

11. ročník, úloha II. P ... automobily (5 bodů; průměr ?; řešilo 53 studentů)

Představte si, že po přímé silnici jedou dva automobily o hmotnosti m konstantní rychlostí v . Jeden z nich pak zrychlí na rychlost $2v$ a jeho kinetická energie se tím zvětší o $3mv^2/2$. Při pohledu ze soustavy spojené s druhým autem zrychlí první za nulové rychlosti na rychlost v , čímž získá kinetickou energii $mv^2/2$. Vysvětlete, jak je to možné, když z hlediska obou soustav by se měla uvolnit stejná energie paliva.

Úspěšné vyřešení úlohy (za 5 bodů) požadovalo popis děje v obou soustavách a vysvětlení odlišností. Řešení založená na existenci význačné inerciální vztažné soustavy, spotřebě paliva odlišné hmotnosti v obou soustavách apod. jsou z hlediska fyziky zcela nesmyslná, tedy byly hodnoceny 0 body.

Před započítáním řešení si musíme uvědomit, že práce je veličina charakterizující míru změny energie, ale není to energie. Zejména tedy neplatí žádný zákon zachování práce a energie. Označme jako S_1 soustavu spojenou s vozovkou a jako S_2 soustavu spojenou s nezrychlujícím automobilem. Vypočteme práci, kterou vykonají síly motoru a síly třecí (pro jednoduchost předpokládejme rovnoměrně zrychlený pohyb). Síla třecí je ta, která uděluje automobilu zrychlení, což snadno ověříme myšlenkovým pokusem. Kdyby byl automobil zavěšen tak, aby se jeho kola nedotýkala vozovky, určitě by se nerozjel. Jaká je tedy práce třecích sil? Ta je určena vzorcem

$$W = Fs,$$

kde $F = ma = mv/t$ a s je dráha, po které působí. V soustavě S_1 je $s_1 = 3vt/2$, v soustavě S_2 je $s_2vt/2$. Každý snadno ověří, že změna kinetické energie je rovna práci, kterou vykonají třecí síly. Zrychlení tedy automobilu uděluje vozovka. Motor otáčí koly automobilu. Podrobnější úvahou lze zjistit, že práce vykonaná silami motoru, tedy i spotřeba paliva, je v obou soustavách stejná a je rovna F vynásobené obvodem kol a počtem otáček, které vykonají. Práce vykonaná motorem je rovna

$$W = \frac{m v R}{t} \frac{3vt}{2R} = \frac{3mv^2}{2}.$$

Nyní ovšemže musíme najít odpověď na otázku, kam zmizel zbytek energie paliva v soustavě S_2 . Klíč k vyřešení této záhady tkví v pozorování, že soustava S_1 ani S_2 není inerciální, neboť v nich neplatí zákon zachování hybnosti. Tuto drobnou vadu odstraníme tím, že zvolíme (nyní již inerciální) soustavy S'_1 a S'_2 , které se na počátku uvažovaného děje pohybují nulovou rychlostí (S'_1) nebo rychlostí v (S'_2) vůči zemi. Jestliže jsme již připustili myšlenku, že se automobil odráží od země, musí se i země odrážet od automobilu a tedy zrychlovat. Označme hmotnost země (ve smyslu podložky) M a vypočítejme celkovou kinetickou energii automobilů a země v obou soustavách na začátku a na konci děje. K určení rychlosti země na konci děje použijeme zákon zachování hybnosti. V soustavě S'_1 na začátku děje je celková kinetická energie

$$E_{k,1,1} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2.$$

Pokud má automobil zrychlit, musí za zákona zachování hybnosti předat stejně velkou, ale opačně orientovanou hybnost zemi. Tedy

$$v_z M = vm$$

a odtud $v_z = m/M \cdot v$. V soustavě S'_1 na konci děje je celková kinetická energie

$$E_{k,1,2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m(2v)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v\right)^2 = \frac{5}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v^2.$$

V soustavě S'_2 na začátku děje je celková kinetická energie

$$E_{k,2,1} = \frac{1}{2} Mv^2.$$

V soustavě S'_2 na konci děje je celková kinetická energie

$$E_{k,2,2} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} M \left(v + \frac{m}{M}v \right)^2 = \frac{3}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{M} v^2.$$

V obou případech je rozdíl celkové kinetické energie na začátku a na konci děje roven $\frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(m^2/M)v^2$, což je za předpokladu, že m je řádově menší než M , rovno vnitřní energii, kterou ztratilo palivo v motoru automobilu. Tímto je celý „problém“ úspěšně vyjasněn.

Daniel Král