

JIŘÍ FRANTA A KOLEKTIV

# Fyzikální korespondenční seminář

XIII. ročník – 1999/2000





# Předmluva

Milý čtenáři,

publikace, kterou máš právě v rukou obsahuje zadání a řešení úloh XIII. ročníku FYKOSu (Fyzikálního KOrespondenčního Semináře MFF UK), který proběhl ve školním roce 1999/2000.

Co je to FYKOS? Je to především korespondenční soutěž o fyzice určená pro studenty středních škol. V průběhu roku vypadá seminář tak, že řešitelé pravidelně (každých šest týdnů) obdrží sérii sedmi úloh, z nichž je pět teoretických (pátá, označená P, je „problémová“), jedna experimentální a poslední se tematicky váže k Seriálu na pokračování, který rozvíjí znalosti řešitelů v jedné konkrétní oblasti fyziky. Letos byl věnován polovodičové elektronice. Účastníci řeší úlohy dle vlastního výběru (aktivnější i všechny) a poté svá řešení posílají na adresu semináře. Organizátoři úlohy opraví, obodují a zašlou zpět účastníkům, kteří se takto seznámí se vzorovými řešeními a dozví se o chybách svých vlastních postupů. Zásilky úloh a řešení jsou doplňovány průběžnou výsledkovou listinou a na konci každého ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Kromě vlastní korespondenční soutěže dnes k semináři neodmyslitelně patří dvě každoroční soustředění, která představují týden plný fyzikální i nefyzikální zábavy v některém malebném koutě naší vlasti. Probíhají vždy na jaře a na podzim a jsou dobrou motivací a odměnou pro nejlepší účastníky. Dále FYKOS ve spolupráci s jednotlivými katedrami MFF a ústavy Akademie věd pořádá Den s experimentální fyzikou, při kterém naši řešitelé mohou navštívit několik pracovišť, kde se dělá „opravdová fyzika“.

V této ročence najdeš na začátku kompletní zadání teoretických a experimentálních úloh, následně jejich řešení (teoretická jsou z praktických důvodů oddělena od experimentálních), v další části je pak Seriál na pokračování, který je doplňován úlohami svázanými s daným tématem. Na konci pak najdeš soupisku nejlepších řešitelů.

Trocha statistiky na závěr: XIII. ročníku FYKOSu se zúčastnilo celkem 197 řešitelů, kteří nám zaslali celkem 2728 jednotlivých úloh k opravení. 39 řešitelů se zúčastnilo všech šesti sérií.

Pokud tě tato ročenka nadchne natolik, že by ses chtěl přihlásit k soutěžení v semináři nebo se jen na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neboj se a napiš nám. Jsme k dispozici téměř nepřetržitě na adrese

FYKOS

Matematicko-fyzikální fakulta UK — UTF

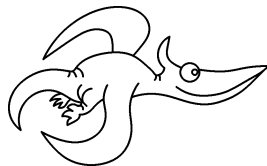
V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

e-mail: [fykos@mff.cuni.cz](mailto:fykos@mff.cuni.cz)

www: <http://www.mff.cuni.cz/news/fks>

tel: (02) 2191 2493 (záznamník Ústavu teoretické fyziky)



## Zadání úloh

### Úloha I.1 ... trháni nitě

Mějme pevně upevněný válec o poloměru  $R_V$  umístěný ve vakuu mimo jakékoliv silové pole. K tomuto válci připevníme (např. přilepíme) jeden konec nitě, která má mez pevnosti v tahu  $\sigma_p$ , poloměr  $r$  a délku  $l$ , na jejímž druhém konci je upevněna olověná kulička o hmotnosti  $m$ . Nit napneme kolmo na tyč a kuličce udělíme rychlost  $v_0$ , jejíž směr bude kolmý na napnutou nit a na osu válce. Nit se začne na válec namotávat. Určete, v jaké vzdálenosti od válce se kulička utrhne a jaká bude v tomto okamžiku její rychlost.

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty:  $v_0 = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $r = 0,2 \text{ mm}$ ,  $\sigma_p = 160 \text{ MPa}$ ,  $R_V = 5 \text{ cm}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ .  
(Řešení str. 10)

### Úloha I.2 ... brzdící vlak

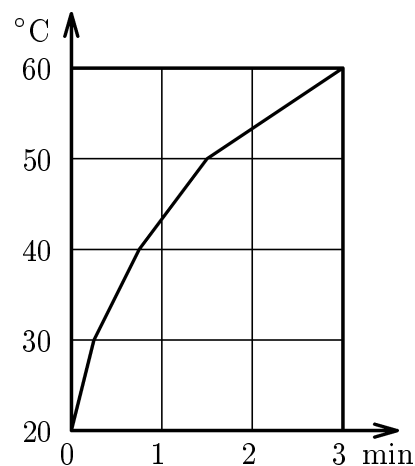
Určete, jaký výkon dodává do elektrické sítě vlak o hmotnosti  $m = 800 \text{ t}$ , který pomocí elektrodynamických rekuperačních brzd (brzdy, které přemění kinetickou energii vlaku na energii elektrickou) zastaví z rychlosti  $v_0 = 80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  za  $\tau = 2 \text{ min}$ . Účinnost rekuperace uvažujte 50%.

(Řešení str. 11)

### Úloha I.3 ... zahřívání a ochlazování

Do nádoby s vodou dáme ponorný ohříváč a zapneme jej do zásuvky. Závislost teploty na čase po zapnutí ohříváče vidíme na grafu na obrázku 1. Poté, co teplota dosáhne  $60^\circ\text{C}$  (trvalo to tři minuty), ohříváč vypneme. S pomocí grafu odhadněte, za jak dlouho nádoba s vodou vychladne na  $50^\circ\text{C}$ . A za jak dlouho na  $30^\circ\text{C}$ ? Tepelnou kapacitu a tepelnou setrvačnost ohříváče neuvažujte.

(Řešení str. 11)



Obr. 1

### Úloha I.4 ... moře

Planeta o poloměru  $R = 6400 \text{ km}$  je obklopena  $H = 10 \text{ km}$  hlubokým mořem o hustotě  $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Měřením bylo zjištěno, že při ponořování tělesa do moře se nemění gravitační síla na něj působící. Máte-li zadánu gravitační konstantu  $\kappa = 6,67\cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ , spočtěte gravitační zrychlení u povrchu planety.

(Řešení str. 13)

### Úloha I.P ... hrníček

Máme stůl a na něm hrníček. Chceme stůl přemístit o 10 m dále. Navrhněte průběh zrychlení tak, aby hrníček nespadol a stůl se přemístit co nejrychleji (přičemž na konci pohybu se nebude hýbat ani hrníček ani stůl). Stůl má rozměry  $1\times 1 \text{ m}$  a hrníček je před pohybem umístěn ve středu. Koeficient statického smykového tření (mezi hrníčkem a stolem) je  $f_0 = 0,19$ , koeficient tření v pohybu je  $f = 0,10$ , stůl se může pohybovat maximálně se zrychlením  $a_{max} = 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Veškerý pohyb (a tedy i zrychlení) se odehrává v rovině stolu, která je vodorovná. (Řešení str. 13)

### Úloha I.Exp ... měrná tepelná kapacita vody

Vášim úkolem je změřit měrnou tepelnou kapacitu vody. Metodu měření si můžete vybrat sami, lze například měřit rychlost vzrůstu teploty vody ohřívané ponorným vařičem nebo měřit změnu teploty vody při ponoření tělesa o známé teplotě a tepelné kapacitě, vaší vynalézavosti se však meze nekladou.

(Řešení str. 40)

**Úloha II. 1 ... kondenzátor**

Představte si válcový kondenzátor. Jsou to dva souosé dlouhé válce o poloměrech  $r_1$ ,  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ), na menším je kladná hustota náboje  $\sigma$ , na větším stejně velká záporná. Pokud mezi válce vypustíme elektron, může v kondenzátoru obíhat po kruhové dráze. Určete rozsah možných frekvencí, se kterými bude elektron v kondenzátoru obíhat. Může obíhat i vně kondenzátoru?

(Řešení str. 15)

**Úloha II. 2 ... kyvadélko na vozičku**

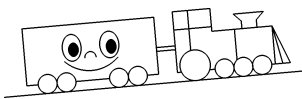
Mějme matematické kyvadlo o hmotnosti  $m$  a délce  $l$  umístěné na vozičku. Voziček má hmotnost  $M$  a je volně (bez odporových sil) pohyblivý po rovině. Určete periodu malých kmitů kyvadla.

(Řešení str. 16)

**Úloha II. 3 ... cowboy**

Oblíbenou zábavou jednoho fyzikálně nadaného cowboye je střílení z pistole do plechovek. Jednou mu někdo do plechovek nasypal písek. Vystřelená kulka, jak cowboy později zjistil, v písku uvízla. Měla mosazné jádro s olověným pláštěm, který se v písku celý roztavil. Co s toho plyne pro hmotnost písku v plechovce, když kulka letěla rychlostí 440 m/s, má hmotnost 10 g a hmotnostní podíl olova a mosazi je 1 : 1?

(Řešení str. 17)

**Úloha II. 4 ... vláček motoráček**

Obr. 2

Železničáři v Lipce mají dlouhou chvíli a hrají si s vagóny. Mají k dispozici strašně dlouhý kopec na Kubovu Huť se sklonem 2% (na 100 m délky stoupne o 2 m). Předpokládejme, že kopec se najednou zvedá z roviny. Roztlačí-li dlouhou soupravu vagónků na rychlost 5 m/s, souprava vyjede částečně na kopec (nevyjede tam celá) a zase sjede dolů. Určete čas, po který bude alespoň jedním kolem na kopci. Celková délka soupravy je 120 m. (Řešení str. 17)

**Úloha II. P ... takové malé zatmění**

Vezmeme-li astronomické ročenky za posledních 100 let, zjistíme, že slunečních zatmění je přibližně 1,5 krát více než zatmění měsíčních. Zkuste přijít na to, proč je tomu tak. (Řešení str. 18)

**Úloha II. Exp ... sloupec cukru**

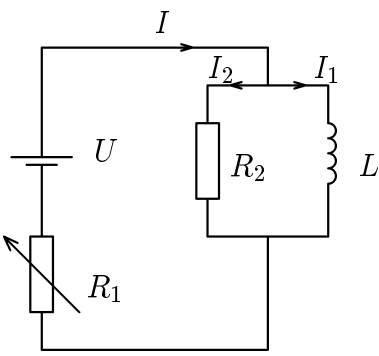
Jistě víte, že když ponořujete kostkový cukr do čaje, voda do kostky vzlíná. Je na vás, abyste vymysleli vhodnou aparaturu a proměřili do jaké výšky kapalina vystoupí, máte-li hodně vysoký sloupec kostek cukru (pokud budete mít chuť, tak třeba i závislost výšky na čase). Navrhněte nějaký fyzikální model. Ve vodě se ale cukr rozpouští, takže se záhy rozpadne. Použijte tedy raději benzín, líh či jinou kapalinu, ve které se cukr nerozpouští. (Řešení str. 41)

**Úloha III. 1 ... asfaltoví holubi**

Na pokusné střílnici se nachází vrhač asfaltových holubů. Ve vzdálenosti  $d$  od něj stojí myslivec, snažící se zasáhnout letící cíl. Pod jakým úhlem  $\alpha$  musí namířit, aby se trefil, víme-li, že na zamíření potřebuje čas  $\tau$  (tj. čas od vrhu holuba do výstřelu)? Asfaltoví holubi jsou vrháni kolmo vzhůru rychlostí  $v_h = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , náboj opouští hlaveň rychlostí  $v_0 = 400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , vzdálenost  $d = 50 \text{ m}$  a čas  $\tau = 2 \text{ s}$ . Odpor prostředí zanedbejte. (Řešení str. 19)

**Úloha III.2 ... supravodič**

Mějme následující obvod (obr.3):



Obr. 3

Část obvodu obsahující  $R_2$  a  $L(10\text{ H})$  je ponořena do kapalného hélia. Vodiče v této části jsou supravodivé (mají nulový odpor). Vyndáme-li  $R_2$  z hélia, má odpor  $5\ \Omega$ .

První experiment probíhá následovně: Proud  $I$  měníme pomocí  $R_1$  tak, aby v časovém intervalu  $(t_0, t_1)$  byl konstantní  $1\text{ A}$ , v  $(t_1, t_2)$  rovnoměrně klesal na nulu, v  $(t_2, t_3)$  rovnoměrně stoupal na  $0,5\text{ A}$  a dále byl konstantní. V čase  $t_3$  rezistor  $R_2$  vyndáme z hélia a v čase  $t_4$  jej tam opět spustíme. V  $t_0$  je  $I_1 = I_2 = 0,5\text{ A}$ . Určete časový průběh  $I_1$  a  $I_2$  v časovém intervalu  $(t_0, t_4)$ .

Druhý experiment probíhá následovně: Na počátku je  $R_2 = 0\ \Omega$ ,  $I_1 = 0\text{ A}$ ,  $R_1 = 7,5\ \Omega$ ,  $I = 0,5\text{ A}$ .  $R_1$  se dále nemění. V čase  $t_1$  vyndáme  $R_2$  z hélia a v čase  $t_2$  jej tam opět spustíme. Načrtněte do grafu průběh časové závislosti  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ . (Řešení str. 20)

**Úloha III.3 ... a přece se točí**

Uvažte měděný kruhový závit o poloměru  $R = 10\text{ cm}$ , který leží na stole v magnetickém poli Země (vektor magnetické indukce je rovnoběžný se stolem, který se nachází na rovníku). Poloměr drátu je  $r = 0,3\text{ mm}$ . Závitem prochází proud  $I$ . Určete  $I$  tak, aby se závit překloupil (předpokládejte, že tření je dostatečně velké, takže závit neproklouzne). (Řešení str. 21)

**Úloha III.4 ... „My name is James Bond ...“**

Představme si autíčko, které jede po letišti rovnoměrně přímočaře (vzhledem k letištní hale) rychlostí  $\mathbf{v}$ . Kromě autíčka stojí na letišti sličná letuška (nestojí na přímce, po které se pohybuje autíčko). V okamžiku, kdy je autíčko letušce nejbližší (t.j. spojnice autíčko — letuška je kolmá na  $\mathbf{v}$ ), se řidič rozhodne, že dojede letušku navštívit. Autíčko dokáže v libovolném směru vyvinout zrychlení o maximální velikosti  $a$ . Za jaký nejkratší čas se autíčko dostane k letušce? Čas se počítá od okamžiku fatálního rozhodnutí. Předpokládejte, že auto u letušky nebude zastavovat ani přibrzďovat. (Nápověda: Uvažujte různé vztažné soustavy.) (Řešení str. 22)

**Úloha III.P ... šup sem, šup tam**

Spočtete frekvenci kmitů atomů v krystalu  $\text{NaCl}$ . Můžete si úlohu zjednodušit tak, že budete uvažovat pouze coulombovské působení sousedních atomů. Jako bonus můžete spočítat i amplitudu výchylky. (Řešení str. 22)

**Úloha III.Exp ... hustota lihu**

Sežňte si stopky, dostatečné množství lihu (denaturovaného) a nekalibrovaný hustoměr (či dřevěnou tyčku zatíženou závažíčkem), u kterého si můžete zjistit rozměry a hmotnost. Navrhněte vhodnou metodu, ve které použijete zmíněné pomůcky, a změřte hustotu lihu. (Řešení str. 43)

**Úloha IV.1 ... nabité kuličky**

Tři stejné kuličky o hmotnosti  $m$ , nabité nábojem  $q$ , jsou spojeny lehkými neroztažitelnými nitěmi tak, že tvoří rovnostranný trojúhelník o straně délky  $d$ . Pokud jednu z nití přestříháme, soustava se začne pohybovat. Určete maximální rychlost „prostřední“ kuličky během nastalého pohybu. (Řešení str. 24)

**Úloha IV.2 ... tyč pod napětím**

Na konce homogenní tyče o průřezu  $S = 1\text{ cm}^2$  působí dvě síly  $F_1 = 40\text{ N}$  a  $F_2 = 100\text{ N}$  v opačných směrech (obě „od tyče“). Určete napětí v průřezu, který dělí tyč na dvě části v poměru  $1 : 2$  (působíště síly  $F_2$  je na konci kratší části). (Řešení str. 26)

**Úloha IV.3 ... potápěčova bublina**

Potápěč v hloubce 50 m pod ledem vypustí vzduchovou bublinu o poloměru 2 cm. Bublina doplave pod led. Předpokládejte, že se zdeformuje přibližně do tvaru válce. Určete jaká bude její výška. Vše probíhá za normálního tlaku a teploty 0°C. (Řešení str. 27)

**Úloha IV.4 ... a zase to zatmění!**

Vaším úkolem je spočítat maximální možnou šířku pásu úplného i částečného zatmění Slunce. Je úplné zatmění pozorovatelné vždy, když se Měsíc dostane na spojnici Slunce a Země? Pro jednoduchost uvažujte, že se všechna tři tělesa pohybují v téže rovině (ekliptice). K výpočtu použijte následujících dat:

- vzdálenost Země od Slunce  $r_Z$  kolísá mezi 147 093 860 km a 152 101 870 km
- vzdálenost Měsíce od Země  $r_M$  kolísá mezi 356 410 km a 406 740 km
- poloměr Slunce je  $R_S = 695\,990$  km
- poloměr Země je  $R_Z = 6\,378$  km
- poloměr Měsíce je  $R_M = 1\,738$  km

(Řešení str. 27)

**Úloha IV.P ... jablko nepadá daleko od baobabu**

Představme si baobab, který roste na rovníku, na jeho nejvyšší větvi ve výšce  $h$  je baobabí jablko. Jablko se rozhodne, že spadne. Spočítejte, jak daleko od kmene dopadne.

Řešení jedna: Dívá-li se na situaci pozorovatel z inerciální soustavy nespojené s povrchem Země, vidí, že ve výšce  $h$  letí jablko rychlostí  $\omega(R_Z + h)$  ve směru rovnoběžně s povrchem ( $\omega$  je úhlová rychlost rotace Země). Povrch se pohybuje v téže směru rychlostí  $\omega R_Z$ . Rozdíl je tedy  $\omega h$ . Jablko letí dobu  $t = \sqrt{2h/g}$  a dopadne tedy ve vzdálenosti  $s = \omega h \sqrt{2h/g}$  od kmene.

Řešení dva: Díváme-li se na situaci ze soustavy spojené s povrchem Země, zdají se nám nehybné předměty, které ve výšce  $x$  letí rychlostí  $\omega(R_Z + x)$ . Jablko letí stále  $\omega(R_Z + h)$  a tedy vzhledem k pozorovateli na Zemi rychlostí  $\omega(h - x)$ . Pro  $x$  platí  $x = h - gt^2/2$  a tedy  $v = \omega gt^2/2$ . Po zintegrování (kdo neví, co to je, nechť přijme, že plocha pod grafem funkce  $y = x^2$  je  $x^3/3$ ) vyjde  $s = (\omega h/3)\sqrt{2h/g}$ .

Na vás je, abyste rozhodli, který z výsledků je správně, a opravili chybný postup.

(Řešení str. 28)

**Úloha IV.Exp ... dráteček**

V brožurce se zadáním 4. série byl připevněn kousek drátečku. Vaším úkolem bylo zjistit, z jakého kovu je vyroben. Vzorek jste nesměli nijak poničit (roztavit, naleptat kyselinou, trvale zdeformovat atd.). Mohli jste změřit například tepelnou kapacitu, hustotu, tepelnou vodivost a roztažnost, délku, měrný odpor, průměr a hmotnost atomového jádra, elektrochemický potenciál, odrazivost, mřížkovou konstantu, relativní či absolutní permitivitu a permeabilitu, kapacitu, indukčnost, poločas rozpadu, absorpční a emisní spektrum... Fantazii se meze nekladly.

(Řešení str. 45)

**Úloha V.1 ... porucha sluchu**

Jeden z organizátorů Fykosu si sehnal dva stejné reproduktory, které umístil na louku 4 m od sebe. Zapojil je na jeden magnetofon, ze kterého do nich pustil tón *komorní a*. Začal se procházet a co se nestalo: V některých místech louky neslyšel skoro nic. Vaším úkolem je nakreslit ve vhodném měřítku obrázek, ve kterém vyznačíte místa, kde organizátor skoro nic neslyšel. Jev vysvětlete.

(Řešení str. 30)

**Úloha V.2 ... supertermoska**

Princip termosky je následující: Máme dvě souosé válcové stěny, které se vzájemně nedotýkají, mezi nimi je vyčerpán vzduch. Energie se zde může přenášet pouze zářením. Pro naše účely budeme stěny termosky považovat za absolutně černá tělesa (ve skutečnosti tomu tak nebývá). Teplotu vnitřní stěny označíme  $T_1$ , teplotu vnější  $T_2$ . Tyto teploty budeme dále považovat za konstantní. Odtok tepla (za jednotku času) v tomto jednoduchém případě nechť je  $Q_0$ . Vlastnosti termosky však můžeme vylepšit, vložíme-li mezi stěny ještě jednu dokonale vodivou (absolutně černou)

válcovou desku. Určete, jak se změní odtok tepla po ustálení teploty vložené desky. Ve vylepšování můžeme pokračovat... Spočtete, jak se odtok tepla změní, vložíme-li  $n$  vzájemně se nedotýkajících válcových desek. (Vzdálenosti krajních desek jsou malé oproti rozměrům termosky, velikosti jejich povrchů můžeme tedy považovat za stejné.) (Řešení str. 30)

### Úloha V.3 ... kyvadlo

Mějme rotační těleso o hmotnosti  $m$ . Na jeho ose zvolme body A a B vzdálené  $d$ . Zavěsíme-li těleso v bodě A, kývá se se stejnou periodou, jako když jej zavěsíme v bodě B. Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm a kolmé na osu rotační symetrie je  $J$ . Určete všechny možné polohy těžiště tělesa vzhledem k bodům A a B. (Řešení str. 31)

### Úloha V.4 ... letící tyč

Mějme v rovině dvě na sebe kolmé přímky  $a$  a  $b$ . V přímce  $a$  letí tyč délky  $l = 5 \cdot 10^7$  m rychlostí  $v = 6 \cdot 10^6$  m·s<sup>-1</sup> (tyč je s přímkou rovnoběžná a její střed na ní neustále leží). Vaším úkolem je určit, jaký bude průběh „viděné“ (viz dále) délky tyče v závislosti na její vzdálenosti od průsečíku přímek. Tyč pozorujeme z přímky  $b$  v takové vzdálenosti od průsečíku, která je zanedbatelná vůči vzdálenosti tyče od průsečíku.

„Viděná“ délka tyče: k přímce  $a$  přiložíme pravítko a letící tyč vyfotografujeme. „Viděnou“ délkou tyče pak rozumíme rozdíl hodnot krajních bodů tyče odečtených z pravítka z fotografie. (Řešení str. 32)

### Úloha V.P ... zamrzání rybníku

Odhadněte, za jak dlouho naroste led na rybníce z deseti centimetrů na dvacet. Teplota vzduchu je stále pět stupňů pod bodem mrazu. Potřebné konstanty naleznete v tabulkách.

(Řešení str. 32)

### Úloha V.Exp ... modul pružnosti vlasu

Změřte periodu torzních kmitů lidského vlasu. Z ní pak určete modul pružnosti vlasu ve smyku. Napovíme vám, že pro kroutící moment síly  $M$  působící na válec délky  $l$  a poloměru  $r$ , který je vyroben z materiálu o modulu pružnosti ve smyku  $G$ , platí vztah  $M = \pi r^4 G \varphi / 2l$ , kde  $\varphi$  je úhel stočení spodní podstavy vůči horní podstavě (zkuste si jej odvodit). Pokud nedisponujete dostatečně dlouhými vlasy, požádejte nějakou dlouhovlasou osobu o darování několika exemplářů a směle se pusťte do měření. (Řešení str. 45)

### Úloha VI.1 ... brouček

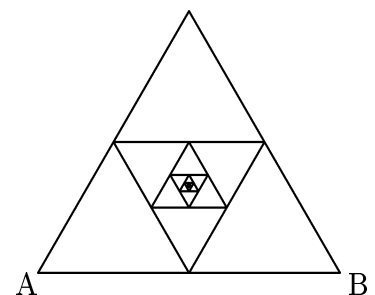
Brouček o hmotnosti  $m$  stojí na obruči o hmotnosti  $M$  a poloměru  $r$ , tato obruč leží na absolutně hladkém vodorovném stole. Náhle se brouček něčeho lekne a dá se do běhu. Poběží po obruči. Vaším úkolem je popsat trajektorii středu obruče (za předpokladu nulového tření mezi obručí a stolem). (Řešení str. 33)

### Úloha VI.2 ... odporová síť

Mějme drát, jehož jednotka délky má odpor  $R$ . Z rovnostranných trojúhelníků z něj vyrobených postavíme nekonečnou síť naznačenou na obr. 4 (nejdelší strana má jednotkovou délku). Jaký odpor bude mezi vrcholy největšího trojúhelníku? (Řešení str. 34)

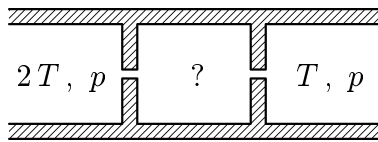
### Úloha VI.3 ... kolik máme kyslíku?

Zkuste spočítat (či spíše kvalifikovaně odhadnout), na jak dlouho by lidstvu stačil kyslík nacházející se v současné atmosféře, kdyby najednou přestala fungovat fotosyntéza a rostliny by jej tedy nedoplňovaly. Potřebné údaje se pokuste zjistit v literatuře, nebo je vhodně aproximujte. (Řešení str. 34)



Obr. 4



**Úloha VI.4 ... vodíková nádoba**

Představme si podle obrázku nádobu s ideálním plynem rozdělenou dvěma přepážkami na tři části. Napravo se udržuje teplota  $T$  a tlak  $p$ , nalevo  $2T$  a  $p$ . Určete, jaká teplota a tlak je v prostřední části, víte-li, že celý systém je v dynamické rovnováze. (Řešení str. 36)

Obr. 5

**Úloha VI.P ... věříte fyzice?**

Zkuste se zamyslet a napsat úvahu na téma: O platnosti kterých fyzikálních zákonů, pouček a teorií jsem přesvědčen z vlastní zkušenosti a každému bych byl schopen jejich platnost dokázat a kterým prostě věřím například proto, že mi o nich říkali ve škole. (Řešení str. 37)

**Úloha VI.Exp ... povrchové napětí vody**

Změřte závislost povrchového napětí vody na teplotě. Metodu měření si můžete vybrat sami. (Řešení str. 47)

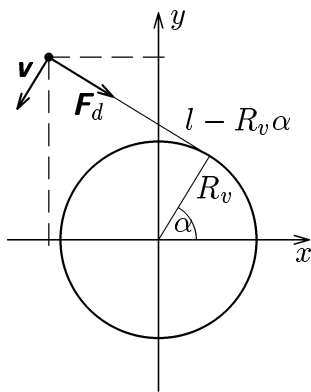


## Řešení teoretických úloh

### Úloha I.1 ... trhání nitě

Mějme pevně upevněný válec o poloměru  $R_V$  umístěný ve vakuu mimo jakékoliv silové pole. K tomuto válci připevníme (např. přilepíme) jeden konec niti, která má mez pevnosti v tahu  $\sigma_p$ , poloměr  $r$  a délku  $l$ , na jejímž druhém konci je upevněna olověná kulička o hmotnosti  $m$ . Nit napneme kolmo na tyč a kuličce udělíme rychlost  $v_0$ , jejíž směr bude kolmý na napnutou nit a na osu válce. Nit se začne na válec namotávat. Určete, v jaké vzdálenosti od válce se kulička utrhne a jaká bude v tomto okamžiku její rychlost.

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty:  $v_0 = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $r = 0,2 \text{ mm}$ ,  $\sigma_p = 160 \text{ MPa}$ ,  $R_V = 5 \text{ cm}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ .



Obr. 6

Nejdříve si musíme uvědomit, jak se kulička bude chovat. Nejprve se bude pohybovat po kružnici, dokud provázek nebude mít směr tečny válce. Poté začne navíjení provázku na válec. Provázek na kuličku bude působit dostředivou silou o velikosti  $F_d = \frac{mv^2}{l_1}$ , kde  $l_1$  je délka nenavíjené části provázku a  $v$  je jeho okamžitá rychlost. Provázek se přetrhne, až na něj bude působit tahová síla o velikosti  $F_{max} = S\sigma_p = \pi r^2 \sigma_p$ . Při přetržení budou obě síly v rovnováze, bude tedy platit

$$\pi r^2 \sigma_p = \frac{mv^2}{l_1},$$

$$l_1 = \frac{mv^2}{\pi r^2 \sigma_p}.$$

Abychom zjistili, jak se mění délka provázku, musíme zjistit, jak se mění velikost rychlosti kuličky. Zde nastane problém, jaké zákony zachování můžeme použít. Zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti použít nelze. Budeme-li totiž na válec působit silou, která bude zároveň vyvolávat moment síly, nezačne se válec pohybovat, neboť je upevněný. Nelze u něj tedy určit hybnost ani moment hybnosti. Zákon zachování mechanické energie však platit bude. Kulička se nenachází v žádném silovém poli, její potenciální energie se nemění, a protože se nemění ani celková energie válce, zůstává kinetická energie kuličky konstantní. Toto lze také ukázat tím, že dostředivá síla působící na kuličku nekoná žádnou práci. Vykonaná práce bude  $W = \int \mathbf{F}_d \cdot d\mathbf{r}$ . Zavedme souřadnou soustavu, která má počátek ve středu válce. Je zřejmé, že provázek bude stále napnutý, proto můžeme polohový vektor kuličky vyjádřit v závislosti na úhlu  $\alpha$  takto:

$$\mathbf{r} = (R_V \cos \alpha - (l - R_V \alpha) \sin \alpha, R_V \sin \alpha + (l - R_V \alpha) \cos \alpha).$$

V této soustavě vyjádříme vektor dostředivé síly takto:

$$\mathbf{F}_d = (F \sin \alpha, -F \cos \alpha).$$

Diferencováním polohového vektoru získáme:

$$d\mathbf{r} = ((R_V \alpha - l) \cos \alpha d\alpha, (R_V \alpha - l) \sin \alpha d\alpha).$$

Skalární součin  $\mathbf{F}_d \cdot d\mathbf{r} = 0$ , tedy  $d\mathbf{r}$  je kolmé na  $\mathbf{F}_d$ . Vykonaná práce tedy bude nulová. Kinetická energie kuličky se nemění, bude platit  $v = v_0$ . Délka provázku při přetržení bude:

$$l_1 = \frac{mv_0^2}{\pi r^2 \sigma_p} \doteq 10 \text{ cm}.$$

Protože hledáme vzdálenost kuličky od válce, musíme si uvědomit, jak tato vzdálenost závisí na délce provázku. Budeme uvažovat že kulička se stále pohybuje v rovině kolmé na osu válce. Pak snadno z Pythagorovy věty určíme vzdálenost kuličky od válce:

$$d = \sqrt{R_V^2 + l_1^2} - R_V \doteq 6,1 \text{ cm} .$$

Na závěr lze dodat, že počáteční délka provázku je větší než délka, při které se kulička utrhne. Provázek se tedy přetrhne až po započetí navíjení.

### Úloha I.2 ... brzdící vlak

Určete, jaký výkon dodává do elektrické sítě vlak o hmotnosti  $m = 800 \text{ t}$ , který pomocí elektrodynamických rekuperačních brzd (brzdy, které přemění kinetickou energii vlaku na energii elektrickou) zastaví z rychlosti  $v_0 = 80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  za  $\tau = 2 \text{ min}$ . Účinnost rekuperace uvažujte 50%.

Energie předaná brzdám (resp. práce brzd vykonaná na vlakové soupravě) bude rovna celkové kinetické energii vlakové soupravy. Ovšem získaná energie vrácená do sítě bude vzhledem k účinnosti brzd ( $\eta = 50\%$ ) poloviční. Pak podle známého vzorce určíme průměrný výkon  $\bar{P}$ , který po dobu brzdění dodávají rekuperační brzdy zpět do sítě.

$$\bar{P} = \eta \frac{W}{\tau} = \eta \frac{E_k}{\tau} = \eta \frac{mv_0^2}{2\tau} .$$

Číselně  $\bar{P} \doteq 823 \text{ kW}$ .

Budeme-li navíc předpokládat, že vlak brzdí rovnoměrně a tedy že se pohybuje rovnoměrně zpomaleně, můžeme ještě určit závislost  $P(t)$  okamžitého výkonu na čase. Podívejme se, co se stane za malý čas  $\Delta t$ . Rychlost vlaku se sníží o  $\Delta v$ . Za předpokladu, že jde o rovnoměrně zpomalený pohyb platí:

$$\Delta v = a\Delta t ,$$

kde  $a$  je zpomalení dané jako  $a = v_0/\tau$ . Změna kinetické energie je

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m((v + \Delta v)^2 - v^2) = \frac{1}{2}m(2v\Delta v + \Delta v^2)$$

a okamžitý výkon (pro  $\Delta t \rightarrow 0$ )

$$P = \eta \frac{\Delta E_k}{\Delta t} = \eta \frac{\frac{1}{2}m(2va\Delta t + a^2\Delta t^2)}{\Delta t} \approx \eta mav .$$

S přihlédnutím k závislosti  $v(t) = v_0 - at$  a po následné úpravě dostaneme výsledný vztah:

$$P = \eta \frac{mv_0^2}{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) .$$

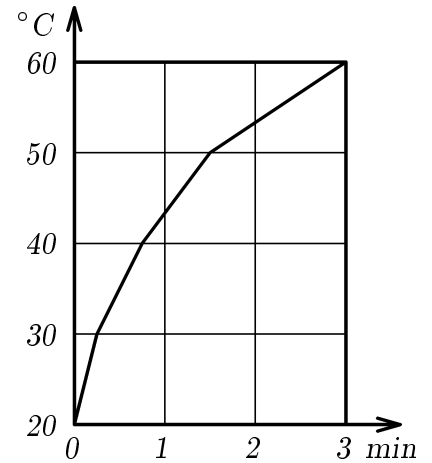
Pro ty, kteří někdy o derivacích slyšeli, dodejme jen, že k hledanému vztahu jsme se mohli dostat přímo derivací práce podle času

$$P = \eta \frac{dW}{dt} = \eta \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2}\right) = \eta mav .$$

Bonusový bod jsme udělovali za závislost  $P(t)$  nebo zdůvodnění faktu, že neznáme-li průběh brzdění, nemůžeme tuto závislost určit. A protože byla úloha velice jednoduchá, strhávali jsme body i za špatná numerická řešení, což byla kupodivu častá chyba. V některých řešeních chyběl rozumný slovní komentář nebo popis veličin, což je pro opravující celkem důležité. Posledním problémem bylo rozumné zaokrouhlování. Jistě uznáte, že udávat výše uvedený výsledek ve wattech s přesností na 4 desetinná místa je přinejmenším fyzikální úlet.

**Úloha I. 3 ... zahřívání a ochlazování**

Do nádoby s vodou dáme ponorný ohříváč a zapneme jej do zásuvky. Závislost teploty na čase po zapnutí ohříváče vidíme na grafu na obrázku 7. Poté, co teplota dosáhne  $60^\circ\text{C}$  (trvalo to tři minuty), ohříváč vypneme. S pomocí grafu odhadněte, za jak dlouho nádoba s vodou vychladne na  $50^\circ\text{C}$ . A za jak dlouho na  $30^\circ\text{C}$ ? Tepelnou kapacitu a tepelnou setrvačnost ohříváče neuvažujte.



Obr. 7

Při řešení této úlohy použijeme následující předpoklady: výkon ohříváče ( $P$ ) a tepelná kapacita vody ( $C$ ) jsou konstanty a zanedbáváme vypařování vody. Při ohřívání se jen část dodané energie spotřebuje na ohřátí vody, zbytek unikne do okolí. Označme  $P_z$  ztrátový výkon (je to energie, která unikne do okolí za jednotku času). Platí rovnice

$$Pt - P_z t = C\Delta T,$$

kde  $t$  je čas, za který se voda ohřeje o teplotu  $\Delta T$ .  $P_z$  je přibližně úměrný rozdílu teploty okolí a vody. Při ohřívání z  $20^\circ\text{C}$  na  $30^\circ\text{C}$  je tento rozdíl malý, můžeme si tedy dovolit ztráty v tomto úseku zanedbat ( $P_{z1} = 0 \text{ W}$ ). Díky tomu odhadneme výkon ohříváče jako

$$P = C \frac{\Delta T_1}{t_1},$$

$\Delta T_1$  a  $t_1$  vyčteme z grafu. Při dalším ohřívání už  $P_z$  zanedbat nelze, řekněme, že v každém z intervalů  $30^\circ\text{C}$  až  $40^\circ\text{C}$ ,  $40^\circ\text{C}$  až  $50^\circ\text{C}$  a  $50^\circ\text{C}$  až  $60^\circ\text{C}$  je  $P_z$  přibližně konstantní, pak platí

$$P_{zi} = P - C \frac{\Delta T_i}{t_i} = C \left( \frac{\Delta T_1}{t_1} - \frac{\Delta T_i}{t_i} \right) \quad i = 2, 3, 4.$$

Když vypneme ohříváč, voda se z  $60^\circ\text{C}$  na  $50^\circ\text{C}$  ochladí výkonem  $P_{z4}$  za čas  $t_4^*$ , z  $50^\circ\text{C}$  na  $40^\circ\text{C}$  výkonem  $P_{z3}$  za  $t_3^*$  a konečně ze  $40^\circ\text{C}$  na  $30^\circ\text{C}$  výkonem  $P_{z2}$  za  $t_2^*$ . Přičemž platí

$$P_{zi} t_i^* = C \left( \frac{\Delta T_1}{t_1} - \frac{\Delta T_i}{t_i} \right) t_i^* = C \Delta T_i \quad i = 2, 3, 4.$$

$\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_3 = \Delta T_4 = 10^\circ\text{C}$  a tedy se pokrátí. Po úpravě vyjde

$$t_i^* = \frac{t_1 t_i}{t_i - t_1}$$

Z grafu vyčteme tyto hodnoty:  $t_1 = 15 \text{ s}$ ,  $t_2 = 30 \text{ s}$ ,  $t_3 = 45 \text{ s}$ ,  $t_4 = 90 \text{ s}$ . Po dosazení dostaneme, že na  $50^\circ\text{C}$  se voda ochladí asi za  $t_4^* = 18 \text{ s}$  a na  $30^\circ\text{C}$  za  $t_4^* + t_3^* + t_2^* = 70 \text{ s}$ .

Ve skutečnosti ztráty v prvním úseku nebudou nulové, tedy skutečný výkon vařiče bude větší, proto i ztrátové výkony budou větší a časy chladnutí kratší.

Někteří úlohu řešili tak, že graf ohřívání otočili kolem osy odpovídající  $40^\circ\text{C}$  a tento považovali za graf chladnutí. Dostali tak odhad  $t_4^* = 15 \text{ s}$  a  $t_4^* + t_3^* + t_2^* = 90 \text{ s}$ . Ne všichni si ovšem uvědomili, že takto by úloha šla řešit pouze v případě, že by teplota okolí byla  $20^\circ\text{C}$  a voda by byla ohřívána dostatečně dlouho (aby se ztrátový výkon vyrovnal ohřívacímu).

Další možnost pro ty, kteří umí řešit diferenciální rovnice, je, že předpokládáme  $P_z$  přímo úměrný rozdílu teploty vody a okolí ( $T_0$ ). Vyřešíme rovnici

$$P dt - K(T - T_0) dt = C dT.$$

Je-li  $T_0$  i počáteční teplota vody, vyjde

$$T = \frac{P}{K} (1 - e^{-\frac{K}{C}t}) + T_0.$$

Konstanty hledáme tak, aby graf v zadání tuto rovnici splňoval. Přibližně vychází  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $P/K = 45^\circ\text{C}$  a  $K/C = 1/80\text{ s}^{-1}$ . Pro ochlazování řešíme

$$-K(T - T_0) dt = C dT \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{C}{K} \ln \frac{T - T_0}{T^* - T_0},$$

kde  $T^*$  je teplota na počátku chladnutí, tedy  $60^\circ\text{C}$ . Číselně vychází, že ochlazování na  $50^\circ\text{C}$  trvá 23 s a na  $30^\circ\text{C}$  asi 110 s, což je více než v předchozích odhadech.

Těžko ovšem můžeme říci, který z odhadů je nejlepší, neboť o ohřívání a ochlazování nevíme nic bližšího. Nedá se tedy jednoznačně určit, které ze zanedbání, jež jsme provedli, vnáší do výsledku větší chybu.

#### Úloha I.4 ... moře

Planeta o poloměru  $R = 6400\text{ km}$  je obklopena  $H = 10\text{ km}$  hlubokým mořem o hustotě  $\rho = 1000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Měřením bylo zjištěno, že při ponořování tělesa do moře se nemění gravitační síla na něj působící. Máte-li zadánu gravitační konstantu  $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ , spočítejte gravitační zrychlení u povrchu planety.

Na začátku bychom se chtěli omluvit za „chybné“ zadání této úlohy. Chybné v uvozovkách, protože pozměněné zadání má taky řešení. Na to přišli ale jenom čtyři řešitelé. Chyba byla v tom, že těleso jsme *ponořovali*, a měli jsme ho jenom *ponořit*.

Podívejme se nejdříve, jak to bude vypadat, když bude gravitační zrychlení na hladině stejné jako na dně moře. Použijeme známé poučky, že gravitační zrychlení kulového tělesa je rovno součinu  $\kappa * m/R^2$ , kde za hmotnost dosazujeme hmotnost koule o poloměru  $R$  a slupku mezi  $R$  s  $R + h$  (v našem případě moře) neuvažujeme.

$$g(R) = g(R + H) \quad \Rightarrow \quad \frac{\kappa \frac{4}{3}\pi \rho_{pl} R^3}{R^2} = \frac{\kappa \left[ \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_{pl} - \rho) + \frac{4}{3}\pi (R + H)^3 \rho \right]}{(R + H)^2}. \quad (1)$$

Odtud dostaneme vztah pro hustotu planety

$$\rho_{pl} = \rho \frac{(R + H)^3 - R^3}{R(R + H)^2 - R^3}.$$

Dosazením do (1) dostaneme:

$$g = \frac{4}{3}\pi\kappa\rho \frac{(R + H)^3 - R^3}{(R + H)^2 - R^2} = \frac{4}{3}\pi\kappa\rho \frac{3R^2 + 3RH + H^2}{2R + H}.$$

Podle zadání  $R \gg H$ , proto můžeme členy  $3RH + H^2$  vůči  $3R^2$  zanedbat, stejně jako  $H$  vůči  $2R$ . Potom platí:

$$g \approx 2\pi\kappa\rho R = 2,68\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Někteří z vás psali výsledek na osm i deset platných číslic. Je to zbytečné, protože  $\kappa$  známe s přesností na tři platné číslice a výsledek určitě nemůžeme znát přesněji.

Jak to bude vypadat, když budeme těleso do vody *ponořovat*? Musí platit

$$g = \frac{\frac{4}{3}\pi\kappa \left[ R^3 (\rho_{pl} - \rho) + \rho (R + h)^3 \right]}{(R + h)^2} = \text{konst.}$$

Zderivováním této funkce musíme zjistit, že derivace se rovná nule nezávisle na  $h$ . Zderivováním dostáváme

$$\frac{dg}{dh} = \frac{4}{3}\pi\kappa \frac{\rho (R + h)^3 - 2R^3 (\rho_{pl} - \rho)}{(R + h)^3}.$$

Z tohoto vztahu je vidět, že  $dg/dh$  závisí na  $h$ , a tedy  $g$  se musí měnit s hloubkou. To znamená, že v zadání je chyba, nemůžeme mít konstantní  $g$  po celou dobu ponořování.

**Úloha I. P ... hrníček**

Máme stůl a na něm hrníček. Chceme stůl přemístit o 10 m dále. Navrhněte průběh zrychlení tak, aby hrníček nespadol a stůl se přemístil co nejrychleji (příčemž na konci pohybu se nebude hýbat ani hrníček ani stůl). Stůl má rozměry  $1 \times 1$  m a hrníček je před pohybem umístěn ve středu. Koeficient statického smykového tření (mezi hrníčkem a stolem) je  $f_0 = 0,19$ , koeficient tření v pohybu je  $f = 0,10$ , stůl se může pohybovat maximálně se zrychlením  $a_{\max} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Veškerý pohyb (a tedy i zrychlení) se odehrává v rovině stolu, která je vodorovná.

Na úvod řešení je třeba doplnit jisté předpoklady. Za prvé, že hrníček se nám nepřevrhne při zrychlování a za druhé, že pohyb stolku je pouze posuvný. Dále si označme  $L = 10$  m.

Nejjednodušší způsob jak "rychle" přenést stůl s hrníčkem, je dát stolku zrychlení, nazveme ho kritické  $a_k$ , kdy se stůl pohybuje největším zrychlením a hrníček se díky koeficientu statického tření nepohne a pak stůl opačným zrychlením ubrzdí.

$$a_k = gf_0.$$

S tímto zrychlením stůl projde dráhu  $L/2$  za čas

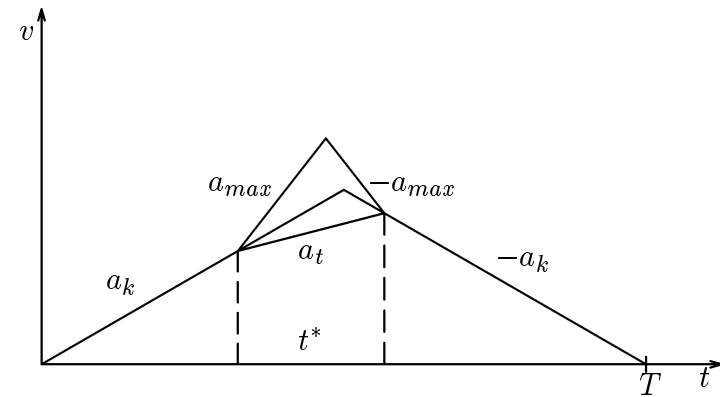
$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot L/2}{gf_0}} = \sqrt{\frac{L}{gf_0}} \doteq 2,316 \text{ s}.$$

Zbylou dráhu  $L/2$  bude stůl brzdit. Celkový čas

$$t_2 \doteq 4,63 \text{ s}.$$

Teď se podívejme za jaký čas přesuneme stůl, když hrníček bude klouzat. Nejlepší čas dostaneme, když hrníček bude klouzat dozadu, dobrzdí na konci stolku a zůstane tam. Nic lepšího se udělat nedá. Je zbytečné, aby hrníček někdy klouzal dopředu (vůči stolu). Tím by se sice zkrátil čas na brzdění stolku, ale hrnek by brzdil déle.

Teď si musíme ještě uvědomit, že jistou dobu je třeba stůl posouvat se zrychlením



Obr. 8

$a_k$  (největší možné, aby se hrníček nezačal hýbat), protože se nám nepodaří uskutečnit klouzání hrnku a jeho ubrzdění při  $a_{\max}$  na dráze 0,5 m za celkovou dobu posouvání. Když dobrzdí dříve než stůl, což se i stane, pak brzdíme stůl zrychlením  $-a_k$ . *Poznámka:* Když začneme brzdit stůl zrychlením  $-a_{\max}$ , pak hrnek začne brzdit vůči stolu.

Právě opsaný pohyb je znázorněn na obrázku 8. Z grafu spočteme celkový čas: Plocha pod grafem je vzdálenost, kterou urazí stůl za čas  $T$ . Označme si plochu trojúhelníka o stranách  $a_k, -a_k, T$  jako  $S$ , plochu trojúhelníka o stranách  $a_{\max}, -a_{\max}, a_t$  jako  $l$  a plochu trojúhelníka o stranách  $a_k, -a_k, a_t$  jako  $\Delta L$ .  $l$  je délka, o kterou se stůl posune vůči hrnku, tedy  $l = 0,5$  m. Platí

$$L = S + l - \Delta L, \quad (2)$$

kde

$$S = \frac{a_k T^2}{4}, \quad l = \frac{1}{2} a_{\max} t'^2 - \frac{1}{2} a_t t'^2 - a_{\max} t'^2,$$

kde  $t'$  je čas, po který brzdíme zrychlením  $-a_{\max}$ :

$$t' = \frac{a_{\max} - a_t}{2a_{\max}} t^*,$$

z toho po dosazení a úpravě

$$l = \frac{t'^2 (a_{\max}^2 - a_t^2)}{4a_{\max}}. \quad (3)$$

Obdobným způsobem

$$\Delta L = \frac{t^{*2}(a_k^2 - a_t^2)}{4a_k} . \quad (4)$$

Z (3) vyjádříme  $t^*$  a dosadíme do (4). Z rovnosti (2) pak vyjádříme  $T$ :

$$T = \sqrt{\frac{4}{a_k} \left( L - l + \frac{la_{max}(a_k^2 - a_t^2)}{a_k(a_{max}^2 - a_t^2)} \right)} .$$

Číselně vychází  $T = 4,55$  s, což je lepší výsledek než  $t_2$ .

*Poznámka 2:* Řešitel Petr Houštěk napsal užitečný spodní odhad  $t_{\min}$ . Ať už budeme stůl posunovat jakkoli, posune se hrníček alespoň o  $d = 9,5$  m, jeho zrychlení nepřekročí  $a_k$  ( $a \leq a_k$ ), odtud dostáváme, že čas nemůže být menší než

$$t_{\min} = 2\sqrt{\frac{d}{a_k}} ,$$

$$t_{\min} = 4,52 \text{ s} .$$

### Úloha II.1 ... kondenzátor

Představte si válcový kondenzátor. Jsou to dva souosé dlouhé válce o poloměrech  $r_1, r_2$  ( $r_1 > r_2$ ), na menším je kladná hustota náboje  $\sigma$ , na větším stejně velká záporná. Pokud mezi válce vypustíme elektron, může v kondenzátoru obíhat po kruhové dráze. Určete rozsah možných frekvencí, se kterými bude elektron v kondenzátoru obíhat. Může obíhat i vně kondenzátoru?

Spočítejme nejprve intenzitu elektrického pole mezi válci. Předpokládejme, že válce jsou mnohem delší než širší, tj.  $r \ll l$ , a elektrony obíhají velmi daleko od obou okrajů. Pokud přijmeme tyto předpoklady, můžeme úlohu řešit, jako by byl kondenzátor nekonečně dlouhý. Pokud je nepřijmeme, bude úloha víceméně neřešitelná.

Intenzita elektrického pole v nekonečně dlouhém kondenzátoru je z důvodu symetrie osově souměrná (kolmá na osu válce a velikost závisí pouze na vzdálenosti od osy). Velikost intenzity  $E$  ve vzdálenosti  $r$  od osy ( $r_2 < r < r_1$ ) určíme z Gaussovy věty. Ta říká, že plocha krát složka intenzity el. pole kolmá k této ploše se rovná podílu náboje, který plocha uzavírá, a permitivity prostředí. Zvolíme si válec o poloměru  $r$  a výšce  $v$  souosý s kondenzátorem. Z výše uvedených důvodů je tok intenzity povrchem pláště roven součinu  $E$  a obsahu pláště. Gaussova věta má tvar:

$$E2\pi r v = \sigma \frac{2\pi r_2 v}{\epsilon_0} .$$

Intenzita elektrického pole mezi válci je:

$$E = \frac{\sigma r_2}{\epsilon_0 r} .$$

Aby se elektron pohyboval po kruhové dráze s poloměrem  $r$  a úhlovou rychlostí  $\omega$ , musí na něj působit dostředivá síla o velikosti  $F_d = m\omega^2 r$ . Jako dostředivá síla zde působí právě elektrostatická síla o velikosti  $F_e = Ee$ .

Z rovnosti  $F_d = F_e$  dostaneme pro úhlovou rychlost

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{e\sigma r_2}{\epsilon_0 m}}$$

a frekvence obíhání je  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ .

Dosazením  $r = r_1$  dostaneme minimální a  $r = r_2$  maximální frekvenci:

$$f_{\min} = \frac{1}{2\pi r_1} \sqrt{\frac{e\sigma r_2}{\epsilon_0 m}} , \quad f_{\max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma e}{r_2 \epsilon_0 m}} .$$

Možné frekvence tedy leží v intervalu  $(f_{\min}, f_{\max})$ .

Vně kondenzátoru na elektron působí odpudivá síla a ten ulétne pryč, to znamená, že vně obíhat nemůže. Intenzita vně kondenzátoru není nulová, neboť vnější válec má stejně velkou hustotu náboje, ale větší plochu. Celkový náboj kondenzátoru je tedy záporný.

Poznámka: Válcový kondenzátor se říká spíše tomu, když mají oba válce stejně velký náboj a ne jeho hustotu. Označení v tomto příkladě bylo tedy trochu matoucí.

## Úloha II. 2 ... kyvadélko na vozíčku

Mějme matematické kyvadlo o hmotnosti  $m$  a délce  $l$  umístěné na vozíčku. Vozíček má hmotnost  $M$  a je volně (bez odporových sil) pohyblivý po rovině. Určete periodu malých kmitů kyvadla.

Vozíček i kyvadlo se budou pohybovat v rovině. V této rovině tedy zvolme kartézské souřadnice: osu  $x$  vodorovně orientovanou směrem doprava a osu  $y$  svisle orientovanou proti směru tíhového zrychlení. Polohu kyvadla vůči vozíčku popíšeme úhlem  $\varphi$ , což je orientovaný úhel od záporného směru osy  $y$  ke kyvadlu. Úhlovou rychlost kyvadla označme  $\omega = d\varphi/dt$  a úhlové zrychlení  $\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$ . Pohyb kyvadla bude výhodně řešit v soustavě spojené s vozíčkem. To je však neinerciální soustava, a proto musíme nejdříve určit její zrychlení  $a$  vůči inerciálním systémům.

Výslednice vnějších sil působících na vozíček s kyvadlem bude ve směru osy  $x$  nulová. Z prvních impulzových vět tedy plyne, že zrychlení hmotného středu soustavy kyvadlo-vozíček ve směru osy  $x$  bude nulové:

$$Ma + m(a + l\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 l \sin \varphi) = 0,$$

kde  $a$  je složka zrychlení vozíčku ve směru osy  $x$ . Výraz  $l\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 l \sin \varphi$  udává složku ve směru osy  $x$  zrychlení hmotného bodu kyvadla v soustavě spojené s vozíčkem. Člen s  $\varepsilon$  popisuje tečné zrychlení a člen s  $\omega$  zrychlení dostředivé. Zrychlení vozíčku ve směru osy  $y$  je nulové.

Pohybová rovnice kyvadla v soustavě spojené s vozíčkem má tedy následující tvar (druhá impulzová věta):

$$ml^2\varepsilon = -mgl \sin \varphi - mal \cos \varphi.$$

Po dosazení za  $a$  dostaneme:

$$\varepsilon = -\frac{g}{l} \sin \varphi + \frac{m(\varepsilon \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) \cos \varphi}{M + m}.$$

Pro malé výchylky platí:  $\cos \varphi \approx 1$  a  $\sin \varphi \approx \varphi$ . Pohybová rovnice kyvadla se nám potom zjednoduší:

$$\varepsilon = -\left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{g}{l} \varphi - \frac{m}{M} \omega^2 \varphi.$$

Bude-li  $\omega$  pro malé kmity malé, potom lze člen obsahující úhlovou rychlost zanedbat. Výsledná rovnice je pak formálně shodná s pohybovou rovnicí harmonického oscilátoru. Řešení této rovnice splňují podmínku, že pro malé amplitudy kmitů jsou i malé amplitudy úhlové rychlosti a zanedbání členu s  $\omega$  v pohybové rovnici tak bylo oprávněné. Doba kmitu  $T$  malých kmitů kyvadla je tedy dána vztahem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(1 + m/M)}}.$$

Doba kmitu tohoto kyvadla je tedy vždy menší než doba kmitu matematického kyvadla zavěšeného na pevném závěsu v inerciální soustavě. Je to způsobeno tím, že se kyvadlo a vozík (tedy i závěs) vždy pohybují proti sobě. Upevníme-li vozíček k zemi, potom  $M \rightarrow \infty$ , neboť nyní je volně pohyblivým vozíčkem celá země, a dostáváme známý vzorec pro matematické kyvadlo. Je-li  $m \gg M$ , potom je doba kmitu kyvadla podstatně menší než doba kmitu kyvadla pro případ nepohyblivého vozíčku. To je celkem pochopitelné, neboť v tomto případě kyvadlo v inerciálním systému téměř stojí (neuvažujeme-li rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného středu soustavy kyvadlo-vozíček) a kolem něho kmitá vozíček. Protože je hmotnost vozíčku  $M$  podstatně menší než hmotnost kyvadla  $m$ , stačí velmi malá změna potenciální energie kyvadla k velmi rychlému pohybu vozíčku.



Tento problém lze řešit dvěma postupy. Buď můžeme využít pohybové rovnice nebo zákony zachování (hybnosti ve vodorovném směru a energie). V obou případech se využije, že pro malé kmity se matematické kyvadlo na vozičku chová jako harmonický oscilátor. V případě, že pohyb kyvadla neřešíme v soustavě spojené s vozičkou, ale ve vnější inerciální soustavě, pak je nutné započítat vliv pohybu vozičky (závěsu kyvadla) na dobu kmitu kyvadla, na což mnozí řešitelé zapomněli.

### Úloha II.3 ... cowboy

Oblíbenou zábavou jednoho fyzikálně nadaného cowboye je střelení z pistole do plechovek. Jednou mu někdo do plechovek nasypal písek. Vystřelená kulka, jak cowboy později zjistil, v písku uvízla. Měla mosazné jádro s olověným pláštěm, který se v písku celý roztavil. Co s toho vylyne pro hmotnost písku v plechovce, když kulka letěla rychlostí  $440 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , má hmotnost  $10 \text{ g}$  a hmotnostní podíl olova a mosazi je  $1 : 1$ ?

Srážku náboje s plechovkou písku můžeme charakterizovat jako dokonale nepružnou, protože náboj v písku uvízne. Ze zákona zachování hybnosti můžeme určit výslednou rychlost po srážce:

$$2mv_0 = (M + 2m)v_1, \quad (5)$$

kde  $m$  je hmotnost olova a hmotnost mosazi ( $2m$  je tedy hmotnost celé kulky, tj.  $10 \text{ g}$ ),  $M$  je hmotnost plechovky s pískem,  $v_0 = 440 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  je rychlost kulky před srážkou a konečně  $v_1$  je výsledná rychlost.

Podívejme se nyní na energetickou bilanci srážky. Kinetická energie  $E_0$  vystřelené kulky se rozdělí na kinetickou energii soustavy  $E_1$  po srážce, teplo dodané kulce  $Q$  a další energii  $E_2$ :

$$E_0 = mv_0^2, \quad E_1 = \frac{1}{2}(M + 2m)v_1^2. \quad (6)$$

Energetická bilance srážky je

$$E_0 = E_1 + Q + E_2. \quad (7)$$

Z rovnic (5) a (6) dosadíme do (7):

$$mv_0^2 = \frac{2m^2v_0^2}{M + 2m} + Q + E_2, \\ \frac{Mm}{M + 2m}v_0^2 = Q + E_2. \quad (8)$$

Pokud nám stačí jen hrubý odhad hmotnosti, můžeme  $E_2$  vypustit z našich úvah, čímž se vzdáváme určení např. odebírání tepla pískem a energie nutné k proděravění plechovky.

Uvažujme nyní stav krátce po uvíznutí střely. Teplota v kulce je přibližně vyrovnaná a je rovna teplotě tání olova. Olověná část kulky je roztavená. Teplo, které musela kulka přijmout, je rovno

$$Q_m = m(c_{pb} + c_m)\Delta T + ml_t.$$

Aby olovo roztálo, musí být dodané teplo alespoň tak velké, jako  $Q_m$ . Ze vztahu (8) dostáváme výsledný vztah pro hmotnost písku (hmotnost plechovky v porovnání s pískem zanedbáme)

$$M > \frac{2mQ_m}{mv_0^2 - Q_m}.$$

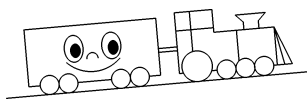
Potřebné materiálové konstanty:

$$c_{pb} = 129 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1},$$

$$c_m = 389 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1},$$

$$l_t = 23 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}.$$

Zbývá nám už jen odhadnout  $\Delta T$  — teplota tání olova je  $328^\circ\text{C}$ . Když uvážíme teplotu střely před vniknutím do plechovky  $20^\circ\text{C}$  (zanedbáme zahřátí kulky v hlavní zbraně a zahřívání/chlazení kulky vzduchem), vyjde nám minimální hmotnost písku  $165 \text{ g}$ . Pro jiné vstupní teploty námi spočtená hmotnost výrazně kolísá — pro vyšší vstupní teploty hmotnost výrazně klesá. Nižší teploty snad projektil mít nebude, a proto můžeme označit tuto hmotnost za dostatečnou.

**Úloha II. 4 ... vláček motoráček**


Obr. 9

Železničáři v Lipce mají dlouhou chvíli a hrají si s vagóny. Mají k dispozici strašně dlouhý kopec na Kubovu Huť se sklonem 2% (na 100 m délky stoupne o 2 m). Předpokládejme, že kopec se najednou zvedá z roviny. Roztlačí-li dlouhou soupravu vagónků na rychlost 5 m/s, souprava vyjede částečně na kopec (nevyjede tam celá) a zase sjede dolů. Určete čas, po který bude alespoň jedním kolem na kopci. Celková délka soupravy je 120 m.

Na vlak působí tíhová síla, ale zpomalení způsobuje jenom tečná složka tíhové síly působící na část vlaku, která je na kopci. Když uvažujeme, že vlak je homogenní, potom hmotnost části vlaku délky  $x$  označíme

$$m' = \frac{x}{l} m ,$$

kde  $l$  je celková délka vlaku a  $m$  jeho hmotnost. Tedy síla působící na vlak, který vyjel do vzdálenosti  $x$  na kopci, je

$$F = m' g \sin \alpha = \frac{x}{l} m g \sin \alpha .$$

Když se teď podíváme na vzorec, vidíme, že síla je přímo úměrná výchylce a působí v opačném směru. To značí, že pohyb je harmonický s koeficientem  $k = m g \sin \alpha / l$  a periodou

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha}} .$$

V našem případě však nastane jenom půlka kmitu. Tedy výsledný čas je

$$t = \frac{T}{2} = 77,7 \text{ s} \doteq 78 \text{ s} ,$$

kde jsme za  $\sin \alpha$  jsme dosadili 0,02.

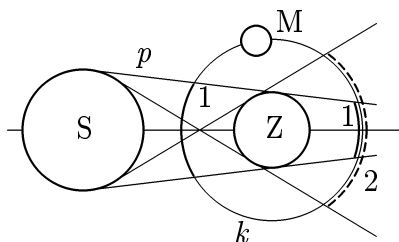
Takto bychom dostali výsledný čas kdyby vlak vyjel na kopec jenom částečně. To se pokusíme ověřit ze ZZE.

$$\frac{E_p}{m} = g \frac{l}{2} \sin \alpha = 11,72 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} ,$$

tedy kinetická energie  $E_k/m = v^2/2 = 12,5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  je o málo větší, proto vlak vyjede na kopec celý. Kdybychom chtěli náš postup výpočtu opravit, tak bychom museli do okamžiku  $x = l$  uvažovat harmonický pohyb, poté by však pokračoval pohyb rovnoměrně zpomalený až do bodu, kdy je rychlost nulová. Pak by vlak sjel přesně stejně zpátky. Výsledný čas je 77,9 s, což je přibližně také 78 s.

**Úloha II. P ... takové malé zatmění**

Vezmeme-li astronomické ročenky za posledních 100 let, zjistíme, že slunečních zatmění je přibližně 1,5 krát více než zatmění měsíčních. Zkuste přijít na to, proč je tomu tak.



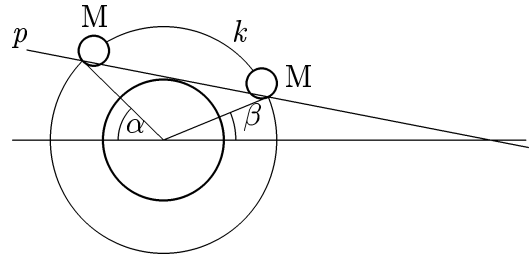
Obr. 10

Na to, aby mohlo nastat úplné zatmění Slunce nebo Měsíce, musí být Slunce, Země a Měsíc téměř v jedné přímce. To, o kolik se bude spojnice Slunce–Země–Měsíc lišit od přímky, nám dává typ zatmění. Jestli je opravdu velice podobná přímce, nastane úplné zatmění, při větších odchylkách budeme pozorovat zatmění částečné. Všimněte si míst označených 1 na obrázku 10. Jestliže se nachází celý Měsíc v těchto oblastech, nastane úplné zatmění. Když se v nich nachází jenom částečně, potom budeme pozorovat zatmění částečné (samozřejmě jenom když nebude zamračená obloha). Existuje i druh zatmění, které hvězdáři nazývají polostínové (na obr. 10 je to oblast 2, ale ne 1). Na rozdíl od předcházejících dvou, která můžeme vidět jak u Slunce tak u Měsíce, tento typ je viditelný

pouze u Měsíce. Je ale tak slabé, že jej pouhým okem nelze spatřit a není ani v astronomických ročenkách.

Předpokládejme, že Měsíc obíhá kolem Země po kruhové dráze, stejně tak i Země kolem Slunce. To nám zabezpečí konstantní úhlovou rychlost Měsíce na své orbitě. Nebudeme přesně počítat, kolik zatmění nastane pro jednotlivé roky, to bychom nemohli nic zanedbat, jinak by výsledek vůbec neodpovídal skutečnosti. Určíme jenom relativní četnosti částečných a úplných slunečních a měsíčních zatmění.

Podle předpokladu obíhá Měsíc kolem Země rovnoměrně. Potom je poměr roven poměru úhlů  $\alpha + \varepsilon$  a  $\beta + \varepsilon$ , kde  $\varepsilon$  je úhel, pod nímž vidíme poloměr měsíce ( $\varepsilon = 0,26^\circ$ ). Pozor: Úhly  $\alpha$ ,  $\beta$  nejsou úhly v rovině, ve které obíhá Měsíc a Slunce (zdánlivě) kolem Země. (Tyto dráhy svírají úhel kolem  $5^\circ$ , ale jejich úhel položme roven nule. Kdyby byl skutečně nula, tak by nastávalo každý měsíc zatmění jak Slunce tak Měsíce). Ve skutečnosti jsou to úhly udávající poloměr oblasti na obloze (kolmé k oběžné dráze), ve které se musí nacházet Měsíc, aby došlo k zatmění. Je třeba si uvědomit, že kdyby Měsíc nebo Země měli tvar jiný než koule, tak tyto vztahy neplatí.



Obr. 11

Nejnázte tyto úhly zjistíme tak, že najdeme  $x$ -ovou souřadnici průniku oběžné dráhy Měsíce  $k$  a dráhy hraničního paprsku  $p$  – viz obr. 10 a 11. Zavedeme soustavu souřadnou s počátkem ve středu Země, osou  $x$  určenou spojnicí středů Země a Slunce a osou  $y$  na ni kolmou. Oběžná dráha Měsíce má v této soustavě rovnici:

$$r_M^2 = x^2 + y^2,$$

přímka  $p$  má rovnici

$$y = \frac{-R_S - R_Z}{r_Z} \cdot x + R_Z$$

(určíme ji z obecné rovnice přímky  $y = ax + b$  a dvou známých bodů  $[0, R_Z]$  a  $[r_Z, R_S]$ ). Po dosazení za  $y$  do rovnice kružnice dostaneme kvadratickou rovnici pro hledaná  $x$ :

$$\left[ 1 + \left( \frac{R_Z + R_S}{r_Z} \right)^2 \right] x^2 - 2R_Z \frac{R_Z + R_S}{r_Z} \cdot x + R_Z^2 - r_M^2 = 0.$$

Po jejím vyřešení dostáváme dva kořeny  $x_1 \doteq 383\,972$  km a  $x_2 \doteq -383\,921$  km, tedy  $\alpha = \arccos x_1/r_M$  a  $\beta = \arccos x_2/r_M$ . Po dosazení dostaneme  $\alpha = 0,69^\circ$  a  $\beta = 1,16^\circ$ . Pro poměr četnosti zatmění dostáváme  $\sigma \doteq 1,5$ . Nutno dodat, že tento výsledek je spíše odhadem — zanedbali jsme elipticitu dráhy Měsíce a námi použitý postup značně závisí na vstupních hodnotách (zkuste si úlohu vyřešit s mírně pozměněnými hodnotami — dostanete výsledek lišící se na řádu setin až desetin).

Pro ověření výsledku jsme si našli stránku <http://sunearth.gsfc.nasa.gov/eclipse/eclipse.html> ze které jsou následující výsledky. Za posledních sto let nastalo 228 slunečních a 230 měsíčních zatmění, z nichž bylo 81 polostínových. Z toho vychází  $\sigma = 1,53$ . Jestliže vezmeme v potaz zatmění spočítané od roku  $-1999$  do roku 3000, potom podle tabulek nastalo nebo nastane 11 897 slunečních zatmění a 8681 měsíčních nepolostínových. To nám dává  $\sigma = 1,37$ . Vidíme tedy, že ve skutečnosti toto číslo je o menší než 1,5, ale ve dvacátém století jsme měli štěstí a viděli jsme více slunečních zatmění než obvykle.

Pozn.: Pro vyčíslení jsme použili následující hodnoty:  $R_Z = 6\,378$  km,  $R_M = 1\,738$  km,  $r_Z = 149\,600\,000$  km,  $r_M = 384\,000$  km a  $R_S = 696\,000$  km.

### Úloha III.1 ... asfaltová holubi

Na pokusné střílnici se nachází vrhač asfaltových holubů. Ve vzdálenosti  $d$  od něj stojí myslivec, snažící se zasáhnout letící cíl. Pod jakým úhlem  $\alpha$  musí namířit, aby se trefil, víme-li, že

na zamíření potřebuje čas  $\tau$  (tj. čas od vrhu holuba do výstřelu)? Asfaltovní holubi jsou vrháni kolmo vzhůru rychlostí  $v_h = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , náboj opouští hlaveň rychlostí  $v_0 = 400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , vzdálenost  $d = 50 \text{ m}$  a čas  $\tau = 2 \text{ s}$ . Odpor prostředí zanedbejte.

Pozorujme celou situaci očima dalšího myslivce (dále pozorovatel), sedícího na nedalekém posedu (jak to navrhl Pavel Augustinský). Za dobu  $\tau$  vylétne holub do výšky  $h_0 = v_h\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$  a bude mít rychlost  $v_{h1} = v_h - g\tau$ . V okamžiku výstřelu pozorovatel spadne z posedu a padá volným pádem dolů. Pozorovatel vidí, že střela i holub letí rovnoměrně přímočaře (neboť jeho soustava není inerciální a setrvačná síla kompenzuje sílu tíhovou). Označme místo, odkud jsou vrháni holubi  $C$ , místo, kde stojí myslivec,  $A$  a místo srážky holuba se střelou  $B$ . Zkušený pozorovatel pozná v trojúhelníku  $ABC$  pravoúhlý trojúhelník. Tento trojúhelník má strany

$$a = h_0 + v_{h1}t, \quad b = d, \quad c = v_0t,$$

kde  $t$  je čas od okamžiku výstřelu. S užitím Pythagorovy věty dostaneme pro čas  $t$  kvadratickou rovnici

$$t^2(v_{h1}^2 - v_0^2) + 2th_0v_{h1} + h_0^2 + d^2 = 0.$$

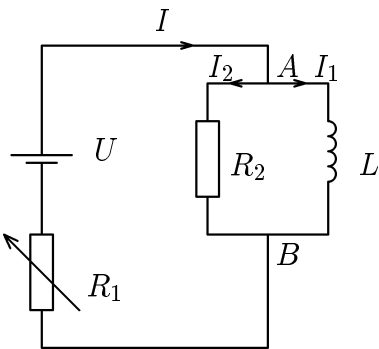
Řešením této rovnice dostaneme pro zadané hodnoty dva časy  $t_1 \doteq 0,1473 \text{ s}$  a  $t_2 \doteq -0,1453 \text{ s}$ , z nichž pouze  $t_1$  má v našem případě smysl. Pro úhel  $\alpha$  máme

$$\cos \alpha = \frac{d}{v_0t_1} \Rightarrow \alpha = 31^\circ 56'.$$

V řešení jsme samozřejmě předpokládali, že vrhač holubů je ve stejné výšce, jako konec hlavně pušky.

### Úloha III.2 ... supravodič

Mějme následující obvod (obr. 12):



Obr. 12

Část obvodu obsahující  $R_2$  a  $L(10 \text{ H})$  je ponořena do kapalného hélia. Vodiče v této části jsou supravodivé (mají nulový odpor). Vyndáme-li  $R_2$  z hélia, má odpor  $5 \Omega$ .

První experiment probíhá následovně: Proud  $I$  měníme pomocí  $R_1$  tak, aby v časovém intervalu  $(t_0, t_1)$  byl konstantní  $1 \text{ A}$ , v  $(t_1, t_2)$  rovnoměrně klesal na nulu, v  $(t_2, t_3)$  rovnoměrně stoupal na  $0,5 \text{ A}$  a dále byl konstantní. V čase  $t_3$  rezistor  $R_2$  vyndáme z hélia a v čase  $t_4$  jej tam opět spustíme. V  $t_0$  je  $I_1 = I_2 = 0,5 \text{ A}$ . Určete časový průběh  $I_1$  a  $I_2$  v časovém intervalu  $(t_0, t_4)$ .

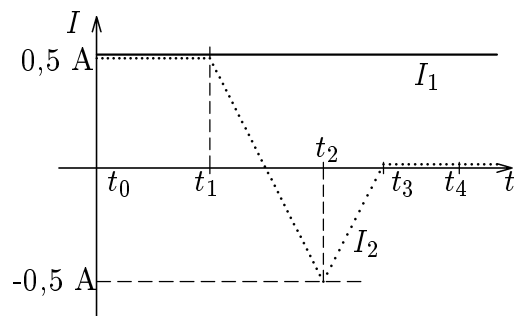
Druhý experiment probíhá následovně: Na počátku je  $R_2 = 0 \Omega$ ,  $I_1 = 0 \text{ A}$ ,  $R_1 = 7,5 \Omega$ ,  $I = 0,5 \text{ A}$ .  $R_1$  se dále nemění. V čase  $t_1$  vyndáme  $R_2$  z hélia a v čase  $t_2$  jej tam opět spustíme. Načrtněte do grafu průběh časové závislosti  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ .

Celá tato úloha se točila kolem Faradayova zákona elektromagnetické indukce:

$$U = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Tento zákon říká, že napětí na cívce způsobuje změnu procházejícího proudu. A naopak, že na cívce, kterou prochází proměnný elektrický proud, se indukují napětí. Při řešení úlohy je nesmírně důležité si uvědomit (všichni, kteří mají dva a méně bodů, si to neuvědomili), že pokud na cívce není napětí, je proud  $I_1$  konstantní.

V prvním experimentu (obr. 13) je až do času  $t_3$  odpor  $R_2$  nulový, tedy napětí mezi uzly  $A$  a  $B$  je podle Ohmova zákona nulové, a proud  $I_1$  zůstává konstantní. Podle Kirchhoffova zákona musí



Obr. 13

být neustále  $I_1 + I_2 = I$ . Proud  $I$  je zadán,  $I_1$  je až do  $t_3$  konstantní, tedy  $I_2$  je v čase  $(t_0, t_3)$  jednoznačně určen vztahem  $I_2(t) = I(t) - I_1(t_0)$ . Protože v čase  $t_3$  je  $I_2 = 0$  A, je napětí mezi uzly A a B nulové i nadále a rezistorem  $R_2$  nezačne protékat žádný proud.  $I$  se dle zadání nemění, je tedy dále konstantní i  $I_1$ .

Ve druhém experimentu (obr. 14) zůstávají hodnoty až do  $t_1$  konstantní. V  $t_1$  vyndáme rezistor z hélia. Cívkou v tom okamžiku ještě žádný proud neprochází, proto proud  $I$  a také  $I_2$  klesne na hodnotu

$$I = I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 I(t_0)}{R_1 + R_2}.$$

Dále bude proud  $I_2$  klesat k nule,  $I_1$  se bude dle Faradayova zákona stále pomaleji zvětšovat a  $I$  bude narůstat zpět k původní hodnotě. Toto nám jako úplné řešení úlohy stačilo. Průběh proudu však můžeme s použitím integrálního počtu spočítat přesně. Matematicky řečeno budou platit rovnice:

$$R_2 I_2 = L \frac{dI_1}{dt}, \quad U = R_2 I_2 + R_1 (I_1 + I_2),$$

kde  $U = R_1 I(t_0)$  je napětí zdroje. Dosazením  $I_2$  ze druhé rovnice do první získáme separovatelnou diferenciální rovnici. Přihlédneme-li k počáteční podmínce  $I_1(t_1) = 0$  A, dostaneme řešení:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U}{R_1} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} (t - t_1) \right) \right], \\ I_2 &= \frac{U}{R_1 + R_2} \exp \left( -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} (t - t_1) \right), \\ I &= \frac{U}{R_1} \left[ 1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \exp \left( -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} (t - t_1) \right) \right]. \end{aligned}$$

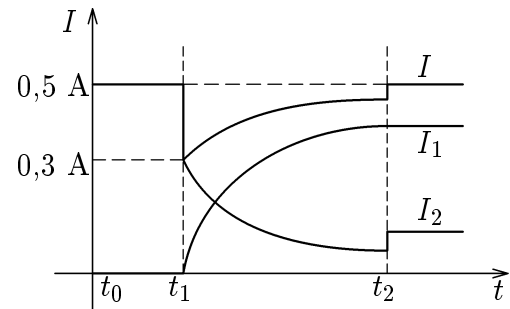
V čase  $t_2$  po spuštění rezistoru do hélia, bude mezi A a B opět nulové napětí, proud  $I_1$  tedy zůstane konstantní.  $I$  bude také konstantní a velký jako na začátku  $I = U/R_1$ , neboť odpor supravodivé části bude nulový. Dále podle Kirchhoffova zákona  $I_2 = I - I_1$ . Ještě nutno podotknout, že konečné velikosti proudů závisí na délce časového intervalu  $(t_1, t_2)$ , pro načrtnutí grafu jsme volili  $t_2 - t_1 = 5$  s.

### Úloha III.3 ... a přece se točí

Uvažte měděný kruhový závit o poloměru  $R = 10$  cm, který leží na stole v magnetickém poli Země (vektor magnetické indukce je rovnoběžný se stolem, který se nachází na rovníku). Poloměr drátu je  $r = 0,3$  mm. Závitem prochází proud  $I$ . Určete  $I$  tak, aby se závit překlopil (předpokládejte, že tření je dostatečně velké, takže závit neproklouzne).

Na element vodiče působí síla  $d\mathbf{F} = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ , celková síla působící na závit bude nulová kvůli symetrii závitu. Pro nás je však rozhodující moment síly vůči ose otáčení. Nazvěme horní část tu, která je blíže k severnímu zemskému pólu, a dolní tu, která je blíže k jižnímu. Vidíme, že když je směr oběhu pravotočivý, tak podle pravidla pravé ruky na horní půlce působí všechny síly směrem nahoru, a na dolní směrem dolů, takže nám vzniká dvojice sil, která se snaží převrátit kruh kolem osy kolmé k  $\mathbf{B}$  a blíže k jižnímu pólu. K této ose teď spočítáme moment sil při nakloněném závitu vůči stolu.

Nechť závit leží na stole, úhel mezi  $\mathbf{B}$  a  $d\mathbf{l}$  označme  $\varphi$ . Síla působící na element  $d\mathbf{l}$  má velikost  $dF = BI dl \sin \varphi$  a směr kolmý na rovinu stolu. Na element  $d\mathbf{l}'$ , který je k  $d\mathbf{l}$  symetrický vzhledem k ose, která prochází středem závitu a je rovnoběžná s osou otáčení, působí stejně velká síla opačného směru. Moment dvojice těchto sil je  $dM = BI dl s \sin \varphi$ , kde  $s$  je vzdálenost obou elementů. Plocha omezená elementy  $d\mathbf{l}$  a  $d\mathbf{l}'$  má velikost právě  $dl s \sin \varphi$ . Sečteme-li všechny  $dM$  dostaneme



Obr. 14

pro celkový moment  $M = BIS$ , kde  $S$  je plocha celého závitu. Je-li smyčka vzhledem ke stolu skloněna o úhel  $\alpha$ , na celkovém momentu se podílí jen složka  $\mathbf{B}$  rovnoběžná s rovinou závitu, neboli

$$M = BIS \cos \alpha = \pi R^2 BI \cos \alpha .$$

Tento výsledek lze dokonce zobecnit pro libovolnou rovinnou smyčku  $\mathbf{M} = I(\mathbf{S} \times \mathbf{B})$ , kde  $\mathbf{S}$  má směr normály plochy.

Na určení, kdy se postaví kroužek do svislé polohy, potřebujeme znát ještě velikost momentu tíhové síly

$$M_g = mgR \cos \alpha = V \rho g R \cos \alpha = 2\pi^2 R^2 r^2 \rho g \cos \alpha .$$

Potom podmínka pro to, aby se závit zvedl, je  $M > M_g$ :

$$BI\pi R^2 \cos \alpha > 2\pi^2 R^2 r^2 \rho g \cos \alpha .$$

Vidíme, že když se kroužek zvedne na začátku, bude se zvedat až do svislé polohy (podmínka nezávisí na úhlu  $\alpha$ ).

$$I > \frac{2\pi r^2 \rho g}{B} = 1650 \text{ A} ,$$

po dosazení konkrétních hodnot  $r = 0,3 \text{ mm}$ ,  $\rho = 8930 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a  $B = 30 \mu\text{T}$ . Vidíme, že proud je příliš velký, a jak mnozí poznamenali, drát by se roztavil.

### Úloha III.4 ... „My name is James Bond...“

Představme si autíčko, které jede po letišti rovnoměrně přímočaře (vzhledem k letištní hale) rychlostí  $\mathbf{v}$ . Kromě autíčka stojí na letišti sličná letuška (nestojí na přímce, po které se pohybuje autíčko). V okamžiku, kdy je autíčko letušce nejbližší (t.j. spojnice autíčko — letuška je kolmá na  $\mathbf{v}$ ), se řidič rozhodne, že dojede letušku navštívit. Autíčko dokáže v libovolném směru vyvinout zrychlení o maximální velikosti  $a$ . Za jaký nejkratší čas se autíčko dostane k letušce? Čas se počítá od okamžiku fatálního rozhodnutí. Předpokládejte, že auto u letušky nebude zastavovat ani přibrzďovat. (Nápověda: Uvažujte různé vztažné soustavy.)

Jak už bylo v návodu uvedeno, je vhodné k řešení úlohy použít nějakou výhodnou inerciální soustavu. Nejvýhodnější je inerciální soustava, v níž je autíčko ve chvíli, kdy je letušce nejbližší, v klidu. Tato soustava se vůči soustavě spojené s letuškou, bude pohybovat rychlostí o velikosti  $v$ . Letuška se tedy bude v této soustavě pohybovat rychlostí také o velikosti  $v$ , ale opačného směru. Všechny následující úvahy budeme dělat v této soustavě. Nejrychleji autíčko letušku dostihne, bude-li se pohybovat po přímce s maximálním zrychlením. Že je tato dráha nejrychlejší, je zřejmé z toho, že dráha bude po přímce nejkratší a také proto, že zrychlení bude stále ve směru pohybu. Za čas  $t$  urazí dráhu  $2at^2/2$ . Letuška za tuto dobu urazí dráhu o délce  $vt$ . Označíme-li  $d$  vzdálenost letušky od autíčka v čase  $t = 0$ , bude v okamžiku, kdy auto letušku dostihne, platit:

$$d^2 + (vt)^2 = (at^2/2)^2 .$$

To je vlastně kvadratická rovnice pro  $t^2$ . Jejím jediným kladným řešením je:

$$t = \frac{\sqrt{2v^2 + 2\sqrt{v^4 + a^2d^2}}}{a} .$$

Závěrem můžeme podotknout, že stejné řešení lze získat i v soustavě spojené s letuškou, ale v této soustavě není zřejmá časová výhodnost řešení.

### Úloha III.P ... šup sem, šup tam

Spočítejte frekvenci kmitů atomů v krystalu  $\text{NaCl}$ . Můžete si úlohu zjednodušit tak, že budete uvažovat pouze coulombovské působení sousedních atomů. Jako bonus můžete spočítat i amplitudu výchylky.

Jak jste se mohli přesvědčit, tenhle příklad byl těžký (a počet řešitelů tomu napovídá). Způsoby řešení byly obecně různé, téměř každý se pokusil řešit problém svým způsobem.

Představme si, že máme atom (zatím je nám jedno, jestli  $Na$  nebo  $Cl$ ), který kmitá mezi dvěma jinými, o kterých předpokládejme, že se nepohybují. Představme si, že systém našich atomů je v rovnováze\*) a my teď vychýlíme prostřední z nich o  $\Delta$  směrem k sousednímu atomu. Platí:

$$F = F_B - F_A = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(d-\Delta)^2} - \frac{1}{(d+\Delta)^2} \right) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4d\Delta}{(d^2 - \Delta^2)^2}.$$

V čitateli jsme položili efektivní náboj  $Na$  i  $Cl$  roven  $e$ , protože jeden elektron z elektronového obalu  $Na$  přejde do valenční vrstvy atomu  $Cl$ , tedy  $Na$  se změní v iont  $Na^+$  a  $Cl$  v  $Cl^-$ . Ve jmenovateli můžeme  $\Delta^2$  zanedbat vůči  $d^2$  a dostaneme:

$$F = \frac{-e^2}{\pi\epsilon_0 d^3} \cdot \Delta = -\kappa \cdot \Delta. \quad (9)$$

Vidíme, že síla je přímo úměrná výchylce. Formálně (co do zápisu) je tato síla totožná se silou pružnosti při harmonických kmitěch pružiny. Jestliže na soustavu působí síla úměrná výchylce (a samozřejmě proti pohybu), potom soustava kmitá s úhlovou frekvencí  $\omega = \sqrt{\kappa/m}$ . Můžeme tedy říct, že atom bude kmitat s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 d^3 m_{at}}} \implies f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{\pi\epsilon_0 d^3 N m_p}}, \quad (10)$$

kde  $2\pi f = \omega$ , a hmotnost atomu jsme položili rovnu nukleonovému číslu  $N$  násobenému hmotností protonu  $m_p$ . Jediné, co ještě ve vztahu (10) neznáme, je vzdálenost dvou atomů v  $NaCl$ . Protože je krystal složen napůl z  $Na$  a napůl z  $Cl$ , spočteme ji následovně:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{1}{2}(m_{Na} + m_{Cl})}{d^3} = \frac{(N_{Na} + N_{Cl}) m_p}{2d^3} \implies$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{(N_{Na} + N_{Cl}) m_p}{2\rho}} = 0,3\text{nm} \quad (11)$$

Hustota kuchyňské soli je  $\rho = 2200\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Jestliže rovnici (11) dosadíme do (10), dostáváme konečný výsledek:

$$f = \sqrt{\frac{e^2 \rho}{2\pi^3 \epsilon_0 (N_{Na} + N_{Cl}) N_{Na(Cl)} m_p^2}} \approx 5 \cdot 10^{12} \text{ Hz}. \quad (12)$$

Podobný výsledek se dá získat i jinými způsoby, např. pomocí Hookova zákona. Jiný, zajímavější způsob navrhl Peter Čendula. Povrch krystalu si představil jako povrch černého tělesa (ve skutečnosti to však černé těleso není). Vyzařování fotonů je vázáno kmity mřížky krystalu, to znamená, že vyzařené fotony budou mít frekvenci blízkou frekvenci vlastních kmitů mřížky (alespoň řádově). Platí:

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{c}{\nu_m} \approx \frac{c}{f} \implies f \approx \frac{cT}{b} = 3 \cdot 10^{13} \text{ Hz}.$$

\*) Systém, který popisujeme, by byl nestabilní, kdybychom uvažovali jenom coulombické síly. Důvod, proč jsou atomy v krystalech v takové vzdálenosti, jak jsou, tkví v kvantové mechanice a nebudeme ho rozebírat. Nám bude stačit skutečnost, že existuje poloha, ve které jsou atomy v krystalu v rovnováze.

Vzhledem k tomu, že jsme dělali jenom řádový odhad, tak jsme nerozlišovali mezi frekvencí kmitů  $Na$  a  $Cl$ . Podle vztahu (12) budou tyto obecně různé, ale protože  $N_{Na} \approx N_{Cl}$ , nebudou se příliš lišit. Ještě si spočteme poměr těchto frekvencí: podle vztahu platí

$$\frac{f_{Na}}{f_{Cl}} = \sqrt{\frac{N_{Cl}}{N_{Na}}} = 1,25 .$$

Amplitudu kmitů odhadneme postupem, který mnozí z vás znají. Jmenuje se *ekvipartiční teorém* a říká, že na každý stupeň volnosti částice připadá energie  $E = kT/2$ , kde  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$  je Boltzmannova konstanta. Stupněm volnosti se rozumí, kolik různých pohybů může částice vykonávat. Např. atom  $He$  v plynném stavu má tři stupně volnosti, může se pohybovat ve směru os  $x, y, z$ . Molekula plynného vodíku  $H_2$  má stupňů volnosti 5. Tři posuvné jako hélium, a dva rotační. Třetí rotační stupeň volnosti je degenerován, osa rotace je rovnoběžná s vazbou. Kdyby se točila kolem této osy, tak vidíme stejný stav, jako by se netočila.

Podle ekvipartičního teorému a zákona zachování energie tedy platí pro jeden atom uvnitř krystalu (v krystalu připadá na jeden atom šest stupňů volnosti, neboť harmonický oscilátor má dva stupně volnosti a atom může kmitat ve všech třech osách)

$$E_{kin} = 3kT = \frac{1}{2}\kappa\Delta_{celk}^2 .$$

Výchyly v osách  $x, y, z$  se sčítají, a jsou samozřejmě stejné (jinak by existoval v krystalu význačný směr), platí tedy

$$\Delta_{celk}^2 = \Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2 = 3\Delta^2 .$$

Tedy celková amplituda bude

$$\Delta_{celk} = \sqrt{\frac{6kT}{\kappa}} = \sqrt{\frac{6kT\pi\epsilon_0d^3}{e^2}} \approx 10^{-11} \text{ m} .$$

Amplituda mezi dvěma atomy bude zhruba poloviční ( $1/\sqrt{3}$ ). Vidíme, že skutečně  $\Delta \ll d$ .

*Celé řešení této úlohy je špatně. Ačkoliv je autor veden správnou pohnutkou, dopustil se drobné chyby, která však má katastrofální následky. Ve vztahu (9) má na místě znaménka být plus. Tato drobná změna odpovídá tomu, že daná poloha (v našem modelu, jen se započtením coulombovských sil) je sice rovnovážná, ale není stabilní, nýbrž labilní, tj. atom nikdy kolem této polohy nebude kmitat, ale při jakémkoliv vychýlení se od ní nenávratně vzdálí. Z toho plyne ponaučení: „Když je něco příliš podobné, tak se ještě jednou koukni, jestli se to náhodou diametrálně neliší. I takové znaménko může být někdy hodně důležité“ — pozn. recenzenta J. H.*

*(Z didaktických důvodů jsme řešení nechali v původní podobě. — pozn. red.)*

#### Úloha IV . 1 ... nabité kuličky

Tři stejné kuličky o hmotnosti  $m$ , nabité nábojem  $q$ , jsou spojeny lehkými neroztažitelnými nitěmi tak, že tvoří rovnostranný trojúhelník o straně délky  $d$ . Pokud jednu z nití přestříhneme, soustava se začne pohybovat. Určete maximální rychlost „prostřední“ kuličky během nastalého pohybu.

Zvolme soustavu souřadnic následujícím způsobem: osu  $x$  ve směru přestřižené nitě a osu  $y$  kolmou na osu  $x$  a procházející „prostřední“ kuličkou. Osu  $z$  není nutné uvažovat, neboť se jedná o rovinný problém. Dále vidíme, že pohyb kuliček bude symetrický vůči ose  $y$ . Velikosti složek rychlosti „postranních“ kuliček označme  $v_x$  ve směru osy  $x$  a  $v_y$  ve směru osy  $y$ . „Prostřední“ kulička se bude pohybovat v ose  $y$  rychlostí  $v$ . Okamžitou vzdálenost „postranních“ kuliček označme  $l$ .

Při pohybu kuliček se bude zachovávat jejich celková energie, neboť elektrostatické pole je konzervativní a celková vykonaná práce tahových sil nití je nulová:

$$\frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0d} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0d} = \frac{1}{2}mv^2 + m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0l} + \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0d} .$$



Dále platí zákon zachování hybnosti soustavy kuliček, který má ve směru osy  $y$  tvar (kuličky se ve směru osy  $y$  přibližují):

$$2mv_y = mv.$$

Dosažením za  $v_y$  ze zákona zachování hybnosti do zákona zachování energie dostaneme:

$$\frac{3}{4}mv^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{l} \right) - mv_x^2.$$

Vidíme tedy, že „prostřední“ kulička bude mít maximální rychlost v okamžiku, kdy jsou všechny kuličky v přímce ( $l = 2d$  a  $v_x = 0$ ):

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 md}}.$$

Po dosažení maximální rychlosti se rychlost „prostřední“ kuličky začne zmenšovat a kulička se zastaví v okamžiku, kdy kuličky budou tvořit opět vrcholy rovnostranného trojúhelníku o straně délky  $d$ . Soustava se pak začne pohybovat stejným způsobem jako na začátku pouze v opačném směru a dostane se tak do původního stavu. Pohyb soustavy je tedy periodický. Někteří řešitelé chybně uvedli, že výsledný pohyb soustavy bude harmonický. Pohyb je harmonický pouze v případě, že potenciální energie je tvaru  $E_p = kx^2$  (odpovídající síla je pak  $F = -2kx$ ), kde  $k$  je konstanta a  $x$  výchylka z rovnovážné polohy. To však v našem případě není splněno.

V našem řešení jsme předpokládali, že elektromagnetické pole v každém okamžiku odpovídá elektrostatickému poli. Ve skutečnosti však vlivem pohybu kuliček vzniká také pole magnetické (pohyb nabitých částic odpovídá elektrickému proudu). Kuličky se pohybují se zrychlením. Dochází tedy k vyzařování elektromagnetických vln na úkor mechanické energie kuliček. To znamená, že pohyb kuliček bude tlumen a kuličky se zastaví v rovnovážné poloze, což je poloha, kdy kuličky leží v přímce. Vliv uvedených efektů roste s rychlostí kuliček a s frekvencí jejich pohybu. Budou-li rychlosti kuliček podstatně menší než rychlost světla a frekvence jejich pohybu nebude příliš velká, pak lze uvedené efekty zanedbat.

Několik řešitelů uvažovalo také gravitační síly mezi kuličkami. Gravitační síly musí být menší než elektrické. V opačném případě by totiž došlo ke zhroucení kuliček do těžiště rovnostranného trojúhelníku ještě před přestřižením nitě. V tomto případě je postup zcela stejný — stačí nahradit potenciální energii systému kuliček výrazem:

$$E_p = \left( \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} - \kappa m^2 \right) \frac{1}{l}.$$

V několika došlých řešeních bylo chybně užito vztahu  $v = at$ , kde  $v$  znamená rychlost,  $a$  zrychlení a  $t$  čas. Tento vztah platí pouze v případě, že zrychlení  $a$  je *konstantní*. Někteří do tohoto vztahu dosazovali jakési střední hodnoty. To je možné, ale dosažená střední hodnota musí být *časová*. Časovou střední hodnotu zrychlení však lze určit pouze ze známé časové závislosti zrychlení. Podobně je tomu i u ostatních vztahů tohoto typu (například  $W = Fs$  nebo  $s = vt$ ). Tyto problémy měli řešitelé, kteří úlohu řešili pomocí sil, neboť pohybové rovnice jsou v tomto případě poměrně složité diferenciální rovnice, které se řeší integrací na zákon zachování energie.

Někteří řešitelé neznali správný vztah pro potenciální energii soustavy bodových nábojů (většinou jim vycházela potenciální energie dvojnásobná, než je ve skutečnosti). Odvodme si tedy správný vzorec. Uvažujme soustavu  $N$  bodových nábojů. Poloha  $i$ -tého náboje je  $\mathbf{r}_i$  a hodnota jeho náboje  $Q_i$ . Síla, kterou působí  $j$ -tý náboj na  $i$ -tý, je pak dána vztahem:

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij},$$

kde  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ . Z tohoto vztahu ihned vidíme, že  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ , což rovněž plyne ze zákona akce a reakce.

Nechť se polohy nábojů změni o velmi malé  $\Delta \mathbf{r}_i$ :  $\Delta \mathbf{r}_i \ll r_{ij}$ . Elektrické síly pak vykonají práci  $\Delta W$ , pro kterou platí:

$$\Delta W = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{F}_{ij} \right) \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \sum_{i < j} (\mathbf{F}_{ij} \cdot \Delta \mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{ji} \cdot \Delta \mathbf{r}_j) = \sum_{i < j} \mathbf{F}_{ij} \cdot (\Delta \mathbf{r}_i - \Delta \mathbf{r}_j).$$

Protože platí, že  $\Delta \mathbf{r}_{ij} = \Delta \mathbf{r}_i - \Delta \mathbf{r}_j$ , lze vztah pro  $\Delta W$  dále upravit:

$$\Delta W = \sum_{i < j} \mathbf{F}_{ij} \cdot \Delta \mathbf{r}_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} \cdot \Delta \mathbf{r}_{ij}.$$

Uvažujme vektor  $\mathbf{r}$ . Pokud k tomuto vektoru přičteme vektor  $\Delta \mathbf{r}$ , pak dostaneme vektor  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ . Velikost vektoru  $\mathbf{r}$  označme  $R$ . Velikost vektoru  $\mathbf{r}'$  zapišme jako  $R + \Delta R$ . Pokud je splněna nerovnost  $\Delta r \ll R$ , potom platí:

$$R^2 + 2R\Delta R + (\Delta R)^2 = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = R^2 + 2\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r} + (\Delta r)^2 \implies \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r} = R\Delta R.$$

Elektrické síly tedy vykonají práci:

$$\Delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}^2} \Delta r_{ij}.$$

Celkovou práci  $W$ , kterou elektrické síly vykonají při přemístění nábojů z jedné polohy do druhé, získáme sečtením jednotlivých příspěvků  $\Delta W$ , které odpovídají „nekonečně“ malým přemístěním. To se provede integrací. Uvažujme nyní soustavu pouze dvou nábojů. Zde známe práci, kterou elektrické síly vykonají při přemístění nábojů z polohy, kdy je jejich vzdálenost  $R$ , do nekonečna:  $W = (1/4\pi\epsilon_0)(Q_1 Q_2/R)$  (tento výsledek se dostane integrací). Tento vzorec nám umožňuje určit práci  $W$  elektrických sil při přemístění nábojů soustavy do nekonečna i v obecném případě:

$$W = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}.$$

Tato práce nezávisí na způsobu přemístění nábojů, ale pouze na jejich počáteční vzájemné poloze. To tedy znamená, že existuje potenciální energie tohoto systému, kterou lze zapsat jako:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} + C = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} + C,$$

kde  $C$  je libovolná konstanta (potenciální energie je určena až na aditivní konstantu). Volbou  $C = 0$  dostaneme potenciální energii s nulovou hladinou v nekonečnu.

#### Úloha IV.2 ... tyč pod napětím

Na konce homogenní tyče o průřezu  $S = 1 \text{ cm}^2$  působí dvě síly  $F_1 = 40 \text{ N}$  a  $F_2 = 100 \text{ N}$  v opačných směrech (obě „od tyče“). Určete napětí v průřezu, který dělí tyč na dvě části v poměru 1 : 2 (působíště síly  $F_2$  je na konci kratší části).

Z došlých řešení tohoto příkladu bylo správně spočteno mnohem méně, než by se vzhledem k jednoduchosti této úlohy dalo předpokládat. Ukážeme si tedy dva možné způsoby řešení.

První přístup spočívá v tom, že si sílu  $F_2$  rozdělíme na dvě složky. Jedna složka bude mít stejnou velikost jako síla  $F_1$  a spolu s ní bude v celé tyči způsobovat vznik napětí o velikosti  $\sigma_1 = F_1/S$ . Druhá složka síly  $F_2$  o velikosti  $F_2 - F_1$  bude tyč urychlovat ve směru působení síly  $F_2$ . Urychlující síla spolu se silou setrvačnou zapříčiní vznik dalšího napětí  $\sigma_2$ , jehož velikost je dána vzdáleností od působíště síly  $F_2$ . V našem případě je  $\sigma_2 = 2(F_2 - F_1)/3S$ . Výsledné napětí  $\sigma$  v zadané vzdálenosti bude

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{2F_2 + F_1}{3S}.$$

Úlohu je možné vyřešit také z pohybových rovnic. Budeme předpokládat, že tyč je rozdělena v obecném poměru  $k : (1 - k)$ , kde  $k \in \langle 0, 1 \rangle$ . Budeme ji brát jako dokonale tuhé těleso, což znamená, že se celá pohybuje se zrychlením  $a = (F_2 - F_1)/m$  a napíšeme pohybové rovnice:

$$F_2 - F = kam$$

$$F - F_1 = (1 - k)am .$$

Jejich řešení bude  $F = k(F_1 - F_2) + F_2$ . Napětí v průřezu daném koeficientem  $k$  bude  $\sigma = F/S$ , což pro  $k = 1/3$  dává náš případ. Vidíme také, že napětí se bude lineárně měnit v závislosti na  $k$ . Nebude tedy stejné v každém průřezu tyče, jak mnozí řešitelé chybně předpokládali (analogický případ: tyč visící v homogenním gravitačním poli).

Pro úplnost dodejme, že číselně vychází  $\sigma = 800$  kPa.

### Úloha IV. 3 ... potápěčova bublina

Potápěč v hloubce 50 m pod ledem vypustí vzduchovou bublinu o poloměru 2 cm. Bublina doplave pod led. Předpokládejte, že se zdeformuje přibližně do tvaru válce. Určete jaká bude její výška. Vše probíhá za normálního tlaku a teploty  $0^\circ \text{C}$ .

Velká bublina zaujme pod ledem zhruba tvar válce, dolní podstava bude z velké části rovná, na krajích nechtě je mírně zakřivená, ale to zanedbáme. Bublina má povrchovou, potenciální tíhovou a tlakovou energii. Systém zaujme takový tvar, aby součet těchto energií byl minimální. Tlakovou energii můžeme považovat za konstantní, neboť výška bubliny bude malá, a tedy tlak vzduchu v ní v dobrém přiblížení stále roven tlaku atmosférickému. Z čehož plyne, že objem bubliny těsně pod ledem bude také konstantní. Potenciální tíhová energie závisí na poloze těžiště a bude se rovnat práci, kterou bychom museli vykonat, abychom kapalinu z objemu bubliny přenesli na povrch, tedy:  $E_{pot} = 1/2 \rho V g h$ .

K určení povrchové energie budeme potřebovat velikost povrchu válce v závislosti na  $h$  a  $V$ . Tento povrch je:

$$S = 2 \left( \frac{V}{h} + \sqrt{\pi V h} \right) .$$

Povrchová energie je, uvažujeme-li, že povrchové napětí mezi ledem a vzduchem je zhruba stejné jako mezi vodou a vzduchem:

$$E_{pov} = 2\sigma \left( \frac{V}{h} + \sqrt{\pi V h} \right) .$$

Minimum nastává, když je derivace energie podle výšky rovna nule:

$$0 = -\frac{2\sigma V}{h^2} + 2\sigma \sqrt{\frac{\pi V}{h}} + \frac{1}{2} \rho V g .$$

Protože druhý člen je v porovnání s ostatními velmi malý, lze ho zanedbat. Dostaneme tedy:

$$h = 2 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \doteq 5,5 \text{ mm} .$$

Řešení pomocí energií má oproti rozboru působících tlaků jednu nespornou výhodu, energie je totiž v jistém smyslu pojem globální, tedy velikost energie v naší aproximaci bude zhruba stejná jako ve skutečnosti. Tlak je naopak pojmem lokálním, v místech zakřivení by bylo matematicky velmi obtížné s tím počítat, ale zato by výsledek byl přesnější. Aproximace válcem platí jen pro velké bubliny, pro menší nelze uvažovat, že zaujmou takový tvar. Nejčastější chybou bylo neuvážení potenciální energie.

**Úloha IV.4 ... a zase to zatmění!**

Vaším úkolem je spočítat maximální možnou šířku pásu úplného i částečného zatmění Slunce. Je úplné zatmění pozorovatelné vždy, když se Měsíc dostane na spojnici Slunce a Země? Pro jednoduchost uvažujte, že se všechna tři tělesa pohybují v téže rovině (ekliptice). K výpočtu použijte následujících dat:

- vzdálenost Země od Slunce  $r_Z$  kolísá mezi 147 093 860 km a 152 101 870 km
- vzdálenost Měsíce od Země  $r_M$  kolísá mezi 356 410 km a 406 740 km
- poloměr Slunce je  $R_S = 695\,990$  km
- poloměr Země je  $R_Z = 6\,378$  km
- poloměr Měsíce je  $R_M = 1\,738$  km

Situaci budeme řešit v rovině kolmé na ekliptiku a procházející středy Slunce, Země a Měsíce. Zavedeme soustavu souřadnou dle obrázku 15.

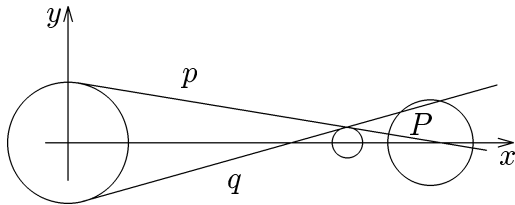
Situace bude symetrická podle osy  $x$ , dále budeme řešit jen v polorovině  $y > 0$ . Zajímá nás bod  $P$ , protože dvojnásobek jeho  $y$ -ové souřadnice bude šířka stínu. Rovnice přímky  $p$  určující hranici oblasti úplného stínu má tvar:

$$y = \frac{R_M - R_S}{r_Z - r_M} x + R_S$$

(získáme ji z obecné rovnice přímky  $y = ax + b$  a dvou známých bodů  $[0, R_S]$  a  $[r_Z - r_M, R_M]$  — zanedbáváme, že spojnice tečného bodu a středu tělesa není kolmá na osu  $x$ , což je vzhledem k úhlu, který svírá přímka  $p$  s osou  $x$  (desetiny stupně) oprávněné zanedbání).

Pro  $x = r_Z - R_Z$  dostaneme

$$y = \frac{R_M - R_S}{r_Z - r_M} (r_Z - R_Z) + R_S. \quad (13)$$



Obr. 15

Protože je  $R_M - R_S < 0$ , tak pro maximální  $y$  musí být  $r_Z$  maximální a  $r_M$  minimální, číselně je šířka stínu  $2y = 273$  km (můžeme si tedy v této chvíli dovolit zanedbat zakřivení Země).

Pro částečné zatmění dostaneme analogicky rovnici přímky  $q$ :

$$y = \frac{R_M + R_S}{r_Z - r_M} x - R_S.$$

Pokud bychom dosadili  $x = r_Z - R_Z$  dostaneme maximální hodnotu  $y$  přibližně 3600 km  $\Rightarrow$  již nelze zanedbat zakřivení Země.

Budeme tedy hledat průnik  $q$  s kružnicí  $(x - R_Z)^2 + y^2 = R_Z^2$ , která popisuje řez povrchem Země v naší soustavě souřadné. Po dosazení za  $y$  dostaneme kvadratickou rovnici:

$$\left(1 + \left(\frac{R_M + R_S}{r_Z - r_M}\right)^2\right) x^2 - 2 \left(r_Z + R_S \frac{R_M + R_S}{r_Z - r_M}\right) x + r_Z^2 + R_S^2 - R_Z^2 = 0.$$

Po vyřešení (vezmeme menší z kořenů) dostaneme  $x_S$ , což je  $x$ -ová souřadnice průniku. Pak hledaná šířka částečného zatmění na zemské sféře je  $2R_Z \arccos(r_Z - x_P)/R_Z \doteq 7764$  km.

K otázce existence úplného zatmění: Při pohledu na (13) zjistíme, že  $y$  nabývá minima pro  $r_M$  minimální a  $r_Z$  maximální, po dosazení  $y = -156$  km  $\Rightarrow$   $p$  a  $p_{\text{sym}}$  se protnou mezi Měsícem a Zemí a tedy úplné zatmění Slunce na Zemi vidět nebude.

### Úloha IV . P ... jablko nepadá daleko od baobabu

Představme si baobab, který roste na rovníku, na jeho nejvyšší větvi ve výšce  $h$  je baobabí jablko. Jablko se rozhodne, že spadne. Spočtěte, jak daleko od kmene dopadne.

Řešení jedna: Dívá-li se na situaci pozorovatel z inerciální soustavy nespojené s povrchem Země, vidí, že ve výšce  $h$  letí jablko rychlostí  $\omega(R_z + h)$  ve směru rovnoběžně s povrchem ( $\omega$  je úhlová rychlost rotace Země). Povrch se pohybuje v témže směru rychlostí  $\omega R_z$ . Rozdíl je tedy  $\omega h$ . Jablko letí dobu  $t = \sqrt{2h/g}$  a dopadne tedy ve vzdálenosti  $s = \omega h \sqrt{2h/g}$  od kmene.

Řešení dva: Díváme-li se na situaci ze soustavy spojené s povrchem Země, zdají se nám nehybné předměty, které ve výšce  $x$  letí rychlostí  $\omega(R_z + x)$ . Jablko letí stále  $\omega(R_z + h)$  a tedy vzhledem k pozorovateli na Zemi rychlostí  $\omega(h - x)$ . Pro  $x$  platí  $x = h - gt^2/2$  a tedy  $v = \omega gt^2/2$ . Po zintegrování (kdo neví, co to je, necht' přijme, že plocha pod grafem funkce  $y = x^2$  je  $x^3/3$ ) vyjde  $s = (\omega h/3) \sqrt{2h/g}$ .

Na vás je, abyste rozhodli, který z výsledků je správně, a opravili chybný postup.

Opravíme nejprve chybnou úvahu v řešení jedna. Představme si tyč kolmou na povrch, z jejíhož konce ve výšce  $h$  padá jablko. Povrch Země letí v horizontálním směru (dále budeme-li mluvit o rychlosti, myslíme tím její průmět do tohoto směru, nebude-li řečeno jinak) rychlostí  $\omega R_z$  (kde  $\omega$  je úhlová rychlost rotace Země). Konec tyče (resp. jablko před pádem) letí rychlostí  $\omega(R_z + h)$ . V zadání jsme postupovali následovně: Rozdíl rychlostí je stále  $\omega h$ , doba pádu  $t$ , a tedy posunutí od dolního konce tyče  $\omega h t$ . To by ovšem znamenalo, že v každé výšce (kupříkladu i na začátku pádu) je rozdíl rychlosti jablka a části tyče, kolem níž právě prolétá,  $\omega h$ , což viditelně není. Ve výšce  $x$  nad povrchem je rychlost odpovídající části tyče  $\omega(R_z + x)$ , rychlost jablka stále  $\omega(R_z + h)$ , rozdíl je tedy  $\omega(h - x)$ , což odpovídá řešení dva v zadání. Ke stejné opravě řešení jedna lze dospět i úvahou využívající faktu, že úhlová rychlost jablka ve výšce  $x$  je

$$\omega_x^* = \frac{\omega(R_z + h)}{R_z + x} \approx \omega \left(1 + \frac{h}{R_z}\right) \left(1 - \frac{x}{R_z}\right) \approx \omega \left(1 + \frac{h - x}{R_z}\right).$$

Zde (a i v pozdějším textu) využíváme faktu, že pro  $h/R_z \ll 1$  dostatečně přesně platí  $(1 + h/R_z)^{-1} \approx (1 - h/R_z)$ . Rozdíl vzdáleností po dopadu pak vyjde

$$s = R_z \Delta\varphi = R_z \int_0^t (\omega_x^* - \omega) d\tau = \omega \int_0^t (h - x) d\tau = \frac{\omega g t^3}{6} = \frac{\omega h}{3} \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (14)$$

neboť  $h - x = g\tau^2/2$  je délka volného pádu za čas  $\tau$ .

Nyní by se tedy zdálo, že řešení dva je správně. Ale není tomu tak. Dosud jsme uvažovali, že vodorovná rychlost jablka je  $\omega(h + R_z)$  nezávisle na výšce  $x$ , ve které se právě během pádu nachází. Kdyby toto platilo, nemohla by krasobruslařka dělat svoje piruety, neutronové hvězdy by nerotovaly tak úžasně rychle a pan Kepler by neodvodil svůj druhý zákon nebeské mechaniky. Díky izotropii prostoru platí totiž zákon zachování momentu hybnosti, který říká, že v soustavě bez vnějších momentů sil zůstává moment hybnosti konstantní. Počáteční moment hybnosti jablka  $L = |\vec{r} \times \vec{p}| = m\omega(R_z + h)^2$  se tedy v průběhu pohybu zachovává, a proto pro úhlovou rychlost ve výšce  $x$  platí

$$\omega_{jx} = \left[\frac{R_z + h}{R_z + x}\right]^2 \omega \approx \left[\left(1 + \frac{h}{R_z}\right) \left(1 - \frac{x}{R_z}\right)\right]^2 \omega \approx \left(1 + 2\frac{h - x}{R_z}\right) \omega.$$

Stejným postupem jako v (14) se dobereme konečně ke správnému výsledku  $s = 2\omega h/3 \sqrt{2h/g}$

Ještě odvodíme jeden důsledek našich úvah. Rozdíl rychlosti jablka a tyče ve výšce  $x$  je

$$v = (\omega_{jx} - \omega)(R_z + x) \approx 2\frac{h - x}{R_z}(R_z + x)\omega \approx 2\omega(h - x).$$

V čase  $\tau$  od začátku pádu se tedy jablko vzhledem k tyči pohybuje rychlostí  $v = \omega g\tau^2$ . Pozorovatel, který stojí na zemi pod tyčí a neví nic o otáčení Země, by toto nedokázal vysvětlit. Zdálo by se

mu, že na jablko působí nějaká podivná síla o velikosti  $F = m dv/d\tau = 2m\omega g\tau = 2m\omega v^*$ , kde  $v^*$  je vswislá rychlost pádu. My ale víme, že to je zdánlivá Coriolisova síla, která působí na tělesa v neinerciálních rotujících soustavách.

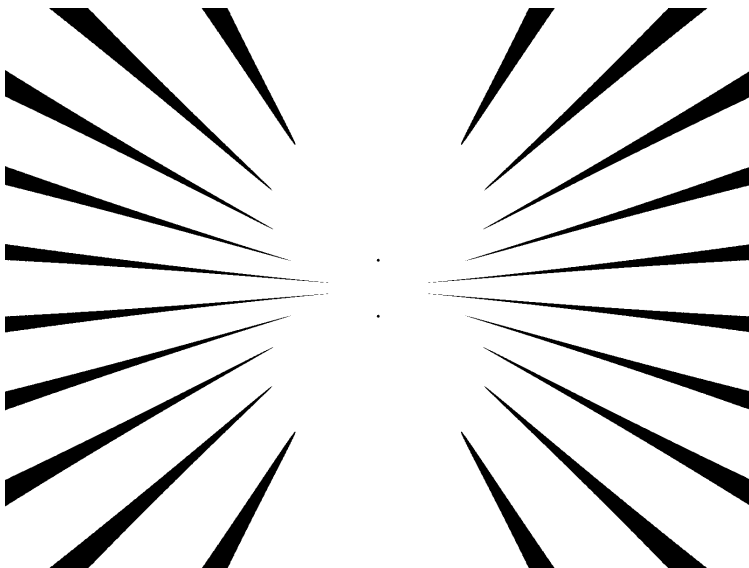
A na závěr trocha statistiky: 20 (19) řešitelů se domnívalo, že správně je řešení jedna (dva), dostali celkem 5 (39) bodů. 10 řešitelů tvrdilo, že obě řešení jsou špatně, na správný důvod ovšem přišli jen čtyři z nich.

### Úloha V.1 ... porucha sluchu

Jeden z organizátorů Fykosu si sehnal dva stejné reproduktory, které umístil na louku 4 m od sebe. Zapojil je na jeden magnetofon, ze kterého do nich pustil tón komorní a. Začal se procházet a co se nestalo: V některých místech louky neslyšel skoro nic. Vaším úkolem je nakreslit ve vhodném měřítku obrázek, ve kterém vyznačíte místa, kde organizátor skoro nic neslyšel. Jev vysvětlete.

Předpokládejme, že reproduktory mají kulovou směrovou charakteristiku a chovají se jako bodové zdroje. V bodech, jejichž rozdíl vzdáleností od jednotlivých reproduktorů bude lichý násobek poloviny vlnové délky bude docházet k destruktivní interferenci, tj. signály se potkají v protifázi.

$$\Delta d = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$



Obr. 16

Množina bodů v rovině (předpokládáme dále, že hlava pozorovatele je ve stejné výšce, jako reproduktory), pro něž je rozdíl vzdáleností od dvou bodů konstanta, se nazývá hyperbola. V jejích ohniscích budou reproduktory, hlavní poloosa bude polovinou rozdílu vzdáleností.

Kdyby byly amplitudy signálů stejné, bylo by v těchto místech naprosté ticho. Reproktory ale vysílají kulové vlny, jejichž amplituda ubývá jako  $1/r$ . Proto pro zobrazení množiny bodů, ve kterých nebude nic slyšet použijeme počítač.

Simulace předpokládá dva kulové zdroje s charakteristickou citlivostí 40 dB a příkonem 1 W (tj. ve vzdálenosti 1 m od zdroje by byla hladina intenzity 40 dB).

Sluchový práh pro frekvenci 440 Hz je asi 8 dB. Černá barva zobrazuje místa pod sluchovým práhem (není nic slyšet), bílá opak.

### Úloha V.2 ... supertermoska

Princip termosky je následující: Máme dvě sousední válcové stěny, které se vzájemně nedotýkají, mezi nimi je vyčerpán vzduch. Energie se zde může přenášet pouze zářením. Pro naše účely budeme stěny termosky považovat za absolutně černá tělesa (ve skutečnosti tomu tak nebývá). Teplotu vnitřní stěny označíme  $T_1$ , teplotu vnější  $T_2$ . Tyto teploty budeme dále považovat za konstantní. Odtok tepla (za jednotku času) v tomto jednoduchém případě nechť je  $Q_0$ . Vlastnosti termosky však můžeme vylepšit, vložíme-li mezi stěny ještě jednu dokonale vodivou (absolutně černou) válcovou desku. Určete, jak se změní odtok tepla po ustálení teploty vložené desky. Ve vylepšování můžeme pokračovat... Spočtete, jak se odtok tepla změní, vložíme-li  $n$  vzájemně se nedotýkajících válcových desek. (Vzdálenosti krajních desek jsou malé oproti rozměrům termosky, velikosti jejich povrchů můžeme tedy považovat za stejné.)

Jelikož mezi jednotlivými deskami v termosce je vakuum (podle předpokladů v zadání, ve skutečnosti toto samozřejmě přesně splněno není) nemůže se mezi nimi teplo šířit vedením, nýbrž jen zářením. Dokonale černé těleso (jímž podle předpokladů desky jsou) pohlcuje všechno na něj dopadající záření a podle Stefanova-Boltzmanova zákona září s intenzitou (energie za jednotku

času z jednotkové plochy) závisící pouze na jeho termodynamické teplotě, a to tak, že je úměrná její čtvrté mocnině, tedy  $I = \sigma T^4$ .

V nevylepšené termosce je odtok tepla  $Q_0$  za jednotku času z jednotkové plochy roven rozdílu intenzity, kterou vyzařuje teplejší vnitřní deska ven, a intenzity, kterou vyzařuje chladnější vnější deska dovnitř, tedy

$$Q_0 = \sigma(T_1^4 - T_2^4).$$

Vložíme-li mezi stěny termosky  $n$  tenkých velmi dobře vodivých desek, jejich teploty se ustálí tak, aby každá vnitřní deska vyzářila přesně tolik energie, kolik přijme od svých sousedů, respektive tak, aby se tok tepla mezi libovolnými sousedními deskami rovnal celkovému odtoku tepla  $Q_n$ .

Označme  $q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n+1$ ) teplo, které na jednu stranu vyzáří  $i$ -tá deska za jednotku času z jednotkové plochy, přičemž index 0 resp.  $n+1$  zastupuje vnitřní resp. vnější stěnu. Pak se výše uvedená podmínka pro rovnováhu dá vyjádřit systémem  $n+1$  rovnic  $Q_n = q_i - q_{i+1}$ , kde  $i = 0, 1, \dots, n$ . Sečteme-li tyto rovnice, dostaneme  $(n+1)Q_n = q_0 - q_{n+1} = Q_0$ , odtok tepla při vložení  $n$  desek se tedy oproti případu bez desek sníží  $n+1$  krát:

$$Q_n = \frac{Q_0}{n+1}.$$

Při vložení jedné desky budou ztráty poloviční.

Na závěr si povšimněme, že pro účely naší úlohy jsme na desky nemuseli klást tak silné předpoklady. Za prvé to nemusela být dokonale černá tělesa, stačilo, aby intenzita vyzařování byla závislá jen na teplotě a aby odrazivost materiálu na teplotě nezávisela a propustnost byla nulová, což běžné materiály většinou dost přesně splňují. Za druhé nemusely mít všechny desky stejný povrch, stačilo, aby každá z nich byla tenká a dobře vodivá, abychom mohli počítat s tím, že na každou stranu září stejně.

### Úloha V.3 ... kyvadlo

Mějme rotační těleso o hmotnosti  $m$ . Na jeho ose zvolme body  $A$  a  $B$  vzdálené  $d$ . Zavěsíme-li těleso v bodě  $A$ , kývá se se stejnou periodou, jako když jej zavěsíme v bodě  $B$ . Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm a kolmé na osu rotační symetrie je  $J$ . Určete všechny možné polohy těžiště tělesa vzhledem k bodům  $A$  a  $B$ .

Pro periodu kmitání fyzického kyvadla platí vztah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{mgl}},$$

kde  $J_0$  je moment setrvačnosti našeho kmitajícího tělesa vůči ose, vůči které kmitá,  $l$  je vzdálenost osy od těžiště. Moment setrvačnosti tělesa vůči ose kmitání v bodě  $A$  (resp.  $B$ ) si vyjádříme pomocí Steinerovy věty

$$J_A = J + ml_A^2.$$

Podmínku rovnosti časů si napíšeme jako

$$2\pi \sqrt{\frac{J + ml_A^2}{mgl_A}} = 2\pi \sqrt{\frac{J + ml_B^2}{mgl_B}}.$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{J}{ml_A} + l_A &= \frac{J}{ml_B} + l_B \\ (l_A - l_B) + \frac{J}{m} \left( \frac{1}{l_A} - \frac{1}{l_B} \right) &= 0 \\ (l_A - l_B) \left( l_A l_B - \frac{J}{m} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Je vidět, že první možnost je, když těžiště je uprostřed mezi body  $A$  a  $B$  ( $l_A - l_B = 0$ ). Vezmeme-li v úvahu vztah  $d = l_A + l_B$ , pak řešíme v druhém případě kvadratickou rovnici

$$x^2 - dx + \frac{J}{m} = 0 ,$$

její kořeny jsou

$$l_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{J}{m}} ,$$

platí-li  $J < md^2/4$ . To jsou další dvě možnosti. Když těžiště neleží mezi body  $A$  a  $B$ , pak řešíme rovnici  $x^2 - dx - \frac{J}{m} = 0$ . Řešením jsou analogicky vzdálenosti

$$l_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{J}{m}} .$$

Tyto body nejsou omezeny podmínkou, jen si musíme uvědomit, že v případě, kdy je těžiště nad oběma body, pak těleso kolem této polohy kmitat nebude, poněvadž jde o labilní polohu.

#### Úloha V.4 ... letící tyč

Mějme v rovině dvě na sebe kolmé přímky  $a$  a  $b$ . V přímce  $a$  letí tyč délky  $l = 5 \cdot 10^7$  m rychlostí  $v = 6 \cdot 10^6$  m·s<sup>-1</sup> (tyč je s přímkou rovnoběžná a její střed na ní neustále leží). Vaším úkolem je určit, jaký bude průběh „viděné“ (viz dále) délky tyče v závislosti na její vzdálenosti od průsečíku přímek. Tyč pozorujeme z přímky  $b$  v takové vzdálenosti od průsečíku, která je zanedbatelná vůči vzdálenosti tyče od průsečíku.

Skutečnou délku tyče nevidíme, protože světlo z obou konců nevyletelo současně. Takže to, co vidíme jsou sice konce tyče, ale v různých časech. A právě rozdíl těchto časů udává rozdíl viděných délek. Nejdříve neuvažujme délkovou kontrakci a uvažujme  $l$  jako délku, kterou bychom viděli, kdyby světlo s obou konců vyletelo současně.

Nejprve vyřešíme případ, že tyčka letí na nás. Označme vzdálenější konec  $A$  a  $x_A$  vzdálenost, ve které ho vidíme, analogicky bližší  $B$  a  $x_B$ . Potom platí vztahy:  $x_A = c \cdot t_A$ ,  $x_B = c \cdot t_B$ , kde  $t_A, t_B$  jsou časy, za které k nám doletí signál. Víme, že signál z bodu  $B$  vystartoval o  $\Delta t = t_A - t_B$  později, takže tento bod ještě stačil urazit dráhu  $v \cdot \Delta t$ .

$$ct_A = ct_B + l + v\Delta t .$$

Po úpravě dostaneme

$$c\Delta t = \frac{cl}{c-v} = 5,1 \cdot 10^7 \text{ m} .$$

Odtud  $l' = x_A - x_B = c(t_A - t_B) = c\Delta t$ .

Analogicky bychom odvodili i vzdalující se tyč, jenom místo  $v$  bychom dosadili  $-v$ , takže výsledek bude

$$l' = \frac{cl}{c+v} = 4,9 \cdot 10^7 \text{ m} .$$

Ještě může nastat případ, že tyč letí kolem nás, tj. jeden konec je od nás napravo a druhý nalevo. Nechť je střed tyče ve vzdálenosti  $s \in (-l/2, l/2)$ . Představme si, že máme dvě tyčky, které jsou rozřízlé tak, že jedna je napravo a druhá nalevo a jedna letí k nám a druhá od nás. Viděná délka tyče potom bude:

$$l' = \frac{c(l/2 + s)}{c-v} + \frac{c(l/2 - s)}{c+v} = \frac{c^2 l + 2cvs}{c^2 - v^2} .$$

Dají se uvažovat i relativistické efekty, ale ty jsou o dva řády nižší, takže je můžeme v podstatě zanedbat. Spočítají se tak, že místo  $l$  dosadíme

$$l = \frac{1}{\sqrt{1 + (v/c)^2}} l_0 = 4,999 \cdot 10^7 \text{ m} .$$



**Úloha V . P ... zamrzání rybníku**

Odhadněte, za jak dlouho naroste led na rybníce z deseti centimetrů na dvacet. Teplota vzduchu je stále pět stupňů pod bodem mrazu. Potřebné konstanty naleznete v tabulkách.

Předpokládejme, že jediný způsob, jak se může odvádět teplo vzniknuté tuhnutím vody je vedením. Teplo bude procházet směrem k povrchu, ale i směrem dolů ke dnu rybníka. Pro tento přenos platí:

$$dQ_1 = dQ_{\uparrow} + dQ_{\downarrow} = S dt \frac{\lambda_{\text{led}}}{h_{\text{led}}} (T_1 - T_2) + S dt \frac{\lambda_{\text{voda}}}{h_{\text{voda}}} (T_3 - T_1), \quad (15)$$

kde  $\lambda_{\text{voda}}$ ,  $\lambda_{\text{led}}$  jsou koeficienty tepelné vodivosti vody a ledu,  $S$  je plocha přes kterou přestupuje teplo  $dQ_1$  za čas  $dt$ ,  $d_{\text{led}}$  a  $d_{\text{voda}}$  jsou tloušťky ledu a vody.  $T_1, T_2, T_3$  jsou v pořadí teploty rozhraní vody a ledu, povrchu ledu a dna rybníka.

Zřejmě bude hloubka rybníka o mnoho větší než tloušťka ledu, zanedbejme proto člen týkající se vody ve vztahu (15). To můžeme udělat i proto, že  $\lambda_{\text{voda}} = 0,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  a  $\lambda_{\text{led}}$  je větší,  $\lambda_{\text{led}} = 2,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Jestliže by byl  $\lambda_{\text{voda}}$  o mnoho větší než  $\lambda_{\text{led}}$ , nemohli bychom to dovolit, protože by nebylo jasné, jaký díl tepla se odvádí ledem a jaký díl je odváděn skrze vodu do země. Tady je třeba připomenout, že ve skutečnosti nebude teplo odváděno do země, ale bude z ní přitékat. V případě, že by se tento jev stal dominantní, tak by se problém o mnoho hůře řešil. Předpokládejme tedy jednodušší variantu, že hloubka rybníka je o mnoho větší než 20 cm.

Teplo, které takto odvádíme, nám musí nějakým způsobem vzniknout. Vzniká tuhnutím vody na rozhraní voda-led. Přitom se uvolňuje teplo

$$dQ_2 = l_t dm_{\text{voda}} = l_t dm_{\text{led}} = l_t \rho_{\text{led}} dV_{\text{led}} = l_t \rho_{\text{led}} S dh.$$

Mnoho z vás do tohoto vzorečku vkládalo  $\rho_{\text{voda}}$ , což je špatně. Teplo se nám na rozhraní nemá jak kumulovat, bude tedy  $dQ_1 = dQ_2$ . Odtud dostáváme:

$$h \cdot dh = \frac{\lambda_{\text{led}} \Delta T}{\rho_{\text{led}} l_t} dt,$$

kde  $\Delta T = T_1 - T_2$ . Toto je jednoduchá diferenciální rovnice, stačí obě strany rovnice zintegrovat:

$$\int_{d_2}^{d_1} h dh = \int_0^t \frac{\lambda_{\text{led}} \Delta T}{\rho_{\text{led}} l_t} dt,$$

$$\frac{(d_1^2 - d_2^2)}{2} = \frac{\lambda_{\text{led}} \Delta T}{\rho_{\text{led}} l_t} t \implies t = \frac{\rho_{\text{led}} l_t}{\lambda_{\text{led}} \Delta T} \cdot \frac{d_1^2 - d_2^2}{2}.$$

Po dosazení dostáváme něco pod 5 dnů. To „něco“ má svůj význam, nemá smysl psát řešení na 5 i víc platných cifer (strhávali jsme za to body!), protože např. přesnost určení povrchové teploty nebude určitě větší než půl stupně, a tato teplota bude do určité míry kolísat. Jako řádový odhad se dá tento výsledek určitě použít.

Co všechno jsme zanedbali? Tedy ve vztahu (15) např. změnu potenciální energie, kterou získá led při tuhnutí, skutečnost, že vrstva ledu tlačí na hladinu a jak je známo, tlak zvyšuje teplotu tání, neuvažovali jsme blízkost břehů ... Toto všechno lze s klidným svědomím zanedbat.

Určitě vás napadne ještě spousta věcí, ale asi žádná nebude mít podstatný vliv na výsledek.

**Úloha VI. 1 ... brouček**

Brouček o hmotnosti  $m$  stojí na obruči o hmotnosti  $M$  a poloměru  $r$ , tato obruč leží na absolutně hladkém vodorovném stole. Náhle se brouček něčeho lekne a dá se do běhu. Poběží po obruči. Vaším úkolem je popsat trajektorii středu obruče (za předpokladu nulového tření mezi obručí a stolem).

Vyjdeme z 1. Newtonova zákona, který říká, že soustava, na kterou nepůsobí žádné vnější síly, setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Naše soustava byla na začátku

v klidu, proto těžiště musí v klidu zůstat i po tom, co se brouček rozběhne. Když si umístíme počátek souřadné soustavy do těžiště, platí:

$$m\mathbf{r}_1 + M\mathbf{r}_2 = 0, \quad (16)$$

kde  $m$  je hmotnost broučka,  $M$  je hmotnost kruhu,  $\mathbf{r}_1$  je poloha broučka a  $\mathbf{r}_2$  je poloha středu kruhu. Dále víme, že vzdálenost broučka od středu kruhu je  $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ . Dosadíme z (16)

$$r = \left| \mathbf{r}_2 + \frac{M}{m}\mathbf{r}_2 \right| = \frac{M+m}{m}r_2,$$

vidíme tedy, že vzdálenost středu kruhu od těžiště je konstantní, tedy střed kruhu bude opisovat nějakou část kruhu. Jakou, to zjistíme, když si napíšeme zákon zachování momentu hybnosti (ZZMH) a hybnosti (ZZH):

$$I\omega + mr_1v_1 + Mr_2v_2 = 0, \quad (17)$$

$$m\mathbf{v}_1 + M\mathbf{v}_2 = 0. \quad (18)$$

Z (18) vidíme, že  $v_1 \sim v_2$ . Z toho a z (17) vidíme, že  $\omega \sim v_1$ , tedy  $\omega$  bude konstantní. Takže kroužek bude obíhat s konstantní úhlovou rychlostí. Ještě je otázka, zda tato rychlost nebude nulová. To ověříme velice jednoduše ze ZZMH. Kdyby byla nulová, to znamená, že by střed kroužku stál, což ze ZZH znamená, že rychlost broučka vůči stolu by byla nulová, a točil by se jedine kroužek, to je však z rozporu z ZZMH. Výsledek je, že se střed kruhu pohybuje po kružnici.

### Úloha VI. 2 ... odporová síť

Mějme drát, jehož jednotka délky má odpor  $R$ . Z rovnostranných trojúhelníků z něj vyrobených postavíme nekonečnou síť naznačenou na obr. 17 (nejdelší strana má jednotkovou délku). Jaký odpor bude mezi vrcholy největšího trojúhelníku?

Pro co největší zjednodušení využijeme symetrie. Podíváme-li se na uzel nacházející se mezi body A a B, zjistíme, že proud, který do něj vteče jednou větví, celý vyteče větví k této větví symetrické. Můžeme tedy tento uzel rozpojit na dva. Tím získáme zapojení, ve kterém se nachází obvod, který je podobný počátečnímu zapojení, jen je dvakrát menší. Protože bude mít stejnou vodivost, bude jeho odpor  $R_z$  poloviční než odpor celého zapojení.

Odpor celého zapojení již spočteme jednoduše pomocí pravidel pro sčítání odporů. Pro celkový odpor bude platit:

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{R R_z}{R + R_z}} = \frac{2R + 3R_z}{R^2 + 2R R_z}.$$

Dosadíme-li nyní ze vztahu  $2R_z = R_c$  dostaneme rovnici:

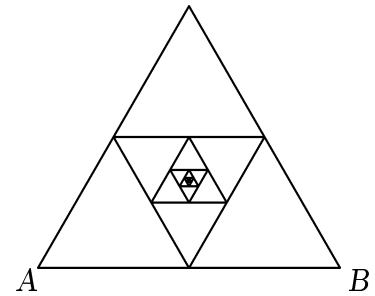
$$3R_c^2 + 2R R_c - 2R^2 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má řešení:

$$R_c = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3} R.$$

Smysl má pouze kladný výsledek, tedy:

$$R_c = \frac{\sqrt{7} - 1}{3} R.$$



Obr. 17

**Úloha VI.3 ... kolik máme kyslíku?**

Zkuste spočítat (či spíše kvalifikovaně odhadnout), na jak dlouho by lidstvu stačil kyslík nacházející se v současné atmosféře, kdyby najednou přestala fungovat fotosyntéza a rostliny by jej tedy nedoplňovaly. Potřebné údaje se pokuste zjistit v literatuře, nebo je vhodně aproximujte.

Na úlohu se můžeme dívat ze dvou hledisek:

1. V zadání máme na mysli model, ve kterém spotřebovává kyslík jenom lidstvo, nezávisle na průmyslu, zvířatech a rostlinách. Tento model je poměrně jednoduchý, ale nerealistický.

2. Chceme se podívat na problém, jak by asi vypadala situace, kdyby se lidstvo ocitlo před hrozbou zániku kvůli nedostatku  $O_2$ . Tento model se pokusí zahrnout všechny podstatné faktory, které mohou řešení úlohy ovlivnit.

1. Uvažujme, že člověk průměrně v klidu vydýchá  $V_0 = 71$  vzduchu za minutu. Ten běžně obsahuje  $\varphi_0 = 21$  objemových a 23 hmotnostních procent kyslíku. Při výdechu obsahuje vzduch asi  $\varphi_1 = 16\%$   $O_2$ . To znamená, že za minutu člověk spotřebuje asi

$$V = V_0 (\varphi_0 - \varphi_1) = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{min}^{-1} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} .$$

Odhadněme teď objem  $O_2$  v atmosféře. Většina hmoty vzduchu se nachází do výšky 10 km. Tato hmota bude na povrch působit hydrostatickým tlakem  $p_a = F_g/S = mg/S$ . Jestliže za hmotnost vezmeme hmotnost atmosféry a za povrch plochu Země, pak rovnici můžeme přepsat do tvaru:

$$m_{\text{atm}} = \frac{p_a S}{g} \Rightarrow m_{O_2} = \varphi_0 \frac{4\pi p_a R_Z^2}{g} = 1,2 \cdot 10^{18} \text{ kg} ,$$

kde  $m_{O_2}$  je hmotnost kyslíku v atmosféře Země.

Jestliže uvážíme, že při dýchání kyslíku se nám jeho množství ve vzduchu zmenšuje, v určitém okamžiku ho bude ve vzduchu příliš málo. Pak začnou lidé umírat. Některé výzkumy naznačují, že trénovaný člověk bez námahy může dýchat vzduch s obsahem  $\varphi_0(O_2) = 5-7\%$ . Předpokládejme, že lidstvo vydrží dýchat vzduch, jestliže tento obsahuje alespoň  $\varphi_{\text{min}} = 12\%$   $O_2$ . Obecně se udává 10–12%. Vliv  $CO_2$  můžeme zanedbat, protože tento není jedovatý. Jeho zhoubná vlastnost je, že jestliže se dostane do prostor, kde neexistuje proudění, vytlačuje lehčí  $O_2$ . Zvířata a lidé pak neumírají na otravu  $CO_2$ , ale na nedostatek kyslíku. Jeho momentální koncentrace ve vzduchu je kolem 0,04%. Jestliže stoupne koncentrace, bude mít snahu vytlačovat kyslík z níže položených vrstev. Jestliže se ale zachová na zemi vítr, možná by se nemuselo z této strany hrozit velké nebezpečí. Navíc  $CO_2$  by způsobil na Zemi skleníkový efekt, zvýšila by se teplota, což by vedlo ke zvýšenému vypařování vody, a tím by se zvýšil objem vody v atmosféře, bylo by více dešťů, které by kysličník uhličitý postupně vymývaly z atmosféry a vážaly do uhlíčanů.

Lidstvo má tedy k dispozici  $M = (1 - \varphi_{\text{max}}/\varphi_0)m_{O_2}$  kyslíku. Předpokládejme, že počet obyvatel zeměkoule, kterých je teď víc jak 6 miliard, se v budoucnosti ustálí na hodnotě kolem 10–12 miliard lidí. Alespoň tak se domnívají demografové. Položme počet obyvatel zeměkoule roven  $N = 12$  miliard. Pak lidstvo spotřebuje  $M$  za čas

$$t = \frac{[1 - (\varphi_{\text{max}}/\varphi_0)]m_{O_2}}{\rho NV} = \frac{(1 - \frac{12}{21}) \cdot 1,2 \cdot 10^{18} \text{ kg}}{1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 6 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}} = 1,1 \cdot 10^{13} \text{ s} \approx 350\,000 \text{ roků} .$$

Kyslík by nám tedy postačil na statisíce let.

2. Předcházející výsledek je vhodné brát v úvahu snad jen tehdy, kdyžbychom se vrátili zpět do jeskyň a zapomněli na jakoukoliv techniku, navíc byhom museli vyhubit všechny živočichy a rostliny. Lidé by si nemohli dovolit zapálit oheň...

Pokusme se odhadnout, kolik času by mělo lidstvo k dispozici, kdyby nezměnilo svůj styl života.

Podle moudrých knih je celková roční spotřeba cca.  $2,16 \cdot 10^{13}$  kg/rok (Rejmers 1985). Celková roční produkce je  $1,55 \cdot 10^{12}$  kg/rok. Jan Kunc uvádí svoji tabulku spotřeby kyslíku, ke které dospěl na základě svých výpočtů:

spotřeba kyslíku	množství spotřebovaného kyslíku za rok v kg
lidé dýcháním	$1,3 \cdot 10^{12}$
spalování ropy, uhlí a zemního plynu	$6,9 \cdot 10^{12}$
hoření lesů na Zemi	$7,6 \cdot 10^{12}$
dýchání rostlin	$4,7 \cdot 10^{12}$
dýchání živočichů	$8,5 \cdot 10^{12}$

Vidíme tedy, že momentálně je spotřeba kyslíku o mnoho větší než stačí biosféra nahrazovat. Už teď žijeme prakticky na dluh, protože spotřebováváme desetkrát více kyslíku než je příroda schopna produkovat, navíc ještě kácíme dešťové pralesy v Amazonii a rovníkové Africe. Jestli se nad tím trochu zamyslíme, tak na první pohled úloha, která se zdála být odtržena od reality, je až neskutečně reálná. Když porovnáme tuto spotřebu se zásobami kyslíku, tak nám vyjde čas asi 25 000 roků. To za předpokladu, že se nebude zvyšovat spotřeba kyslíku lidskou činností. Další otázkou je, jak se bude měnit počet lidí. Odhady expertů hovoří o horní hranici 20 miliard lidí, to by znamenalo asi 10 000 let. Par tisíc let bychom tedy mohli v klidu žít. Bezprostřední nebezpečí nám nehrozí. Otázkou je, nakolik neexistence fotosyntézy ovlivnila veškerý ekosystém. Zvířata (lidé taky) by pravděpodobně vymřela na nedostatek potravy. Navíc by se určitě objevily nové choroby, jako zdroj nákazy se ihned nabízí uhynulé rostliny a živočichové.

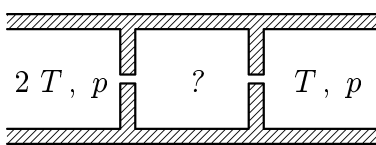
Poznámky k řešením:

- Mnoho z vás si plete slovo odhadnout se slovem bez rozmyslu napsat první číslo co mne napadne. Jestliže někdo napíše: „Lidstvo vydrží několik dnů...“, měl by tento svůj názor také zdůvodnit. I jednoduchý výpočet by vám naznačil, že situace není taková, jak se někomu může na první pohled zdát a nevyskytovaly by se odhady 5–10 minut.
- Jestliže někdo napíše: „Lidstvu stačí kyslík na  $7,564338816 \cdot 10^{12}$  s = 248 882 let, 355 dní 23 hodin 42 minut 17 sekund.“, tak něco není v pořádku. To tedy po daném čase všichni lidé vymřou v jednom okamžiku? Navíc, proč je to tehdy a ne o dvě sekundy dříve nebo později? Odhadnout znamená udělat odhad a uvědomit si, jakou chybu tento odhad skrývá.

### Literatura:

Rejmers N.F., 1985 Abeceda přírody — biosféra

### Úloha VI.4 ... vodíková nádoba



Představme si podle obrázku nádobu s ideálním plynem rozdělenou dvěma přepážkami na tři části. Napravo se udržuje teplota  $T$  a tlak  $p$ , nalevo  $2T$  a  $p$ . Určete, jaká teplota a tlak je v prostřední části, víte-li, že celý systém je v dynamické rovnováze.

Obr. 18

Typická špatná úvaha na začátku většiny řešení zněla: Tlak v prostřední nádobě bude stejný jako v obou krajních, protože kdyby byl například menší, proudil by do této části plyn z obou částí krajních a soustava by tedy nebyla v dynamické rovnováze. Ještě jednou opakuji, že tato úvaha není správná. To, že je v jedné části soustavy větší tlak, ještě neznamená, že plyn musí proudit ven z této části, záleží totiž i na teplotách (resp. rychlostech molekul).

Při řešení vyjdeme z toho, že pokud je soustava v dynamické rovnováze, musí se všude zachovávat počet částic a jejich celková vnitřní energie.

Ze stavové rovnice plyne pro počet molekul na jednotku objemu plynu  $N_V \sim p/T$ . Střední rychlost molekul je stejně jako jejich střední kvadratická rychlost úměrná  $v \sim \sqrt{T}$  (neboť  $mv^2 \sim kT$ , kde  $k$  je Boltzmannova konstanta). Počet částic  $\Delta N$  které vyletí otvorem o průřezu  $S$  za jednotku času je počet částic v objemu  $vS/6$  (jen 1/6 částic letí správným směrem, to je ale pro naši úlohu nepodstatné):

$$\Delta N \sim vN_V \sim \frac{p}{\sqrt{T}}.$$

Do prostřední části (její teplota a tlak jsou  $T^*$  a  $p^*$ ) musí vnikat totéž, co z ní uniká (předpokládáme-li, že otvory v obou přepážkách jsou stejné):

$$\frac{p}{\sqrt{T}} + \frac{p}{\sqrt{2T}} = \frac{2p^*}{\sqrt{T^*}} . \quad (19)$$

Energie jedné částice je úměrná  $kT$ , energie  $\Delta N$  částic, které vyletí za jednotku z oblasti o teplotě  $T$ , je tedy úměrná  $E \sim p\sqrt{T}$ . V prostřední části se musí zachovávat energie, z čehož

$$p\sqrt{T} + p\sqrt{2T} = 2p^*\sqrt{T^*} . \quad (20)$$

Z rovnic (19), (20) již snadno vyjádříme

$$p^* = \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt[4]{2}} p \doteq 1,015p , \quad T^* = \sqrt{2}T .$$

Vidíme, že tlak v prostřední části je skutečně jiný než v obou krajních.

### Úloha VI. P ... věříte fyzice?

*Zkuste se zamyslet a napsat úvahu na téma: O platnosti kterých fyzikálních zákonů, pouček a teorií jsem přesvědčen z vlastní zkušenosti a každému bych byl schopen jejich platnost dokázat, a kterým prostě věřím například proto, že mi o nich říkali ve škole.*

Úvahy na téma *Věříte fyzice?* se většinou z vás velice vydařily. Překvapily nás hloubkou svých myšlenek a povedeným humorem. Pokusím se napsat krátkou úvahu, jež shrnuje některé vaše nejdůležitější myšlenky, s nimiž i já souhlasím, doplněnou o pár dalších postřehů.

Už jako malá holka jsem zjistila, že spousta věcí včetně mě padá na zem, že každé ráno vyjde Slunce, a že když si nezavážu tkaničku u boty, šlápnu si na ni a rozbiji si nos. A tak jsem postupně začala získávat zkušenosti. To znamená, že jsem si začala uvědomovat, že mnohé věci, které se stanou, mají svoji příčinu, jejíž změnou mohou ovlivnit následek.

Někdy šla příčina vystopovat lehce. Například, když jsem zmáčkla vypínač v předsíni, rozsvítila se žárovka na lustru. A tak jsem objevila „zákon rozsvěcování a zhasínání světla v předsíni“. Ale pak jsem jednou zase stiskla vypínač, a žárovka, místo aby se rozsvítila, krátce zajiskřila, a byla tma. Ke svému zákonu jsem tedy musela doplnit „korekci o přepálení vlákna žárovky“.

A takhle nějak každý z nás ve svém životě a lidstvo jako celek ve své historii objevuje (a myslím, že nejen fyzikální) zákony. Mluvit o důkazu v přesném slova smyslu je tak trochu „hloupost“. My jen víme, že za jistých jasně definovaných podmínek působila na těleso síla o velikosti

$$F = \frac{\kappa M m}{r^2} ,$$

protože to tak vyšlo úplně každé důvěryhodné osobě, která to kdy měřila (v lepším případě to vyšlo i nám osobně), a proto se domníváme, že při dalším měření bude platit to samé. A zatím nám to vychází. Pokud nám to takhle hezky klapne, platí i z původního zákona odvozená jednodušší verze gravitačního zákona

$$F = mg$$

pro tělesa v blízkosti planety Země.

Možná je to trochu zvláštní, ale čím víc výpočtů a měření vyhovujících danému zákonu máme, tím více jsme o jeho platnosti přesvědčeni. A tak je většina z vás, řešitelů, dost pevně přesvědčena o gravitaci a o třetím Newtonově zákonu akce a reakce, ale už míň se smiřujete s teorií relativity. V tomto případě si řeknete, že když relativitu vymyslel Einstein a tolik chytrých hlav, které přišly na spousty dalších věcí, s jejichž důsledky se potkáme i v běžném životě, tuto teorii uznalo, tak jim snad můžeme věřit. Možná i proto, že i když jste si všechna měření, která kdy vědci provedli, sami neověřili, máte v principu možnost, budete-li opravdu moc chtít si je ověřit, stačí jen někoho přemluvit, ať vás pustí k urychlovači.

Možná nás ve víře fyzikálními zákonům a fyzice utvrzuje i to, že aplikováním postupného pozorování následků a příčin spějeme k čím dál tím hlubšímu porozumění tomu, jak svět kolem nás funguje. Někteří fyzici dokonce sní o tom, že najdou teorii, která popíše celý svět a na žádné korekce v ní, už z principu, nezbude místo. Otázkou zůstává, zda taková teorie existuje, zda je možné na ni přijít, a jestli se někdy dovíme nejenom JAK svět funguje, ale taky PROČ funguje a to zrovna přesně takhle.

O tom se můžeme přít a dlouze debatovat, možná nás čekají ještě hodně velká překvapení, ale stejně je většina z nás asi dost pevně „přesvědčena“, že když zítra převrhne u snídane hrnek s čajem, že se čaj vylije, že když dá někomu facku, že to jeho ruka také pocítí, a že když... , ačkoliv si myslím, že správného fyzika by nemělo moc šokovat, kdyby Slunce zítra ráno nevyšlo.

A na závěr k zamyšlení a pro pobavení pár zdařilých perliček od vás:

„I přes jakékoliv vzorečky a teorie nám věci stále padají na zem. Proč? Těžko říci. Tento problém můžeme akorát popsat vzorci a vymyslet nějaké teorie, ale co je Pravda? To nevím, a tak dál padám k Zemi a vím, že

$$F = \frac{\kappa M m}{r^2} .$$

A já jsem to malinké  $m$  v tomhle vzorci“

*Dáša Eisenmannová*

„Ve fyzice je pravda a co nejde silou, jde ještě větší silou.“

*Vít Šípál*

„Já sám jsem ze své vlastní zkušenosti přesvědčen o gravitačním zákoně (i když jsem byl trochu nesvůj, když náš profesor fyziky říkal, že pytel brambor mě přitahuje stejně jako krásná dívka ve stejné vzdálenosti a se stejnou hmotností),...“

*Jaroslav Kudlička*

„Verím však v jedno a to určite. V kvantovku — s pravdepodobnosťou  $(1 - 10^{-46})$  zajtra ráno vo Veľkých Kapušanoch vyjde Slnko a nastane deň.“

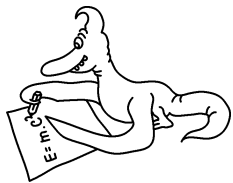
*Milan Berta*

„Jde především o to, že lidé posuzují přírodu a její zákony podle schémat lidské logiky. A ta může být značně zkreslující. Příroda nás už poučila, že i tak rozdílné pojmy jako částice a vlna mohou být jedno a to samé.“

*Michal Komm*

„Chci jen říct, že já potřebuji něčemu věřit. Musím mít o všem nějakou představu, jinak by mě to neznámo zničilo.“

*Václav Cviček*



# Řešení experimentálních úloh

## Chyby měření

Z praktických důvodů zde uvádíme základní poznatky z teorie chyb.

### Chyby systematické

Jde o chyby způsobené použitou metodou, měřicími přístroji a některé chyby experimentátora. Systematické chyby obvykle zkreslí výsledek, buď k trvale vyšším nebo trvale nižším hodnotám.

- 1) Chyby metody — např. považujeme odpor spirály za konstantní a on se s teplotou mění.
- 2) Chyba měřidla — nedokonalost a nepřesnost stupnic (např. vzdálenost mezi jednotlivými dílky teploměru odpovídá 0,99 K namísto 1 K).
- 3) Některé chyby osobní — jsou dány nedokonalostí našich smyslů apod.

Systematické chyby nelze zmírnit velkým počtem měření!

### Chyby náhodné

Při opakování měření za týchž podmínek zjistíte, že jednotlivé výsledky se navzájem poněkud liší. Měření je ovlivněno malými změnami teploty či tlaku, změnou polohy oka, prouděním vzduchu, ... Takových navzájem nezávislých jevů bývá mnoho a těžko bychom hledali přesnou příčinu odchylky, proto náhodné chyby připisujeme skutečně náhodě. Několikerým opakováním měření je můžeme potlačit.

### Chyby hrubé

Jsou to velké chyby, které vznikají nedostatečným soustředěním experimentátora. Objevíme je, jestliže měření opakujeme vícekrát (viz níže). Měření zatížené hrubou chybou vyřadíme ze souboru hodnot.

### Zpracování výsledku dostatečné k řešení experimentální úlohy

Uvádíme zde jednoduchý algoritmus, který vám doporučujeme použít na zpracování dostatečného počtu měření (alespoň deseti). Body 1) až 5) se týkají jen statistické chyby.

- 1) Určíme z naměřených hodnot aritmetický průměr.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} .$$

Dá se dokázat, že za jistých předpokladů je pro nekonečně mnoho měření aritmetický průměr shodný se střední hodnotou měřené veličiny (viz literatura).

- 2) Stanovíme pro každou hodnotu odchylku od průměru  $\Delta x_i$ .
- 3) Vypočteme standardní odchylku

$$s_{st} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2} .$$

4) Vyloučíme hrubé chyby. K tomu se používá takzvané 3-s kritérium. Vyloučíme všechny hodnoty, které se od aritmetického průměru liší o více jak  $3s_{st}$  a opakujeme předchozí body.

- 5) Určíme směrodatnou odchylku aritmetického průměru (statistickou odchylku)

$$s_{sm} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2} .$$

6) Určíme systematickou chybu. Za chybu přístrojů můžeme považovat např. půlku nejmenšího dílku stupnice. Chybu metody, kterou neumíme spočítat, musíme alespoň fundovaně odhadnout.

7) Určíme celkovou chybu dle vzorce

$$s_{\text{celk}} = \sqrt{(3s_{\text{sm}})^2 + s_{\text{sys}}^2},$$

pro malý počet měření dle přibližného vzorce  $s_{\text{celk}} = 3s_{\text{sm}} + s_{\text{sys}}$ .

8) Chybu zaokrouhlíme na jednu platnou číslici, jen je-li jí jednička, na dvě. Aritmetický průměr zaokrouhlíme na řád poslední platné cifry chyby.

9) Výslednou hodnotu uvádíme jako  $x = (\bar{x} \pm s_{\text{celk}})$ .

Ještě byste měli vědět, k čemu se vůbec chyby počítají. Odchylnka nám udává, jak přesně jsme danou veličinu změřili. Dá se odvodit, že přesná hodnota leží v uváděném intervalu s pravděpodobností 99,7%.

*Literatura:* J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření (I), SPN, Praha 1967

E. Svoboda: Přehled středoškolské fyziky, Prometheus, Praha 1996

### Úloha I. Exp ... měrná tepelná kapacita vody

Vaším úkolem je změřit měrnou tepelnou kapacitu vody. Metodu měření si můžete vybrat sami, lze například měřit rychlost vzrůstu teploty vody ohřívané ponorným vaříčem nebo měřit změnu teploty vody při ponoření tělesa o známé teplotě a tepelné kapacitě, vaší vynalézavosti se však meze nekladou.

Vypracování experimentální úlohy by mělo obsahovat na začátku trochu teorie popisující danou problematiku, následuje stručný, ale srozumitelný popis měření, na škodu není ani výčet pomůcek. Nezbytná je tabulka naměřených hodnot, výpočet odchylky měření (viz Chyby měření) a závěr s diskuzí výsledku, kde srovnáváte jednotlivé metody, výsledky apod.

Vaší vynalézavosti, co se týče způsobu měření, se meze nekladly, ale přesto se objevilo jen několik málo metod. My použijeme obě dvě doporučené v zadání.

#### 1) Kalorimetr

Teorie: Zahřejeme těleso o známé tepelné kapacitě  $C_t$  na teplotu  $t_t$  a vložíme jej do kalorimetru o kapacitě  $C_k$  s vodou o teplotě  $t_v$ . Změříme, na jaké teplotě  $t$  se soustava ustálí.

Z kalorimetrické rovnice plyne:

$$c = \frac{C_t(t_t - t) - C_k(t - t_v)}{m(t - t_v)},$$

kde  $m$  je hmotnost vody, kterou jsme určili za pomoci odměrného válce a její známé hustoty.

Pomůcky: kalorimetr ( $C_k = 725 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ), měděný předmět ( $C_t = 145 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ , chyby určení  $C_k$  a  $C_t$  jsme zanedbali), odměrný válec (jeden dílek je 0,01 l), teploměr (jeden dílek je 0,5 K), ohříváč.

č. m.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$t_v$ [°C]	22,0	23,5	23,5	23,25	22,0	22	21,5	22,75	22,5	22,25
$t_t$ [°C]	80,0	81,25	84,5	79,75	90,5	80,0	82,25	80,75	80,0	80,0
$t$ [°C]	23,75	25,0	25,0	24,75	24,25	23,75	23,5	24,5	24,25	24,0

Aritmetický průměr měrné tepelné kapacity je  $\bar{c} = 4,22 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Standardní odchylka je  $s_{\text{st}} = 0,5 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Směrodatná odchylka je  $s_{\text{sm}} = 0,17 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Systematickou chybu jsme odhadli na  $s_{\text{sys}} = 1,0 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Celková chyba je  $s_{\text{celk}} = 1,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Výsledná hodnota tedy je  $c = (4,2 \pm 1,2) \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Diskuze: Velká chyba je způsobena hlavně malou tepelnou kapacitou předmětu vzhledem ke schopnostem teploměru, která vede jak k velké systematické chybě, tak k velké standardní chybě. Toto měření by se dalo zpřesnit užitím tělesa o vyšší tepelné kapacitě či použitím přesnějšího teploměru.



**II) Ohřívání vody**

Teorie: Nalijeme 1l vody do rychlovarné konvice. Změříme počáteční teplotu. Zapneme konvici a měříme, za jaký čas se voda ohřeje o  $x$  stupňů.

Během ohřívání dodáme vodě teplo  $Q = P\eta t = cm\Delta T$ , kde  $P$  je příkon,  $\eta$  je účinnost,  $t$  je čas, po který vodu zahříváme,  $c$  je měrná tepelná kapacita a  $\Delta T$  je rozdíl koncové a počáteční teploty. Měrnou tepelnou kapacitu tedy určíme ze vztahu:

$$c = \frac{P\eta t}{m\Delta T}$$

Pomůcky: varná konvice ( $P = 1000$  kW,  $\eta$  jsme odhadli na  $0,95 \pm 0,05$ ), teploměr, stopky, odměrný válec.

Naměřené hodnoty:

$$V = 1,00 \text{ l}$$

$T$ [°C]	24,5	30,0	35,0	40,0	45,0	50,0	55,0	60,0	65,0	70,0	75,0	80,0
$t$ [s]	0,0	26,0	48,6	71,6	94,4	113,2	137,2	157,3	180,9	201,3	223,5	241,2

Aritmetický průměr je  $c = 4,28 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

Standardní odchylka je  $s_{\text{st}} = 0,11 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

Směrodatná odchylka je  $s_{\text{sm}} = 0,03 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

Systematická chyba je  $s_{\text{sys}} = 0,2 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

Celková chyba je  $s_{\text{celk}} = 0,2 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

Výsledná hodnota je  $c = (4,3 \pm 0,2) \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

Diskuze: Měření dává poměrně příznivou chybu. Přesto by ji určení účinnosti mohlo výrazně zmenšit, neboť velká část chyby je dána právě tím, že jsme ji odhadli. K zpřesnění by přispělo i změření tepelné kapacity konvice, kterou bychom získali provedením tohoto měření ještě s jiným množstvím vody a porovnáním výsledků obou měření.

Toto měření je přesnější než první hlavně díky větší přesnosti měřidel.

**III) Další metody**

Další metoda, která se vyskytla, se od předchozí lišila jen použitím mechanického zdroje energie (mixér). Byly zde vyšší ztráty a proto byla méně přesná.

Naopak další metoda byla spíše opakem druhé. Voda se ohřála na teplotu vyšší než teplota okolí a měřilo se, jak rychle se ochlazuje. Se znalostí poklesu teploty a odevzdaného tepla je možné vypočítat  $c$ .

Ukázkový případ, jak se vyhnout měření, provedl jeden řešitel, když vyšel z tvrzení, že od té doby, co postavili přehradu, jsou teploty v létě o dva stupně nižší a v zimě o dva stupně vyšší. Spočítal jaké teplo přijme z (odevzdá do) okolí přehrada a se znalostí objemu přehrady určil měrnou tepelnou kapacitu.

**Úloha II. Exp ... sloupec cukru**

Jistě víte, že když ponoříte kostkový cukr do čaje, voda do kostky vzlíná. Je na vás, abyste vymysleli vhodnou aparaturu a proměřili do jaké výšky kapalina vystoupí, máte-li hodně vysoký sloupec kostek cukru (pokud budete mít chuť, tak třeba i závislost výšky na čase). Navrhněte nějaký fyzikální model. Ve vodě se ale cukr rozpouští, takže se záhy rozpadne. Použijte tedy raději benzín, líh či jinou kapalinu, ve které se cukr nerozpouští.

**Teorie**

V této experimentální úloze šlo hlavně o to, abyste si zkusili proměřit vzlínání kapaliny do porézní látky.

Kostka cukru je slisována z velmi malých krystalků, mezi kterými jsou ovšem ještě mezírky. Můžeme se o tom jednoduše přesvědčit. Změříme-li průměrnou hustotu kostky cukru, vyjde asi  $1020 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , kdežto tabulková hodnota hustoty sacharosu je  $1580 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . V kostce cukru je tedy asi 35% (objemových) vzduchu.

Zkusíme nyní odhadnout, jak velké jsou krystalky, ze kterých je kostka slisována. Na 1 cm dlouhé hraně jsme napočítali asi třicet krystalků. Uvážíme-li vzduchové mezírky mezi nimi, je průměrný rozměr krystalku 0,2 mm a mezírky 0,1 mm.

Nyní můžeme řádově odhadnout, jak vysoko do sloupečku cukru se kapalina dostane. Výška výstupu  $h$  bude právě taková, aby se kapilární tlak vyrovnal s hydrostatickým, nebo-li

$$h\rho_k g = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

kde  $\rho_k$  je hustota kapaliny a  $\sigma$  její povrchové napětí (pro líh je  $\rho_k = 790 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a  $\sigma = 22 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ ),  $r_1$  a  $r_2$  jsou poloměry zakřivení hladiny kapaliny v mezírkách. Odhadneme, že  $r_1 = r_2 = r$  a to se rovná asi dvěma třetinám rozměru mezírky. Po dosazení vychází  $h = 8 \text{ cm}$ , což je, jak později uvidíme, vcelku dobrý odhad.

Nyní se pokusíme popsat průběh vztlínání. Na sloupec kapaliny v kostce cukru působí tíha:  $F_G = \alpha\rho_k g x S$ , kde  $x$  je výška kapalinového sloupce,  $S$  obsah podstavy cukru a  $\alpha$  objemový podíl kapaliny v cukru.

Dále působí síla kapilární:  $F_k = \alpha S (2\sigma/r)$  a Newtonova síla, která díky viskozitě (míře vnitřního tření) kapaliny brání jejímu pohybu vzhůru:

$$F_n = \eta \frac{\Delta v}{\Delta r} S^*,$$

kde  $\eta$  je dynamická viskozita kapaliny (pro líh  $\eta = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ ),  $\Delta v/\Delta r$  je rozdíl rychlosti na kraji a uprostřed mezírky dělený poloměrem mezírky, odhadneme ho jako  $(2/r)(dx/dt)$  a  $S^*$  je plocha styku kapaliny s cukrem  $S^* = lx$ , kde  $l = 8rnS$  je délka styku cukru, vzduchu a kapaliny ( $n$  je počet mezírek ve čtverečním metru, odhadněme  $n = 1000 \text{ cm}^{-2}$ ).

Tyto síly způsobují změnu hybnosti kapaliny za čas. Dostáváme tedy pohybovou rovnici ve tvaru

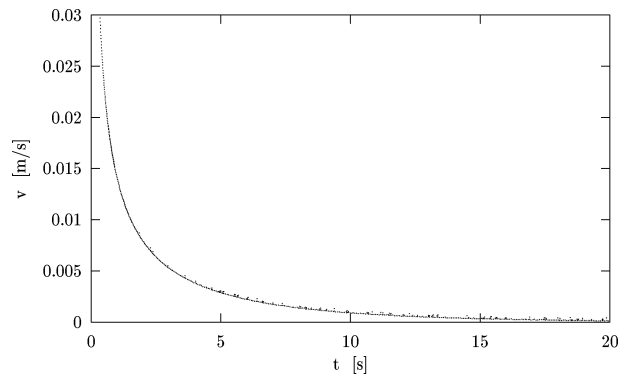
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} \frac{dm}{dt} = F_k - F_G - F_n.$$

Po dosazení a úpravě

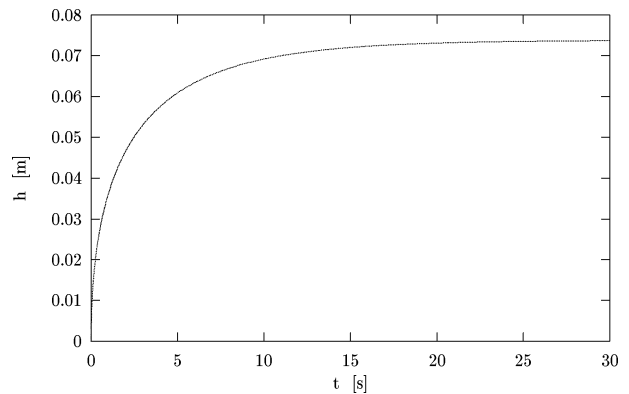
$$\alpha\rho \left[ \frac{d^2 x}{dt^2} x + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = \alpha \frac{2\sigma}{r} - \alpha\rho_k g x - 16\eta n x \frac{dx}{dt}.$$

Takovou složitou diferenciální rovnici bychom exaktně těžko řešili, ale s pomocí programu *Famulus* to není problém. Na grafech (19 a 20) vidíte závislosti výšky a rychlosti stoupání na čas.

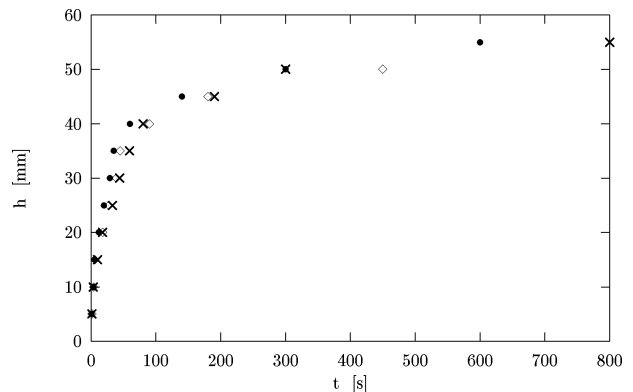
Teorie je tedy poněkud komplikovaná, musíme hodně věcí zanedbat a odhadnout, ale jak uvidíme, opravdu přibližně popisuje danou situaci. Ač v zadání bylo řečeno, že máte navrhnout nějaký fyzikální model vztlínání, pokusilo se o to



Obr. 19. Závislost rychlosti stoupání na čase



Obr. 20. Teoretická závislost výšky na čase



Obr. 21. Naměřené hodnoty: plné kolečko — kostky na nejmenší stěně, čtvereček — kostky na prostřední stěně, křížek — kostky na největší stěně

jen pět řešitelů (poznáte je z výsledkové listiny, mají sedm a více bodů). Ostatní se spokojili s konstatováním, že za všechno může kapilarita nebo se teorií nezabývali vůbec, za což ovšem mnoho bodů nezískali.

### Měření

Konečně se dostáváme k samotné realizaci pokusu. Nejvíce z vás použilo jako kapalinu technický líh, ani my tedy neuděláme jinak. Dále budeme potřebovat kostkový cukr (konkrétně kilogramové balení z cukrovaru Hrochův Týnec, velikost jedné kostky je  $1,1 \times 1,8 \times 2,2$  cm), misky, milimetrové měřítko, gumičky na zpevnění sloupečků cukru, stopky, hodí se vhodné barvivo (např. inkoust), neboť čirý líh se v bílém cukru špatně rozezná.

Do misky postavíme sloupeček cukru stažený gumičkou, připevníme k němu milimetrové měřítko, přičemž se snažíme, aby jednotlivé kostky na sebe co nejlépe doléhaly. Do misky nalijeme líh a v okamžiku, kdy se dotkne spodní kostky, spustíme stopky a zapisujeme hodnoty. My jsme měření provedli třikrát, přičemž jsme kostky stavěli na různé podstavy. Jak to všechno dopadlo můžete vidět v tabulkách a v grafu na obr. 21.

1) Kostky ležely na nejmenší stěně

h(mm)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
t(s)	0,7	3	5	12	20	29	35	60	140	300	600

2) Kostky ležely na prostřední stěně

h(mm)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
t(s)	1	4	6	18	27	39	45	90	180	450

3) Kostky ležely na největší stěně

h(mm)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
t(s)	1	3	10	18	33	44	59	80	190	300	800

Po asi dvou hodinách vypadal stav takto: V případě jedna byla výška 6,6 cm, do čtvrté kostky se už kapalina nedostala. V případě dva se kapalina zastavila už v páté kostce, maximální výška 5,9 cm. Ve třetím sloupečku kapalina vyšplhala do výše 6,3 cm. Je tedy vidět, že maximální dosažená výška výstupu nezávisí na ploše podstavy, což potvrzuje teorii. Naopak rychlost výstupu na ploše podstavy závisí, to se dá ovšem vysvětlit tím, že když kostky stojí na širší podstavě, musí kapalina překonat více předělů mezi jednotlivými kostkami. Každý předěl kapalinu hodně zpomalí. Kdybychom měli jednolitý sloupec cukru, tento nedostatek by nevznikal.

### Zhodnocení

O chybách měření řekneme jen to, že nejnepřesnější bylo určování výšky, neboť kapalina byla v různých částech kostky různě vysoko. Nějaké statistické chyby měření zde nemá příliš velký smysl počítat, neboť jsme na to provedli málo měření. Provádět desítky měření také nemá smysl, neboť s jiným cukrem či jinou kapalinou by vycházely výsledky odlišně.

Nyní ještě srovnání teorie s praxí: Vidíme, že výšku výstupu 8 cm jsme předpověděli hodně přesně. Křivka závislosti  $h$  na  $t$  také zhruba odpovídá. Teoretická však roste mnohem rychleji.

Někteří z vás potvrdili i jiná teoreticky předpovězená fakta. Zkoušeli jste například měřit pro více druhů kapalin a skutečně vám vycházelo, že kapalina s menším povrchovým napětím či větší hustotou vystoupá níže. Jeden řešitel dokonce měřil s různě jemnými cukry a vyšlo mu, že v jemnějším cukru je  $h$  větší.

Závěrem trocha statistiky, spočítali jsme průměr a statistickou chybu maximálních výšek výstupu, které naměřili řešitelé, kteří získali alespoň 3 body, a zde je výsledek:  $h_{\text{prům}} = 6,2$  cm a  $\Delta h = 0,3$  cm.

### Úloha III. Exp ... hustota lihu

Sežňte si stopky, dostatečné množství lihu (denaturovaného) a nekalibrovaný hustoměr (či dřevěnou tyčku zatíženou závažíčkem), u kterého si můžete zjistit rozměry a hmotnost. Navrhněte vhodnou metodu, ve které použijete zmíněné pomůcky, a změřte hustotu lihu.

V této experimentální úloze, kde se měla za pomoci měření času určit hustota lihu, jste postupovali v zásadě dvěma různými způsoby.

1. Volný pád — na těleso ponořené do kapaliny působí síla vztlaková a tíhová. Vezmeme tedy předmět, který má větší průměrnou hustotu než líh, ponoříme jej těsně pod hladinu a pustíme. Předmět začne padat, přičemž na něj bude působit ještě síla odporová, o té se většina řešitelů vůbec nezmínila nebo ji zanedbali bez většího zdůvodňování. Je třeba si uvědomit, že odporovou sílu zanedbat a pohyb považovat za rovnoměrně zrychlený můžeme jen tehdy, pohybujeme-li se v rychlostech mnohem menších než je takzvaná ustálená rychlost (tou se těleso pohybuje, vyrovná-li se síla tíhová se vztlakovou a odporovou). V případě předmětů, které jste používali, bylo zanedbání naštěstí většinou oprávněné. Pro pád tedy přibližně platí  $mg - V\rho_k g = 2ms/t^2$ , a tedy pro hustotu líhu

$$\rho_k = \frac{m}{V} \left(1 - \frac{2s}{gt^2}\right),$$

kde  $s$  je délka dráhy, po které předmět padá,  $t$  je doba pádu. Pro měření touto metodou jste vybírali tělesa, která v líhu padají pomalu, abyste si usnadnili měření času. Jejich hustoty tedy musely být hodně blízké hustotě kapaliny a tedy ve vzorci pro  $\rho_k$  působí člen  $\frac{2s}{gt^2}$  pouze jako malá korekce, neboť pro malé  $s$  (desítky cm) a velké  $t$  (sekundy) je mnohem menší než jednička. Toto jste si neuvědomili zejména při určování chyb měření. Většina pouze pro různé časy spočetla  $\rho_k$  a tyto hodnoty pak statisticky vyhodnotila, aniž by si uvědomila, že největší chyba je způsobena nepřesností měření hmotnosti a objemu tělesa. Mnozí se ani nezmínili o tom, že jejich měření objemu a hmotnosti tělesa vůbec nějakou chybu mělo.

V zadání úlohy bylo napsáno, že máte při měření použít hustoměr či předmět jemu podobný, z tohoto hlediska tato metoda nebyla zcela korektní, neboť hustoměr má samozřejmě menší hustotu než líh. Pár řešitelů se tomuto problému šalamounsky vyhnulo, když místo času pádu měřili čas výstupu tělesa ze dna na hladinu.

2. Kmity a kyvy — měřili jste periody všemožných kmitů a kyvů hustoměru v líhu. Nejčastější a nejjednodušší bylo měření periody vertikálních kmitů. My jsme místo hustoměru použili zkumavku zatíženou tak, aby v líhu plavala stabilně v poloze naznačené na obrázku 22 (bude muset být poměrně hodně ponořena). Po vychýlení o  $y$  z rovnovážné polohy, je-li směr  $g$  kladný, je celková síla působící na zkumavku  $F = -S\rho_k g y$  ( $S$  je průřez zkumavky v místě hladiny) a tedy dle Newtonova pohybového zákona  $ma + S\rho_k g y = 0$ . Tato rovnice je analogická s pohybovou rovnicí harmonického oscilátoru. Tuhost pružiny je zde zastoupena součinem  $S\rho_k g$ , z periody kmitů získáme po uvážení  $S = \pi d^2/4$  vztah pro hustotu líhu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{S\rho_k g}} \quad \Rightarrow \quad \rho_k = \frac{16\pi m}{gT^2 d^2}.$$

Dosud jsme se nezmínili, jakou roli v tomto případě hraje tlumení. Pokud předpokládáme, že tlumící síla je přímo úměrná rychlosti ( $F = -2bmv$ ), je pohyb popsán rovnicí

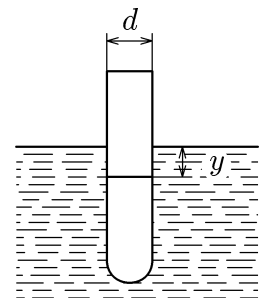
$$y = Ae^{-bt} \sin(\omega^* t + \varphi), \quad \text{kde} \quad \omega^* = \sqrt{\omega^2 - b^2},$$

$\omega$  je úhlová frekvence netlumených kmitů. Pro koeficient  $b$  tedy platí

$$b = \frac{1}{T} \ln \frac{y_0}{y_T}.$$

Z měření vyplynulo, že perioda je přibližně 0,7 s a výchylka se po jednom kmitu zmenší asi na polovinu, tedy  $b$  je přibližně  $1 \text{ s}^{-1}$ , z čehož plyne, že perioda tlumených kmitů bude asi jen o 0,5 % větší, než perioda kmitů netlumených. Tlumení můžeme tedy bez obav zanedbat.

Dostáváme se k samotné realizaci pokusu. Při měření jsme použili technický líh. Nejprve musíme změřit hmotnost zatížené zkumavky a mikrometrem její průřez v místě, kde byla hladina líhu. Uvedeme zde jen výsledky s chybami měření:  $d = (15,25 \pm 0,03) \text{ mm}$ ,  $\delta d = 0,2 \%$ ,  $m = (18,35 \pm 0,05) \text{ g}$ ,  $\delta m = 0,3 \%$ . Dále jsme měřili čas čtyř period (pak už bylo kmitání příliš utlumené). Časy jsou uvedeny v následující tabulce.



Obr. 22

4T(s)	2,75	2,91	2,83	2,68	2,73	3,01	2,85	2,79	2,77	2,81
-------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Průměrná hodnota:  $\bar{T} = 0,703$  s.

Standardní odchylka:  $s_{st} = 0,022$  s.

Systematická chyby:  $s_{sys} = 0,02$  s (tento odhad souvisí s reakční dobou).

Celková chyba:  $s_{celk} = 0,03$  s.

Relativní odchylka:  $\delta T = 4$  %.

Z průměrných hodnot spočteme průměrnou hustotu  $\bar{\rho}_k = 818 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  a relativní odchylku  $\delta \rho_k = \sqrt{(2\delta T)^2 + (2\delta d)^2 + (\delta m)^2} = 8$  %. Výsledek tedy je  $\rho_k = 820 \pm 70 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Tabulková hodnota hustoty lihu je  $\rho_k = 789 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , což je v dobré shodě s naším výsledkem. Chybu měření způsobilo především nepřesné měření času.

#### Úloha IV. Exp ... dráteček

V brožurce se zadáním 4.série byl připevněn kousek drátečku. Vaším úkolem bylo zjistit, z jakého kovu byl vyroben. Vzorek jste nesměli nijak poničit (roztavit, naleptat kyselinou, trvale zdeformovat atd.). Mohli jste změřit například tepelnou kapacitu, hustotu, tepelnou vodivost a roztažnost, délku, měrný odpor, průměr a hmotnost atomového jádra, elektrochemický potenciál, odrazivost, mřížkovou konstantu, relativní či absolutní permitivitu a permeabilitu, kapacitu, indukčnost, poločas rozpadu, absorpční a emisní spektrum... Fantazii se meze nekladly.

Určit, z jakého kovu je dráteček vyroben, je možné mnoha způsoby. Uvedeme zde postupy, které řešitelé používali nejčastěji a jejichž kombinací úspěšně odhalili složení drátečku.

Máme dráteček. Nejjednodušší věc, kterou můžeme udělat, je přiložením magnetu otestovat jeho magnetické vlastnosti. Zjistíme, že dráteček na magnet vůbec nereaguje, je tedy paramagnetický nebo diamagnetický. Tím jsme vyloučili feromagnetické kovy Fe, Co, Ni.

Dále můžeme poměrně jednoduše určit hustotu. Klasický postup je změřit mikrometrem poloměr a délku drátečku, vypočítat objem, pak dráteček zvážit laboratorními vahami (některým šťastnějším se podařilo získat i digitální váhy) a vypočítat hustotu. Při opakovaném a pečlivém měření lze dosáhnout přesnosti měření pod 10 %. Průměrná hustota vycházela 10000 – 11000  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Po porovnání s tabulkami zjistíme, že drátek může být z některého z těchto kovů: Bi, Ag, Ni, Mo, Pb.

Další účinná metoda je porovnávání elektrochemického potenciálu. Do elektrolytu (nedestilovaná voda, jablko, pomeranč, ...) vložíme jako jednu elektrodu náš drátek a jako druhou elektrodu použijeme známý kov (zlatý prstýnek, hliníková lžička, stříbrná náušnice, drátky a hřebíky, které poskytuje naše domácnost, ...) a změříme polaritu napětí na elektrodě. Na elektrodě s nižším elektrochemickým potenciálem se objeví záporný pól. Můžeme tak porovnat, vůči kterým kovům má náš drátek menší nebo větší elektrochemický potenciál a podle toho, jak bohatá je naše sbírka elektrod, můžeme porovnáním s tabulkami zúžit spektrum kovů, z kterých by náš dráteček mohl být. Řešitelé často také používali trochu modifikovanou verzi této metody, kdy jako jednu elektrodu zvolili nějaký (např. měděný) drátek a jako druhou elektrodu používali náš dráteček a různé další kovy. Na takovýchto elektrodách měřili napětí a zjišťovali, pro kterou druhou elektrodu bude změřené napětí shodné s napětím, které jste změřili při použití drátečku. Tato elektroda je pak zřejmě ze stejného materiálu jako náš dráteček.

Poměrně často ještě někteří zjišťovali tvrdost, tím, že se pokoušeli rýpat drátečkem do různých materiálů a výsledky opět porovnávali s tabulkami.

Toto už většině z vás stačilo k určení kovu, z něhož dráteček je.

Našli se však i odvážní a originální hráčičkové a experimentátoři, kteří měřili tepelnou roztažnost, elektrický odpor nebo měrnou tepelnou kapacitu drátečku, nebo se pokoušeli určit, zda je dráteček paramagnetický nebo diamagnetický. Někteří další zase vtipnými postupy zpřesnili měření hustoty. Nutno říct, že dobré provedení těchto experimentů je náročnější, takže ne všechny se podařily, ale přesto (nebo právě proto) oceňujeme váš hravý a tvořivý přístup.

No a těm, kteří si ani po přečtení tohoto návodu nezměřili, z jakého kovu dráteček je, tedy prozradíme, že je ze stříbra.

**Úloha V. Exp ... modul pružnosti vlasu**

Změřte periodu torzních kmitů lidského vlasu. Z ní pak určete modul pružnosti vlasu ve smyku. Napovíme vám, že pro kroutící moment síly  $M$  působící na válec délky  $l$  a poloměru  $r$ , který je vyroben z materiálu o modulu pružnosti ve smyku  $G$ , platí vztah  $M = \pi r^4 G \varphi / 2l$ , kde  $\varphi$  je úhel stočení spodní podstavy vůči horní podstavě (zkuste si jej odvodit). Pokud nedisponujete dostatečně dlouhými vlasy, požádejte nějakou dlouhovlasou osobu o darování několika exemplářů a směle se pusťte do měření.

Dílčí části této úlohy bylo možné řešit několika způsoby, postup řešení úlohy jako celku byl však u všech řešitelů přibližně stejný. Základem bylo odvození vztahu pro výpočet modulu pružnosti vlasu ve smyku a naměření potřebných veličin.

Vlas budeme považovat za těleso válcového tvaru délky  $l$  a poloměru  $r$ . Rozdělíme si jej na tenké válcové slupky. Poloměr jedné takové slupky bude  $x$ , kde  $0 < x \leq r$ . Budeme-li na tuto slupku působit tečnou silou  $F$ , vyvoláme tečné napětí o velikosti  $\tau = F/S$ , kde  $S$  je podstava slupky a ze vztahu pro obsah kruhu snadno odvodíme, že  $S = 2\pi x dx$ . Z Hookova zákona platí pro  $\tau$  také vztah  $\tau = Gx\varphi/l$ , kde  $\varphi$  je úhel natočení horní podstavy vůči dolní a výraz  $x\varphi$  tedy udává vzájemné posunutí těchto podstav.

Pro kroutící moment válcové slupky vůči ose válce  $dM$  platí  $dM = dFx = 2\pi G\varphi x^3 dx/l$ . Pro celý válec potom dostaneme

$$M = \int_0^M dM = \int_0^r \frac{2\pi G\varphi x^3 dx}{l} = \frac{\pi r^4 G \varphi}{2l},$$

což jsme měli ověřit.

Tento moment uděluje závažíčku na konci vlasu úhlové zrychlení  $\epsilon$  a podle 2. věty impulsové  $J\epsilon = M = -\pi r^4 G \varphi / 2l$ . Záporné znaménko je dáno působením momentu proti výchylce z rovnovážné polohy. Dosazením do předchozího vztahu dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{\pi r^4 G}{2lJ} \varphi = 0.$$

Jedná se o rovnici harmonických kmitů s úhlovou frekvencí  $\omega = \sqrt{\pi r^4 G / 2lJ}$ . Dosazením  $\omega = 2\pi/T$  získáme vztah pro výpočet modulu pružnosti ve smyku

$$G = \frac{8\pi l J}{T^2 r^4}.$$

Z tohoto vztahu vycházela většina řešitelů. Moment setrvačnosti vypočteme podle vztahu odpovídajícího konkrétnímu tvaru použitého závaží. Délku vlasu  $l$  a periodu kmitů  $T$  měříme standardně. Měření tloušťky vlasu se vyskytlo jako samostatná úloha v jednom z předchozích ročníků našeho semináře. Ve vzorovém řešení je popsáno několik postupů, které zde nebudeme opakovat. Jedná se například o metodu přímého měření, kapkovou metodu, namotávání na špejli, nebo difrakci v laserovém svazku. Většina z vás využila některé z těchto možností i nyní.

Při měření jsme použili válcové závaží o známé hmotnosti, k němuž jsme izolepou upevnili vlas tak, aby osa otáčení procházela osou válce. Pro moment setrvačnosti závaží v tomto případě platí  $J = mr_z^2/2$ , kde hmotnost závaží  $m = 10$  g. Z několika měření posuvným měřidlem jsme určili poloměr závaží  $r_z = (5,0 \pm 0,1)$  mm. U hmotnosti závaží zanedbáváme chybu, zanedbáváme také hmotnost izolepy.

Tloušťku vlasu jsme určili pomocí mikroskopu s kalibrovanou mikrometrickou stupnicí. Provedli jsme několik měření průměru v různých částech vlasu, z nichž jsme obdrželi poloměr  $r = (43 \pm 7)$   $\mu$ m. Při tomto měření jsme neuvažovali deformaci vlasu při jeho zatížení.

Periodu kmitů jsme stanovili při dvou různých délkách vlasu  $l_1 = (9,6 \pm 0,1)$  cm a  $l_2 = (29,9 \pm 0,1)$  cm změřených pomocí pásového měřidla. Stopkami určíme trojnásobek periody, získané hodnoty jsou uvedeny v tabulce. Z nich jsme spočetli  $T_1 = (9,86 \pm 0,27)$  s,  $T_2 = (17,7 \pm 0,4)$  s.

1. měření: 3 $T_1$ [s]	30,2	28,7	29,5	30,4	29,6	29,0
2. měření: 3 $T_2$ [s]	52,7	51,3	54,2	53,8	54,0	52,9

Chyby veličin měřených vícekrát spočteme jako  $s = \sqrt{(3s_{sm})^2 + s_{sys}^2}$ , kde  $s_{sm}$  je směrodatná odchylka a  $s_{sys}$  je systematická chyba, kterou odhadneme. Chybu měření délky vlasu jsme odhadli z přesnosti odčítání na stupnici měřidla. Celkovou chybu  $G$  potom dostaneme jako

$$\delta G = \sqrt{(2\delta T)^2 + (4\delta r)^2 + (\delta l)^2 + (2\delta r_z)^2},$$

kde  $\delta x$  označuje relativní chybu veličiny  $x$ .

Ze dvou výše uvedených měření dostaneme dvě hodnoty  $G$ , jejichž průměr je  $G = (8,9 \pm 4,7) \cdot 10^8$  Pa. Chyba je dána především chybou měření poloměru vlasu. Získaný výsledek není možné srovnat s tabulkovou hodnotou, ale ve svých řešeních jste se převážně dopracovali k hodnotám řádu ( $10^8 - 10^{10}$ ) Pa.

## Úloha VI. Exp ... povrchové napětí vody

Změřte závislost povrchového napětí vody na teplotě. Metodu měření si můžete vybrat sami.

### Teorie

Zamysleme se nejprve nad tím, jakou závislost na teplotě můžeme v tomto měření očekávat: Povrchové napětí závisí na velikosti mezimolekulárních sil, které s rostoucí teplotou klesají, neboť molekuly více kmitají. Při varu kapaliny téměř vymizí. Můžeme tedy očekávat, že povrchové napětí bude s teplotou klesat.

### Měření

Metodu měření této experimentální úlohy jste si mohli vybrat. Uvedeme nejprve, jaké metody jste využívali:

#### 1) Odtrhávací metoda

Do kapaliny ponoříme drátěný rámeček tak, aby byla ponořena jenom jedna jeho strana, a to těsně pod hladinou. Měříme sílu, kterou musíme působit, abychom vytáhli celý rámeček z vody. Pro toto měření jsou vyráběny speciální torzní váhy, s jejichž užitím můžeme dosáhnout velmi přesných výsledků.

#### 2) Ponořování drátků (Vít Šípál)

O něco dostupnější je následující metoda: Na hladinu položíme drátky z různých materiálů o různých průměrech tak, aby plavaly. Vodu začneme zahřívat a drátky se nám budou postupně ponořovat. Pro právě se ponořující drátek o délce  $d$  a poloměru  $r$  z materiálu o hustotě  $\rho$  platí rovnost tíhové a povrchové síly (povrchové napětí značíme  $\sigma$ ):

$$2d\sigma = \pi r^2 \rho g.$$

Po úpravě dostaneme povrchové napětí vody

$$\sigma = \frac{1}{2} \pi r^2 \rho g.$$

Stačí si tedy poznamenat teplotu, při které se příslušný drátek potopil, změřit (nebo jinak zjistit) jeho poloměr a hustotu a jeden bod do grafu je na světě. Z výše uvedeného jasně plyne, že potřebujeme přesně tolik různých drátků, kolik bodů do grafu závislosti  $\sigma$  na teplotě chceme získat.

#### 3) Kapková metoda

Velice často využívaná byla kapková metoda. Kapeme-li vodu z kapiláry (kapátka), kapka nám upadne právě v tom okamžiku, kdy se její tíha rovná povrchové síle, která ji u kapátka drží,

$$mg = \sigma 2\pi r.$$

Určení poloměru kapky  $r$  (nebo spíše jejího „krčku“) je problematické. Metoda se proto často využívá jako srovnávací: Znamou kapalinou si používané kapátka zkalibrujeme (ze známého  $\sigma$

spočteme  $r$ ) a poté měříme neznámou kapalinu. Řada řešitelů si kapátko zkalibrovala pomocí vody 20°C teplé, jejíž povrchové napětí je podle tabulek  $\sigma = 72,75 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . Budiž. Hmotnost jedné kapky změříme snadno tak, že si jich odkapeme např. 100 a ty pak zvážíme (či změříme objem). Je třeba dávat pozor na chladnutí vody, při odkapávání se může voda poměrně významně ochlazovat.

#### 4) Metoda kapilární elevace

Do nádoby s vodou o známé teplotě  $T$  ponoříme kapiláru. Vlivem povrchových sil voda v kapiláře vystoupá do výšky  $h$ . V případě, že voda kapiláru dokonale smáčí, platí rovnost sil (podobně i rovnost kapilárního a hydrostatického tlaku):

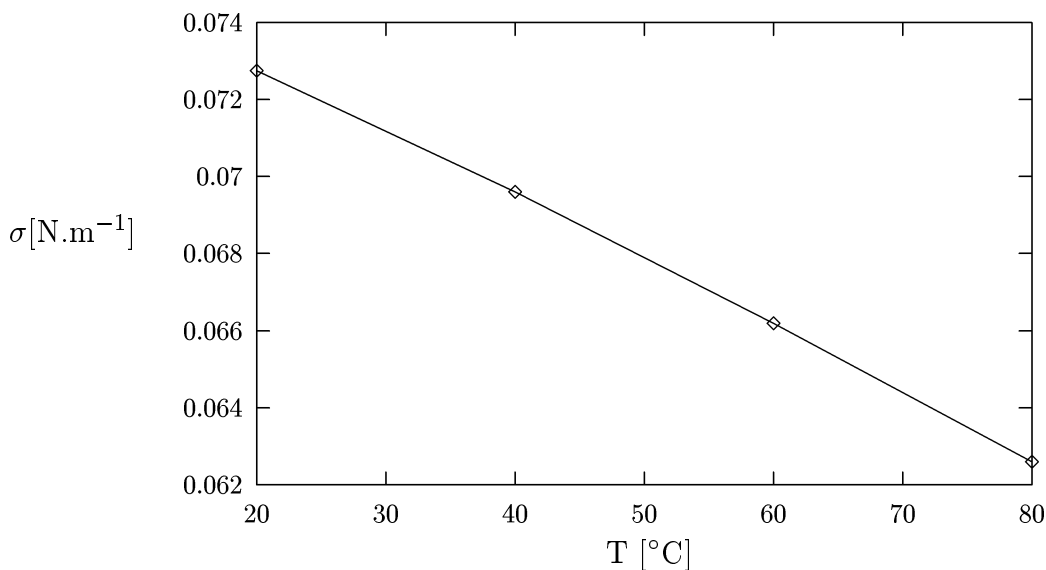
$$2\pi r\sigma = \pi r^2 h \rho g .$$

Z toho

$$\sigma = \frac{1}{2} r h \rho g .$$

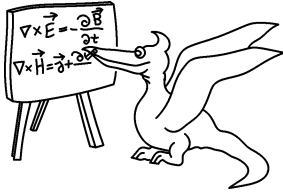
Je opět třeba dávat pozor na to, aby voda v kapiláře měla stejnou teplotu jako ukazuje náš teploměr. Abychom dosáhli lepšího smáčení stěny kapiláry je třeba, aby byla úplně čistá. Při samotném měření výšky sloupce vody v kapiláře postupujeme nejlépe tak, že kapiláru nejprve téměř celou ponoříme a poté ji začneme z vody vytahovat a pozorujeme, kdy se hladina vody v kapiláře začne stabilizovat. Jiné postupy měření dávaly často poměrně nereprodukovatelné výsledky. Průměr kapiláry měříme tak, že do ní zasuneme jehlu, kam až to jde, a v místě, po které jsme jehlu zastrčili, změříme její průměr mikrometrem.

Jaké měly vyjít výsledky? Fyzikální a matematické tabulky (Brož a kol. SNTL 1980) uvádí, že  $\sigma$  klesá od  $72,75 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  pro 20°C přes  $69,6 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  pro 40°C,  $66,2 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  pro 60°C k  $62,6 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  pro 80°C, z čehož vidíme, že závislost je přibližně lineární. Pro teploty vyšší než 80°C je měření již značně ztíženo počínajícím varem vody. Většina řešitelů skutečně dospěla ke klesající závislosti  $\sigma$  na teplotě, většinou však podcenili systematické chyby použitých postupů.



Obr. 23





## Seriál o polovodičové elektronice

V tomto roce jsme se v seriálu na pokračování setkávali s polovodičovou elektronikou. Na konci každého dílu najdete úlohu, k jejímuž vyřešení vám pomohou informace v seriálu obsažené.

### Úvod

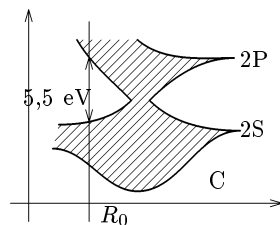
Dnešní doba je velmi ovlivněna informačními technologiemi, všude kolem nás jsou počítače a jiné elektronické přístroje. A tyto přístroje jsou stále více složitější, je snaha vyrábět součástky co nejmenší, aby měly co nejmenší spotřebu, atd. Všechny uvedené vlastnosti, zejména snaha o co nejmenší rozměry součástek, jasně hrají do karet řešení s užitím polovodičových součástek. Ale co o těchto součástkách vlastně víme? Základní součástí např. počítače je samozřejmě procesor. Z reklamních letáků se dozvíme, že procesor má tolik a tolik transistorů na  $\text{cm}^2$  (takzvaná integrace) — takže základní stavební součástí mikroprocesoru je transistor. A zde se konečně dostáváme na úroveň fyziky. Transistor, jak snad většina z vás tuší, má v sobě dva *PN přechody* uspořádané tak, že tato součástka je schopna zesilovat elektrický proud či napětí. Ale jak může taková věc fungovat, to již není věc obecně známá. A co je vlastně ten *PN přechod* a jak se chová v elektrickém poli? *PN přechod* je rozhraní polovodičů *typu P* a *N*. My půjdeme ještě hlouběji do podstaty věci a podíváme se podrobně i na to, co je to polovodič *typu P* nebo *typu N* a navíc si ozřejmíme, co je to vlastně polovodič a jaké jsou jeho vlastnosti.

### Pásová teorie pevných látek

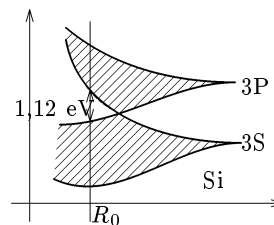
Jak víme, elektrony v atomech obíhají kolem jádra pouze po určitých drahách s různými energiemi. Pro elektrony platí Pauliho vylučovací princip, to znamená, že kolem jednoho atomu nemohou obíhat dva elektrony se všemi kvantovými čísly stejnými. Kvantová čísla pro elektrony v elektronovém obalu atomu vyjadřují jednoznačně vlastnosti daného elektronu a jsou čtyři:  $n$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $s$ . Po řadě vyjadřují celkovou energii elektronu, celkový moment hybnosti elektronu, průmět momentu hybnosti elektronu do osy  $z$  a spin. Pauliho princip má za následek vznik hladin  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p$ ,  $3s$ , atd. Tyto hladiny jsou určeny celkovou energií elektronu (kvantové číslo  $n$ , nabývá přirozených hodnot, v uvedeném zápisu jsou to čísla) a celkovým momentem hybnosti elektronu (kvantové číslo  $l$ , nabývá hodnot od  $0$  do  $n - 1$ , v uvedeném zápisu je to písmenko — pro rostoucí  $l$  se značí postupně  $s$ ,  $p$ ,  $d$ , ...). Navíc na každé z hladin mohou zbylá dvě kvantová čísla vytvořit  $2(2l - 1)$  různých kombinací.



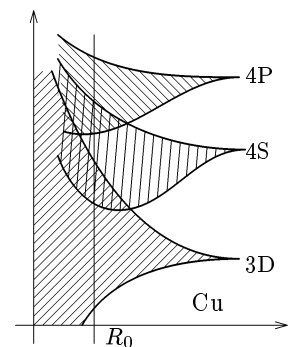
Obr. 24



Obr. 25



Obr. 26



Obr. 27

Problém energetických hladin elektronů v atomu se řeší kvantově-mechanicky a výsledkem je fakt, že elektrony mohou nabývat pouze diskretních energií. Ovšem pouze za předpokladu, že nejsou ovlivněny nějakým silovým polem z vnějšku atomu. V pevných látkách jsou atomy v krystalové mřížce velmi blízko sebe, takže svým coulombickým polem ovlivňují atomy kolem. Toto ovlivnění je tak velké, že neplatí pravidlo o diskretnosti energetických hladin elektronů v obalech atomů, ale tyto hladiny se rozmazávají (viz obr. 24). Každý elektron může nabývat na každé z hladin energie v určitém intervalu kolem původní energie. Protože povolené energie vytvářejí pásy, hovoříme o pásu povolených energií a pásu zakázaných energií (zakázaném pásu), ve kterém

se nemůže nacházet žádný elektron. Navíc v pevných látkách existuje mezní energie, při které již není elektron vázán k žádnému z atomů a v elektrickém poli se může volně pohybovat. Pás energií od mezní energie výše se nazývá vodivostní pás a poslední pás pod vodivostním pásem se nazývá valenční pás.

Podíváme-li se na obrázky 25–27, které znázorňují pásy v pevné látce v závislosti na mřížkové konstantě, zjistíme pro různé látky různé chování. Podle tohoto chování rozlišujeme pevné látky na vodiče, polovodiče a izolanty. Ze statistických vlastností elektronů vyplývá, že v základním stavu (pevná látka není ovlivňována zvenčí) jsou zaplněny energetické hladiny až po valenční pás, ve vodivostním pásu by se při teplotě 0 K neměl nacházet žádný elektron, při teplotě vyšší je počet elektronů ve vodivostním pásu úměrný  $e^{-\Delta E/kT}$ , kde  $\Delta E$  je šířka zakázaného pásu,  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $T$  je termodynamická teplota. Výjimku tvoří kovy, ve kterých neexistuje zakázaný pás mezi valenčním a vodivostním pásem. Takže po přiložení napětí mohou elektrony pohodlně přejít z valenčního do vodivostního pásu bez překonávání potenciálové bariéry. Situace je jiná v případě polovodičů a izolantů. Díky existenci zakázaného pásu mezi valenčním a vodivostním pásem musí být elektron excitován energií větší než je šířka zakázaného pásu, aby mohl vést elektrický proud. Zde dále dělíme pevné látky na izolanty a polovodiče. Polovodiče mají šířku zakázaného pásu úměrnou jednotkám elektronvoltů (1 eV je práce vykonaná na elektronu při změně potenciálu o 1 V,  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ), takže při pokojové teplotě existují ve vodivostním pásu nějaké elektrony — polovodič může vést elektrický proud (viz předchozí vztah). Izolanty mají šířku zakázaného pásu řádově desítky eV, takže ve vodivostním pásu se za běžných podmínek prakticky žádné elektrony nevyskytují.

Povšimněme si jedné zajímavé vlastnosti polovodičů: při rostoucí teplotě se do vodivostního pásu dostává více elektronů, takže se zvyšuje koncentrace vodivostních nosičů náboje a měrný elektrický odpor klesá. Ve vodičích je i při nízkých teplotách naopak vodivostních nosičů náboje dostatek, takže při zvyšování teploty se zvyšuje pravděpodobnost srážek pohyblivých nosičů náboje s nepohyblivými jádry a vodivost klesá.

### Elektronová a děrová vodivost

Nejprve se podívejme na chování vodivostních elektronů v kovech. Při teplotě větší než 0 K budou mít elektrony určitou kinetickou energii odpovídající teplotě. Tato energie se pochopitelně projevuje tak, že elektrony konají termální pohyb (podobně jako v plynu — v prvních teoriích elektronové vodivosti kovů se uvažoval elektronový plyn). Díky vzájemným srážkám je pohyb každého z elektronů neuspořádaný — není preferován žádný směr a uvnitř vodiče je celkový elektrický proud nulový. Přiložíme-li napětí, vznikne směr, ve kterém budou elektrony urychlovány a i přes jejich neuspořádaný pohyb (velikost střední rychlosti neuspořádaného pohybu je přibližně  $10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) existuje drift, to znamená, že v neuspořádaném pohybu převládá směr vnějšího elektrického pole. Díky tomuto driftu je veden elektrický proud. Driftová rychlost je dána vztahem

$$v_d = \mu_e E ,$$

kde  $\mu_e$  je konstanta nazývaná se pohyblivost elektronu a  $E$  je intenzita elektrického pole. Elektronová vodivost látky je dána vztahem

$$\sigma_e = \frac{i}{E} ,$$

kde  $i$  je proudová hustota a je rovna proudu procházejícímu přes jednotkovou plochu průřezu vodiče. Označme koncentraci elektronů  $n_e$  a vyjádřeme z proudové hustoty vodivost:

$$\begin{aligned} i &= en_e v_d = en_e \mu_e E , \\ \sigma_e &= en_e \mu_e . \end{aligned}$$

Zde vidíme, že v kovech je veden proud výhradně elektrony, proto v případě kovů mluvíme o elektronové vodivosti. Situace je však jiná v případě polovodičů. Elektrony, které se nacházejí ve vodivostním pásu, musely být excitovány z pásu valenčního a to z jeho nejvýše položených hladin. To znamená, že koncentrace neobsazených valenčních hladin je stejná jako koncentrace elektronů

ve vodivostním pásu. Po přiložení napětí je veden elektrický proud nejen elektrony ve vodivostním pásu stejně jako u kovů (jenom koncentrace elektronů je menší), ale uplatňuje se i další jev. Elektrony z valenčního pásu jsou elektrickým polem urychleny a tím získávají dostatečnou energii na to, aby přešly do vyšší energetické hladiny ve valenčním pásu, která je volná. Nemají však dostatečnou energii pro přechod do pásu vodivostního. To znamená, že elektrony obsadí *díru* ve valenčním pásu a uvolní jinou *díru* s nižší energií, ale co je důležité, prostorově jinde (proti směru pohybu elektronů). Tím pádem se vlastně díra posouvá proti směru pohybu elektronů a efektivně vede elektrický proud ve stejném směru jako elektrony (sice se pohybuje opačně než elektrony, ale má též opačný „náboj“) — hovoříme o děrové vodivosti a zavádíme stejné parametry pro díry jako pro elektrony (např. pohyblivost, ...). Oba procesy vodivosti jsou od sebe odděleny zakázaným pásem, proto není důvod předpokládat, že by se navzájem významně ovlivňovaly, a zavedeme celkovou vodivost

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_d ,$$

kde  $\sigma_d$  je děrová vodivost polovodiče. Po zavedení pohyblivosti děr  $\mu_d$  a koncentrace děr  $n_d$  (později uvidíme, že nemusí být stejná jako koncentrace vodivostních elektronů), můžeme psát

$$\sigma = e(n_e\mu_e + n_d\mu_d) .$$

### Úloha S. I ... pásová teorie

Určete, kolikrát méně elektronů je ve vodivostním pásu typického izolantu (šířka zakázaného pásu je 10 eV), než v případě polovodiče (šířka zakázaného pásu křemíku je 1,12 eV) při pokojové teplotě. Předpokládejte, že v limitě vysokých teplot se koncentrace vyrovnají. Jak se tento poměr změní při zahřátí izolantu i polovodiče na teplotu 500 K?

V minulém dílu seriálu jsme uvedli přibližný vztah pro počet elektronů ve vodivostním pásu

$$n = C e^{-\frac{E_g}{kT}} ,$$

kde  $k$  je Boltzmannova konstanta ( $k = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  $T$  je termodynamická teplota a  $E_g$  je šířka zakázaného pásu (v seriálu značená  $\Delta E$ ). V tomto vztahu předpokládáme obecnou konstantu úměrnosti  $C$  charakteristickou pro každý materiál. Dle zadání víme, že v limitě vysokých teplot  $T \rightarrow \infty$  se koncentrace elektronů ve vodivostním pásu izolantu a polovodiče vyrovnají. Ze vztahu vidíme, že exponenciála jde k jedné, takže pro oba materiály předpokládáme stejnou konstantu  $C$ . Zajímáme-li se pouze o poměr koncentrací, vyšetřujeme

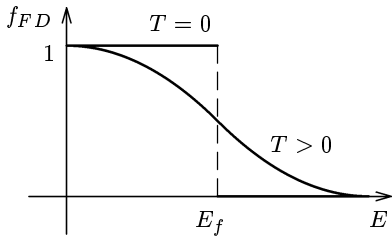
$$\frac{\exp\left[\frac{E_{g1}}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{E_{g2}}{kT}\right]} = \exp\left[\frac{E_{g1} - E_{g2}}{kT}\right] .$$

Dosadíme číselně a máme pro  $T = 300 \text{ K}$  výsledek  $e^{343} \approx 10^{149}$ . Triviálně můžeme dále dosadit teplotu 500 K a dostaneme poměr  $e^{206} \approx 10^{89}$ . Na závěr malou připomínku: při pohledu na výsledek zapsaný pomocí exponenciály si nikdo nedokáže hned představit, kolik to přesně je. Naši mateřskou číselnou soustavou je desítková. Proto je na místě napsat řešení tak, jak je výše naznačeno, spočítat, kolik je exponent pro základ  $e$  a poté ho vydělit přirozeným logaritmem deseti — dostaneme exponent pro základ 10. A dostaneme přímo počet řádů, o kolik se koncentrace liší.

### Fermi-Diracovo rozdělení

Pevné látky obecně nemusí tvořit krystalovou strukturu, my se ale budeme nadále zabývat krystalickými látkami. V nich jsou atomy k sobě vázány *kovalentními* vazbami. V tomto druhu vazeb se uplatňují takzvané výměnné síly, které drží atomy pohromadě. Z každého atomu přispívá aspoň jeden elektron k tvorbě vazby tak, že „obíhá“ chvíli kolem svého jádra a poté kolem cizího. Výsledkem je vzájemné sdílení elektronů sousedními atomy. Pravý původ přitažlivých sil je ale nutné vysvětlit pomocí kvantové mechaniky, klasická představa však přibližně odpovídá realitě. Zvláštním druhem *kovalentní* vazby je vazba *kovová*. Při jejím uplatnění nejsou elektrony sdíleny

pouze sousedními atomy, ale atomy z celé krystalové mřížky. Takové elektrony je možné popsat jako tzv. elektronový plyn, což není nic jiného než plyn se zvláštními vlastnostmi. Minule jsme ale připomněli Pauliho vylučovací princip, to by ovšem znamenalo, že v celém objemu plynu nesmí být elektrony se stejnou energií, kvadrátem momentu hybnosti a spinem. Víme však, že vzájemným silovým působením mezi atomy v těsné krystalové mřížce vznikají z původně diskrétních hladin (tzn. elektron na jedné hladině nesmí měnit svou energii spojitě, ale po určitých *kvantech*, tedy konečných a nenulových skocích) pásy povolených energií.



Obr. 28

V minulém díle seriálu jsme se omezili na strohé konstatování, že při zvyšování teploty vodiče nebo polovodiče se do vodivostního pásu dostává více elektronů. Otázkou zůstává, kolik přesně. Sice byl uveden přibližný vztah, ale ten platí pouze při vysokých teplotách a velkých energiích elektronů. S pomocí statistické fyziky (neplést si se statistikou) bylo odvozeno statistické\* rozdělení počtu elektronů s různou energií. Není zde tolik prostoru na odvozování, proto se musíme spokojit s výsledkem — mohou pouze prozradit, že při odvozování vycházíme je opět z Pauliho

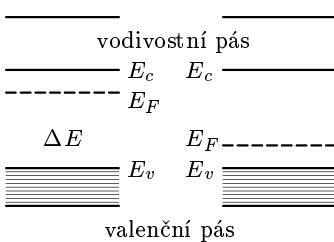
vylučovacího principu. Počet elektronů s určitou energií  $E$  je dán vztahem

$$f_{FD} = \frac{1}{\exp\left[\frac{E-E_F}{kT}\right] + 1},$$

kde  $E_F$  je Fermiova hladina (Fermiova energie),  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $T$  je termodynamická teplota (v kelvinech!). Pokud by byl elektronový plyn zmrazen na absolutní nulu, je jasné, že v intervalu  $\langle -\infty, E_F \rangle$  bude  $f_{FD} = 1$ , pro  $E = E_F$  bude  $f_{FD} = \frac{1}{2}$  a na intervalu  $\langle E_F, \infty \rangle$  bude  $f_{FD} = 0$ . Takže nyní vidíme význam Fermiovy hladiny: při teplotě absolutní nuly by energetické hladiny byly obsazeny až po hladinu s energií  $E_F$ , žádný elektron by nemohl mít energii vyšší. Pokud teplotu zvýšíme, původní schod se zaoblí (viz obr. 28) a šířka intervalu, kde je zaoblení zřetelné je přibližně  $2kT$ .

Fermiova hladina v čistých polovodičích a kovech je uprostřed zakázaného pásu, takže kromě omezení výskytu elektronu Fermi-Diracovým rozdělením ještě musíme připočítat omezení zakázaným pásem. Je jasné, že pokud  $kT < E_g$ , kde  $E_g$  je šířka zakázaného pásu, bude ve vodivostním pásu zanedbatelné množství elektronů.

### Příměsové polovodiče



Obr. 29

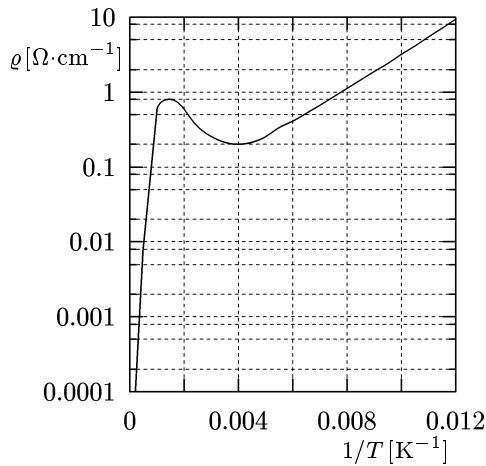
Pokud je polovodič čistý, všechny valenční elektrony se účastní vazeb mezi atomy v mřížce. Např. atomy germania tvoří kubickou mřížku, kde každý atom je svými čtyřmi valenčními elektrony vázán se čtyřmi sousedními atomy. Přidáním např. fosforu (substitucí za atom germania) se významně nenaruší prostorová mřížka, protože v daném místě je atom fosforu schopen vytvořit pouze čtyři vazby, ačkoliv má pět valenčních elektronů. Tím pádem zbyde jeden elektron, který se neúčastní vazby mezi atomy a je vázán pouze ke svému atomu. Tato vazba je slabá, takže k její rozrušení stačí pouze foton nebo kmit mřížky (fonon) o relativně nízké energii. Tím se poměrně snadno (oproti přechodu přes zakázaný pás) dostane elektron do vodivostního pásu. Protože více než čtyřmocné atomy dodávají elektrony, nazývají se tyto atomy *donory*.

Obr. 30

Mají větší elektronovou a tím i celkovou vodivost než čisté polovodiče. V pásové struktuře můžeme příměs znázornit jako v obr.29. Fermiova hladina se posune výše ke dnu vodivostního pásu, takže ve vodivostním pásu dle Fermi-Diracova rozdělení bude více elektronů než v čistém polovodiči při stejné teplotě. Příměsové polovodiče s donorovou příměsí se označují jako *polovodiče typu n*.

\*) To znamená, že máme nekonečně mnoho elektronů s určitými požadovanými vlastnostmi a zajímáme se o střední hodnoty zkoumaných veličin

Naopak *akceptory* jsou příměsi, které jsou méně než čtyřmocné. Opět se zrealisují čtyři vazby, jedna ale bude neúplná. Při tvorbě této vazby se uplatní opět výměnné síly, ale vyměňovat se může pouze jeden elektron, takže vazba bude mnohem slabší než vazba úplná. To ale v pevné mříži nevádí, důležité je to, že takto vznikla „díra“ pro elektron, který ji může zaplnit, avšak musí opustit svoji vazbu, takže se díra prostorově posouvá a chová se jako kvazičástice \*). Ve schématu pásů energie je akceptorová příměs znázorněna na obr. 30 — Fermiova hladina se posune směrem k horní hranici valenčního pásu, takže ve vodivostním pásu bude méně elektronů, ale vodivost se uplatňuje děrová. Na atomu příměsi bude lokalizovaný záporný náboj, kladná díra bude mít nízkou ionizační energii, takže vodivost v *polovodiči typu p* bude opět vyšší než v čistém polovodiči při stejné teplotě.



Obr. 31

*Příklad:* Pokud budeme zvyšovat teplotu mříže polovodiče typu *p* z absolutní nuly, bude se do vodivostního pásu postupně dostávat stále více příměsových elektronů (k excitaci ostatních nemůže dojít, protože tepelné kmity mříže mají příliš nízkou energii) a vodivost polovodiče poroste. Při určité teplotě budou všechny příměsové atomy ionizovány, takže počet volných elektronů neporoste, nebo poroste mírně. Vodivost ale nezůstane stejná, protože atomy v mříži s růstem teploty více kmitají a tím se sníží pohyblivost elektronů — s růstem teploty bude vodivost klesat. Až když se začne uplatňovat přechod elektronů přes zakázaný pás, vodivost opět poroste. Vše je znázorněno v grafu na obr. 31 — jedná se o závislost vodivosti křemíku s donorovou příměsí na teplotě.

### Fotovodivost

Jistě nám není cizí představa fotonu jako částice (stejně jako elektron se může chovat také jako elektromagnetická vlna). Uvažujme fotony a elektrony jako částice, které spolu mohou interagovat. Elektron, který je vázán ve valenčním pásu polovodiče může být vyražen fotonem do vodivostního pásu. Přitom ale musí být splněny zákony zachování energie a hybnosti. Lze ukázat, že při změně energie elektronu o energii fotonu jsou oba zákony díky existenci diskrétních energetických hladin pro elektron splněny (narozdíl od volného elektronu — tzv. Comptonův rozptyl). Při takové excitaci foton vždy ztratí veškerou svou energii, musí tudíž zaniknout. Potom mluvíme o absorpci fotonu elektronem spojené s excitací elektronu do vodivostního pásu. Pochopitelně vznikne pár elektron-díra a zvýší se vodivost polovodiče. Tento jev se nazývá fotovodivost (zvýšení vodivosti polovodiče ozářením) a využívá se k detekci relativně velkých světelných toků. Podívejme se na jev trochu kvantitativně:

Nechť polovodič o indexu lomu  $\tilde{n}_1$  je v prostředí o indexu lomu  $n_0$ . Na povrch polovodiče dopadá kolmo záření o energii  $h\nu \geq E_g$ . Koeficient odrazivosti záření povrchem bude potom

$$R = \left| \frac{\tilde{n}_1 - n_0}{\tilde{n}_1 + n_0} \right|^2 .$$

Do objemu polovodiče projde při osvětlení světlem o intenzitě  $I_0$  světlo o intenzitě

$$I = I_0(1 - R) = I_0 \frac{4|\tilde{n}_1 n_0|}{|\tilde{n}_1 + n_0|^2} .$$

Je zřejmé, že při excitaci elektronů musí zpětně docházet k rekombinaci — elektron přejde z vodivostního pásu zpět do valenčního a zaplní díru. Přitom vyzáří energii buďto v podobě fotonu (jevu říkáme luminiscence), nebo v podobě několika fononů (zvýší se kmity mříže). Rychlost tohoto děje se liší v různých polovodičích, má proto smysl zavést doby života děr resp. elektronů

\*) Při popisu kvazičástic můžeme objektu, který vlastně není částicí, přiřadit hmotnost, náboj, pohyblivost, atd., takže popis je stejný jako popis částic. Odtud pojem *kvazičástice*

$\tau_d$  resp.  $\tau_e$ . Bystrý fyzik sice namítne, že vždy vzniká pár elektron-díra, proto nutně  $\tau_e = \tau_d$ , ale situace se mění v příměsových polovodičích, proto zavedeme konstanty obě. Předpokládejme, že ve vodivostním pásu je mnohem méně elektronů než ve valenčním, pak při uvažovaném osvětlení bude za jednotku času vznikat  $Ig$  párů elektron-díra, kde  $g$  je konstanta úměrnosti charakteristická pro daný polovodič. Přírůstek koncentrace nosičů bude potom v rovnovážném stavu

$$\begin{aligned}\Delta n_e &= Ig\tau_e \\ \Delta n_d &= Ig\tau_d.\end{aligned}\tag{21}$$

Vodivost se potom změní o

$$\Delta\sigma = eIg(\tau_e\mu_e + \tau_d\mu_d).$$

### Úloha S . II ... vodivost polovodičů

1. V příkladu byla ilustrována závislost vodivosti polovodiče s donorovou příměsí na teplotě. Jak se bude chovat polovodič s akceptorovou příměsí?
2. Je-li v čase  $t = 0$  excitováno  $n_e(0)$  elektronů do vodivostního pásu, bude jejich počet klesat exponenciálně, konkrétně bude platit  $n_e(t) = n_e(0) \exp(-t/\tau_e)$ . Když budeme excitovat od okamžiku  $t = 0$  za jednotku času  $c_e$  elektronů, tvrdili jsme, že se počet elektronů ve vodivostním pásu změní o hodnotu  $c_e\tau_e$  (viz vztah (21) v druhém díle seriálu). Na vás je, abyste tento vztah dokázali.

#### 1. Akceptorová příměs

V textu byla řeč o vodivosti, kterou jsme zaváděli v prvním dílu seriálu. Ta je nepřímo úměrná měrnému odporu. Ještě je nutné uvědomit si, že graf měl na ose  $x$  veličinu  $1/T$  a na ose  $y$  v logaritmickém měřítku měrný odpor. Logaritmické měřítko je výhodné v tom, že exponenciály jsou v grafu přímky. Proto při vysokých i nízkých teplotách je v grafu úsečka, platí tedy exponenciální vztahy pro počet elektronů ve vodivostním pásu.

Jak tedy vypadá graf pro akceptory? Průběh bude podobný, nikoliv však stejný. Nejdříve se na vodivosti podílejí díry vzniklé přechodem elektronů z valenčního pásu na hladinu příměsí — děrová vodivost. Po nasycení koncentrace děr vodivost klesá díky srážkám děr s tepelnými kmity mříže (jsou to kvazičástice, mohou interagovat s jinými kvazičásticemi i částicemi a tím se brzdit). Po dalším zvýšení teploty se excitují elektrony do vodivostního pásu a vznikají další díry. Potom vedou díry i elektrony. Uváděli jsme vztah pro vodivost polovodiče — je součtem elektronové a děrové vodivosti, ve kterých vystupuje počet nosičů náboje a jejich pohyblivost. Pohyblivost elektronů a děr není stejná a závisí na teplotě — díky tomu se grafy pro akceptor a donor budou lišit.

#### 2. Fotoexcitace

Předpokládejme, že vztah platí a ukažme, že po určitém časovém okamžiku se počet elektronů nezmění. Za čas  $\Delta t$  ubyde  $c_e\tau_e[1 - \exp(-\Delta t/\tau_e)]$  elektronů a excituje se  $c_e\Delta t$  elektronů. Potom jistě musí platit rovnice

$$1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_e}\right) = \frac{\Delta t}{\tau_e}.$$

Platnost této rovnice chceme dokázat pro  $\Delta t \rightarrow 0$ . Matematicky zapsáno

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = 1,$$

což je snadné cvičení. Ti, kteří limitu neumějí ještě spočítat, mohou platnost ověřit na kalkulačce. Skutečně při zmenšování  $x$  např. na  $10^{-6}$  dostaneme kýžený výsledek.

#### Diodová rovnice

V tomto dílu seriálu se konečně dostáváme k vlastnostem polovodičů velmi důležitým pro elektroniku. Jistě každý ví, co pro rozvoj elektroniky znamená polovodičový přechod — rozhraní mezi polovodičem typu N a polovodičem typu P. Jeden přechod usměrňuje — dioda, více přechodů

vhodně spojených tvoří tranzistory, diaky, tyristory, triaky, atd. Protože jsme fyzici, vysvětlíme si nejprve trochu teorie a poté se podíváme na její důsledky.

Volné nosiče náboje musíme rozdělit na majoritní a minoritní. V polovodiči typu N jsou majoritní elektrony a minoritní díry, v polovodiči typu P naopak. Přiložme k sobě polovodič typu N a polovodič typu P tak, aby vzniklo rovinné rozhraní. Po určité době se vytvoří rovnováha (ale to neznamená, že nosiče se přes rozhraní nepohybují — pouze střední hodnota proudu je nulová). Při vytváření rovnováhy se elektrony a díry přitahují navzájem směrem k rozhraní polovodičů. V důsledku tohoto pohybu se vždy část majoritních nosičů náboje z daného polovodiče přesune přes rozhraní a poté je zachycena nosiči z druhého polovodiče. Tím pádem z polovodiče typu N odčerpáme elektrony a dodáme díry a vznikne kladný prostorový náboj, v polovodiči typu P se vytvoří záporný náboj. Ovšem tyto náboje se netvoří v celém objemu polovodiče, ale pouze v malém okolí rozhraní, protože přitažlivé síly mezi elektrony a dírami nemají díky stínění ostatními elektrony velký dosah. Námi vymezený prostor s nenulovým prostorovým nábojem se nazývá polovodičový přechod. Charakterizujeme ho šířkou  $d$ .

Jak se chovají zbylé nosiče náboje v okolí přechodu? Minoritní nosiče se polem přechodu urychlují (např. elektrony z polovodiče typu P, kde je záporný náboj, přecházejí do polovodiče typu N, kde je v prostoru přechodu kladný náboj). Naopak majoritní nosiče se polem přechodu zpomalují. Urychlování minoritních nosičů znamená, že vznikne elektrický proud způsobený těmito nosiči. Protože ale mají malou koncentraci, z objemu polovodiče nestačí rychle difundovat, takže proud je omezený. A je omezený natolik, že ani po přiložení vnějšího napětí by se tento proud nezvětšil.

Nyní se dostaneme konečně k fyzice. Rozumný fyzik si řekne: proudí sice minoritní nosiče, ale my požadujeme rovnováhu. Zde jsou možné dva případy. Buďto v rovnováze pole přechodu neexistuje, což jsme zavrhlí již při úvahách o vytváření rovnováhy, nebo je existující proud kompenzován proudem majoritních nosičů. Sice jsme si řekli, že jsou zpomalovány polem přechodu, ale některé z nich mají jistě tak velkou energii, že dokážou toto pole překonat. Jelikož je jejich koncentrace řádově větší než koncentrace minoritních nosičů, dokáží proud ve směru pole přechodu kompenzovat. Takže můžeme psát první dvě rovnice pro rovnováhu, kde  $I_{nn}(0)$  a  $I_{pp}(0)$  značí proudy majoritních nosičů a  $I_{np}(0)$  a  $I_{pn}(0)$  jsou proudy minoritních nosičů při nulovém vnějším napětí:

$$I_{nn}(0) \exp\left(-\frac{eV_B}{kT}\right) = I_{np}(0) ,$$

$$I_{pp}(0) \exp\left(-\frac{eV_B}{kT}\right) = I_{pn}(0) ,$$

$V_B$  je velikost elektrického pole přechodu, člen s exponenciálou vystihuje statistické vlastnosti majoritních nosičů. Samozřejmě  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $T$  je termodynamická teplota. Po přiložení vnějšího napětí  $V$  změním  $V_B \rightarrow V_B - V$ . Samozřejmě  $I_{np}(0)$  a  $I_{pn}(0)$  se nezmění a objeví se proud přes přechod  $I_-$  a  $I_+$ :

$$I_- = I_{nn}(0) \exp\left[-\frac{e(V_B - V)}{kT}\right] - I_{np}(0) ,$$

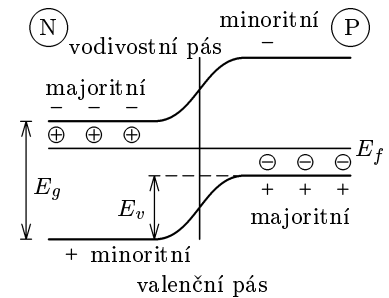
$$I_+ = I_{pp}(0) \exp\left[-\frac{e(V_B - V)}{kT}\right] - I_{pn}(0) .$$

Protože platí vztah pro elektrickou vodivost

$$\sigma = \sigma_n + \sigma_p ,$$

zřejmě platí pro celkový proud

$$I = I_- + I_+ .$$



Obr. 32. Pásová struktura polovodičového přechodu

Ještě je nutné dodat, že  $V$  je kladné, pokud je kladné vnější napětí na polovodiči P. Celkem tedy po sečtení rovnic dostaneme

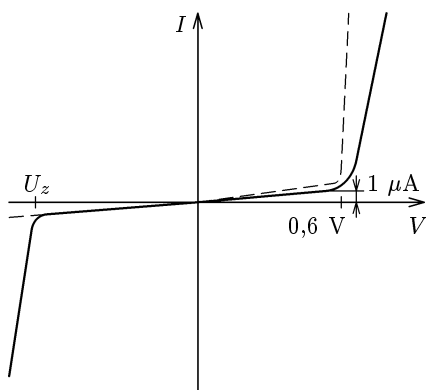
$$I = [I_{np}(0) + I_{pn}(0)] \left[ \exp \left( \frac{eV}{kT} \right) - 1 \right]$$

a po zavedení

$$I_0 = I_{np}(0) + I_{pn}(0)$$

můžeme psát diodovou rovnici ve tvaru

$$I = I_0 \left[ \exp \left( \frac{eV}{kT} \right) - 1 \right] .$$



Obr. 33. Voltampérová charakteristika křemíkové diody

V celém odvození diodové rovnice jsme předpokládali, že elektrický odpor celé součástky je nulový. Toho se v praxi dosáhne tím, že polovodičové vrstvy se dělají tenké. Ukazuje se však, že ačkoli jsme odvodili vztah pro ideální diodu, v reálném případě můžeme diodu modelovat naší ideální diodou a malým odporem. Podívejme se, jak se chová např. křemíková dioda v propustném směru ( $V > 0$ ). V ideálním případě by proud diodou rostl s napětím exponenciálně, díky vnitřnímu odporu vzniká koleno, ve kterém začíná růst proud (viz obr. 33 — čárkovaně je teoretická předpověď pro ideální diodu bez vnitřního odporu a plnou čarou je reálná charakteristika). Pro křemík je napětí, při kterém se charakteristika zlomí, přibližně 0,6 V, pro germanium je toto napětí přibližně 0,3 V.

V závěrném směru ( $V < 0$ ) je vzrůst záporného proudu diodou přibližně lineární. To až do záporného napětí, které se značí  $U_Z$  a nazývá se průrazné či Zenerovo ( $U_Z \gg 1$  V), kdy proud diodou prudce stoupne. Průraz může mít několik příčin. Může jít o tzv. lavinový průraz, kdy vnější pole je větší než pole přechodu a tudíž většina volných nosičů překoná přechod. Navíc strhává ostatní volné nosiče náboje a tím se tvoří jakási lavina volných nosičů — od toho lavinový průraz. Samozřejmě takový průraz znamená pro diodu velmi rychlý konec, protože prudce vzroste proud a tím i ztrátový výkon na diodě, který ji zahřeje a přechod se poškodí. Po průrazu sice dál vede elektrický proud, ovšem v obou směrech, což je jistá nevýhoda.

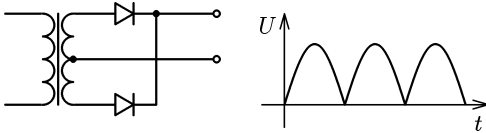
### Aplikace

Speciální konstrukcí lze dosáhnout toho, že dioda se při průrazu nezničí. Potom se jedná o Zenerovy diody. Využívaly se ve stabilizovaných zdrojích napětí, kde byla dioda připojena sériově s ochranným odporem v závěrném směru mezi svorky nestabilizovaného napětí (např. usměrněný a kondenzátorem vyfiltrovaný výstup transformátoru). Na Zenerově diodě potom bylo konstantní Zenerovo napětí dané diody. Dnes se ovšem do zdrojů montují přesnější stabilizátory napětí s využitím operačních zesilovačů.

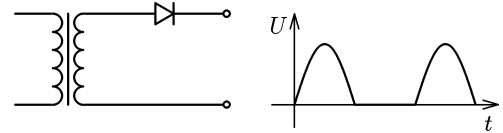
Polovodičový přechod v diodách se používá k usměrňování střídavého napětí na stejnosměrné. Široké využití našly diody také v optoelektronice. Světlo dopadající na polovodičový přechod je pohlceno elektrony, které díky vnitřnímu fotoefektu (elektron je vyražen ze své energetické hladiny fotonem do vodivostního pásu, ale neopustí krystal — zůstane uvnitř) tvoří elektron-děrové páry a tím zvyšují koncentraci minoritních nosičů. V důsledku nerovnováhy na polovodičovém přechodu se zdeformují energetické hladiny a na svorkách se objeví napětí. Tento princip se využívá ve fotodiodách a fotobateriích. Protože polovodiče jsou velmi dobře prozkoumané materiály (křemík je snad vůbec nejdůkladněji prozkoumaná pevná látka), je možné vyrábět fotodiody přesně na míru určitému záření. Protože elektron musí přejít přes zakázaný pás, je rozhodující pro spektrální citlivost fotodiody právě šířka zakázaného pásu. Tu lze regulovat volbou různých materiálů od



citlivosti na gama záření po citlivost na infračervené záření. Nevýhodou však je, že křemík, který je nejlevnějším polovodičem s nejlevnějším zpracováním a možností vysoké integrace, vůbec není pro optoelektroniku vhodný. Proto je snaha najít materiály, jejichž výroba je levná a přitom mají vhodné vlastnosti. Módou jsou solární články jakožto zdroj alternativní energie. Problém je ten, že k výrobě fotobaterie (od fotodiody se liší konstrukcí — musí se dosáhnout co největší účinnosti konverze záření na elektrickou energii) by bylo třeba více energie, než sama dokáže za dobu životnosti vyrobit.



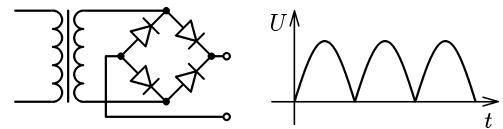
Obr. 34. Dvoucestný usměrňovač



Obr. 35. Jednocestný usměrňovač

Další aplikací pro optoelektroniku jsou svítivé diody (LED) nebo polovodičové lasery. V obou případech se využívá emise světla při rekombinaci elektronu a díry po překonání polovodičového přechodu jedním nosičem. Polovodičové lasery se vyrábějí v rozměrech milimetrů až mikrometrů. Výhodou je vysoká účinnost přeměny elektrické energie na světelnou.

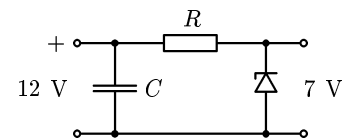
Zajímavostí jsou takzvané Schottkyho diody. V nich je přechod vytvořen na rozhraní kov-polovodič. Mají trochu jiné vlastnosti než běžné polovodičové diody, ovšem jejich velkou předností je přechodové napětí (tedy napětí, při kterém se zlomí v koleně voltampérová charakteristika diody), které je menší než u běžných diod. Využívá se v obvodech STTL, což jsou logické obvody sestavené z bipolárních tranzistorů (tedy tranzistorů, které běžně kolem sebe potkáváme). Pod logickým obvodem si představte černou podlouhlou součástku s velkým množstvím nožiček, která vykonává logické funkce. Běžné obvody TTL (tranzistor-tranzistorová logika) jsou frekvenčně limitované zhruba 10 MHz. Přidáním Schottkyho diod do obvodů dostaneme horní mez frekvencí až 150 MHz.



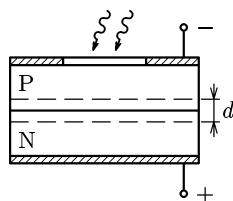
Obr. 36. Graetzův můstek

Na obrázcích je několik jednoduchých obvodů využívajících diod. Jedná se o usměrňovače (obr. 34–36). Mohlo by se zdát divné, proč existuje mnoho druhů stabilizátorů napětí, proč se standardně nepoužívá pouze jeden. Důvod je prostý. Každý stabilizátor má své výhody a nevýhody. Jednocestný usměrňovač (obr. 35) má výhodu v tom, že usměrní napětí s použitím pouze jedné diody. Ovšem jak vidíme v grafu u obrázku, využívá pouze jedné poloviny signálu, druhá se prostě ořízne a účinnost usměrňovače klesne pod polovinu. Naopak dvoucestné usměrňovače využívají více výkonu a k jejich konstrukci je třeba dvou, nebo čtyř diod. Diody na usměrňování velkých proudů jsou drahé, proto je levnější namotat transformátor se dvěma sekundárními vinutími a použít dvoucestný usměrňovač na obr. 34. Naopak pro nízkovýkonové aplikace (např. v laboratorních zdrojích) se s výhodou užívají usměrňovače se zapojením dle obr. 36 — tzv. Graetzův můstek. Není nutné mít speciální transformátor, levnější je koupit čtyři diody.

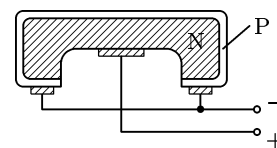
Na obrázcích je několik jednoduchých obvodů využívajících diod. Jedná se o usměrňovače (obr. 34–36). Mohlo by se zdát divné, proč existuje mnoho druhů stabilizátorů napětí, proč se standardně nepoužívá pouze jeden. Důvod je prostý. Každý stabilizátor má své výhody a nevýhody. Jednocestný usměrňovač (obr. 35) má výhodu v tom, že usměrní napětí s použitím pouze jedné diody. Ovšem jak vidíme v grafu u obrázku, využívá pouze jedné poloviny signálu, druhá se prostě ořízne a účinnost usměrňovače klesne pod polovinu. Naopak dvoucestné usměrňovače využívají více výkonu a k jejich konstrukci je třeba dvou, nebo čtyř diod. Diody na usměrňování velkých proudů jsou drahé, proto je levnější namotat transformátor se dvěma sekundárními vinutími a použít dvoucestný usměrňovač na obr. 34. Naopak pro nízkovýkonové aplikace (např. v laboratorních zdrojích) se s výhodou užívají usměrňovače se zapojením dle obr. 36 — tzv. Graetzův můstek. Není nutné mít speciální transformátor, levnější je koupit čtyři diody.



Obr. 37. Stabilizovaný zdroj napětí se Zenerovou diodou



Obr. 38. Fotodioda



Obr. 39. Fotobaterie

Na obr. 37 je zdroj stabilizovaného napětí využívající Zenerovy diody. Pokud napětí na diodě v závěrném směru klesne při odběru proudu ze svorek pod požadovanou hodnotu (Zenerovo napětí),

dioda se zavře a napětí na ní vzroste. Pokud je naopak napětí na diodě větší než Zenerovo, vzroste proud diodou a na diodě klesne napětí (díky odporu zařazenému s diodou v sérii). Tím se opět dioda uzavírá, atd. Takto bychom si mohli představit vytváření rovnováhy (napětí na diodě se za velmi krátkou dobu ustálí), které nastane vždy při změně velikosti odebíraného proudu. Protože napětí na diodě je vždy v rovnováze rovno přibližně Zenerovu napětí, dostáváme stabilizovaný zdroj napětí, které víceméně nezávisí na odebíraném proudu. Dnes samozřejmě existují zdroje ještě více stabilní, kde je řídicím prvkem operační zesilovač.

Na obrázcích 38 a 39 jsou znázorněny konstrukce fotodiody a fotobaterie.

### Úloha S. III ... diodová charakteristika

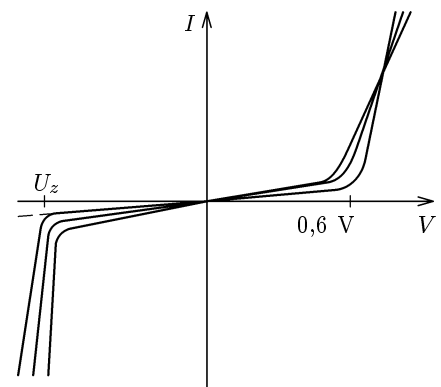
Uvažujme reálnou křemíkovou diodu s přechodovým napětím 0,6 V při pokojové teplotě (fyzici pro jednoduchost považují za pokojovou teplotu 300 K, oproti normální 20 °C = 293 K, protože se s tím lépe počítá a lépe se to pamatuje). Pokuste se z uvedených rovnic (i v minulých dílech seriálu) odhadnout, jak se bude dioda chovat při zvýšení teploty o 10 K, 20 K a 40 K. Není třeba do puntíku počítat, co se přesně stane, jde pouze o kvalitativní odhady. Ti, kdo mají možnost, mohou odhady ověřit měřením — k měření voltampérové charakteristiky je třeba pouze dioda, ochranný odpor (nikdy nezapojujte diodu v propustném směru přímo na napětí!), zdroj napětí, voltmetr a ampérmetr. Odhady by měly být pro přehlednost aspoň schematicky nakreslené v nějakém grafu. Zaměřte se zejména na velikost závěrného proudu a polohu kolena v propustném směru.

Nejprve je třeba si uvědomit, že charakteristiku musíme rozdělit na část, kde platí diodová rovnice (nebo platí přibližně pro reálnou diodu), a na část, kde se charakteristika od předpovědi diodové rovnice zásadně liší díky vlivu, který jsme nezapočetali. Snadno zjistíme, že diodová rovnice dává správnou předpověď mimo průraz diody, tedy pro napětí větší než je Zenerovo. Proto musíme vyšetřovat odděleně charakteristiku pro  $U > U_Z$  a pro okolí průrazu.

V oblasti nad Zenerovým napětím platí pro ideální diodu diodová rovnice. Neideální dioda má ještě navíc přidáný odpor sériově s ideální diodou. To znamená, že změna teploty může mít vliv na velikost odporu a na vlastnosti ideální diody. Zabývejme se nejdříve odporem — ten je ekvivalentní vnitřnímu odporu polovodičových vrstev v diodě. Vrstvy nejsou čisté polovodiče, mají donorové a akceptorové příměsi, proto se budou chovat podle grafu v druhém dílu seriálu. Protože nevíme nic konkrétního o příměsi, nemůžeme jednoznačně říci, jestli se zvýšením teploty se odpor polovodiče zvětší nebo naopak. Navíc v diodě jsou dvě vrstvy s odlišnou příměsí, takže celkový vliv je kombinací jednotlivých změn odporu. Rozumné je předpokládat, že příměsi jsou při pracovní teplotě ionizovány z velké části, takže změna odporu polovodičové vrstvy nebude se změnou teploty nijak drastická — pouze nevíme, jaké bude znaménko této změny.

Zabývejme se ideální diodou. V diodové rovnici vystupují dva členy, které by se mohly měnit v závislosti na teplotě. Jednak je to vlastní termodynamická teplota  $T$ , ta se mění určitě, a pak zbytkový proud  $I_0$ . Ponechme prozatím zbytkový proud beze změny a zabývejme se vlivem explicitního dosazení teploty. Snadno ověříte, že způsobuje pouze lineární transformaci napěťové osy, tzn. při zvýšení teploty se charakteristika pouze „roztáhne“. Tím se posouvá koleno v propustném směru k vyšším napětím a snižuje se závěrný proud. A změny zbytkového proudu? V prvním dílu byl uveden vztah pro vodivost (uvažujme jej pouze pro elektrony)  $\sigma_e = en_e\mu_e = 1/\rho_e$ , kde  $\rho_e$  je měrný odpor vzhledem k elektronům. Velikost zbytkového proudu bude jistě úměrná pohyblivosti a koncentraci nosičů, takže bude úměrný vodivosti. Změna zbytkového proudu je tedy opačná než změna odporu polovodiče a nevíme, jakým směrem se změní. Vliv zbytkového proudu je ten, že při zvýšení proudu se charakteristika roztáhne, tentokrát v proudové ose.

Stanovit posuv Zenerova napětí není jednoduché, protože neznáme všechny jevy spojené s průrazem. Uvolnění elektronů do vodivostního pásu můžeme vytvořením odlišného prostorového ná-



Obr. 40

boje v oblasti přechodu Zenerovo napětí ovlivnit. Převládat bude zřejmě tepelná excitace elektronů do vyšších energetických hladin, což způsobí, že část elektronů s vysokou energií přejde v závěrném směru snadněji. Pokud bude počet takových elektronů velký, tzn. zvýší se dostatečně teplota, mohou způsobit např. lavinový průraz již při nižším napětí, než je Zenerovo napětí při teplotě 300 K. Výsledkem je posuv kolena v závěrném směru směrem k nižším napětím v absolutní hodnotě.

Jevy účastníci se na změně charakteristiky v propustném směru se míchají s různou vahou pro různé typy diod, proto není snadné určit, jak se obecně mohou diody chovat. Z hlediska užití v elektronice je vhodné konstruovat součástky, které se chovají „rozumně“, tzn. převažuje jeden typ deformace charakteristiky. Charakteristika obecné diody může vypadat i podle obrázku 40.

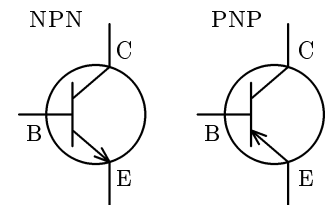
### Tranzistory

V minulém dílu jsme poměrně podrobně rozebrali funkci polovodičové diody. Nyní se budeme zabývat tranzistory — elektronickými prvky, jejichž objevení znamenalo snad největší zvrat v historii elektroniky. Objev tranzistoru se uskutečnil v roce 1948 a zasloužili se o něj Američané J. Bardeen, W. H. Brattain a W. Shockley. Jejich bipolární tranzistor byl vytvořen z velkého krystalu germania a dvou hrotů, které tvořily přechody P-N a N-P (germanium bylo typu N). Tak byl vytvořen elektronický prvek, který zesiloval napětí nebo proud s poměrně vysokou účinností (za objev byla udělena Nobelova cena). Do té doby byly pro zesilování napětí používány elektronky, které musely být navíc žhavené a byly velké a složité pro výrobu. Tranzistor po zavedení do průmyslové výroby výrazně zjednodušil a zlevnil obvody a v současné době překonal elektronky ve všech směrech (elektronky byly ještě dlouho užívány pro zesilování vysokých výkonů). V ěře germania navíc byl omezen teplotní rozsah použitelnosti polovodičových součástek, při teplotě 40°C tranzistory přestaly zesilovat, diody usměrňovat. Dnes používáme krystalický křemík a pro extrémní podmínky, např. do družic, se používají i jiné materiály nebo formy křemíku. Pak se horní mez použitelnosti takových součástek pohybuje až kolem 200°C.

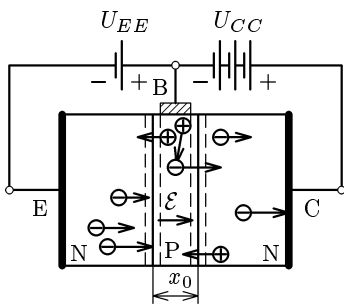
Tranzistory se podle principu funkce dělí do dvou skupin: na unipolární a bipolární. Asi nejnámější jsou bipolární, první tranzistor byl právě tohoto druhu. Unipolární tranzistory jsou takzvané tranzistory řízené polem, kde se řídí procházející proud elektrickým polem (napětím), kdežto proud bipolárním tranzistorem se řídí opět proudem.

### Bipolární tranzistor

Bipolární tranzistor je tvořen třemi vrstvami polovodiče po řadě N-P-N, nebo P-N-P. Podle toho rozpoznáváme tranzistory NPN a PNP. Liší se schematickou značkou (viz obr. 41) a polaritou, ve které se zapojují. Tranzistory NPN se otevírají kladným proudem do báze (polovodič P — prostřední vrstva), kdežto tranzistory PNP se otevírají záporným proudem do báze (polovodič N). Nadále se budeme zabývat tranzistory NPN, protože se používají nejčastěji (jsou levnější). Tranzistory PNP se chovají analogicky — laskavý čtenář si jistě dokáže rozbor jejich funkce provést sám.



Obr. 41



Obr. 42

Uvažujme nejprve zapojení se společnou bází (obr. 42). Na přechodu emitor-báze je v propustném směru připojeno napětí  $U_{EE}$ , mezi bází a kolektorem v závěrném směru napětí  $U_{CC}$ . Z emitoru tedy poměrně snadno elektrony přecházejí do báze. V bázi samozřejmě rekombinují s dírami, které se tvoří u kontaktu s vodičem ke zdroji napětí. Rekombinace není okamžitá. Elektron má svoji hybnost a pravděpodobnost menší než jedna, že se potká za časovou jednotku s dírou. Pokud bychom sledovali opakovaně jeden elektron prošlý přes polovodičový přechod, rekombinoval by vždy v jiném časovém okamžiku (díky náhodnosti setkání s dírou). Časová závislost pravděpodobnosti výskytu nerekombinovaného elektronu v čase

$(t; t + \delta t)$  ( $\delta t$  pevné) je vyjádřena exponenciálně  $p(t) = e^{-t/\tau}$ , kde  $\tau$  je konstanta, kterou lze nazvat rekombinační doba (vyjadřuje čas, za který klesne pravděpodobnost nalezení nerekombinovaného elektronu na  $1/e$ ). Uvažíme-li hybnost elektronu a tím i jeho rychlost, se kterou se pohybuje a je až

do rekombinace konstantní, můžeme psát vztah pro střední počet nerekombinovaných elektronů v závislosti na vzdálenosti od přechodu (počáteční počet pro  $x = 0$  je  $N_{e0}$ )

$$N_e(x) = N_{e0} \exp \left[ -\frac{x}{L_n} \right],$$

kde  $L_n$  je difusní délka pro elektrony, neboť platí  $x = vt$  a  $L_n = v\tau$ , pak stačí dosadit do vztahu pro časovou závislost pravděpodobnosti. My jsme do rovnice nezapočítali skutečnost, že všechny elektrony nemají stejnou velikost počáteční rychlosti a ani stejný směr. Spokojme se s tím, že všechny tyto korekce lze s poměrně velkou přesností zahrnout do konstanty  $L_n$ .

Přes přechod s emitorem proudí do báze velké množství elektronů, v důsledku čehož je jejich koncentrace blízko přechodu větší než u přechodu báze-kolektor. Zvýšení koncentrace má za následek mírné snížení proudu emitoru, ale mnohem významnější je vytvoření urychlujícího pole  $\mathcal{E}$  pro elektrony ve vrstvě báze směrem ke kolektoru.

Tloušťka polovodičové vrstvy báze  $x_0$  je volena tak, aby pokles počtu elektronů při difuzi přes vrstvu báze byl 1% – 0,1%\*). Nerekombinované elektrony jsou navíc urychleny v poli báze polem přechodu báze-kolektor, protože přechod je pólován v závěrném směru vzhledem k majoritním nosičům, což jsou díry. Tímto způsobem se elektrony dostanou do kolektoru a přispívají ke kolektorovému proudu. Podíváme-li se na bilanci, kolik elektronů proteče jednotlivými vývody tranzistoru, zjistíme, že pouze zlomek elektronů teče bází (to jsou elektrony, které tvoří v polovodiči díry rekombinující s elektrony z emitoru) a většina z elektronů z emitoru proteče až do kolektoru.

Každý se jistě podiví, proč tranzistor nepracuje symetricky — tj. po prohození emitoru s kolektorem. Je to způsobeno nesymetrickou konstrukcí. Přechod kolektor-báze je plochou větší než přechod emitor-báze. Navíc emitor je více dotován než kolektor (je v něm více volných nosičů náboje).

Podle popisu funkce tranzistoru v zapojení se společnou bází můžeme psát rovnici pro proud kolektoru

$$I_C = \alpha I_E + I_{C_0},$$

kde  $I_E$  je proud emitoru (řídí zesílení) a  $I_{C_0}$  je zbytkový proud kolektoru odpovídající přibližně závěrnému proudu přechodu báze-kolektor. Velikost koeficientu  $\alpha$  je vždy v intervalu  $(0; 1)$ , proto v tomto zapojení není možné zesilovat proud. Zapojení se společnou bází se ale používá pro zesilování napětí. Zesílení se řídí proudem emitoru, který je vždy větší než proud kolektoru, proto není možné řídit příliš velké výkony.

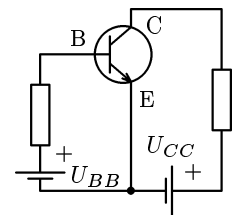
Pro proudové zesílení se tranzistor zapojuje se společným emitorem (obr. 43). Protože musí platit  $I_E = I_B + I_C$ , po dosazení vztahu pro kolektorový proud dostáváme

$$I_E(1 - \alpha) = I_B + I_{C_0}.$$

Sice zapojení zdrojů se liší od zapojení se společnou bází, směr elektrického proudu uvnitř polovodičových vrstev je stejný, proto můžeme psát stejný vztah pro kolektorový proud. Jednoduše opět dosazením do rovnice pro kolektorový proud dostaneme konečný vztah

$$I_C = \beta I_B + I'_{C_0},$$

kde  $\beta = \alpha/(1 - \alpha)$  a zbytkový proud  $I'_{C_0} = I_{C_0}/(1 - \alpha) = (\beta + 1)I_{C_0}$ . Vidíme, že pro  $\alpha > 0,5$  dostáváme kladné proudové zesílení. Nevýhoda je ale zřejmá: čím větší je  $\alpha$ , tím větší je i  $\beta$ , ale i zbytkový proud.



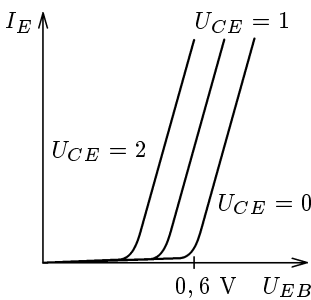
Obr. 43

\*) Zde je vidět, proč nelze tranzistor vyrobit prostým vytvořením dvou PN přechodů. Např. spojením dvou diod katodou k sobě dostaneme kýženou kombinaci, ovšem takový obvod zesilovat nebude. Klademe totiž požadavek na velmi malou tloušťku  $x_0$

V dalším textu se objeví symboly  $U_{CB}$ ,  $U_{BE}$  a  $U_{CE}$ , které postupně označují napětí mezi kolektorem a bází, bází a emitorem, kolektorem a emitorem.

Tím máme osvětlené základní principy funkce bipolárního tranzistoru a nyní se podívejme, jak se chová reálná součástka. Ke zkoumání slouží takzvané charakteristiky. V minulém dílu jsme tento termín již použili pro charakteristiku diody, ta má ale pouze dva vývody, proto na ní můžeme měřit pouze závislost proudu na napětí. V případě součástky s více vývody se mohou zjišťovat závislosti různých proudů na jiných prouděch, napětích, taktéž závislosti napětí na prouděch a napětích. Proto budeme uvažovat obecnou součástku se čtyřmi vývody, která má dva vstupní a dva výstupní. Součástku nazýváme dvojbran. Potom můžeme měřit celkem čtyři veličiny — vstupní a výstupní proud a napětí (proud je značen  $i$ , napětí  $u$ , vstup má index 1 a výstup 2). Mezi těmito veličinami existují převodní vztahy, které by se jednoduše daly znázornit ve čtyřrozměrném grafu. Ten se na papír velmi špatně kreslí (kdo nevěří, ať to zkusí), proto se znázorňují charakteristiky v příslušném dvojrozměrném řezu. To ovšem umožní znázornit pouze závislost dvou veličin a těchto dvojic je šest. Samozřejmě zbylé dvě veličiny jsou konstantní, případně jedna je parametr a v grafu je více křivek odpovídajících různým hodnotám parametru. Valný smysl pro tranzistor mají pouze charakteristiky:

- Vstupní,  $i_1$  v závislosti na  $u_1$ , parametr  $u_2$
- Výstupní,  $i_2$  v závislosti na  $u_2$ , parametr  $i_1$
- Převodní,  $i_2$  v závislosti na  $i_1$
- Převodní,  $u_2$  v závislosti na  $u_1$

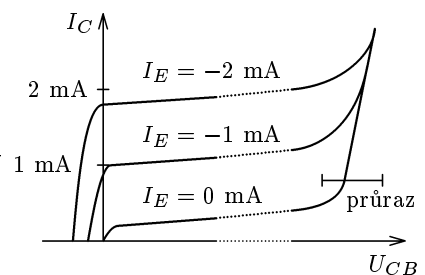


Obr. 44

Tranzistor má tři nožičky, my ale zapojíme společně na dva výstupy dvojbranu buďto bází, nebo emitor. Tak máme výstupy čtyři a tím i dvojbran. Podívejme se nejprve na vstupní charakteristiku (obr. 44 — křemíkový tranzistor). Zde je jedno, ve kterém zapojení je tranzistor, vždy se projeví tzv. Early efekt. Ten spočívá v tom, že na přechodu báze-kolektor se zvyšuje napětí a díky tomu se zvětší fyzická šířka polovodičového přechodu. Elektron difundující přes bází se díky tomu rychleji dostane pod vliv urychlujícího pole přechodu a díky tomu se z báze rychleji odčerpávají elektrony tvořící záporný prostorový náboj v oblasti u přechodu emitor-báze. Již bylo zmíněno, že zvýšená koncentrace v tomto prostoru má za následek zvýšení přechodového napětí,

což je právě princip popisovaného efektu.

Výstupní charakteristiky (obr. 45) mají pro elektronické aplikace podstatnější důsledky. Při zapojení se společnou bází je nutné všimnout si, že charakteristika má (pro každou z křivek) lineární část. To je oblast, kde je možné tranzistor použít — pochopitelně se v elektronice snažíme vyhýbat jakémukoliv nelineárnímu chování prvků v obvodu, protože by způsobovalo obtíže. Navíc tato lineární část není rovnoběžná s napěťovou osou — parametr  $\alpha$  je tedy funkcí napětí  $U_{CB}$ . To je opět důsledek Early efektu. Parametr zesílení  $\alpha$  je navíc, což není z grafu patrné, závislý na proudu emitorem. Tato závislost má své maximum, takže tranzistor se nechová zcela ideálně lineárně, pokud budeme zkoumat závislost výstupního napětí na řídicím proudu. Pokud příliš vzroste proud kolektorem, dojde k průrazu — stejně jako u diody dochází k lavinovému průrazu, lokálnímu přehřátí a nevratnému zničení přechodu (oblast průrazu znázorněna v obrázku 45).



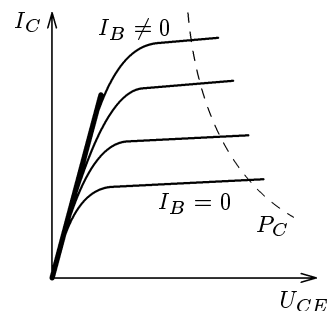
Obr. 45

V zapojení se společným emitorem (obr. 46) si nejprve všimněme čárkované křivky. Ta označuje maximální možný ztrátový výkon tranzistoru. Ten je dán součinem kolektorového proudu a napětí mezi kolektorem a emitorem (tento výkon řídíme proudem báze). Stejně jako v zapojení se společnou bází po překročení tohoto výkonu se prorazí polovodičový přechod a tranzistor můžeme vyhodit. Zvýšit tento výkon je jednoduché. Můžeme buďto zvětšit plochu přechodu, nebo tranzistor chladit. Využívají se pochopitelně obě možnosti. Obecně pokud chceme regulovat větší napětí, je třeba zvětšit plochu přechodu, aby nedošlo k lavinovému průrazu přechodu kolektor-

báze dříve než u přechodu báze-emitor v důsledku ztrátového výkonu přeměněného v teplo. Pro regulaci větších proudů při povolených napětích uvedených v katalogu stačí součástku chladiť.

Zvýrazněná přímka v obr. 46 se nazývá saturační přímka. Využívá se jí ve spínačích, protože poměr spínaného proudu ke spínacímu proudu je největší možný, tudíž řídíme výstupní proud minimálním možným výkonem. Pro spínací účely jsou určeny tzv. spínací tranzistory. Jsou schopné spínat relativně vysoké výkony, fungují ovšem pouze při relativně nízkých frekvencích (řádově kHz).

Existuje mnoho speciálních typů bipolárních tranzistorů, které jsou konstruovány speciálně pro určité účely. Výkonové tranzistory spínají vysoké výkony (poznáte je většinou podle hliníkových chladičů, na kterých jsou přimontovány), vysokofrekvenční tranzistory jsou schopny pracovat při frekvencích v řádu GHz. Díky dobrým vlastnostem křemíku se pro běžné účely tranzistory vyrábějí právě z tohoto polovodiče, protože je možné součástky miniaturizovat a navíc nemají nečinnost germania — své vlastnosti si udržují až do teplot kolem  $60^{\circ}\text{C}$ , takže své moderní rádio můžete poslouchat i na pláži, zatímco stará rádia s germaniovými prvky pomalu vypovídají službu. Velké uplatnění našly tranzistory spolu s dobrými vlastnostmi křemíku v mikroelektronice. Součástky se totiž připravují tzv. litografickou metodou, kdy se postupně na substrát z křemíku (který se případně dopuje) nanášejí další vrstvy a takto po vrstvách se dá vyrobit např. mikroprocesor, CCD prvek, atd. Tloušťka spojů se pohybuje v řádu mikrometrů, což s jiným materiálem není možné dosáhnout (z křemíku se totiž dá vyrobit poměrně velký monokrystal s pravidelnou mřížkou — dnes se běžně používají křemíkové destičky o průměru 300 mm).



Obr. 46

### Úloha S.IV ... Tranzistor PNP

Proveďte diskusi funkce PNP tranzistoru. Porovnejte s funkcí NPN tranzistoru kvalitativně, ale i kvantitativně. Díra má stejný náboj jako elektron, má však menší pohyblivost. Co se stane, když posvítíme dovnitř tranzistoru (PNP i NPN)?

První část úlohy je snadná. Protože emitor je dotován akceptorovou příměsí, k vodivosti přispívají pouze díry. Vidíme, že při zapojení se společnou bází se při tranzistorovém efektu uplatňují v tranzistoru PNP díry, narozdíl od elektronů v tranzistoru NPN. Princip je stejný, jenom, jak je v zadání, díry mají menší pohyblivost než elektrony, proto při stejných rozměrech vrstev a stejných koncentracích příměsí bude pro tranzistor PNP koeficient  $\alpha$  menší než pro tranzistor NPN. Zde je opět vidět, proč se tranzistory PNP příliš nepoužívají — mají horší parametry.

Pro případ, kdy posvítíme dovnitř tranzistoru, provedeme podobný rozbor jako při diskusi diodového jevu při změnách teploty. Zde ovšem změnu teploty polovodiče nebudeme uvažovat — sice při vysokých intenzitách se materiál ohřeje (přeměna energie světla na energii elektronů a děr není stoprocentní), ale jevy, o které se zajímáme, se začnou projevovat i při nepatrných osvětleních. Diskutujme změny charakteristik jednotlivých „diod“ v tranzistoru. Osvětlením změníme koncentraci volných nosičů náboje, stejně jako při zvýšení teploty, ovšem nezvýšíme (významný) rozptyl nosičů v látce, takže jednoznačně můžeme říci, že se zvýší vodivost polovodičů. Důsledkem je lepší přiblížení se k ideální diodě. Narozdíl od teplotních změn neměníme v diodové rovnici člen v exponenciále, z tohoto hlediska se diodový jev nezmění. Změní se ovšem zbytkový proud  $I_0$  k vyšším hodnotám, obecně tedy proud diodami roste v propustném i v závěrném směru a to i s přihlédnutím k tomu, že se zmenší vnitřní odpor polovodičových vrstev. Abychom konečně rozhodli, jak se změní funkce tranzistoru, musíme určit změnu parametru (koeficientu)  $\alpha$ , jímž se řídí proudové i napětové zesílení. Jeho velikost závisí na počtu elektronů, které se zachytí v bázi, a to přibližně nepřímo úměrně (viz seriál). Při osvětlení báze se v této tenké vrstvě vytvoří majoritní nosiče, které rozptylují nalétávající nosiče z emitoru a také s nimi rekombinují. Sice nalétává více částic, ovšem v bázi se nosiče generují z celého objemu, negenerují se pouze u kontaktu s vodičem báze. To má za následek účinnější rekombinaci a tím zmenšení parametru  $\alpha$ . Tranzistorový jev postupně vymizí.

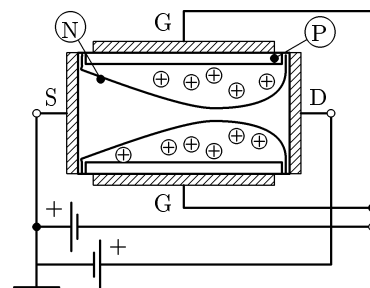
Pro úplnou diskusi musíme zmínit ještě vliv velikosti zbytkového proudu tranzistorem na osvětlení. Generací nových volných nosičů zvětšíme zbytkový i propustný proud u obou diod a proto se celkový zbytkový proud tranzistorem zvětší. Navíc se každý PN přechod začne chovat jako fotodioda a mezi kolektorem a emitorem se nepatrně změní napětí a navíc se opět výrazně zvýší zbytkový proud.

Technologicky náročný, ovšem z praktického hlediska velmi užitečný, je tranzistor s „okénkem“, kterým se osvětluje přechod kolektor-báze, zatímco přechod emitor-báze zůstane neosvětlený. Osvětlený přechod se chová jako fotodioda a celá součástka potom jako fotodioda spojená s tranzistorem, takže není třeba pro velmi citlivý detektor používat dvě, ale pouze jednu součástku.

### Unipolární tranzistory

Bipolární tranzistory se nazývají bipolární, protože jejich funkce je založena na proudu volných nosičů náboje obou polarit. Unipolární tranzistory fungují na jiném principu. Ale proč se vlastně máme zabývat jiným typem tranzistorů, když bipolární zesilují proud i napětí a lze je vyrobit tak, aby zesilovaly i velké proudy či napětí? Vysvětlení je jednoduché. Jsou totiž řízeny bázovým proudem nebo emitorovým proudem. A každý si jistě domyslí, že tento proud není zanedbatelný. Chceme-li spínat proudy větší než 1 A, musíme je spínat bázovým proudem  $I/\beta$  (v zapojení se společným emitorem). Není problém vhodně volit parametr  $\alpha$  tak, aby proudové zesílení bylo dostatečné a nemuseli jsme do báze pouštět příliš velký proud, ovšem, jak bylo nastíněno v minulém dílu, zároveň se zvětšováním parametru  $\beta$  vzrůstá zbytkový kolektorový proud. Pokud konstruujeme nepřilíš složité obvody, nemusíme se těmito problémy vůbec zabývat, ale uvažme, jak by vypadal velmi jednoduchý procesor, který umí provádět základní aritmetické operace a má malou paměť. V takovém obvodu by bylo několik tisíc tranzistorů. Budeme-li spínat velkými proudy, pak klopný obvod, jakožto nejjednodušší prvek v paměti\*), bude spotřebovávat spínací proud pro oba tranzistory, řekněme 1 mA. Vynásobíme tento proud počtem tranzistorů a hned vidíme, že pouze pro uchování dat potřebujeme proud řádu ampérů. Zmenšíme-li potřebný spínací proud, vzroste zbytkový proud opět do řádů miliampérů a budeme řešit obdobný problém. Proto při vzniku prvních složitějších obvodů se stovkami tranzistorů bylo třeba použít zesilovací součástku, která by se spínala polem a ne proudem. Takovou podmínku splňují tranzistory FET (Field Effect Transistor), které lze integrovat s velkou hustotou na jeden krystal křemíku, aniž by byla potřeba příliš vysoký proud pro jejich napájení. Teplo vzniklé ztrátovými výkony na PN přechodech je díky malým proudům v obvodu malé, proto nevznikají problémy s přehříváním substrátu (křemíkového krystalu). Přehřívání by byl totiž velký problém u vysoce integrovaných bipolárních tranzistorů, pokud bychom je dokázali napájet vysokými proudy. Navíc řídicí napětí FET tranzistorů se blíží 0,7 V uvnitř mikroprocesorů (pod tuto hranici lze velmi těžko jít, protože přechodové napětí u křemíkového PN přechodu je vždy 0,6 V a 0,1 V se počítá pro šum), takže ztrátový výkon přeměněný na teplo je skutečně minimalizovaný.

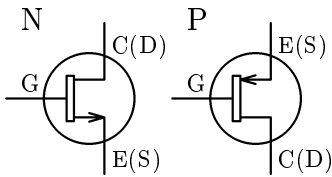
Podívejme se nyní na funkci unipolárních tranzistorů. Jako historicky první vznikl tranzistor JFET (Junction FET), proto si funkci vysvětlíme na něm. Tranzistor je tvořen křemíkovým válečkem, který je dopován jako N typ. Po obvodu válečku je vrstva křemíku dopovaného jako P typ. Podstavy a plášť jsou pokovené a tvoří tři vývody označované jako source (S) — podstava, drain (D) — druhá podstava, gate (G) — plášť. Jak názvy napovídají, na vývod S se připojuje záporný pól zdroje, z něj vtékají do objemu polovodiče elektrony a z vývodu D připojeného na kladný pól zdroje jsou odčerpávány. Tranzistor je řízen napětím na plášti válečku (G). Zapojme tranzistor podle obr. 47. Pole mezi S-G je v závěrném směru, elektrony z elektrody S nemohou proudit do řídicí elektrody (G), ani díry v opačném směru. Toto pole má za následek rozšíření přechodu a vytvoření



Obr. 47

\*) Dva tranzistory symetricky zapojené tak, že každý spíná svým kolektorovým proudem druhý tranzistor a tím se drží nastavená logická jednička. Pokud se přeruší zvenku dodávka proudu a poté se obnoví, nastaví se logická nula — bázový proudy tranzistorů jsou nulové.

prostorového náboje v objemu válečku, jak je znázorněno v obrázku. Pole roste přibližně lineárně směrem k elektrodě D, protože v tomto směru má spád elektrické pole mezi elektrodami S a D. Přechod má proto tendenci rozšířit se u elektrody D. V polovodiči se tedy vytvoří oblast vázaného náboje, který nevede proud (jde o atomy příměsí). Protože téměř veškeré příměsové elektrony jsou vázány příměsovými děrami z polovodiče na elektrodě G, oblast s kladným vázaným nábojem nemůže vést proud (leđa díky vlastní vodivosti použitého polovodiče, ovšem, jak jsme si ukázali na začátku seriálu, ta je velmi malá díky velké šířce zakázaného pásu energií). Poloměr polovodičového válečku se volí takový, aby byl větší než šířka PN přechodu, ale aby s touto šířkou byl srovnatelný. Pokud mezi S a G elektrodami bude dostatečně velké napětí, kanálek vedoucí proud ve směru osy válečku se úplně uzavře (v jednom místě se protější části přechodu spojí) a proud přestane tranzistorem protékat úplně.

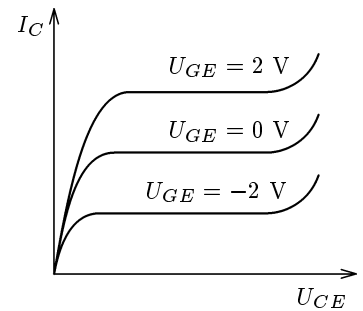


Obr. 48

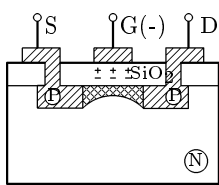
Vysvětlili jsme funkci JFET tranzistoru s kanálem typu N. Samozřejmě existují tranzistory JFET s kanálem typu P, liší se spínacím napětím. Zatímco u N typu jsme velikost proudu mezi S a G snižovali záporným napětím mezi G a S, u P typu musíme přechod mezi kanálem a řídicí elektrodou pólovat obráceně — na řídicí elektrodě je vzhledem k elektrodě S kladné napětí. Schematické značky jsou na obr. 48.

Podívejme se na charakteristiky JFET tranzistorů. Nejprve je nutné upozornit, že elektrody se značí jako u bipolárních tranzistorů E (odpovídá S) a C (odpovídá D). Pouze řídicí elektroda je stále G. V charakteristikách se toto značení používá téměř výhradně, proto i v seriálu použijeme toto značení.

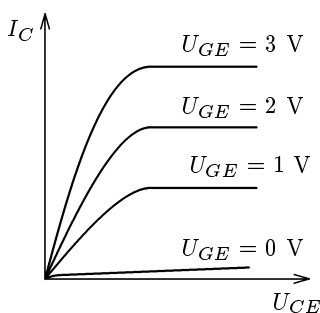
Necháme-li napětí na řídicí elektrodě nulové, bude celý kanál propustný. Při zvyšování napětí  $U_{CE}$  bude růst proud  $I_C$  až do momentu, kdy se proud nasatí a nebude dále s napětím růst. To souvisí s tím, že v polovodiči se nosiče náboje pohybují difusně, tj. vždy jsou elektrickým polem nepatrně urychleny a svou rychlost ztrácí při srážce s jinou částicí. Po nasycení proudu ovšem pole urychlující volné nosiče náboje nepůsobí po příliš dlouhou dobu, protože střední volná dráha nosičů náboje je malá. Až po překročení jisté hranice opět proud s napětím vzrůstá. Charakteristika je graficky znázorněna na obr. 49, kde je navíc jako parametr napětí na řídicí elektrodě  $U_{GE}$ . Jak je vidět, proud tranzistorem se s růstem hodnoty řídicího napětí zmenšuje, jak se uzavírá kanálek vedoucí proud. Tato charakteristika je téměř shodná s charakteristikou elektronky, kde nahradíme katodu elektrodou S, anodu elektrodou D a mřížku elektrodou G.



Obr. 49



Obr. 50



Obr. 51

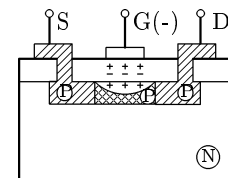
Pro vysokou integraci je mnohem důležitější o něco pozdější objev tranzistoru MOSFET. Ten jde připravit litografickou metodou a navíc do hradla (G) neteče žádný závěrný proud jako u JFET tranzistorů. Hradlo (řídicí elektroda) je izolováno vrstvou  $SiO_2$ , což je vlastně křemen — typický představitel izolantů (viz obr. 50). Díky tomu je vstupní odpor téměř nekonečný — reálně  $10^{12} \Omega$ . Princip tranzistoru je jednoduchý. Bez napětí na hradle jsou mezi elektrodami S a D dvě diody — jedna v závěrném směru. Tranzistorem může téct pouze nenulový závěrný proud. Po přivedení záporného napětí na hradlo se ve vrstvě  $SiO_2$  vytvoří vázané náboje — záporný náboj směřuje do substrátu typu N. V substrátu se mezi elektrodami S a D vytvoří kanálek vázaného kladného náboje. Tento kanálek může vést pouze díry, protože elektrony jsou odvedeny dále do substrátu, a jelikož majoritní nosiče náboje v polovodiči typu P (elektrody S a D) jsou díry, teče vytvořeným kanálem elektrický proud — tranzistor je otevřen. Reálná výstupní charakteristika tranzistoru MOSFET s kanálem typu P je na obr. 51. Samozřejmě substrát může být typu P, pak hovoříme o tranzistoru MOSFET s kanálem typu N.



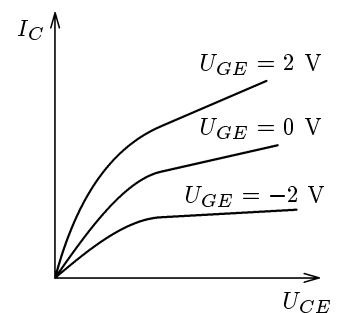
Malým vylepšením je vytvoření takzvaného technologického kanálu. Mezi elektrodami S a D se vytvoří z polovodiče opačného typu než je substrát kanál, takže při nulovém napětí na hradle tranzistor vede proud (viz obr. 52). Přiložením buďto kladného, nebo záporného náboje na hradlo se v technologickém kanálu vytvoří záporný, nebo kladný indukovaný náboj. Máme-li tranzistor s technologickým kanálem typu P, pak záporné napětí na hradle zvyšuje vodivost (polovodič kanálu je méně dopován než elektrody, proto přechod mezi elektrodami a kanálem částečně izoluje proud). Naopak kladné napětí proud tranzistorem snižuje, protože se v kanálu vytváří záporný prostorový náboj a díry z elektrod nejsou vedeny. Charakteristika tranzistoru je na obr. 53. Je nutné si dát pozor na znaménka, protože při  $U_{GE} > 0$  je na hradle G záporný náboj. Podle typu kanálu a potažmo i substrátu rozlišujeme MOSFET tranzistory s technologickým kanálem typu P nebo N.

Pro lepší dynamické vlastnosti se tranzistory MOSFET vyrábějí s velmi tenkou izolační vrstvou  $\text{SiO}_2$ . To má za následek, že po přiložení napětí i kolem desítek voltů se izolační vrstva prorazí. Proto je nutné při práci s prvky obsahujícími tranzistory MOSFET dbát pravidel pro bezpečné zacházení se součástkami, neboť k jejich úplnému zničení stačí statická elektřina — ani nemusí přeskočit jiskra. Až budete ve svém PC vyměňovat procesor nebo paměť, pracujte na kovové uzemněné desce nebo na antistatickém pytlíku, oblečení si raději vezměte bavlněné a před každým kontaktem se součástkou se uzemněte dotknutím se kostry počítače, vodovodní trubky, ...

Na závěr malá zajímavost z technologie polovodičových pamětí. Samozřejmě lidé se snaží vyvinout paměťové médium s co největší kapacitou, aby bylo co nejrychlejší a uchovaná data byla trvanlivá, atd. V počítači najdeme několik typů pamětí: RAM — může se do ní zapisovat, je nutné ji napájet (je konstruována na bázi tranzistorů), ROM — do ní se nemůže zapisovat, je rychlá a po přerušení napájení se data neztratí, CD ROM, pevné disky, pásky, atd. Posledně jmenovaná média nejsou tak rychlá jako operační paměti (RAM), ale nemusí se jim pro uchování dat dodávat elektrická energie. Převrat znamenala paměť EPROM (Erasable Read Only Memory), která je založena na bázi MOSFET tranzistorů, ovšem v izolační vrstvě  $\text{SiO}_2$  je ještě tenká vrstvička hliníku. Při zápisu do paměti se užije napětí na hradle zhruba 25 V, izolační vrstva se lavinově prorazí a na hliníkové vrstvě se vytvoří stálý náboj. Protože průraz izolaci nezničí, náboj se na hliníkové vrstvě uchová a vytváří tak vodivý kanál v substrátu. Mazat se paměť dá elektromagnetickým zářením — UV záření má pro tyto účely dostatečnou energii. Paměti EPROM mají proto malé okénko, kterým se při mazání ozařují. Je zřejmé, že do paměti se dá zapisovat a při napětích řádu voltů se z ní dá i číst a pokud do ní chceme uložit nová data, musíme ji celou přemazat. Přístupová doba se pohybuje kolem 200 ns \*), takže pro použití jako operační paměť je příliš pomalá. Mnohem lepší je paměť EEPROM (nebo  $\text{E}^2\text{PROM}$ ) nazývaná Flash EPROM, tu je možné mazat opačně pólovaným napětím než při zápisu a lze mazat jednotlivé buňky. Její přístupová doba je zhruba 90 ns, v dnešní době běžně používané RAM mají tuto dobu kolem 50 ns, což je poloviční doba. Stále tedy nemáme vhodnou a rychlou operační paměť, která nevyžaduje stálé napájení proudem, ale technologie EEPROM se využívá na paměťových kartách do přenosných počítačů jako náhrady za pevný disk, kde není žádoucí, aby motor disku spotřebovával energii z baterií. Uplatnění našly paměti EEPROM také pro distribuci BIOSu †). Pokud do počítače koupíte nové zařízení, které starý BIOS neumí ovládat, jednoduše z diskety zapíšete ovladač do této paměti. Dříve se BIOS dával do paměti ROM, protože data se



Obr. 52



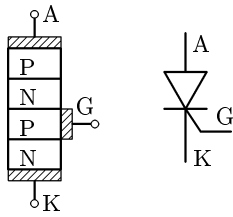
Obr. 53

\*) To je doba, která uplyne od požadavku o data k jejich objevení se na výstupu. Při taktovací frekvenci procesoru 200 MHz představuje 200 ns 40 taktů, což je velmi mnoho.

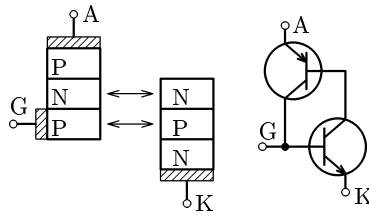
†) Program, který se po spuštění počítače zavede jako vůbec první. Jsou v něm uloženy funkce pro ovládání všech zařízení počítače — po spuštění vlastně procesor ani neví, že nějaká zařízení má, natož aby věděl, jak se s nimi má dorozumět

musí zachovávat během doby, kdy je počítač bez proudu. To způsobovalo komplikace při koupi nového zařízení do starého počítače, někdy dokonce řešitelné pouze koupí nového počítače.

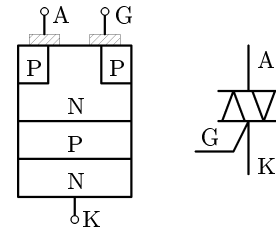
*Tyristor, diak, triak*



Obr. 54



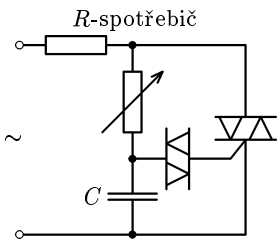
Obr. 55



Obr. 56

Aby toho nebylo dost, oproti tranzistoru se třemi vrstvami polovodiče přidáme ještě čtvrtou. Tím vytvoříme jednu ze součástí v názvu kapitoly. Asi nejjednodušší je princip tyristoru (obr. 54). Můžeme si jej představit jako dva tranzistory PNP a NPN (obr. 55) spojené tak, že po přivedení napětí na hradlo (G) se sepnou a od anody ke katodě teče proud. Tyristor vede i po odejmutí napětí na hradle do té doby, dokud teče proud anodou. Po přerušení a opětovném obnovení napětí mezi anodou a katodou se tyristor rozepne — nevede proud do doby, kdy se sepne hradlo.

Tyristoru se užívá k bezztrátové regulaci výkonu střídavého napětí. Tyristor je zapojen přímo do řízeného obvodu a se zpožděním oproti fázi sítě se spíná hradlo. Díky tomu vždy při vzrůstu napětí část výkonu nesepneme, zbytek po sepnutí tyristoru jde do spotřebiče. Ovšem do střídavých obvodů musíme dát tyristory dva, abychom (díky polaritě) dokázali využít celý výkon. Pro zjednodušení se vyrábějí do nízkoproudých obvodů triaky, které jsou vlastně jenom zdvojenými tyristory (viz obr. 56). Pak takový regulační obvod může vypadat dle obr. 57, kde potenciometrem řídíme parametry RC obvodu a tím i zpoždění spínacího pulsu do triaku. Záhadná součástka, jejíž značku ještě neznáme, je diak, který si můžeme představit jako tyristor bez vyvedené elektrody hradla. Ten po dosažení určitého napětí okamžitě sepne a po poklesu proudu opět rozepne. V obvodu je zařazen, aby spínací hrana do hradla triaku byla ostrá, RC obvod spíná velmi zvolna.



Obr. 57

### Úloha S . V ... JFET tranzistor

Uvažujte tranzistor JFET vyrobený z polovodiče typu N ve tvaru kvádru o hranách  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Na dvou protilehlých stěnách jsou vývody S a D, na jiných dvou protilehlých je z polovodiče typu P vývod G (obě stěny jsou vodivě propojeny na jeden vývod). Předpokládejme, že šířka přechodu je dána vztahem  $d = d_0 + \lambda U'$ , kde  $U'$  je závěrné napětí. Předpokládejme navíc, že proud může procházet pouze oblastí polovodiče N mimo přechod. Proud tekoucí polovodičem se stanoví ze vztahu  $I = \frac{S}{l} \sigma U$ , kde  $U$  je napětí mezi svorkami na polovodiči s vodivostí  $\sigma$ , jejichž vzdálenost je  $l$  a proud prochází kolmo plochou  $S$ . Z tohoto jednoduchého modelu se pokuste stanovit závislost proudu tranzistorem na napětí mezi svorkami S a D, jako parametr uvažujte napětí na svorce G. Úlohu si ještě můžete zpestřit porovnáním výsledku s charakteristikou válcového tranzistoru JFET, kde je polovodič P po celém plášti válce.

Rozměry kvádru nechť jsou  $a \times b \times c$ . Na stěnách o rozměrech  $a \times b$  jsou kontakty S a D, na stěnách o rozměrech  $a \times c$  jsou kontakty G. Mezi kontakty S (-) a D (+) je elektrické napětí  $U$ . Mezi S a G je v závěrném směru napětí  $U_Z$ , které vytváří přechod o šířce úměrné závěrnému napětí. Je zřejmé, že právě u vývodu S se vytvoří nejširší přechod, proto budeme počítat, že právě tato šířka přechodu limituje proud procházející tranzistorem. Dosadíme do vztahu pro proud polovodičem

$$I = \frac{S}{l} \sigma U$$

za  $S = b - 2d = b - 2(d_0 + \lambda U_Z)$  a  $l = c$ . Potom dostaneme vztah

$$I = \frac{b - 2(d_0 + \lambda U_Z)}{c} \sigma U .$$

Vidíme, že proud závisí lineárně na napětí na svorkách. To je dost odlišné od charakteristik ze seriálu, nicméně jako přibližné řešení to bohatě stačí. Pro zcela přesné řešení je třeba použít integrace, následující řešení je určeno těm, kteří umí používat integrály (někteří takoví seriál řešili). Nejdříve upravíme vztah pro proud polovodičem

$$I = \frac{S}{dl} \sigma dU$$

a pro odpor platí

$$dR = \frac{dU}{I} = \frac{dl}{\sigma S}.$$

Samozřejmě závěrné napětí není stejné po celé délce tranzistoru, proto musíme psát

$$S(x) = a [b - 2d(x)] = ab - 2ad_0 - 2a\lambda U_Z + 2a\lambda \frac{l}{c} U$$

a nyní snadno dosadíme do integrálu pro odpor tranzistoru

$$R = \int_0^c dR$$

za  $dR$  ze vztahu výše. Po provedení integrace a vyjádření  $I = \frac{U}{R}$  obdržíme

$$I = a\sigma U \left[ \ln \frac{b - 2d_0 - 2\lambda U_Z + 2\lambda U}{b - 2d_0 - 2\lambda U_Z} \right]^{-1}.$$

Taková charakteristika je skutečně podobná reálné charakteristice JFET tranzistoru.

Trochu odlišné výsledky dostaneme při uvážení tranzistoru jako válečku. Ve výpočtu je odlišnost v tom, že neplatí  $S = a(b - 2d)$ , ale  $S = \pi(r - d)^2$ , pokud poloměr válečku je právě  $r$ .

### *Polovodiče v optoelektronice*

Doposud byla v seriálu řeč převážně o elektronických aplikacích polovodičů. Není divu — jedná se o velmi populární aplikaci — stále slyšíme oslavné písně na nové „supertechnologie“ z oblasti polovodičové elektroniky, hovoří se o megahertzích, mikrometrech, atp. To je ovšem pouze o křemíku. Druhou, taktéž důležitou aplikací je optoelektronika. Polovodiče mají unikátní vlastnost — mají zakázaný pás se šířkou odpovídající energii optického záření. Proto jsou vhodné k jeho detekci. Viditelné záření se pomocí polovodičů detekuje již mnoho let, výsledkem je CCD technologie — na destičce polovodiče jsou vedle sebe detektory o rozměru mikrometrů, takže např. digitální fotoaparáty jsou dnes schopné pracovat se třemi miliony bodů na jedné destičce polovodiče. V současnosti se výzkum detektorů záření soustřeďuje především na oblast infračervenou, např. pro noční vidění. Polovodiče pro detekci IČ záření nemohou být stejné jako polovodiče používané v CCD technologiích, je třeba mít materiál s menší šířkou zakázaného pásu. Dnes se pracuje s polovodiči III-V resp. II-VI (v elementární buňce krystalu je jeden atom trojmocný a jeden pětimocný, např. GaAs, resp. dvoj a šestimocný, např. CdTe). Krystalová mřížka těchto materiálů není příliš kvalitní, má mnoho poruch a nemá vhodnou strukturu (křemík a germanium mají mřížku stejnou jako diamant, tudíž velmi pevnou), proto není možné z nich vyrábět prvky s vysokou integrací. Navíc v polovodiči pro detekci IČ záření elektrony přecházejí při pokojové teplotě přes zakázaný pás již díky tepelné aktivaci, takže detektor je nutné chladit až na teplotu kapalného dusíku (bod varu dusíku je 63 K).

Detekce světla pochopitelně není jedinou oblastí výzkumu polovodičů v optoelektronice, intenzivně se bádá nad solárními články, aby se zvýšila jejich účinnost, vyvíjejí se prvky pro optické počítače a pro optické komunikace. V tomto dílu seriálu budou zmíněny některé důležité vlastnosti polovodičů ve vztahu k optickému záření. Celá problematika je dosti složitá, proto se omezíme pouze na povrchní diskusi různých jevů a nebudeme se zabývat detaily.

### Optická absorpce

Valenční elektrony přecházejí přes zakázaný pás pouze pokud je absorbován foton. Musí platit zákon zachování energie, proto foton musí mít energii  $\hbar\omega$ , kde  $\omega$  je kruhová frekvence  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ , větší nebo rovnu šířce zakázaného pásu. Ve slabých polích je absorpce lineární, tzn. množství pohlcených fotonů je úměrné intenzitě dopadajícího světla. V silných polích ale dojde ke změně. Elektrony excitované přes zakázaný pás obsazují stavy na dně pásu vodivostního. Zde musíme připomenout něco z prvního dílu seriálu. V polovodiči se sice vytvářejí pásy povolených energií, ovšem v pásech jsou jednotlivé hladiny kvazispojité, tzn. je jich konečný počet. Protože tento počet je velký, běžně se neuvažuje Pauliho vylučovací princip, který má za následek zaplňování hladin, ale v silných elektrických nebo optických polích je obsazování hladin na dně vodivostního nezanedbatelné, takže pro nové elektrony je stále obtížnější nějaký volný stav najít. Tím dochází k saturaci absorpce, tzn. absorpce silně závisí na intenzitě dopadajícího světla tak, že s rostoucí intenzitou klesá. Saturace absorpce se v silných polích projevuje u mnoha látek, v polovodičích má význam pro polovodičovou laserovou techniku a pro optické komunikace obecně, pokud se snažíme zmenšovat polovodičové aktivní prvky (všelijaké vysílače, přijímače, přepínače).

### Nelineární optické jevy

Optika, se kterou se člověk běžně setkává, je lineární. To znamená, že látky, se kterými optické záření interaguje, se chovají „normálně“. Mají index lomu nezávislý na intenzitě světla, atd. Nelineární jevy, kdy parametry materiálu jsou závislé na intenzitě dopadajícího světla, se začínají projevovat až v silných laserových polích, proto není možné setkat se s nimi v běžném životě. Pro fyziku však mají velký význam.

Jednou z významných nelinearit je nelinearita prvního řádu, která je zodpovědná za generování vlny druhé harmonické od vlny dopadající. Posvítíme-li na krystal zářením o frekvenci  $\omega$ , z krystalu vystupují svazky o frekvenci  $\omega$  (původní) a  $2\omega$  (harmonická). Této vlastnosti se využívá ke generování záření o vysoké energii v modré a UV oblasti, protože sestavit modrý laser je velmi obtížné nejenom z hlediska vhodných materiálů, ale i kvůli malé účinnosti, která principiálně nemůže překročit určitou hranici. Mnohem výhodnější je použít červený nebo IČ laser ke generování primárního svazku a v nelineárním krystalu se generuje modrý nebo UV svazek.

Z hlediska polovodičů má nelinearita prvního řádu zanedbatelný význam, protože pro generování druhé harmonické se běžně používají dielektrické krystaly (izolanty). Zcela fundamentální význam má ale nelinearita druhého řádu. Jednak vede ke generování třetí harmonické, mnohem významnější je ovšem samoovlivňování indexu lomu. Index lomu materiálu je úměrný intenzitě dopadajícího záření, tudíž laserový svazek si sám moduluje svou dráhu. Důsledkem je deformace vlnoplochy svazku a následně může dojít k samofokusaci nebo samodefokusaci. V původně homogenním materiálu se díky přítomnosti elektromagnetického pole vytvoří čočka, která se chová buďto jako spojná, nebo rozptylná (intenzita pole v laserovém svazku není homogenní, ale největší je uprostřed a směrem ke kraji klesá, stejný profil tudíž bude mít i indukovaný index lomu tvořící čočku). V důsledku toho se svazek fokusuje nebo defokusuje.

Zajímavější je ovšem interakce dvou svazků. V objemu polovodiče spolu dva svazky interferují, vytvoří se interferenční proužky a v místech, kde je intenzita výsledného pole největší, se moduluje index lomu. Tak vznikne difrakční mřížka. Pokud přidáme ještě třetí, podstatně méně intenzivní svazek, bude se na mřížce ohýbat a budeme pozorovat difrakční obrazec, jehož kontrast je úměrný kvalitě mřížky a tedy i velikosti nelinearity. Při užití všech tří svazků o stejné frekvenci dojde k takzvané fázové konjugaci; málo intenzivní svazek se odrazí zpět na dráhu, po které přiletěl, s obrácenou fází, takže de facto dojde u tohoto svazku k inverzi času. Tak sestojíme jakési zrcadlo, jehož odrazivost může být dokonce větší než 1. Nahradíme laserové svazky optickými pulsy o délce trvání maximálně desetiny pikosekundy. Je zřejmé, že za nelineárními jevy stojí pohyb elektronů a děr s nenulovou hmotností a tudíž i setrvačností v polovodiči, takže nelinearity nekopírují přesně v čase optické pulsy. Zvláště důležité je sledovat, jak nelinearity „dohasínají“ v čase. Dva pulsy nejprve vygenerují v polovodiči mřížku a po nějakém čase na polovodič dopadne puls, který se na mřížce ohýbá. Ze závislosti účinnosti difrakce na zpoždění posledního, sondovacího pulsu, můžeme sledovat, jak rychle nelinearita „dohasíná“, odborně řečeno relaxuje. Kombinací několika měření

můžeme říci, jak vypadá rozptyl elektronů na nečistotách, na fononech, atd., je možné velmi podrobně studovat dynamické procesy v polovodiči na úrovni částic a kvazičástic.

### Excitony

Až doposud by čtenář mohl nabýt dojmu, že v polovodičové technice není co řešit. Máme elektrony, díry, fonony (tepelné kmity krystalové mříže), takže všechno se dá krásně popsat. Trochu problémy dělají nelineární jevy ať už modulace indexu lomu, nebo saturace absorpce. Nepříjemnosti nastanou, když si uvědomíme existenci coulombické interakce. Díry jsou kladně nabitě, elektrony záporně. Zcela logicky se musí přitahovat. To právě přináší velké problémy, ale naopak i hezké jevy. Vzpomeňme si na atom vodíku — ten má také kladně nabitě jádro a záporně nabitý elektron. S dírou a elektronem je to úplně stejné, jenom s tím rozdílem, že „jádro“ má menší hmotnost. To ale nevadí po přechodu do těžišťové souřadné soustavy (počátek souřadnic je v těžišti mezi elektronem a dírou), řešení je stejné jako u atomu vodíku. Dostaneme tedy základní 1s stav se zápornou vazebnou energií (tedy pod vodivostním pásem) a pak následují 2s, 2p, ... stavy. Všechny jsou pod dnem vodivostního pásu, zatímco dno odpovídá ionizaci excitonu, tedy odtržení elektronu od díry. Hladiny excitonů se projevují v absorpčním spektru — záření odpovídající energii nějaké hladiny excitonu je silně absorbováno a vytváří se tak spektrální čáry podobně jako u atomu vodíku či jiných plynů. V absorpčním spektru směrem k vyšším energiím fotonů za sérií několika čar následuje spojitý pás absorpce odpovídající mezipásovým přechodům, tedy přechodu přímo do ionizovaného stavu excitonu.

Právě popsané analogy atomu vodíku se nazývají excitony a jsou to opět kvazičástice. Mohou se dokonce srážet s jinými kvazičásticemi, např. fonony, ale i mezi sebou navzájem. Tyto procesy jsou velmi rychlé a až v dnešní době je možné úspěšně provést jejich experimentální prozkoumání, protože je třeba optických pulsů délky řádově desítek femtosekund ( $10^{-15}$ s). Laserové systémy generující tak krátké pulsy jsou dostupné pouze posledních několik let.

Malá zajímavost na závěr části o excitonech: stejně jako atomy vodíku tvoří molekuly  $H_2$ , excitony se také párují a tvoří „molekuly“. Hovoříme o biexcitonech, které mají ještě nižší celkovou energii než dvojice volných excitonů.

### Luminiscence

Stejně jako elektron může pohltit foton a přejít do stavu s vyšší energií, může přecházet z energeticky vyššího do základního stavu spolu s emisí fotonu. To lze provést dvěma způsoby. První se nazývá indukovaná emise. Předpokládá foton dopadající na elektron s energií rovnou právě energii fotonu. Elektron přejde do základního stavu a zatímco dopadající foton nezmění směr, polarizaci ani fázi, elektron emituje další foton se stejným směrem, polarizací a fází jako foton dopadající. Na tomto principu indukované emise pracují optické zesilovače a když takový zesilovač zavřeme mezi dvě rovnoběžná zrcadla, dostaneme laser.

Druhý možný způsob přechodu elektronu do základního stavu je spontánní emise fotonu. K tomu není třeba žádný asistující foton, po nějaké době se prostě elektron rozhodne, že přejde do nižšího energetického stavu a vyzáří foton. Pokud budeme mít velké množství takových elektronů, nevyzáří všechny elektrony naráz, jedná se o proces náhodný, proto intenzita emitovaného záření bude exponenciálně klesat. Luminiscence je právě spontánní přechod elektronů z vyšší hladiny na nižší. Měření luminiscence sleduje střední dobu, za kterou se vyzáří foton, a dává další informace o dynamice procesů v polovodiči. Experimentálně se měření provádí tak, že pulsem se excitují elektrony v měřeném materiálu o předem zvolenou energii a poté se rychlým detektorem sleduje rychlost dohasínání luminiscence, ze které snadno spočteme střední dobu života elektronu na horní energetické hladině.

### Závěr

Naskýtá se otázka: k čemu ale všechno to měření je? Odpověď by pro laika nebyla snadná, pro člověka s aspoň rámcovými znalostmi problematika je jednodušší. V současnosti se snažíme využívat polovodiče v počítačích, v komunikacích, atd. Narozdíl od minulosti ale není možný inženýrský přístup: prostě to zmenšíme a uvidíme, co se stane. Dostali jsme se co do intenzit polí a rozměrů prvků za hranici, kdy se začnou silně projevovat nelineární a kvantové jevy. Abychom

zlevnili výrobu součástek, musíme porozumět těmto jevům a teprve na základě jejich znalosti konstruovat konkrétní prvky.

Dalším hnacím motorem je snaha o ověření teorie pevných látek v praxi. Ultrarychlou spektroskopii jsme schopni měřit dynamiku elektronů v pevných látkách; právě dynamiku částic se po celé toto století snaží teoretičtí fyzikové popsat, jenom jim chyběly a stále chybí experimentální metody, které by jejich teorie potvrdily.

Celou dobu byla řeč o polovodičích. To z toho důvodu, že celý seriál je na polovodiče zaměřen, ale i proto, že polovodiče jsou nejjednodušší pevné látky se zakázaným pásem, který má šířku srovnatelnou s energií viditelného záření. Proto s optickým zářením intenzivně interagují. Samozřejmě excitují i jiné látky s podobným zakázaným pásem a i s mnohem zajímavějšími vlastnostmi, např. mnoho organických molekul. Na jejich detailní prozkoumání si ale ještě budeme muset několik desítek let počkat. V současnosti se zkoumají procesy fotosyntézy, které jsou také velmi rychlé, proto se využívá metod ultrarychlé spektroskopie stejně jako u polovodičů. Cílem by mělo být okopírování přírodního vzoru a získávání energie ze slunečního záření.

### Úloha S. VI ... *nelinearita třetího řádu*

*Nelinearita třetího řádu ve formě změny indexu lomu optickým polem má význam pokud je součin intenzity světla  $I_{min}$  a nelineárního koeficientu  $n_2$  řádově větší než 0,005. Určete, jak by musel být velký výstupní výkon kontinuálně pracujícího laseru k překročení uvedené meze pro  $n_2 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2/\text{GW}$  při fokusaci svazku na průměr  $50 \mu\text{m}$ . Srovnajte vypočtený výkon s výkonem žárovek, zářivek, Slunce, Měsíce a dalších podobných klasických zdrojů záření.*

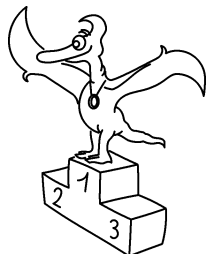
Pro výkon laseru, kdy po sfokusování  $In_2 = 0,005$ , zřejmě platí

$$P = 0,005 \frac{S}{n_2},$$

kde  $S$  je plocha, na kterou svazek dopadá (stopa o průměru  $d = 50 \mu\text{m}$ ) a tedy  $S = \pi d^2/4$ . Jednoduchým dosazením čísel dostaneme  $P = 2 \text{ PW}$  ( $P = \text{Péta} = 10^{15}$ ).

Jak mnozí správně uvedli, tolik elektrické energie se na Zemi nevyrábí, můžeme srovnávat pouze s výkonem vyzařovaným hvězdami. Světlo odražené od Měsíce má dokonce skoro stejný výkon, jaký požadujeme.

Uvedená nelinearita je vskutku velmi malá, aby se projevila, používají se lasery generující optické pulsy, jejichž výkon ve špičce dosahuje po sfokusování na velmi malý průměr (jen několik mikrometrů) i řádu  $100 \text{ GW}/\text{cm}^2$ . Potom můžeme pozorovat nelineární jevy např. i ve skle s nelineárním indexem lomu  $n_2 = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{GW}$ .



## Pořadí nejlepších řešitelů

### Kategorie čtvrtých ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	<b>Student</b>	<b>Pilný</b>	<b>F.1</b>	<b>MFF UK</b>	<b>202</b>
1	Jan	Houštěk	septima	Gymnázium Pelhřimov	174
2	Jiří	Chaloupka		Gymnázium Židlochovice	155
3	Pavel	Augustinský	septima B	Gymnázium Havířov	136
4	Milan	Berta	IV.A	Gymnázium Velké Kapušany	133
5	Jakub	Kulaviak	sexta B	Gymnázium Blansko	123
6	Tomáš	Matoušek	VII.C	Gymnázium Karlovy Vary	120
7	Karel	Kouřil	sexta B	Gymnázium Blansko	118
8	Stanislav	Hugec		Gymnázium Michalovce	90
9	Jan	Houfek	septima	Gymnázium Uherské Hradiště	87
10	Ondřej	Novák	oktáva	Gymnázium Liberec	83

### Kategorie třetích ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	<b>Student</b>	<b>Pilný</b>	<b>F.1</b>	<b>MFF UK</b>	<b>202</b>
1	Peter	Čendula	3.B	Gymnázium Liptovský Mikuláš	163
2	Jan	Kunc	3.A	Gymnázium Kolín	130
3	Karel	Žídek	3.E	Gymnázium Opava	128
4	Martin	Beránek	VI.	Gymnázium Praha - Ohradní	125
5	Jaromír	Chalupský	sexta A	Gymnázium Sušice	124
6	Petr	Nečesal	V.C	Gymnázium Moravské Budějovice	115
7	Vladimír	Fuka	sexta A	Gymnázium Rakovník	99
8	Ondřej	Plašil	septima B	Gymnázium Praha - Chodovská	74
9	Hedvika	Kadlecová	3.C	Gymnázium Praha - Botičská	65
10	Pavol	Mikčo	3.B	Gymnázium Stropkov	63

*Kategorie druhých ročníků*

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	<b>Student</b>	<b>Pilný</b>	<b>F.1</b>	<b>MFF UK</b>	<b>202</b>
1	Jan	Fröhlich	6.A	Gymnázium Praha - Mezi školami	97
2	Miroslav	Šulc	kvinta B	Gymnázium Ústí nad Labem - Stavbařů	68
3	Michael	Komm	sexta	Gymnázium Praha - Parléřova	50
4	Miroslav	Frost	kvinta A	Gymnázium Brno - Elgartova	48
5	Petr	Kavánek	sexta	Gymnázium Čáslav	46
6	Václav	Matouš	2.A	Gymnázium Klatovy	43
7	Matej	Dubový	2.B	Gymnázium Trenčín	41
8	Lenka	Beranová	sexta C	Gymnázium Klatovy	40
9	Ľuboš	Bednárik	2.F	Gymnázium Trenčín	28
10	Milan	Jalový	kvinta A	Gymnázium Blansko	22

*Kategorie prvních ročníků*

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	<b>Student</b>	<b>Pilný</b>	<b>F.1</b>	<b>MFF UK</b>	<b>202</b>
1	Miroslav	Hejna	5A8	Gymnázium Rychnov nad Kněžnou	179
2	Petr	Houštěk	tercie	Gymnázium Pelhřimov	112
3	Michal	Bareš	kvinta A	Gymnázium Plzeň - Mikulášské nám.	108
4	Luboš	Matásek	kvinta A	Gymnázium Plzeň - Mikulášské nám.	73
5	Václav	Cviček	3.A	Gymnázium Frýdek - Místek - ČSA	66
6 - 7	Karel	Tůma	kvinta A	Gymnázium Moravská Ostrava	59
6 - 7	Tibor	Vansa		Gymnázium Moravská Ostrava	59
8	Jaroslav	Kudlička	kvinta A	Gymnázium Hodonín	55
9	Václav	Varvařovský	kvinta A	Gymnázium Plzeň - Mikulášské nám.	53
10	Petr	Šimek	1.A	Gymnázium Blansko	49



# Obsah

Předmluva . . . . .	3
Zadání úloh . . . . .	4
Řešení teoretických úloh . . . . .	10
Řešení experimentálních úloh . . . . .	39
Seriál o polovodičové elektronice . . . . .	49
Pořadí nejlepších řešitelů . . . . .	71
Obsah . . . . .	73

JIŘÍ FRANTA A KOLEKTIV  
**Fyzikální korespondenční seminář**  
**XIII. ročník – 1999/2000**

*Předmluva:* Jiří Franta

*Autoři řešení úloh:*

Jiří Franta (VI.Exp), Jana Gřondilová (IV.Exp, VI.P),  
Pavol Habuda (I.4, II.P, III.P, V.P, VI.3), Karel Honzl (I.1, III.4, VI.2),  
Miroslav Kladiiva (II.4, III.3, V.4, VI.1), Karel Kolář (II.2, IV.1, IV.3),  
Jiří Libra (III.2, III.Exp), Ladislav Michnovič (I.P, V.3), Miroslav Musil (I.Exp),  
Slavomír Nemšák (II.3, V.1), Václav Porod (II.1, III.1), Jan Prokleška (II.P, IV.4),  
Libor Sedláček (IV.2, V.Exp), Daniel Sprinzl (I.2), Robert Vácha (IV.3),  
Lenka Zdeborová (I.3, II.Exp, III.2, III.Exp, IV.3, IV.P, V.2, VI.4)

*Seriál na pokračování:* Tomáš Ostatnický

*Sazba:* Petr Janeček, Karel Honzl, Jiří Franta

*Obrázky:* Jana Gřondilová, Martina Gřondilová

*Grafy:* Petr Janeček, Jan Prokleška, Jiří Franta, Slavomír Nemšák

Vydala Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta  
Oddělení vnějších vztahů a propagace  
Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2  
Praha 2000

74 stran, 57 obrázků

Sazba písmem Computer Modern v programu T<sub>E</sub>X

Vydání první

Náklad 300 výtisků

Pro potřeby fakulty