Nad zakřivenějším povrchem kapaliny je větší tlak nasycených par (na to přijdete tak, že si uvědomíte, co vlastně pojem tlaku nasycených par znamená). Kapka se vypařuje, protože není v rovnováze se svými nasycenými parami a vypařuje se tím rychleji, čím je větší rozdíl mezi tlakem nad povrchem kapky a tlakem nasycených par.

David Stanovský

Úloha VI . 4 ... *žabák Břéťa* *(maximum 5 bodů, řešilo 65 studentů)*

Problém budeme řešit v rovině kolmé na desku a za předpokladu, že žabák doskočí na opačnou stranu desky vzhledem k těžišti (obr. 7). Díky tomuto předpokladu dodá Břéťa desce pouze hybnost nikoli však moment hybnosti. V opačném případě bychom do pohybu museli započítat rotační pohyb desky kolem osy kolmé na desku se středem v **T** (obr. 8).

Obr. G



Nyní naši rovinu zavedeme tak, že osa z bude vertikální a osa x ve směru projekce dráhy na desku. Díky zanedbání ponoru se zachovává pouze x-ová složka hybnosti: $|p_{xz}| = |p_{xd}|$, $v_{xz} m + v_{xd} M = 0 \Rightarrow$

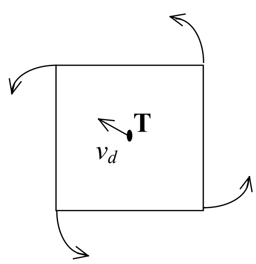
$$v_{xd} = v_{xz}\, m/M\,, \qquad (1)$$

kde $v_ž = (v_{xž}, 0, v_{zž}) = (v_x, 0, v_z)$ je rychlost žabáka a $v_d = (v_{dx} = v_d, 0, 0)$ rychlost desky.

Žabák za dobu t urazí vzdálenost $a_1 = v_x t$ a deska $a_2 = v_d t$; chceme, aby žabák dopadl na opačný konec desky: $a_1 + a_2 = a$, kde $a \in \langle l, l\sqrt{2}\rangle$ podle toho, kde na desce se nachází před skokem

$$v_d t + v_x t = a \qquad (2)$$

Obr. H



Z (1) dosadíme za v_d: $v_x\, mt/M + v_x t = a \Rightarrow$

$$t = \frac{a}{v_x}\left(\frac{M}{m+M}\right) \qquad (3)$$

Zanedbáme-li odpor vzduchu, pak se Břéťa pohybuje jako při šikmém vrhu a pro v můžeme psát $v_z = \frac{1}{2} g t$ a po dosazení

$$v_z = \frac{ag}{2v_x}\left(\frac{M}{m+M}\right) \qquad (4)$$

Toto je závislost velikosti z-ové složky rychlosti na x-ové. Nyní určíme závislost velikosti rychlosti na úhlu α odrazu vůči hladině vody.

$$tg\alpha = \frac{v_z}{v_x} = \frac{ag}{2v_x^{\,2}}\left(\frac{M}{m+M}\right) \qquad (5a)$$

$$|v| = \sqrt{v_x^{\,2} + v_z^{\,2}} \qquad (5b)$$

Po dosazení z (5a) a (4) do (5b) získáme $|v| = \sqrt{\frac{ag}{\sin 2\alpha}\left(\frac{M}{m+M}\right)}$ (6)

Zde vidíme, že $|v|$ je závislá na jediném parametru . V obecném případě nám přibudou počáteční podmínky – úhel směru odrazu vůči staně desky a vzdálenost od rohu desky.

Marcel Fuciman

Úloha VI . 5 ... *Studentova žárovka* *(maximum 5 bodů, řešilo 45 studentů)*

Studentova žárovka vás, jak se zdá, zaujala. Není se co divit, UFO také člověk nevidí každý den. Jaké tedy mělo být správné řešení? Nevíme. Pokus byl proveden pouze jednou a v nepřítomnosti organizátorů FKS. K dispozici byla pouze výpověď někdejšího Studenta a dvě fotografie, které jsme se vám snažili zreprodukovat v co možná nejlepší kvalitě. Většina z vás se přikláněla k vedení proudu termoemisí nebo výbojem ve zbytkovém plynu žárovky. Nyní fakta:

a) vzdálenost mezi konci roztrženého vlákna je odhadem 5 mm,
b) konce přiléhající k vodícím (nosným) drátkům svítí o něco jasněji,
c) proud tekoucí vláknem je asi 0,2 A (odhad),
d) v baňce je buď vakuum nebo trocha inertního plynu (dusík, argon).

Co z toho plyne? Výboj v plynu nemohl být doutnavý, ten totiž proud 0,2 A nepřenese. A výboj, který by přenášel tak velký proud by byl zajisté vidět.

Termoemise je silně závislá na teplotě vlákna a na jeho uspořádání. Vlákno žárovky není totiž uzpůsobeno býti termoemisní katodou, takže lze počítat s dolní hranicí účinnosti. V knize *Fyzikální elektronika pevných látek* (L. Eckertová, Univerzita Karlova 1992) se na straně 204 píše: ...termoemisní proud wolframových katod je 2-10 mA/W (emisní proud na watt příkonu) a provozní teplota vlákna 2500K. Naše žárovka byla 60 W, tj. pokud uvážíme dolní hranici emisního proudu dostaneme proud 0.12A, což už alespoň řádově souhlasí. Pro hypotézu termoemise navíc hovoří více svítící konce přerušeného vlákna a fakt, že po delším zhasnutí (2s) se žárovka již nerozsvítila, termoemise je teplotně silně závislý jev. Tedy čistě teoreticky by to možné býti mohlo.

Jako nejtriviálnější řešení se nabízí méně fantastičtější možnosti. Drátky mohly být někde zkratovány. Ano, na fotce to sice není vidět, někde se před našimi zraky mohly skrytě spojit zahřáté drátky, po ochladnutí došlo ke kontrakci, a tak k přerušení spojení.

Další hypotézou je, že se na skle při přepálení vlákna napařila tenká vrstvička wolframu, dostatečně silná na to, aby udržela náš proud kolem 100 mA. To je zajímavý problém na fyziku tenkých vrstev. Zajisté jste si někdy povšimnuli, že přepálená žárovka je „začouzená“. Toť právě ten wolfram, má však tu nevýhodu, že při napařování tvoří drobné ostrůvky, málo vhodné k vedení proudu. Proto by výboj při přepálení vlákna musel doslova napařit kousek wolframu na sklo mezi podpůrná vlákna, a to z naší fotografie vidět není. Bohužel po delším vypnutí by se napařená vrstva nepřerušila a svítila by dále.

Musím však zdůraznit, že na potvrzení té či oné hypotézy nám chybí fakta. Ve fyzice platí, že jedno pozorování = žádné pozorování (i vás jsme trápili slavnou teorií chyb měření), pozorovaný jev musí být zkoumatelný a hlavně **opakovatelný**. Téměř nikdo z vás si toto neuvědomil, jen jeden jedinec podotkl, že takhle svítící žárovku by chtěl vidět.

Skutečný důvod oné události v časech hluboké totality však už nezjistíme. Pozorujte proto bedlivě své žárovky a žárovičky, možná se vám podaří detailněji zachytit stejný případ. A možná přijdete na to, čím to bylo. A pak nám, prosím, dejte vědět.

Standa Daniš

Úloha VI . 6 ... *hledání jednoho malého bodu* *(maximum 8 bodů, řešilo 54 studentů)*

Pro určení ohniskové vzdálenosti čočky jste vymysleli celkem šest způsobů. Nějčastěji jste ji měřili metodou přímou (tj. z definice), dalšími variantami byla Abbeova a nebo Besselova metoda. Nepříliš častá byla metoda určování ohniskové vzdálenosti čočky z jejích rozměrů (poloměrů křivostí ploch). Výsledkem posledních dvou metod byly hodnoty, které měly k ohniskové vzdálenosti čočky poněkud daleko.

Nyní k jednotlivým metodám.

1. Metodou přímou měříme vzdálenost ohniska od středu čočky. Používáme přitom svazek rovnoběžných paprsků, které se po průchodu čočkou soustřeďují v ohnisku. Nedostatkem této metody je nutnost měřit vzdálenost ohniska od středu čočky, což pro tlusté čočky způsobuje problémy.

2. Besselova metoda. Pokud umístíme předmět a stínítko na vzdálenost alespoň $4f$ (kde f je ohnisková vzdálenost) od sebe a mezi ně vložíme čočku, existují dvě polohy čočky, kdy je obraz předmětu na stínítku ostrý. Označíme-li vzdálenost poloh čoček Δ a e vzdálenost předmětu a stínítka, pak pro ohniskovou vzdálenost dostaneme

$$f = (e^2 - \Delta^2)/4e.$$

Při této metodě odpadá nutnost měřit pozice středu čočky, stačí znát jejich rozdíl. Uvedená metoda je z tohoto důvodu nejpřesnější.

3. Abbeova metoda. Předmět a čočka jsou pevně uchyceny, stínítkem posouváme do té doby, než je obraz předmětu ostrý. Pro ohniskovou vzdálenost čočky platí

$$f = aa'/(a + a'),$$

kde a je vzdálenost čočky od předmětu, a' vzdálenost čočky od obrazu. O této metodě platí totéž co o metodě přímé.

4. Geometrická metoda spočívala v určení poloměrů křivostí (R_1, R_2) optických ploch. Pokud známe index lomu skla čočky, ohniskovou vzdálenost dopočítáme ze vztahu $1/f = n_{12}(1/R_1 + 1/R_2)$. Poloměry křivosti nedokážeme jednoduchou metodou určit přesněji než s chybou 20%. Index lomu skla většinou neznáme, pohybuje se v rozmezí 1,5 až 1,8. Tato metoda není proto vhodná ani pro orientační měření ohniskové vzdálenosti, mohla by se použít naopak – určit index lomu při známé ohniskové vzdálenosti.

Vzorové vypracování úlohy: Besselova metoda

Teorie: viz výše.

Výsledky měření: Předmět a stínítko jsme umístili do vzdálenosti 100 cm a 110 cm a změřili jsme polohy čočky při ostrém obrazu na stínítku. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce.

Tab. 1 – Hodnoty měření Δ a *e*

e (cm)	100	100	100	100	110	110	110	110	110
Δ (cm)	30,9	30,5	30,4	30,1	46,1	46,3	46,3	46,1	46,0
f (cm)	22,61	22,67	22,69	22,73	22,67	22,63	22,63	22,67	22,69

průměrná hodnota ohniskové vzdálenosti .... 22,67 cm
směrodatná odchylka .... 0,03 cm
systematická chyba .... 0,05 cm

celková odchylka .... 0,06 cm

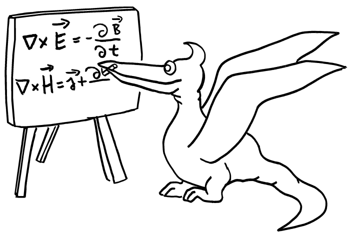
Ohnisková vzdálenost čočky je (22,67 ± 0,06) cm.

Závěr: Určili jsme ohniskovou vzdálenost čočky f = (22,67 ± 0,06) cm. Jediným zdrojem nepřesností jsou chyby při měření poloh čočky, stínítka a předmětu. Celkovou odchylku by bylo možno zmenšit jedině použitím optické lavice s přesnějším nastavením pozic. (bylo by možno odečítat vzdálenosti s přesností na 0,1 mm)

Literatura:

[1] Bakule, Šternberk: Fyzikální praktikum II, elektřina a magnetismus, SPN Praha 1989

Vladimír Slavík



Seriál na pokračování

Řešení úlohy S . 6 *(maximum 4 body, řešilo 21 studentů)*

Mějme trubici o poloměru R a délce l, na jejích koncích rozdílné tlaky p_1 a p_2. Rozdílem tlaků vzniká v trubici proudění. To je ovšem (u newtonovské viskózní kapaliny) omezováno třením v kapalině s koeficientem η; tento proces lze popsat vztahem

$$F = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} S ,$$

uvedeným v minulé části seriálu. Zde S je obsah ploch, které se o sebe třou, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r$ je spád rychlosti na vzdálenosti od středu trubice směrem ke krajům, F je třecí síla.

Ve vzdálenosti r od středu trubice je tedy třecí síla

$$F = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} 2\pi r l ,$$

ta vyrovnává při ustáleném proudění sílu působící na sloupec kapaliny způsobenou rozdílem tlaků

$$F' = (p_2 - p_1)\pi r^2 \quad \text{a samozřejmě}$$

$$F = F' .$$

Po dosazení do posledního vztahu lze vyjádřit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{p_2 - p_1}{2\eta l} r , \qquad \text{což integrujeme na} \qquad v = -\frac{p_2 - p_1}{4\eta l} r^2 + c ,$$

kde ona konstanta k v nápovědě k integrování je

$$k = -\frac{p_2 - p_1}{4\eta l} .$$

Mluvilo se též o okrajových podmínkách úlohy. V tomto případě je rozumné požadovat, aby rychlost $v = v(r)$ (v je funkcí r) byla na stěnách trubice nulová, tj.

$$v(R) = 0 .$$

Dosadíme do vyjádření pro rychlost

$$0 = -\frac{p_2 - p_1}{4\eta l} R^2 + c , \quad \text{z toho} \qquad c = \frac{p_2 - p_1}{4\eta l} R^2 .$$

Celkově tedy (po dosazení za c)

$$v = \frac{p_2 - p_1}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right) \quad \text{nebo také} \quad v = \frac{1}{4\eta}\frac{dp}{dl}(R^2 - r^2)\,.$$

Tím končím letošní ročník Seriálu na pokračování. Snad se vám alespoň trochu líbil.

Michal Hvězda

Naše adresa: FKS, KTF MFF UK
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha