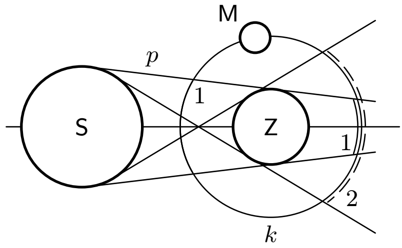
13. ročník, úloha II . P ... *takové malé zatmění* *(4 body; průměr ?; řešilo 64 studentů)*

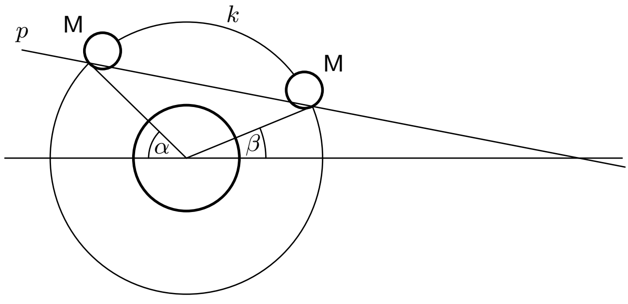
Vezmeme-li astronomické ročenky za posledních 100 let, zjistíme, že slunečních zatmění je přibližně 1, 5 krát více než zatmění měsíčních. Zkuste přijít na to, proč je tomu tak.

Na to, aby mohlo nastat úplné zatmění Slunce nebo Měsíce, musí být Slunce, Země a Měsíc téměř v jedné přímce. To, o kolik se bude spojnice Slunce–Země–Měsíc lišit od přímky, nám dává typ zatmění. Jestli je opravdu velice podobná přímce, nastane úplné zatmění, při větších odchylkách budeme pozorovat zatmění částečné. Všimněte si na obrázku 1 míst označených 1. Jestliže se nachází celý Měsíc v těchto oblastech, nastane úplné zatmění. Když se v nich nachází jenom částečně, potom budeme pozorovat zatmění částečné (samozřejmě jenom když nebude zamračená obloha). Existuje i druh zatmění, které hvězdáři nazývají polostínové (na obr. 1 je to oblast 2, ale ne 1). Na rozdíl od předcházejících dvou, která můžeme vidět jak u Slunce tak u Měsíce, tenhle typ je viditelný pouze u Měsíce. Je ale tak slabé, že jej pouhým okem nelze spatřit a není ani v astronomických ročenkách.



Obr. 1

Předpokládejme, že Měsíc obíhá kolem Země po kruhové dráze, stejně tak i Země kolem Slunce. To nám zabezpečí konstantní úhlovou rychlost Měsíce na své orbitě. Nebudeme přesně počítat, kolik zatmění nastane pro jednotlivé roky, to bychom nemohli nic zanedbat, jinak by výsledek vůbec neodpovídal skutečnosti. Určíme jenom relativní četnosti částečných a úplných slunečních a měsíčních zatmění.



Obr. 2. K výpočtu četnosti zatmění

Podle předpokladu obíhá Měsíc kolem Země rovnoměrně. Potom je poměr roven poměru úhlů $\alpha + \varepsilon$ a $\beta + \varepsilon$, kde ε je úhel, pod nímž vidíme poloměr měsíce ($\varepsilon = 0{,}26^\circ$). Pozor: Úhly α, β nejsou úhly v rovině, ve které obíhá Měsíc a Slunce (zdánlivě) kolem Země. (Tyto dráhy svírají úhel kolem 5 stupňů, ale jejich úhel položme roven nule. Kdyby byl skutečně nula, tak by nastávalo každý měsíc zatmění jak Slunce tak Měsíce). Ve skutečnosti jsou to úhly udávající poloměr oblasti na obloze (kolmé k oběžné dráze), ve které se musí nacházet Měsíc, aby došlo k zatmění. Je třeba si uvědomit, že kdyby Měsíc nebo Země měli tvar jiný než koule, tak tyto vztahy neplatí.

Nejsnáze tyto úhly zjistíme tak, že najdeme x-ovou souřadnici průniku oběžné dráhy Měsíce k a dráhy hraničního paprsku p – viz obr. 1 a 2. Zavedeme soustavu souřadnou s počátkem ve středu Země, osou x určenou spojnicí středů Země a Slunce a osou y na ni kolmou. Oběžná dráha Měsíce má v této soustavě rovnici

$$r_M^2 = x^2 + y^2\,,$$

přímka k má rovnici

$$y = \frac{-R_S - R_Z}{r_Z}\,x + R_Z$$

(určíme ji z obecné rovnice přímky $y = ax + b$ a dvou známých bodů $[0,R_Z]$ a $[r_Z,R_S]$). Po dosazení za y do rovnice kružnice dostaneme kvadratickou rovnici pro hledaná x

$$\left[1 + \left(\frac{R_Z + R_S}{r_Z}\right)^2\right] x^2 - 2R_Z\frac{R_Z + R_S}{r_Z}\,x + R_Z^2 - r_M^2 = 0.$$

Po jejím vyřešení dostáváme dva kořeny $x_1 \doteq 383\,972\,\mathrm{km}$ a $x_2 \doteq -383\,921\,\mathrm{km}$, tedy $\alpha = \arccos\,(x_1/r_M)$ a $\beta = \arccos\,(x_2/r_M)$. Po dosazení dostaneme $\alpha = 0{,}69^\circ$ a $\beta = 1{,}16^\circ$. Pro poměr četnosti zatmění dostáváme $\sigma \doteq 1{,}5$. Nutno dotat, že tento výsledek je spíše odhadem – zanedbali jsme elipticitu dráhy Měsíce a námi použitý postup značně závisí na vstupních hodnotách (zkuste si úlohu vyřešit s mírně pozměněnými hodnotami – dostanete výsledek lišící se na řádu setin až desetin).

Za posledních sto let nastalo 228 slunečních a 230 měsíčních zatmění, z nichž bylo 81 polostínových. Z toho vychází $\sigma = 1{,}53$. Jestliže vezmeme v potaz zatmění spočítané od roku -1999 do roku 3000, potom podle tabulek nastalo nebo nastane 11 897 slunečních zatmění a 8 681 měsíčních nepolostínových. To nám dává $\sigma = 1{,}37$. Vidíme tedy, že ve skutečnosti toto číslo je o menší než 1,5, ale ve dvacátém století jsme měli štěstí a viděli jsme více slunečních zatmění než obvykle.

Pozn: Pro vyčíslení jsme použili následující hodnoty: $R_Z = 6\,378\,\mathrm{km}$, $R_M = 1\,738\,\mathrm{km}$, $r_Z = 149\,600\,000\,\mathrm{km}$, $r_M = 384\,000\,\mathrm{km}$ a $R_S = 696\,000\,\mathrm{km}$.

Pavol Habuda & Jan Prokleška

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.