12. ročník, úloha II . E ... *koulení* *(8 bodů; průměr ?; řešilo 39 studentů)*

Sežeňte si několik (cca 6) předmětů kulového tvaru. Může jít například o míček na pingpong, tenis, fotbalový míč, ocelovou kuličku, hliněnou kuličku ... Změřte jejich momenty setrvačnosti. Navrhněte a proveďte další měření, s jejichž pomocí budete moci určit, zda se jedná o dutou nebo plnou kouli.

Měřit moment setrvačnosti bylo možno několika způsoby. Například, jak už napovídá název, koulením z nakloněné roviny a změřením rychlosti rovnoměrného pohybu po projetí nakloněnou částí, či přímo měřením doby projetí po nakloněné části. Též se objevila metoda měření kmitů kyvadla vzniklého zavěšením koule těsně u povrchu. Nutno poznamenat, že tato metoda byla u větších koulí nejpřesnější. Našli se však i tací, kteří pouze změřili poloměr a hmotnost a moment setrvačnosti vypočítali podle známého vzorce

$$J = \frac{2}{5} mr^2 .$$

Někteří však zapomněli, že tento vzorec platí pouze pro koule homogenní, navíc touto metodou nelze určit, zda je koule dutá. Nejlepší metoda, jak zjistit dutost koule byla vyjádřit si její moment setrvačnosti jako

$$J = kmr^2 . \tag{1}$$

Potom $k = \frac{2}{5}$ je pro kouli plnou a $k = \frac{2}{3}$ je pro ideální kulovou slupku, o něco méně tedy pro reálnou dutou kouli s tenkou stěnou.

1. měření koulením

Máme tedy nakloněnou rovinu délky s a výšky h a kouli o hmotnosti m a poloměru r. Ze zákona zachování energie na konci nakloněné roviny můžeme psát

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{rot} ,$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 .$$

Pokud za J dosadíme z (1) a za v ze zrychleného pohybu $v = 2s/t$, můžeme pro k psát

$$k = \frac{ght^2}{2s^2} - 1 .$$

Nutno poznamenat, že se zde projeví vliv třecích sil. Valivé tření o podložku lze zmenšit vhodnou volbou podložky, nejlépe co nejtvrdší (dřevo, kov), odpor vzduchu se zase méně projeví u menších koulí. Nevýhodou této metody je, že krom tření se zde projevuje též chyba vzniklá měřením krátkých časů.

2. měření kýváním

Osu kývání musíme umístit co nejblíže ke středu koule, aby měření bylo co nejpřesnější. Vztah pro periodu kmitů pak můžeme psát jako

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J + md^2}{mgd}} ,$$

kde d je vzdálenost mezi osou a středem koule. Lze se snadno přesvědčit, že pro $md^2 \gg J$ se tento vztah redukuje na známý vztah pro matematické kyvadlo.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}\,.$$

Opět můžeme dosadit za J z (1) a pro k psát

$$k = \frac{\frac{T^2}{4\pi^2}\,gd - d^2}{r^2}\,.$$

Osa kývání musí být co nejblíže kouli, proto je třeba závěs udělat co nejlepší. Zůstává problém určení d. Zda určit délku závěsu a přičíst poloměr nebo změřit vzdálenost osy a spodního vrcholu koule a poloměr odečíst. Záleží na aparatuře a pomůckách, která metoda je lepší. Výhodou této metody je, že se zde tolik neuplatňuje tření a můžeme měřit delší časy, proto je tato metoda přesnější pro větší koule, kde můžeme dobře uchytit závěs.

Příklady měření

1. metoda koulení
   dráha: $s = (200{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$
   výška: $h = (36{,}8 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$
   doba koulení: t_i

veličina	t [s]	
koule	plná	dutá
	1,7	1,9
	1,8	2,0
	1,8	2,0
	1,7	2,0
	1,7	1,9
průměr	1,74	1,96
chyba	0,02	0,02
k	0,36	0,73
chyba	0,03	0,04

2. metoda kývání
   délka závěsu: plná — $d = 78\,\mathrm{mm}$,
   dutá — $d = 128\,\mathrm{mm}$
   doba 50 kmitů: t_i

veličina	t [s]		$2\pi r$ [cm]	
koule	plná	dutá	plná	dutá
	30,0	44,6	20,0	75,7
	29,7	44,7	20,2	75,5
	29,9	44,6	20,0	75,5
	30,0	44,3	20,0	75,8
	29,8	44,7	20,1	75,6
průměr	29,88	44,58	20,06	75,62
chyba	0,06	0,07	0,04	0,06
k	0,38	0,658		
chyba	0,03	0,008		

Je vidět, že pro plnou kouli se k blíží k $\frac{2}{5}$ a pro kouli dutou k $\frac{2}{3}$, přičemž přesnější je měření metodou kývání.

V tabulkách byly použity některé hodnoty, jejichž autorem je Jan Houštěk.

Nakonec bych jen dodal pro některé snaživé řešitele, že opravdu není třeba uvádět výsledky měření a výpočtů na 8 platných číslic, když chyba měření je kolem 10 %.

Jiří Libra

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.