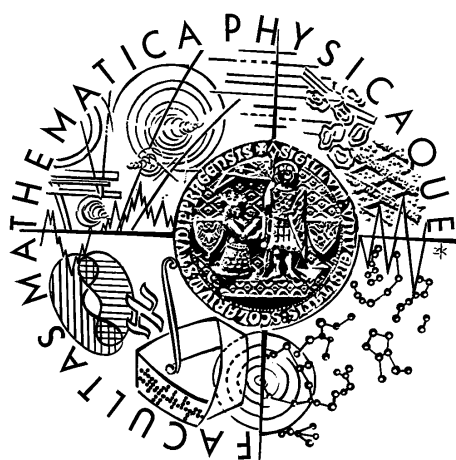


JAN PROKLEŠKA A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář



Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Fyzikální korespondenční seminář, který je zastřešen Oddělením vnějších vztahů a propagace MFF UK, je organizován studenty MFF UK za podpory Ústavu teoretické fyziky MFF UK a jeho zaměstnanců a Jednoty českých matematiků a fyziků.

Recenzovala: Lenka Zdeborová

Copyright © Universita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

JAN PROKLEŠKA A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XIV. ročník — 2000/2001



Předmluva

Milý čtenáři,

publikace, kterou máš právě v rukou obsahuje zadání a řešení úloh XIV. ročníku FYKOSu (FYzikálního KOrespondenčního Semináře MFF UK), který proběhl ve školním roce 2000/2001.

Co je to FYKOS? Je to především korespondenční soutěž o fyzice určená pro studenty středních škol. V průběhu roku vypadá seminář tak, že řešitelé pravidelně (každých šest týdnů) obdrží sérii sedmi úloh, z nichž je pět teoretických (pátá, označená P, je „problémová“), jedna experimentální a poslední se tematicky váže k Seriálu na pokračování, který rozvíjí znalosti řešitelů v jedné konkrétní oblasti fyziky. Letos byl věnován klasické mechanice. Účastníci řeší úlohy dle vlastního výběru (aktivnější i všechny) a poté svá řešení posílají na adresu semináře. Organizátoři úlohy opraví, obodují a zašlou zpět účastníkům, kteří se takto seznámí se vzorovými řešeními a dozví se o chybách svých vlastních postupů. Zásilky úloh a řešení jsou doplňovány průběžnou výsledkovou listinou a na konci každého ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Kromě vlastní korespondenční soutěže dnes k semináři neodmyslitelně patří dvě každoroční soustředění, která představují týden plný fyzikální i nefyzikální zábavy v některém malebném koutě naší vlasti. Probíhají vždy na jaře a na podzim a jsou dobrou motivací a odměnou pro nejlepší účastníky. Dále FYKOS ve spolupráci s jednotlivými katedrami MFF pořádá Den s experimentální fyzikou, při kterém naši řešitelé mohou navštívit několik pracovišť, kde se dělá „opravdová fyzika“.

V této ročence najdeš na začátku kompletní zadání teoretických a experimentálních úloh, následně jejich řešení (teoretická jsou pro přehlednost oddělena od experimentálních), v další části je pak Seriál na pokračování, který je doplňován úlohami souvisejícími s daným tématem. Na konci pak najdeš soupisku nejlepších řešitelů.

Trocha statistiky na závěr: XIV. ročníku FYKOSu se zúčastnilo celkem 165 řešitelů, kteří nám zaslali celkem 1826 jednotlivých úloh k opravení. Všech šesti sérií se zúčastnilo 28 řešitelů.

Pokud tě tato ročenka zaujme natolik, že by jsi se chtěl přihlásit k soutěžení v semináři nebo se jen na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neboj se a napiš nám. Jsme k dispozici téměř nepřetržitě na adrese

FYKOS

Matematicko-fyzikální fakulta UK — ÚTF

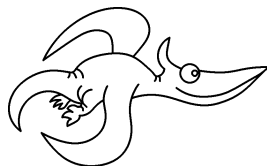
V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

www: <http://fks.mff.cuni.cz>

tel: (02) 2191 2493 (záznamník Ústavu teoretické fyziky)



Zadání úloh

Úloha I. 1 ... levitace

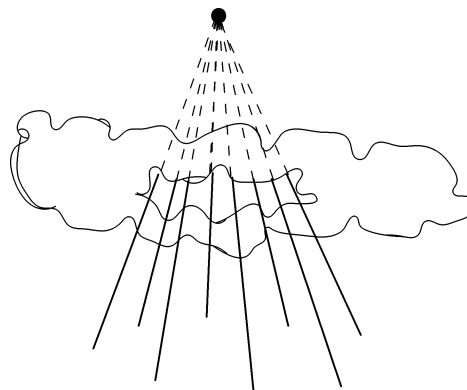
Představme si, že elektrický náboj zeměkoule začne najednou z ničeho nic růst. To znamená, že i vy se začnete nabíjet. Může to dojít tak daleko, že coulombovská síla vyrovná gravitační a vy se odlepíte od Země. Vysvětlete, proč není možné, aby se různě velká tělesa stejné hustoty odlepila ve stejný okamžik. Pro zjednodušení uvažujte, že všechna tělesa mají tvar koule. (Řešení str. 12)

Úloha I. 2 ... kondenzátor v kapalině

Do kapalného dielektrika jsou svisle ponořeny dvě čtvercové paralelní vodivé desky o straně a . Nejsou-li desky nabity, vystoupí hladina mezi deskami do výšky h_0 (měřeno od dolního okraje desek). O jakou vzdálenost Δh se zvýší hladina kapaliny mezi deskami, nabijeme-li desky na napětí U ? Permittivita kapaliny je ε , hustota ρ a vzdálenost desek je d ($d \ll a$). (Řešení str. 13)

Úloha I. 3 ... sluneční paradox

Hlavně večer a ráno můžeme někdy pozorovat sluneční paprsky jdoucí skrz mezery v mracích. Vidíme, že se tyto paprsky rozbíhají. Kdybychom si v jejich myšleném průřezu představili Slunce, vyšlo by nám, že je několikrát (2–5) dále než mraky, tzn. řádově deset kilometrů nad Zemí. Tak proč nám všichni tvrdí, že Slunce je od Země 150 mil. km? (Řešení str. 14)



Obr. 1

Úloha I. 4 ... ponorka

Mějme širokou otevřenou válcovou nádobu o výšce h , průřezu S a hmotnosti m . Položíme ji na hladinu a ona zaujme rovnovážnou polohu. Poté uprostřed dna uděláme malou díрку o průřezu $S^* \ll S$. Do nádoby začne vtékat voda, vaším úkolem je určit, za jak dlouho se ponoří. (Řešení str. 14)

Úloha I. P ... jedna paní povídala

Jeden krátkozraký kamarád mi říkal, že když si z prstů před okem utvoří malý otvor, tak vidí věci kolem sebe ostřeji než normálně. Je na tom něco pravdy nebo si vymýšlí? Svůj názor fyzikálně zdůvodněte. (Řešení str. 15)

Úloha I. Exp ... natahování špaget

Určete Youngův modul pružnosti v tahu uvařených špaget. (Řešení str. 42)

Úloha II.1 ... lampa na hladině

Jdete večer kolem řeky šířky L . Na protějším břehu stojí lampa ve výšce h nad hladinou řeky. Když se podíváte na hladinu, uvidíte na vodě obraz lampy. Je-li hladina rozčerená, tento obraz se "rozmaže". Určete úhlovou šířku a délku pod jakou tento útvar vidíte. Předpokládejte, že vaše oči jsou ve stejné výšce nad hladinou jako lampa. Zčerenou hladinou rozumíme vlnky s maximálním náklonem α ve všech směrech a výškou zanedbatelnou vůči h . (Řešení str. 16)

Úloha II.2 ... skoky do nebe

Ze střechy 10 m vysokého domu pouštíme s nulovou počáteční rychlostí gumové míčky na chodník. Míčky jsou všechny stejně velké, mají však hodně rozdílné hmotnosti. Do jaké maximální výšky může některý z míčků vyskočit, máme-li jich k dispozici a) 2, b) n . Všechny rázy považujeme za dokonale pružné, veškeré odpory prostředí zanedbejme. (Řešení str. 17)

Úloha II.3 ... šroubovice

Mějme nekonečný drát stočený do pravotočivé šroubovice (helixu). Drát je rovnoměrně nabitý a osa helixu je totožná s osou z . Do vzniklého pole pošleme nabitou částici (drát je tenký, takže do něj částice nenarazí). V jistém časovém okamžiku známe její p_z a L_z , tedy z -ové komponenty hybnosti a momentu hybnosti. Můžeme v jiném okamžiku určit p_z , známe-li v tomto okamžiku L_z ?

(Problém lze vyřešit zcela exaktně. Naproti tomu není určitě nezajímavé zkusit situaci počítačově simulovat a dostat tak hledanou závislost v podstatě experimentálně, případně ověřit teoretickou předpověď.) (Řešení str. 17)

Úloha II.4 ... the wall

Kolmo proti stěně je postavený reproduktor, který vydává zvuk, jehož frekvence rovnoměrně roste v čase. Mezi stěnou a reproduktorem je pozorovatel. Co uslyší? (Řešení str. 18)

Úloha II.P ... problémovka z vody

O prázdninách byli někteří organizatoři Fykosu sjíždět Vltavu a při této příležitosti je napadlo několik problémků, se kterými by od vás potřebovali poradit.

- Za jak dlouho doteče voda z Českého Krumlova do Prahy?
- Na jakou stranu alumatky (hliníkové karimatky, která má z jedné strany hliníkovou fólii a z druhé izolační pěnu) je výhodné si lehnout?
- Jak se v makarónech dělají díry? (Řešení str. 19)

Úloha II.Exp ... zvuk

Změřte rychlost zvuku ve vzduchu. (Řešení str. 46)

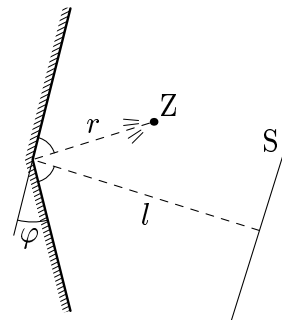
Úloha III.1 ... rotující koule

Nad vodorovnou podložkou se nachází homogenní koule o poloměru R , která rotuje úhlovou rychlostí ω_0 kolem vodorovné osy. Jakou rychlostí v_0 ji musíme vrhnout ve vodorovném směru kolmém na osu rotace, aby se po sérii dopadů na podložku zastavila? Valivý odpor je nulový, nikoliv však smykové tření. (Řešení str. 20)

Úloha III.2 ... interference na zrcadlech

Mějme bodový zdroj (Z) monochromatického světla umístěný přede dvěma rovinnými zrcadly (obr. 2). Vzdálenost zdroje od bodu dotyku zrcadel je r a vzdálenost tohoto bodu od stínítka (S) je l . Na stínítku se zobrazují světlé a tmavé proužky. Dva sousední světlé proužky jsou od sebe ve vzdálenosti d . Spočtete úhel φ mezi zrcadly, můžete předpokládat, že je velmi malý. Předpokládejte též, že ze zdroje nedopadá žádné světlo přímo na stínítko.

(Řešení str. 21)



Obr. 2

Úloha III.3 ... dnem vzhůru

Ve velké nádobě s vodou je částečně ponořena dnem vzhůru válcová sklenice. Hladina vody v nádobě i ve sklenici je stejná a je vzdálena $l = 10$ cm ode dna sklenice. Teplota vzduchu je $t_0 = 20$ °C a atmosférický tlak je $p_0 = 100$ kPa. O jakou výšku h stoupne hladina vody ve sklenici, jestliže se teplota sníží o $\Delta t = 10$ °C a tlak stoupne o $\Delta p = 2,0$ kPa ?

(Řešení str. 22)

Úloha III.4 ... výpar vody

Za jak dlouho se vypaří voda ze sklenice o výšce $h = 10$ cm za normálních podmínek? Předpokládejte, že vlhkost vzduchu těsně nad hladinou je neustále 99%. (Řešení str. 22)

Úloha III.P ... občasný pramen

Na Slovensku ve Slovenském krasu je zajímavý pramen. Většinu času tento pramen vypadá, jako by byl vyschlý, a potom z něj najednou začne po nějakou dobu vytékat voda, a poté opět nic. Toto se stále opakuje. Jednotlivé intervaly jsou docela pravidelné (a dlouhé). Jak to funguje?

(Řešení str. 23)

Úloha III.Exp ... kapacita člověka

Změřte co nejvíce zdraví neohrožujícími způsoby elektrickou kapacitu člověka.

(Řešení str. 47)

Úloha IV.1 ... vesmírná stříkačka

Představte si, že ve vakuu mimo gravitační pole stříkáme vodní paprsek. Kromě tohoto paprsku je zde kolmo (mimoběžně) k jeho původnímu směru umístěn nabitý nekonečný drát s délkovou hustotou náboje λ . Voda je stříkána z velmi velké vzdálenosti s počáteční rychlostí v . Vzdálenost přímky, ve které je stříkána voda (ve které se na začátku pohybuje vodní paprsek) a drátu je d . Spočtete úhel, o který se odchýlí vodní paprsek od původního směru. Molekuly vody si představte jako elektrické dipóly, jejich vzájemné působení zanedbejte a také zanedbejte jejich moment setrvačnosti (tj. představte si, že všechna hmotnost molekuly je soustředěna uprostřed mezi náboji, které jsou nehmotné).

(Řešení str. 23)

Úloha IV.2 ... ropná skvrna

Mějme na vodní kaluži kruhovou skvrnu od oleje o poloměru 1 m a tloušťce $10 \mu\text{m}$. Na tuto skvrnu se díváme z její osy z výšky 1 m. Skvrna je osvětlena bílým světlem ze všech stran. Světlo z jednoho směru můžeme považovat za koherentní. Jaké barvy na hladině uvidíme?

(Řešení str. 26)

Úloha IV.3 ... měděný drát

Máme 50 kg mědi. Jaký nejdelší drát z tohoto množství materiálu lze vytvořit pro přenášení elektrického proudu 1 A, je-li okolní teplota 20 °C ? (Tepelnou kapacitu okolního vzduchu a přírody považujte za nekonečnou.) (Řešení str. 27)

Úloha IV.4 ... zvířátko

Představte si zvířátko, jehož charakteristický rozměr je L . Odhadněte, jak na L závisí vzdálenost, kterou je schopné urazit po poušti.

A jak závisí na L jeho rychlost běhu po rovině a do kopce? Určete také, jak závisí na velikosti zvířátka výška jeho výskoku.

Nápověda: Uvažte, že $s = vt$. Dále např. uveďte, jak závisí hmotnost zvířátka na L : Víme, že $m = \rho V$, kde ρ uvažujme konstantní a V je úměrné L^3 , tedy $m \sim \rho L^3 \sim L^3$, hmotnost zvířátka tedy závisí přímo úměrně na L^3 . (Řešení str. 28)

Úloha IV.P ... míček ve vodě

Máme trubku ve tvaru písmene V, jedno rameno je svislé a na konci otevřené, druhé s ním svírá ostrý úhel a je na konci (nahore) zatavené. Trubka je téměř plná vody a v zataveném rameni nahore plave míček. Vymyslete způsob, jak dostat míček ven tak, aby voda nevytekla. Nesmíte ji vypustit, svislé rameno musí zůstat pořád svislé a do trubky nesmíte nic strkat. (Řešení str. 29)

Úloha IV.Exp ... změřte ho!

Ledová královna žije v říši, kde je všechno kromě lidí, živočichů, rostlin a několika málo dalších věcí z ledu. Chudinka královna zjistila, že potřebuje nové brýle. Jenže její dvorní brusič brýlí umí jenom brýle ze skla a snad by si vzpomněl, jak je udělat z ledu, ale potřeboval by na to znát jeho index lomu. A jelikož všechny MF tabulky v království jsou z ledu, nejde z nich nic přečíst, a tak mu nezbyvá, než ho změřit, jenže neví jak. A tak vás prosí o pomoc. Poradte mu a pro jistotu i danou veličinu změřte sami, neboť on je nešika a nic jiného než brousit brýle neumí. (Řešení str. 49)

Úloha V.1 ... ošklivá sonda

Představte si rovinný povrch nějakého materiálu, zaveďme souřadnou soustavu tak, že povrch splývá s rovinou $z = 0$. Každý bod povrchu popíšeme odrazivostí R , což je poměr odražené a dopadající intenzity záření. Víme, že ve směru osy x je R konstantní a ve směru osy y je $R(y)$ periodickou funkcí s periodou P . Máme k dispozici sondu, která svítí na povrch a zpětně snímá odraženou intenzitu. Můžeme s ní pohybovat ve směru osy y . Sonda však není nekonečně "jemná", svazek nemůžeme zaostřit do jednoho bodu, vždy budeme mít stopu o nenulové šířce D . Sonda tedy snímá průměr odražené intenzity z oblasti, na kterou svítí. Vaším úkolem je napsat, jak pomocí takové sondy zjistit periodu odrazivosti P . Lze to pro všechny rozměry sondy? (Řešení str. 29)

Úloha V.2 ... dělo na lodi

Děla na bitevních lodích se nabíjejí následujícím způsobem: do hlavně se dá střela o hmotnosti M a za ní určitý počet balíku s výbušninou (objem jednoho balíku je V_0), podle toho jak daleko chceme střílet. Kolikrát se zvětší dostřel takového děla, když nabijeme dvojnásobné množství výbušniny? Výbuch si představujte tak, že najednou se místo výbušniny objeví dvouatomový plyn o teplotě T_0 a tlaku p_0 . Ráže děla je deset palců. Odpor vzduchu zanedbejte. (Řešení str. 32)

Úloha V.3 ... rozlišení radaru

Mějme radar, který je schopný rozlišit těleso s průměrem 10 km ve vzdálenosti Měsíce. Jak velké těleso je schopen rozlišit ve vzdálenosti Slunce? Jaká je teoretická vzdálenost, do které je radar schopný "vidět"?

(Řešení str. 33)

Úloha V.4 ... supermetro

Ve Švýcarsku plánují vybudování celostátního „metra“. Vlaky mají jezdit na magnetickém polštáři tunelem, ze kterého je částečně vyčerpáný vzduch, a dosahovat rychlosti kolem $500 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Tunel však nelze dokonale utěsnit. Předpokládejme, že chceme udržet tlak na hodnotě $0,05 p_a$, ale bez neustálého odčerpávání by za 1 den vzrostl na $0,5 p_a$. Spočtete výkon, jaký je nutný na odčerpávání vzduchu ze 100 km tohoto tunelu, je-li jeho průměr 5 m, účinnost odčerpávání oproti ideálně pracujícímu stroji je 10% a teplota 6°C . S čím lze takový výkon porovnat?

(Řešení str. 34)

Úloha V.P ... upíři

Fyzikálně zdůvodněte, proč není upír vidět v zrcadle, a taktéž navrhněte vynálezy, které by této skutečnosti mohly využít.

(Řešení str. 35)

Úloha V.Exp ... za mřížemi

Určete mřížkovou konstantu (vzdálenost dvou nejbližších vláken) u vzorku kovové mřížky, který najdete přilepený někde na letáku, jež držíte v ruce. Použijte co možná nejvíce různých metod a jejich výsledky porovnejte.

(Řešení str. 50)

Úloha VI.1 ... dielektrikum

Mějme deskový kondenzátor a uvnitř něj dielektrickou desku s relativní permitivitou $\epsilon_r = 6$. Na kondenzátor přivedeme napětí $U = 10 \text{ kV}$ a necháme systém ustálit. Poté desku vyndáme a kondenzátor zkratujeme. Jaké napětí naměříme na kondenzátoru po vrácení desky? Materiál desky BaTiO_3 je feroelektrikum, zůstane zelektrizovaný!

(Řešení str. 36)

Úloha VI.2 ... elektron u desky

Mějme nekonečnou vodivou uzeměnou desku. Ve vzdálenosti h od ní je umístěn náboj Q . Spočtete, jakou silou je náboj přitahován k desce.

(Řešení str. 36)

Úloha VI.3 ... galaxie

Začátkem století existoval kosmologický model vesmíru, podle kterého byl vesmír homogenní (v každém místě stejný) a izotropní (v každém směru stejný). Takový vesmír v sobě zahrnoval rovnoměrně rozmístěné galaxie.

Předpokládejme, že všechny galaxie jsou co do množství vyzářovaného světla stejné. Spočtete, kolikrát více galaxií uvidíme, jestliže se místo pouhým okem budeme dívat na oblohu triedrem, kterým lze pozorovat objekty s magnitudou až 8,5.

Magnitudou se v astronomii měří jasnost objektu. Čím větší magnituda, tím slabší objekt vidíme. Slunce má -27 magnitud, Měsíc v úplňku -13^{mag} , nejjasnější hvězdy 0^{mag} a nejslabší hvězdy viditelné pouhým okem mají 6 magnitud.

Pomoci vám může Pogsonova rovnice, která porovnává magnitudy a pozorované intenzity dvou objektů:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \left(\frac{I_1}{I_2} \right) .$$

Zamyslete se nad tím, jak se změní řešení, když budou galaxie vyzařovat různé množství světla. (Řešení str. 36)

Úloha VI.4 ... *rychlý proton*

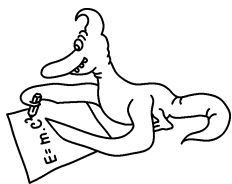
Jednou zaregistrovali v Utahu (USA) detektorem kosmického záření proton s energií 51 J. Spočtete jeho rychlost (nebo spíše o kolik se její rychlost liší od rychlosti světla). Odhadněte také zakřivení jeho dráhy v magnetickém poli 10 T. (Řešení str. 37)

Úloha VI.P ... *domino*

Určitě už jste si někdy hráli s dominem, tedy kvádry postavenými v řadě za sebou, které po shoení prvního z nich lavinovitě padají. Pokuste se odhadnout rychlost, kterou se tato vlna šíří, a jak tato rychlost závisí na rozměrech a hmotnosti kvádrů, vzdálenosti kvádrů ... Popište podrobně model, který ve svých úvahách použijete, a posuďte, nakolik odpovídá realitě. (Řešení str. 38)

Úloha VI.Exp ... *zase domino*

Proměřte rychlost padání dominových kostek z problémové úlohy pro různé podmínky. Můžete např. změřit závislost na vzdálenosti, hmotnosti či výšce kostek. Pokud budete řešit i problémovou úlohu, nezapomeňte porovnat vaši teorii s experimentem. (Řešení str. 51)



Řešení teoretických úloh

Úloha I. 1 ... levitace

Představme si, že elektrický náboj zeměkoule začne najednou z ničeho nic růst. To znamená, že i vy se začnete nabíjet. Může to dojít tak daleko, že coulombovská síla vyrovná gravitační a vy se odlepíte od Země. Vysvětlete, proč není možné, aby se různě velká tělesa stejné hustoty odlepila ve stejný okamžik. Pro zjednodušení uvažujte, že všechna tělesa mají tvar koule.

Těleso se začne vznášet právě v okamžiku, kdy se vyrovná působení přitažlivé gravitační síly a odpudivé elektrické síly. Aby se začala vznášet všechna tělesa v jeden okamžik, musely by se tyto síly vyrovnat pro všechna tělesa zároveň. Pro gravitační sílu působící na těleso platí:

$$F_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g .$$

Nyní určíme, jak závisí odpudivá elektrická síla na poloměru tělesa. Země a těleso tvoří dohromady vodivou soustavu, na které se náboj rozloží tak, aby ve všech místech byl stejný potenciál, a tedy intenzita kolmá k povrchu. Protože Země je mnohem větší než těleso, můžeme ji nahradit rovinou. Potřebujeme zjistit, jak se rozložení náboje na takové soustavě mění s poloměrem tělesa. Předpokládejme, že pro určité r_0 víme, jaká je v každém místě soustavy plošná hustota náboje σ , ve velké vzdálenosti od tělesa se velikost plošné hustoty náboje bude blížit hodnotě σ_0 . Pokud pro každé místo na povrchu soustavy Země–těleso známe σ , můžeme spočítat elektrickou intenzitu v libovolném bodě pomocí vztahu:

$$\mathbf{E} = \int_{(S)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} dS , \quad (1)$$

což není nic jiného než Coulombův zákon pro spojitě rozložený náboj. Integruje se přes celou soustavu Země–těleso.

Zjistíme nyní, jak se změní rozložení náboje, pokud změníme k -krát všechny rozměry soustavy. Náboj se zřejmě rozloží jediným způsobem. Rozloží-li se tak, že v odpovídajících si místech této a nezměněné soustavy bude plošná hustota náboje stejná, bude v odpovídajících si místech i stejná intenzita, to přímo plyne ze vztahu (1). Intenzita bude tedy opět všude kolmá na povrch a náboj se proto rozloží přesně tímto způsobem.

Síla působící na těleso se určí pomocí vztahu:

$$\mathbf{F} = \int_{(T)} \sigma \mathbf{E} dS , \quad (2)$$

kde se integruje přes celé těleso. Jediné, na co má v tomto vztahu změna všech rozměrů vliv, je dS (vzroste k^2 -krát), protože \mathbf{E} i σ v odpovídajících si místech jsou stejné. Odpudivá síla tedy roste s druhou mocninou poloměru, zatímco přitažlivá roste s třetí, z toho už je vidět, že se nemohou odlepit všechna tělesa zároveň, protože rovnice typu $Ar^2 = Br^3$ nejde splnit pro všechna r zároveň (pokud se A i B zároveň nerovnjají nule, což není náš případ).

Úloha I. 2 ... kondenzátor v kapalině

Do kapalného dielektrika jsou svisle ponořeny dvě čtvercové paralelní vodivé desky o straně a . Nejsou-li desky nabitý, vystoupí hladina mezi deskami do výšky h_0 (měřeno od dolního okraje desek). O jakou vzdálenost Δh se zvýší hladina kapaliny mezi deskami, nabijeme-li desky na napětí U ? Permittivita kapaliny je ε , hustota ρ a vzdálenost desek je d ($d \ll a$).

Tato úloha byla asi nejsnáze řešitelná přes energie. Jedna z definic rovnováhy je, že se systém ustálí v takové poloze, v níž je jeho celková potenciální energie minimální.

V případě nenabitého kondenzátoru působí na kapalinu ve vertikálním směru tíhová a kapilární síla, které způsobí ustálení hladiny ve výšce h_0 . Kapilární jevy závisí pouze na kolmém průřezu „kapiláry“, hustotě a povrchovém napětí, a ty se v našem případě nemění (zanedbáme-li změnu teploty způsobenou průchodem proudu). Dále tedy kapilární sílu nemusíme uvažovat.

Předpokládejme, že po připojení zdroje se kondenzátor nabije rychleji, než se hladina stačí pohnout. Při nabíjení se jistá část energie ztratí na odporech vodičů a zdroje. Od okamžiku, kdy je kondenzátor nabitý, již ale k žádným ztrátám energie nedochází, protože je napětí na vodičích nulové. Můžeme tedy spočítat celkovou potenciální energii systému, která bude součtem tíhové potenciální energie kapaliny, energie nabitého kondenzátoru a energie zdroje.

Tíhová energie je rovna tíze vystouplé kapaliny násobené výškou jejího těžiště nad místem, v němž zvolíme nulovou hladinu této energie. Nejjednodušší pro výpočet je volit nulovou hladinu ve výšce h_0 . Kapalina zaujímá objem tvaru kvádru, a má tedy hmotnost $m = \rho V = \rho da\Delta h$. Poloha těžiště je v polovině výšky Δh , odtud

$$E_G = \frac{1}{2}\rho da g(\Delta h)^2 .$$

Elektrostatická energie kondenzátoru se spočítá dle vztahu $E_C = CU^2/2$. Kondenzátor je tvořen dvěma nabitými deskami, mezi nimiž je v části kapalina a v části vzduch. Zanedbáme-li vzájemné ovlivňování kapaliny a vzduchu jako dielektrik, můžeme si kondenzátor představit jako paralelní spojení kondenzátoru s kapalným dielektrikem a vzduchového kondenzátoru. Plocha kondenzátoru s kapalinou je $a(h_0 + \Delta h)$, plocha kondenzátoru se vzduchem je $a(a - h_0 - \Delta h)$. Pro kapacitu kondenzátoru s dielektrikem o permittivitě ε , plochou S a vzdálenostmi desek d platí $C = \varepsilon S/d$ (za předpokladu, že jsou rozměry desek hodně větší než jejich vzdálenost). Protože kapacita paralelního spojení dvou kondenzátorů je rovna součtu jejich kapacit, je celková kapacita našeho kondenzátoru rovna

$$C = \varepsilon \frac{a(h_0 + \Delta h)}{d} + \varepsilon_0 \frac{a(a - h_0 - \Delta h)}{d} = \frac{a(h_0 + \Delta h)(\varepsilon - \varepsilon_0) + a^2\varepsilon_0}{d} .$$

Energie zdroje je rovna součinu napětí a kapacity zdroje. (Kapacita zdroje je náboj, který je zdroj schopný přenést, na akumulátorech bývá uvedena v A·h.) Označme Q_0 kapacitu zdroje před připojením ke kondenzátoru a $Q = CU$ náboj přenesený na kondenzátor. Po nabití kondenzátoru potom pro energii zdroje platí

$$E_z = U(Q_0 - Q) = UQ_0 - CU^2 .$$

Celková potenciální energie systému je tedy

$$E_p = \frac{1}{2}\rho da g(\Delta h)^2 + \frac{1}{2}CU^2 + UQ_0 - CU^2 .$$

Hladina se ustálí v takové výšce, ve které je tato energie minimální, dosadíme tedy za C :

$$E_p = \frac{1}{2} \rho d a g (\Delta h)^2 - \frac{1}{2} U^2 \frac{a (h_0 + \Delta h) (\varepsilon - \varepsilon_0) + a^2 \varepsilon_0}{d} + U Q_0$$

a doplníme vztah na úplný čtverec:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \rho d a g \left((\Delta h)^2 - 2 \cdot \frac{U^2 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2 \rho d^2 g} \cdot \Delta h + \frac{U^4 (\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{4 \rho^2 d^4 g^2} \right) + K = \\ &= \frac{1}{2} \rho d a g \left(\Delta h - \frac{U^2 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2 \rho d^2 g} \right)^2 + K, \end{aligned}$$

kde K nezávisí na Δh . Minimální energie bude tedy pro

$$\Delta h = \frac{U^2 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2 \rho d^2 g}.$$

Protože $\varepsilon > \varepsilon_0$, bude $\Delta h > 0$ a hladina stoupne.

Úloha I. 3 ... sluneční paradox

Hlavně večer a ráno můžeme někdy pozorovat sluneční paprsky jdoucí skrz mezery v mracích. Vidíme, že se tyto paprsky rozbíhají. Kdybychom si v jejich myšleném průřezu představili Slunce, vyšlo by nám, že je několikrát (2–5) dále než mraky, tzn. řádově deset kilometrů nad Zemí. Tak proč nám všichni tvrdí, že Slunce je od Země 150 mil. km?

Vzhledem ke vzdálenosti Země od Slunce můžeme považovat paprsky procházející dírou v mraku za rovnoběžné. Rozbíhající se paprsky vidíme kvůli tomu, že díra v mraku je od nás dále než místo, kam paprsky dopadají (stejně tak nám připadá, že se sbíhají kolejnice).

Poznámky k došlým řešení: Lom paprsků na rozhraní vakuum–vzduch můžeme s klidem zanedbat. Maximální hodnota, o jakou se může paprsek takto odchýlit, je 35 úhlových minut.

Mrak nefunguje jako velká rozptylka, protože má nepravidelný tvar a pohybuje se. Díra v mraku je příliš veliká na to, aby mohla fungovat jako štěrbinová a docházelo k ohybu světla.

Rozptyl světla na mraku by nám nevytvořil pravidelné a intenzivní svazky paprsků. Někteří řešitelé uvažovali nad tím, že paprsky přicházejí z různých částí Slunce a potom se kříží nad mrakem, kde tvoří fiktivní zdroj. I křížící paprsky však spolu svírají jen malý úhel, což je v rozporu s tím, co vidíme.

Úloha I. 4 ... ponorka

Mějme širokou otevřenou válcovou nádobu o výšce h , průřezu S a hmotnosti m . Položíme ji na hladinu a ona zaujme rovnovážnou polohu. Poté uprostřed dna uděláme malou díрку o průřezu $S^* \ll S$. Do nádoby začne vtékat voda, vaším úkolem je určit, za jak dlouho se ponoří.

Nejprve vypočteme hloubku počátečního ponoření h_0 . V rovnovážné poloze musí být tíhová síla kompenzována silou vztlakovou:

$$\begin{aligned} V_0 \rho g &= S h_0 \rho g = m g, \\ h_0 &= \frac{m}{S \rho}. \end{aligned}$$

Stěžejní částí úlohy byla následující úvaha. Do nádoby nateče voda o objemu V a tím vzroste celková tíhová síla. V důsledku zachování rovnováhy sil vzroste o stejnou velikost i síla vztlaková, a tak se objem ponořené části zvětší rovněž o objem V . Například, když hladina v nádobě stoupne o 1 mm, ponoří se nádoba o 1 mm hlouběji. Z toho plyne, že rozdíl výšek okolní hladiny a hladiny v nádobě se s časem nemění a odpovídá počáteční hodnotě h_0 . V otvoru uprostřed dna je tedy konstantní hydrostatický tlak a jemu odpovídá rychlost, kterou voda vtéká do nádoby:

$$v = \sqrt{2gh_0} .$$

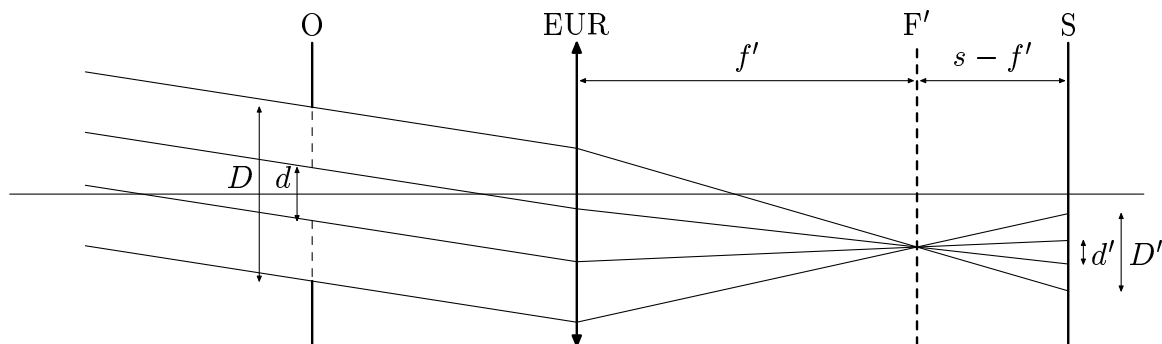
Jako „potopení“ je nevhodnější uvažovat okamžik, kdy se horní okraj nádoby dotkne okolní hladiny. Nádoba tedy poklesne o výšku $h - h_0$. Nyní již není problém vypočítat čas potápění:

$$t = \frac{S}{S^*} \cdot \frac{h - h_0}{v} = \frac{S}{S^*} \frac{\rho S h - m}{\sqrt{2gmS\rho}} .$$

Úloha I. P ... jedna paní povídala

Jeden krátkozraký kamarád mi říkal, že když si z prstů před okem utvoří malý otvor, tak vidí věci kolem sebe ostřeji než normálně. Je na tom něco pravdy nebo si vymýšlí? Svůj názor fyzikálně zdůvodněte.

Podstata ostrosti vidění je v tom, že bod (u vzdálenějších předmětů malá ploška) pozorovaného předmětu se zobrazí na sítnici jako bod. Tedy paprsky vycházející z pozorovaného bodu jsou čočkou v oku lámány tak, aby se setkávaly na sítnici opět v jednom bodě. Je třeba podotknout, že narozdíl od skleněných čoček, oční čočka netrpí přílišnou otvorovou vadou. Předpokládáme tedy, že paprsky se protínají skutečně v jednom bodě.



Obr. 3

Krátkozrakost spočívá v tom, že čočka nedokáže pomocí akomodace posunout své ohnisko až na úroveň sítnice. Při pozorování vzdálených předmětů se téměř rovnoběžné paprsky po průchodu čočkou (Č) setkávají v ohniskové rovině (F') ve vzdálenosti f' , a pak se dále rozbíhají než dopadnou na sítnici (S) ve vzdálenosti s od čočky, kde vytvoří místo bodu kroužek o průměru D' , který vyjadřuje „neostrost“ viz obr. 3. Je-li „neostrost“ srovnatelná s rozlišovací schopností sítnice, je obraz zcela ostrý. „Neostrost“ je dána jednoduchým vztahem (z podobnosti trojúhelníků).

$$d' = d \frac{s - f'}{f'} .$$

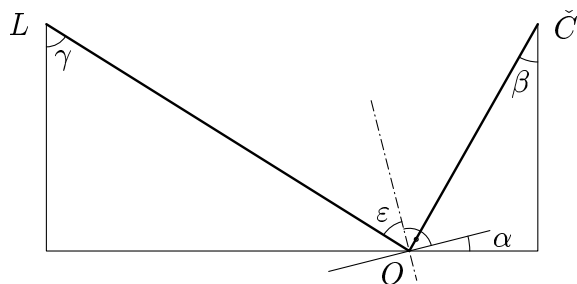
Pokud si tedy kamarád dal před oko clonu v podobě otvoru z prstů (O), zmenšil tak průměr otvoru d , kterým do oka vniká světlo, a tím se i podle uvedeného vztahu zmenšila "neostrost" d' . Současně však snížil intenzitu světla vytvářející obraz, což ale tolik nevadí, protože oko je schopno svoji citlivost zvýšit až 10 000 krát. Toto odůvodnění jme považovali za správné (fyzikální).

Svůj vliv má samozřejmě i soustředěnost na menší část obrazu, jsou-li zastíněny některé části zorného úhlu, ale to podle odborníků neplatí jen u někoho a jen v určitém věkovém rozmezí, tedy to zkrátka nelze považovat za pravidlo. Navíc máme vyzkoušeno, že lze vytvořit clonu (ne z prstů) tak blízko oka, že neomezuje zorný úhel, a efekt přesto funguje. Lze tak například pozorovat předměty naopak pro zdravé oko příliš blízké na zaostření.

Mnozí z vás také psali, že je příčina v ohybu světla. Ohyb světla jistě hraje svoji roli, sice malou, ale díky svým vlastnostem je spíše nežádoucí, než aby přispěl k zostření obrazu.

Úloha II.1 ... lampa na hladině

Jdete večer kolem řeky šířky L . Na protějším břehu stojí lampa ve výšce h nad hladinou řeky. Když se podíváte na hladinu, uvidíte na vodě obraz lampy. Je-li hladina rozčerená, tento obraz se "rozmaže". Určete úhlovou šířku a délku pod jakou tento útvar vidíte. Předpokládejte, že vaše oči jsou ve stejné výšce nad hladinou jako lampa. Zčerenou hladinou rozumíme vlnky s maximálním náklonem α ve všech směrech a výškou zanedbatelnou vůči h .

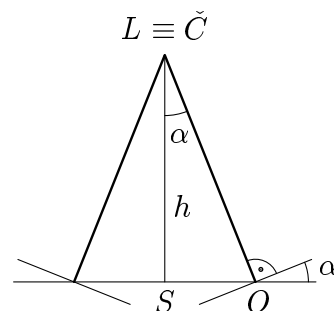


Obr. 4

Nejdřív určíme úhlovou délku. Uvažujme, že sklon hladiny vůči horizontální rovině může být od $-\alpha$ do α . Z obr. 4 vidíme, že nejbližše ke člověku je odraz pro sklon hladiny α . Označme β úhel, pod kterým vidíme tento konec obrazu. Když potom označíme úhel odrazu ε , dostáváme podle obr. 4 vztah $\beta = 90^\circ - (\varepsilon - \alpha)$. Nejbližší bod odrazu určíme analogicky, když si představíme

sklon α , ale v opačném směru. Tedy jako kdybychom zaměnili L za \check{C} . Proto úhel, pod kterým vidíme nejbližší konec odrazu, je γ . Z obr. 4 opět vidíme, že $\gamma = 90^\circ - (\varepsilon + \alpha)$ a úhlová délka je rozdíl úhlů, pod kterými vidíme nejbližší a nejbližší konec obrazu ve vodě, $\gamma - \beta = 2\alpha$.

Teď spočteme úhlovou šířku. Označme $SO\check{C}$ trojúhelník, z kterého tuto šířku budeme počítat, kde \check{C} je člověk, S střed mezi člověkem a lampou a O je bod odrazu. Víme, že nejbližší bod odrazu ve směru kolmém na spojnici člověka a lampy bude ve stejné vzdálenosti od člověka a od lampy. Takže spojnice obou odrazů bude procházet středem, úhel $O\check{C}S$ je polovina námi hledané úhlové šířky. Nejdřív určíme délky stran tohoto pravoúhlého trojúhelníku. Z obr. 5 vidíme, že $|SO| = h \operatorname{tg} \alpha$ (pozor, na obrázku je jenom průmět trojúhelníku $SO\check{C}$ do svislé roviny). Vzdálenost $\check{C}S$ je z Pythagorovy věty $\sqrt{(L/2)^2 + h^2}$. Potom pro úhlovou šířku dostáváme



Obr. 5

$$2 \operatorname{arctg} \frac{|SO|}{|\check{C}S|} = 2 \operatorname{arctg} \frac{h \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{(L/2)^2 + h^2}} .$$

Úloha II. 2 ... skoky do nebe

Ze střechy 10 m vysokého domu pouštíme s nulovou počáteční rychlostí gumové míčky na chodník. Míčky jsou všechny stejně velké, mají však hodně rozdílné hmotnosti. Do jaké maximální výšky může některý z míčků vyskočit, máme-li jich k dispozici a) 2, b) n . Všechny rázy považujeme za dokonale pružné, veškeré odpory prostředí zanedbejme.

Nejprve spočítejme jak se změní rychlost míčku při srážce s jiným o mnoho těžším míčkem. Označme v_1 rychlost těžší míčku (ta se při srážce nezmění) v_2 a v_3 rychlost lehčího míčku před a po srážce. Pokud srážku pozorujeme ze souřadné soustavy spojené s těžším míčkem, vidíme jak se lehčí míček odrazí rychlostí $v_2 + v_1$. Když se vrátíme do souřadné soustavy spojené se zemí, musíme navíc k původní rychlosti přičíst rychlost v_1 . Platí tedy, že

$$v_3 = 2v_1 + v_2 .$$

Změna kinetické energie lehčího míčku při srážce je

$$v_3^2 - v_2^2 = 4v_1^2 + 4v_1v_2 .$$

Tedy je tím větší, čím větší je v_1 a v_2 , takže nejvíce energie získá lehčí míček pokud dojde ke srážce těsně nad zemí.

a) V tomto případě je $v_1 = v_2$, tj. $v_3 = 3v_2$. Ze ZZE plyne, že výška do které míček vyletí je

$$h_1 = \left(\frac{v_3}{v_1}\right)^2 h_0 = 9h_0 = 90 \text{ m} .$$

b) V tomto případě je nejvýhodnější pustit všechny míčky společně, a to tak že budou padat těsně nad sebou a pod každým míčkem bude míček výrazně těžší. Bude tedy postupně docházet ke srážkám mezi míčky a to v pořadí od nejtěžších po nejlehčí. Před každou srážkou bude vždy rychlost lehčího míčku stejná (v_1) takže pokud se srazí $(n + 1)$ -vý a n -tý míček, bude rychlost $(n + 1)$ -tého míčku

$$v_{n+1} = 2v_n + v_1 .$$

Tato posloupnost se dá explicitně (tj. jako $v_n = f(n)$ a nikoliv $v_{n+1} = f(v_n)$) vyjádřit jako

$$v_n = (2^n - 1)v_1 .$$

Maximální výška do které může vystoupit n -tý míček je tedy

$$h_n = (2^n - 1)^2 h_0 .$$

Úloha II. 3 ... šroubovice

Mějme nekonečný drát stočený do pravotočivé šroubovice (helixu). Drát je rovnoměrně nabitý a osa helixu je totožná s osou z . Do vzniklého pole pošleme nabitou částici (drát je tenký, takže do něj částice nenarazí). V jistém časovém okamžiku známe její p_z a L_z , tedy z -ové komponenty hybnosti a momentu hybnosti. Můžeme v jiném okamžiku určit p_z , známe-li v tomto okamžiku L_z ?

(Problém lze vyřešit zcela exaktně. Naproti tomu není určitě nezajímavé zkusit situaci počítačově simulovat a dostat tak hledanou závislost v podstatě experimentálně, případně ověřit teoretickou předpověď.)

Tato úloha měla za cíl demonstrovat postup řešení fyzikální úlohy na základě symetrie. Toto částečně všichni řešitelé pochopili (mimo jiné proto, že se to zdá velmi přirozené). Bohužel nikdo nenašel symetrii úlohy zadané, ale jen úlohy zjednodušené, kde vzniká symetrie daleko nápadnější. Šlo o zanedbání vlastní vlastnosti spirály – toho, jak vlastně vypadá – má závity. Většina z vás z ní totiž udělala symetrický nabitý válec (jakoby velice hustá spirála), u kterého se pak z důvodu, že budí pěkné radiální pole nezávislé na z -ové souřadnici, zachovává nezávisle p_z i L_z (podél osy z nepůsobí na částici žádná síla, zachovává se p_z ; síla působící na částici míří vždy ve směru procházejícím osou, má tedy nulový moment vůči ose, což znamená zachování L_z).

Pro naši zadanou úlohu bylo podstatné si všimnout následující symetrie. Když jsme v nějakém bodě a posuneme se o jistý úhel φ (pro jednoduchost v kladném smyslu) okolo z -ové osy (zachovavše vzdálenost od osy) zároveň s tím, že se ve shodě se stoupaním spirály ještě posuneme mírně nahoru (pro pravotočivou spirálu), dostaneme se do bodu, ve kterém vše vypadá stejně, jako v bodě původním. Tím myslíme to, že se při takovém posunutí nezměnil potenciál. Ale to také znamená, že podél směru „dokola šikmo nahoru“ nepůsobí síla! Kdyby působila a my se posunuli popsáním způsobem, konali bychom práci, což by bylo v rozporu s konstantností potenciálu. A toho teď využijeme, napíšeme kolmost síly na náš směr matematicky.

Sílu působící na částici v určitém bodě (označme vzdálenost částice od osy r) můžeme rozložit na složky ve válcových souřadnicích F_r , F_φ a F_z (F_r je složka síly ve směru kolmo od osy, F_φ leží stejně jako F_r v rovině kolmé na osu a je na F_r kolmá, obíhající osu v kladném smyslu, F_z je složka rovnoběžná s osou). V těchto souřadnicích můžeme náš směr „dokola šikmo nahoru“ psát v daném bodě jako vektor s válcovými souřadnicemi $(0, 2\pi r, h)$ (h je stoupaní spirály; to, že je to správný vektor poznáme z toho, co říká – když půjdete kousek podél mě, zvednete se na tomto kousku o správnou vzdálenost, která odpovídá faktu, že jednou dokola musí znamenat zdvih h). Náš závěr o kolmosti síly na tento směr vyjádříme nulovostí skalárního součinu:

$$(F_r, F_\varphi, F_z) \cdot (0, 2\pi r, h) = 0 .$$

Dále si už jen uvědomíme, že platí $F_z = dp_z/dt$ a $rF_\varphi = M_z = dL_z/dt$. Pak se předchozí rovnice píše

$$\frac{1}{r} \frac{dL_z}{dt} 2\pi r + \frac{dp_z}{dt} h = 0 .$$

Dostáváme tedy

$$L_z + p_z \frac{h}{2\pi} = konst.,$$

což je námi hledaná souvislost mezi L_z a p_z .

Pokud by se tedy někdo pokusil úlohu úspěšně modelovat (simuloval by let částice a kreslil by v různých časech graf např. L_z proti p_z), měl by dostat body okolo přímky.

Úloha II.4 ... *the wall*

Kolmo proti stěně je postavený reproduktor, který vydává zvuk, jehož frekvence rovnoměrně roste v čase. Mezi stěnou a reproduktorem je pozorovatel. Co uslyší?

To, co pozorovatel uslyší (pokud není hluchý, případně pokud se to všechno neodehrává ve vakuu) je výsledek interference dvou vlnění. První k dotyčnému přichází přímo z reproduktoru, druhé od stěny. Pro úhlovou frekvenci vlnění od reproduktoru platí:

$$\omega_1 = kt .$$

Pro druhé vlnění, odražené od zdi, platí:

$$\omega_2 = \omega_1 - \frac{2dk}{v} .$$

Kde d je vzdálenost pozorovatele od zdi a v rychlost zvuku. Výslednou amplitudu můžeme napsat například ve tvaru:

$$A = A_0(\cos(\omega_1.t) + \cos(\omega_2.t)) .$$

Pokud tento výraz, ze kterého o tom, co pozorovatel uslyší, ještě moc nepoznáme, upravíme do srozumitelnějšího tvaru, dostaneme:

$$A = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) .$$

Což, pokud si uvědomíme, že ω_1 a ω_2 jsou si velice blízké, je zvuk s frekvencí prakticky stejnou jako, má zvuk vysílaný reproduktorem. Amplituda tohoto zvuku se mění frekvencí rovnou rozdílu frekvencí zvuku od reproduktoru a od zdi (tento rozdíl se s časem nemění, má konstantní velikost $2dk/v$). Pozorovatel tedy uslyší rázy, jejichž rázová frekvence bude lineárně růst se vzdáleností od stěny, frekvence vlastního zvuku poroste lineárně v čase.

Úloha II . P ... *problémovka z vody*

O prázdninách byli někteří organizatoři Fykosu sjíždět Vltavu a při této příležitosti je napadlo několik problémů, se kterými by od vás potřebovali poradit.

- Za jak dlouho doteče voda z Českého Krumlova do Prahy?*
- Na jakou stranu alumatky (hliníkové karimatky, která má z jedné strany hliníkovou fólii a z druhé izolační pěnu) je výhodné si lehnout?*
- Jak se v makarónech dělají díry?*

a) **Vašek Cviček:** Vědět by to snad mohli v Temelíně, za jak dlouho od nich voda (obohacená tritiem) doteče do Prahy.

Karel Žídek: Stačilo by, aby se protrhla přehrada Lipna, a voda by v Praze byla dřív, než by kdo čekal.

Zdeněk Cejnar: A jak rychle by se do Prahy mohla jednotlivá molekula. Někdo by se mohl napít vody z řeky (fuj), nasednout do letadla a v Praze by byl tak za hodinu, možná i dřív, kdyby měl po kapsách nějakou tu F16.

b) **Iva Kouřilová:** Výhodnější je lehnout si na stříbrnou stranu. Člověk pak působí jako děsnej boháč, když si jenom tak leží na stříbře.

c) **Nina Benešová:** Nejlepší myšlenka, která nás napadla byla o červotočích zaměřených místo na dřevo na špagety. Takový špagetotoč se na svojí pochoutku vrhne, proděraví ji a ze špagety tak vyrobí makarón.

No dobře, a teď tedy vážně. Po rozvážení všech pro a proti jsme si z vašich rad odnesli následující:

a) Otázka, za jak dlouho doteče voda z Krumlova do Prahy, je jistě značně nejednoznačná. Z řeky se může voda v průběhu cesty vypařit a nedorazit do Prahy vůbec. Zabývejme se ovšem jakýmsi průměrným případem. Předpokládejme, že pro každý úsek řeky platí, že nejdříve z něj vyteče voda, která do něj nejdříve vtekla (o oprávněnosti

takového předpokladu později). Pokud bychom znali objem vody v řece V mezi Krumlovem a Prahou a průměrný průtok v tomto úseku Q , můžeme dobu, za kterou voda dotече do Prahy spočítat jako $T = V/Q$. Pokusme se tedy odhadnout objem vody ve Vltavě. Odhadněme, že na délce asi 200 km má Vltava hloubku 2 m a šířku 20 m, tj. objem 8 milionů m^3 . Zapomněli jsme ovšem na Vltavskou kaskádu, jenom přehradu Orlik a Slapy mají dohromady objem téměř 1000 milionů m^3 . Objem zbytku řeky je proti tomu tedy zanedbatelný. Průtok Vltavou před soutokem se Sázavou (tj. v místě těchto přehrad) je průměrně $80 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ a tedy doba, za kterou dotече voda do Prahy je asi 5 měsíců. Nebýt vltavských přehrad, voda by do Prahy dotekla asi za 2–5 dnů, údaj, který jsme spočítali my, v podstatě říká, jak dlouho se voda zdrží v přehradách. Předpoklad uvedený na začátku, ale vůbec nemusí být splněn, znamenalo by to totiž, že v takové přehradě se pohybuje všechna voda, což jistě není pravda. V reálu spíše poteče jen voda ve středu přehrad, tudíž jakýsi efektivní objem přehrad (který vtékající voda musí opravdu protéct) bude mnohem menší než je výše uvedený údaj. Tedy výsledek 5 měsíců je spíše horní odhad požadované doby.

b) Obě varianty mají své pro a proti. Hliníková fólie je na karimatce zejména proto, že odráží zpět tepelné záření (stejně jako zrcadlo odráží světlo). Tento efekt je samozřejmě účinnější, je-li fólie nahoře. Na druhou stranu je hliník velmi dobrý tepelný vodič, takže záření, které pohltí odvede rychle do okolí a na dotyk se může zdát neustále studený. Je-li navrchu izolační fólie, pohltí většinu vyzářeného tepla a odvádí ho velmi pomalu, takže se na dotek zdá teplejší než hliník, ač teplo nevrací zpět. Podíváme-li se na situaci z praktického hlediska, spacák klouže mnohem více po fólii než po izolační pěně a množství vyzářeného tepla je v porovnání s odváděním jinými cestami malé.

c) Díry v makarónech vznikají tak, že těsto je protlačováno zařízením, které si můžeme představit jako mlýnek na maso. Na konci tohoto "mlýnku" je síto z trubiček, uvnitř kterých je pevný střed, kolem kterého je těsto natlačeno. Je přitom zahříváno, aby uschlo, a pak ukrojeno na patřičnou délku. Otázkou zůstává, jak je onen pevný střed v trubičkách uchycen. Navrhovali jsme dvě dle nás realizovatelné možnosti. Buď jsou středy uchyceny na začátku síta (jednoduché na realizaci, těsto uchycení obteče, ale problém může být v udržení drátků uprostřed trubičky) nebo se od pevného středu rozbývají tenká vlákna a mezery v lepivém těstě po nich se po protlačení raznicí spojí.

Úloha III.1 ... rotující koule

Nad vodorovnou podložkou se nachází homogenní koule o poloměru R , která rotuje úhlovou rychlostí ω_0 kolem vodorovné osy. Jakou rychlostí v_0 ji musíme vrhnout ve vodorovném směru kolmém na osu rotace, aby se po sérii dopadů na podložku zastavila? Valivý odpor je nulový, nikoliv však smykové tření.

Z první a druhé věty impulsové plyne

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad M = J \frac{d\omega}{dt} ,$$

kde F je třecí síla, kterou působí podložka na kouli, M je její moment vůči ose procházející středem koule. Moment setrvačnosti koule vůči ose procházející středem koule je $J = \frac{5}{2}mR^2$. Dále víme, že $M = FR$. Z těchto vztahů získáme rovnici

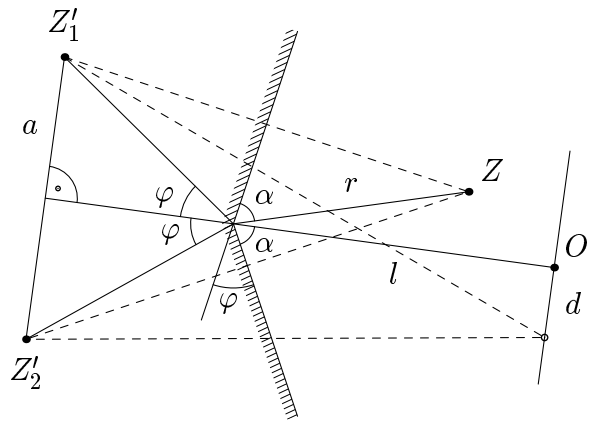
$$\frac{dv}{dt} = \frac{5}{2}R \frac{d\omega}{dt} .$$

Jejím řešením je $v = 5/2R\omega + C$, konstantu C určíme z počátečních podmínek $C = v_0 - 5/2R\omega_0$. Získáme tedy $v - v_0 = 5/2R(\omega - \omega_0)$. Jelikož chceme, aby se koule zastavila, tak musí být velikost rychlosti a uhlové rychlosti nulová. Můžeme tedy říci, že koule se zastaví pokud bude mít na počátku rychlost $v_0 = 5/2R\omega_0$. Počáteční rychlost má stejný směr jako bod, který je nejbližší podložce.

Úloha III.2 ... interference na zrcadlech

Mějme bodový zdroj (Z) monochromatického světla umístěný přede dvěma rovinnými zrcadly (obr. 2). Vzdálenost zdroje od bodu dotyku zrcadel je r a vzdálenost tohoto bodu od stínítka (S) je l . Na stínítku se zobrazují světlé a tmavé proužky. Dva sousední světlé proužky jsou od sebe ve vzdálenosti d . Spočtete úhel φ mezi zrcadly, můžete předpokládat, že je velmi malý. Předpokládejte též, že ze zdroje nedopadá žádné světlo přímo na stínítko.

Interferenci světla odraženého od zrcadel si můžeme představit jako interferenci ze dvou zdrojů, které vzniknou zobrazením zdroje Z oběma zrcadly. Jak je vidět z geometrie na obr. 6, tyto dva zdánlivé zdroje budou od stínítka vzdáleny oba dva stejně. Protože je úhel φ malý, vzdálenost obrazů zdroje od sebe je $2a = 2r\varphi$. Obdobně vzdálenost těchto obrazů od stínítka je rovna $l' = l + r$.



Obr. 6

Při interferenci se sčítají dvě harmonické vlny, které mají vůči sobě posunutou fázi. Maximální intenzita (světlé proužky)

je v místech, kde je tento posun fáze roven sudému násobku π , tedy když je dráhový rozdíl paprsků roven celému násobku λ . Naopak minimální intenzita (tmavé proužky) je v místech, kde je dráhový rozdíl paprsků roven lichému násobku vlnové délky světla $\lambda/2$.

V našem případě stačí určit vzdálenost maxima, které vznikne v bodě O , a dalšího nejbližšího maxima, neboť vzájemné vzdálenosti dalších proužků jsou přibližně stejné. První maximum je tedy od bodu O ve vzdálenosti d , kterou hledáme. Vzdálenosti tohoto maxima od jednotlivých zdrojů jsou:

$$d_1^2 = l'^2 + (d - a)^2, \\ d_2^2 = l'^2 + (d + a)^2.$$

Z toho plyne $d_1^2 - d_2^2 = 4da$ a protože a a d jsou mnohem menší než l platí $d_1 + d_2 = 2l'$. Tedy:

$$d_1 - d_2 = \frac{2da}{l'} = \frac{2dr\varphi}{l + r}.$$

Aby v tomto bodě vzniklo maximum musí být tento dráhový rozdíl roven λ . Tedy

$$\varphi = \lambda \frac{r + l}{2rd}$$

je hledaný úhel mezi zrcadly.

Úloha III.3 ... dnem vzhůru

Ve velké nádobě s vodou je částečně ponořena dnem vzhůru válcová sklenice. Hladina vody v nádobě i ve sklenici je stejná a je vzdálena $l = 10$ cm ode dna sklenice. Teplota vzduchu je $t_0 = 20^\circ\text{C}$ a atmosférický tlak je $p_0 = 100$ kPa. O jakou výšku h stoupne hladina vody ve sklenici, jestliže se teplota sníží o $\Delta t = 10^\circ\text{C}$ a tlak stoupne o $\Delta p = 2,0$ kPa ?

Tlak plynu ve skleničce je roven vnějšímu tlaku, což lze nahlédnouti následující úvahou. V kapalině je všude stejný tlak, poněvadž ji považujeme za nestlačitelnou. V jistém bodě pod skleničkou bude tlak roven tlaku plynu ve skleničce plus hydrostatickému, ale ten se musí rovnat tlaku atmosférickému plus stejný hydrostatický tlak, poněvadž jsou hladiny vyrovnány. Tady si někteří řešitelé uvědomili, že sklenice neplave ve vodě, nýbrž musí být nějak upevněna. Vztlaková síla by skleněnou nádobu neudržela nad vodou, kvůli menší hustotě vody, a tlaková síla plynu uvnitř je stejná jako tlaková síla atmosférického tlaku. Za toto povšimnutí jsem uděloval bonus jeden bod. Teď se můžeme zabývat plynem ve sklenici, který budeme považovat za ideální. Můžeme tvrdit, že pro něj platí stavová rovnice ve tvaru

$$\frac{pV}{T} = \text{konst.} \quad (3)$$

Při změně vnějšího tlaku na tlak $p_1 = p_0 + \Delta p = 102$ kPa a teploty na $T_1 = T_0 + \Delta T = 283,15$ K se budeme zajímat o ustálený stav, kdy se teplota plynu ve skleničce vyrovná s okolní. Pak pro tlak ve sklenici bude platit

$$p_2 = p_1 - h\rho g ,$$

kde $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je tíhové zrychlení a h je výška sloupce vody, o kolik stoupla hladina ve skleničce. Mnoho řešitelů zapomnělo vzít do úvahy hydrostatický tlak vystouplého sloupce vody ve sklenici. Nádobu s vodou považujeme za velkou, proto pokles hladiny v nádobě zanedbáme. Pak si objem plynu vyjádříme jako $V_0 = lS$ pro teplotu T_0 a pro teplotu T_1 jako $V_1 = (l - h)S$, kde S je plocha podstavy skleničky. Dosazením do (3) získáme kvadratickou rovnici ve tvaru

$$0 = h^2 \rho g - h(l\rho g + p_0 + \Delta p) + \Delta pl - \frac{p_0 l \Delta T}{T_0} .$$

Řešení jsou dvě $h_1 = 10,3$ m, které zjevně nevyhovuje a $h_2 = 5,3$ mm.

Úloha III.4 ... výpar vody

Za jak dlouho se vypaří voda ze sklenice o výšce $h = 10$ cm za normálních podmínek? Předpokládejte, že vlhkost vzduchu těsně nad hladinou je neustále 99%.

Představte si, že by při odpařování na hladinu vody foukal ventilátor. Pak by se voda určitě odpařila mnohem rychleji, než v zadaném případě. Naopak kdybychom stejně velkou vrstvu vody umístili do dlouhé tenké trubice, ve které by vzduch prakticky neproudil, pak by se voda téměř neodpařovala. Z těchto příkladů můžeme usoudit, že rychlost vypařování závisí na rychlosti difuze molekul vodní páry z tenké vrstvičky téměř syté páry nad hladinou *) do takové vzdálenosti od hladiny, kde je rychlost proudění okolního vzduchu srovnatelná s rychlostí difuze molekul páry (tenká vrstva vzduchu nad hladinou je díky

*) V zadání bylo uvedeno že vlhkost vzduchu v této vrstvičce je 99%, což je nepřesné. Ve skutečnosti se vlhkost vzduchu v této vrstvičce mnohem více blíží ke 100%.

viskozitě vzduchu v klidu). Výpočet této rychlosti je však natolik složitý, že je prakticky neproveditelný.

Pozn. Někteří z vás našli řešení této úlohy v knize Feynmanovy přednášky z fyziky (př. 1.3, řešení na str. 713, vydání z roku 2000):

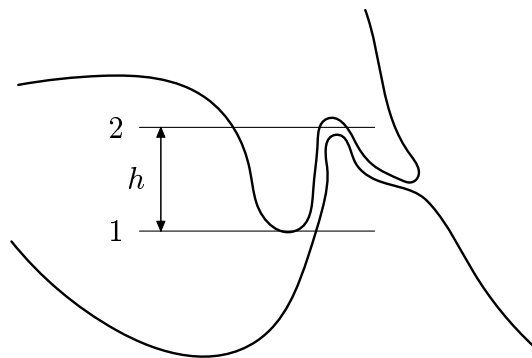
Je výhodné uvažovat rovnovážný stav v uzavřené nádobce, kdy počet molekul odpařujících se z vody je roven počtu molekul kondenzujících zpět do vody. Bude-li nádobka otevřená, uplatní se jen proces odpařování. Počet molekul kondenzujících do vody závisí jen na koncentraci n v tenké vrstvě o výšce rovné střední volné dráze nad hladinou a na střední rychlosti v . Za 1 s kondenzuje do vody povrchem o obsahu S celkem $nSv/6$ molekul (1/6 molekul se pohybuje směrem k hladině). Označíme-li n_0 koncentraci molekul vody ve sklenici a h výšku hladiny, všechna voda se vypaří za dobu $t = 6n_0h/nv$. Odhadneme-li $n_0 = 3,3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$, $h = 10 \text{ cm}$, $n = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ a $v = 600 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, dostaneme $t = 3,3 \cdot 10^6 \text{ s}$, tj. asi 1 měsíc.

Podle našeho názoru je tento výsledek nesprávně. Autor zde totiž nějakým záhadným způsobem odhaduje koncentraci molekul vodní páry nad hladinou na $1 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$. Pokud si však v tabulkách najdete tlak syté páry vody při pokojové teplotě (asi 2 kPa), snadným výpočtem si ověříte, že tato koncentrace je o čtyři řády vyšší.

Úloha III . P ... občasný pramen

Na Slovensku ve Slovenském krasu je zajímavý pramen. Většinu času tento pramen vypadá, jako by byl vyschlý, a potom z něj najednou začne po nějakou dobu vytékat voda, a poté opět nic. Toto se stále opakuje. Jednotlivé intervaly jsou docela pravidelné (a dlouhé). Jak to funguje?

Vzhledem k tomu, že občasný pramen funguje už poměrně dlouho (jinak by si ho nikdo ani nevšiml, a tudíž by ani nemohl dostat jméno) a navíc zřejmě vznikl samovolně, je třeba hledat co možná nejjednodušší řešení problému, jak že to vlastně je zařízené, což nám z úvah vylučuje všechny modely obsahující nějaké pohyblivé části, pohádkové bytosti, případně vodovod...



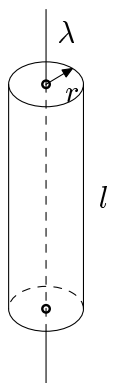
Obr. 7

Jako nejjednodušší a tedy i nejpravděpodobnější se jeví řešení schématicky znázorněné na obr. 7. Voda přitéká ze zcela normálního pramene do skalní jeskyně (ta klidně může existovat, je to krasová oblast) a pomalu ji naplňuje. Až hladina dosáhne výšky h voda přeteče a začne odtékat, pokud je průřez spáry, nebo pukliny, kterou voda vytéká dostatečně (ale ne příliš) velký, odtéká voda rychleji, než se stačí doplňovat z pramene. Protože ale spára končí níž, než je místo, ve kterém do ní voda z jeskyně vtéká, odtékající voda "vysaje" celou jeskyni, ta se potom zase pomalu naplní a děj se opakuje.

Úloha IV . 1 ... vesmírná stříkačka

Představte si, že ve vakuu mimo gravitační pole stříkáme vodní paprsek. Kromě tohoto paprsku je zde kolmo (mimoběžně) k jeho původnímu směru umístěn nabitý nekonečný drát s délkovou hustotou náboje λ . Voda je stříkána z velmi velké vzdálenosti s počáteční rychlostí v . Vzdálenost přímky, ve které je stříkána voda (ve které se na začátku pohybuje vodní paprsek) a drátu je d . Spočtěte úhel, o který se odchýlí vodní paprsek od původního směru. Molekuly vody si představte jako elektrické dipóly, jejich

vzájemné působení zanedbejte a také zanedbejte jejich moment setrvačnosti (tj. představte si, že všechna hmotnost molekuly je soustředěna uprostřed mezi náboji, které jsou nehmotné).



Obr. 8

Nejprve musíme vypočítat sílu, kterou nabitý drát působí na jednu molekulu vody. K tomu je potřeba určit elektrické pole drátu – viz obrázky (8) a (9). Nejdříve uvažujme případ, kdy je drát nabitý kladně (pro tento případ jsou obrázky (8) a (9) nakresleny). Výsledné pole \mathbf{E} v bodě A je dáno sečtením příspěvků $\Delta\mathbf{E}$ od jednotlivých bodů drátu. Celkový příspěvek $\Delta\mathbf{E}$ od bodů B a C, které jsou symetrické vůči bodu S, leží v rovině kolmé na drát a má směr spojnice bodů A a S. Tuto vlastnost má i výsledné pole \mathbf{E} v libovolném bodě, což je důsledkem nekonečnosti drátu. Zbývá tedy určit velikost E tohoto pole. To lze udělat sečtením (v tomto případě integrací) příspěvků od jednotlivých bodů drátu. V našem případě lze užít také Gaussovu větu, která říká, že celkový tok elektrické intenzity \mathbf{E} uzavřenou plochou S (integrál na levé straně) je přímo úměrný celkovému náboji Q v prostoru vymezeném plochou S :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} .$$

Uvažujme válec o poloměru r a výšce l , jehož osa splývá s drátem (viz obrázek (??)). Celkový náboj Q uvnitř válce je roven λl . Tok elektrické intenzity podstavami pláště je nulový, neboť vektor \mathbf{E} leží v rovině podstav. Protože je elektrická intenzita \mathbf{E} kolmá na plášť válce ve všech bodech a její velikost je na celém plášti stejná, je tok pláštěm válce rovný součinu povrchu pláště a velikosti elektrické intenzity E . Gaussova věta má tedy tvar:

$$2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} .$$

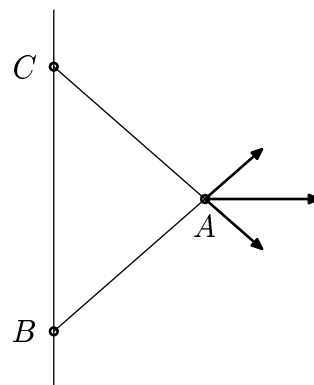
Pokud by byl drát nabitý záporně, potom se změní pouze směr elektrického pole na opačný.

Ze známého elektrického pole drátu již můžeme určit sílu působící na jednu molekulu vody (neuvažujeme vzájemné působení molekul vody). Označme r vzdálenost středu molekuly od drátu. Molekulu si můžeme představit jako dva pevně spojené náboje opačného znaménka o velikosti Q , jejichž vzájemná vzdálenost je l . Nejprve opět uvažujme případ, kdy je drát nabitý kladně. Pokud je moment setrvačnosti dostatečně malý, potom je spojnice obou nábojů v každém okamžiku rovnoběžná s vektorem \mathbf{E} elektrické intenzity – viz obrázek (10). Blíže k drátu je vždy záporně nabitá část molekuly, neboť tato poloha je narušena od opačné (ta je také rovnovážná) stabilní. Molekula vody je tedy k drátu přitahovaná silou F , pro kterou platí:

$$F = Q \left(E_{r-l/2} - E_{r+l/2} \right) = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{l}{2}} - \frac{1}{r + \frac{l}{2}} \right) = \frac{\lambda Q l}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2 - \frac{l^2}{4}} .$$

Součin Ql je roven velikosti elektrického dipólového momentu p jedné molekuly vody. Vzdálenost nábojů l je mnohem menší než vzdálenost r molekuly od drátu. Na jednu molekulu vody tudíž působí přitažlivá síla o velikosti:

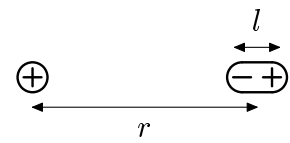
$$F = \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2} .$$



Obr. 9

Snadno nahlédneme, že v případě záporně nabitého drátu je výsledná síla stejná včetně směru působení.

Protože zanedbáváme vzájemné působení molekul, bude výsledný pohyb vodního paprsku stejný jako pohyb jedné molekuly. (Molekuly mezi sebou působí poměrně značnými silami a pohybují se velkými rychlostmi v důsledku tepelného pohybu. Výslednice mezimolekulových sil působících na jednu konkrétní molekulu je však prakticky nulová, neboť mezimolekulové síly mají různé směry. Tepelný pohyb molekul je chaotický, a proto k pohybu kapaliny jako celku nepřispívá. To znamená, že pokud bychom chtěli zpřesnit náš výpočet uvažováním vzájemného působení molekul, potom by bylo nejdůležitější vzájemné působení elektrických dipólů molekul, které se v důsledku působení vnějšího pole (pole drátu) orientují. Námí použitá aproximace má tedy oprávnění.)



Obr. 10

Vzhledem k počátečním podmínkám pohybu a charakteru silového působení drátu na molekulu bude pohyb vodního paprsku rovinný. (Pro obecnou počáteční rychlost to ale není pravda!) Síla působící na molekuly v této rovině klesá s druhou mocninou vzdálenosti od drátu. Pohyb molekul v tomto poli bude tedy stejný jako pohyb hmotného bodu pohybujícího se v gravitačním poli způsobeném bodovým tělesem umístěným v průsečíku drátu a roviny pohybu vodního paprsku. Vodní paprsek se tedy bude pohybovat po hyperbole. Zbývá určit parametry této trajektorie. To stejným způsobem jako v úloze ze III. dílu seriálu.

Délku hlavní poloosy hyperboly označme a a délku vedlejší poloosy b . Z geometrie hyperboly plyne $b = d$ a podle seriálu platí

$$a = \frac{k}{mv^2} .$$

Úhel ϑ je úhel, o který se vodní paprsek odchýlí od původního směru. Mezi úhlem φ (úhel asymptoty a hlavní osy) a úhlem ϑ platí vztah $\vartheta = \pi - 2\varphi$. Dostáváme tedy:

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{a}{b} = \frac{k}{mv^2 d} .$$

Vodní paprsek se tedy odchýlí od původního směru o úhel:

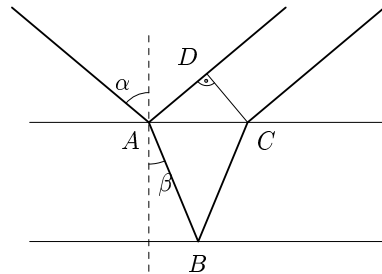
$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda p}{2\pi \varepsilon_0 m v^2 d} .$$

Hmotnost jedné molekuly vody lze snadno určit z Avogadrovy konstanty a z molární hmotnosti vody (určí se z relativních atomových hmotností vodíku a kyslíku). Velikost elektrického dipólového momentu jedné molekuly vody lze například určit měřením statické elektrické permitivity vody. Námí odvozený vztah pro odklon vodního paprsku bude se skutečností souhlasit tím více, čím menší bude teplota vody (musí ale zůstat kapalná). Je to způsobeno tím, že při vyšší teplotě je energie tepelného pohybu větší. Tepelný pohyb se totiž netýká pouze translačních stupňů volnosti ale i vnitřních stupňů volnosti molekul (např. rotačních a vibračních). Vzhledem k tepelné energii v rotačních stupních volnosti nedojde k úplné orientaci elektrického dipólu do směru vnějšího elektrického pole. Důsledkem je pak menší přitažlivá síla a tedy i menší odklon vodního paprsku. Naše řešení rovněž neuvažuje skutečnost, že vlivem vnějšího pole dochází k polarizaci molekul vody (zvětšuje se velikost jejich elektrického dipólového momentu). V tomto případě tento jev není příliš výrazný (narozdíl od jiných kapalných dielektrik), neboť velikost permanentního dipólového momentu molekul vody je poměrně velká.

Úloha IV.2 ... ropná skvrna

Mějme na vodní kaluži kruhovou skvrnu od oleje o poloměru 1 m a tloušťce $10\ \mu\text{m}$. Na tuto skvrnu se díváme z její osy z výšky 1 m. Skvrna je osvětlena bílým světlem ze všech stran. Světlo z jednoho směru můžeme považovat za koherentní. Jaké barvy na hladině uvidíme?

Uvažujme místo, kde světlo na vrstvu dopadá pod úhlem α (úhly měříme od kolmice k vrstvě). Část vlny se odráží na rozhraní vzduch–olej (paprsek i na obr. 11), zbytek projde a opět se odrazí (či projde) od rozhraní olej–voda. V bodě C se opět vlna částečně odrazí a částečně projde atd. Nás zajímají zejména vlny odražené zpět do vzduchu. Tyto vlny se spolu skládají, v běžných případech stačí uvažovat první dvě odražené vlny i a vi , ostatní mají zanedbatelnou intenzitu. Při skládání vln i a vi hraje stěžejní roli rozdíl optických drah Δ obou vln. Spočtíme ho tedy nyní. Index lomu vody je menší než index lomu oleje, tedy při odrazu v bodě A dochází ke změně fáze vlnění (dráhový rozdíl $\lambda/2$), kdežto při odrazu v bodě B se fáze nemění. Dráhový rozdíl tedy je $\Delta = 2n|AB| - |AD| + \lambda/2$. Nesmíme zapomenout na to, že vlnoplocha je kolmá k paprsku, tudíž odečítáme vzdálenost $|AD|$. Indexem lomu násobíme, neboť do opticky hustého prostředí se vejde n -krát více vlnových délek než do vakua (frekvence vlnění je stejná, ale rychlost je menší). Z geometrie na obrázku a zákona lomu $\sin \alpha = n \sin \beta$ dostáváme postupně



Obr. 11

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos \beta} - 2d \tan \beta \sin \alpha + \frac{\lambda}{2} = \frac{2dn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{2d \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} + \frac{\lambda}{2},$$

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}.$$

Aby interference byla konstruktivní, musí být dráhový rozdíl celočíselným násobkem vlnové délky ve vakuu. Tedy podmínka pro zesílení určité vlnové délky v určitém úhlu je

$$4d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (2k - 1)\lambda.$$

Rozdíl dvou sousedních vlnových délek, které se zesílí je

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{8d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{4k^2 - 1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}},$$

$$\Delta \lambda < \frac{\lambda_c^2}{2d\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Pro $\lambda_c = 800\ \text{nm}$, $n = 1,5$ je $\Delta \lambda < 30\ \text{nm}$. Viditelné spektrum je široké asi $500\ \text{nm}$, tedy v každém místě se zesílí alespoň 16 různých vlnových délek. Na hladině tedy uvidíme opět bílé světlo, abychom viděli duhové barvy, musela by vrstva být užší.

Úloha IV . 3 ... měděný drát

Máme 50 kg mědi. Jaký nejdelší drát z tohoto množství materiálu lze vytvořit pro přenášení elektrického proudu 1 A, je-li okolní teplota 20 °C ? (Tepelnou kapacitu okolního vzduchu a přírody považujte za nekonečnou.)

V důsledku vnitřního odporu měděného drátu (s kruhovým průřezem) vzniká při průchodu elektrického proudu výkon, který se projevuje jako Jouleovo teplo a drát se zahřívá. Jedinou podmínkou je, aby se drát neroztavil. Uvnitř drátu vzniká tepelný výkon P daný vztahem $P = RI^2$, kde I je konstantní proud 1 A a R je elektrický odpor drátu daný vztahem vyjadřujícím zároveň závislost el. odporu na termodynamické teplotě T : $R = \varrho_0[1 + \beta(T - T_0)]l/\pi r^2$, kde T_0 je teplota, při níž má měď měrný el. odpor ϱ_0 , β je teplotní součinitel el. odporu mědi a r je poloměr drátu.

Drát se na povrchu ochlazuje tepelnou výměnou s okolím a tepelným zářením. Protože ze zadání uvažujeme okolí s nekonečně velkou tepelnou kapacitou, výměnu tepla bude charakterizovat pouze přestup tepla na rozhraní měď-vzduch daný vztahem $Q_1 = \gamma(T - T_v) 2\pi r l$, kde Q_1 je tepelný výkon přestupu tepla, T_v je teplota vzduchu a γ je příslušný koeficient.

Budeme-li považovat drát za absolutně černé těleso, bude tepelný výkon zářením Q_2 daný Stefan-Boltzmannovým vztahem $Q_2 = \sigma(T^4 - T_v^4) 2\pi r l$, kde σ je Stefan-Boltzmannova konstanta. Celkový ochlazující tepelný výkon je tedy $Q = Q_1 + Q_2$. Mezi výkony P a Q musí nastat rovnováha při teplotě T , která leží těsně pod bodem tání mědi, z čehož získáme minimální poloměr drátu r_{min} .

$$\frac{\varrho_0[1 + \beta(T - T_0)]lI^2}{\pi r^2} = [\gamma(T - T_v) + \sigma(T^4 - T_v^4)] 2\pi r l ,$$

vyjádřením r :

$$r_{min}^3 = \frac{\varrho_0[1 + \beta(T - T_0)]I^2}{[\gamma(T - T_v) + \sigma(T^4 - T_v^4)] 2\pi^2} .$$

Uvážíme-li navíc teplotní roztažnost mědi, zkorigujeme poloměr i jednotku délky faktorem $[1 + \alpha(T - T_v)]$, kde α je součinitel délkové roztažnosti:

$$r_{min}^3 = \frac{\varrho_0[1 + \beta(T - T_0)]I^2}{[\gamma(T - T_v) + \sigma(T^4 - T_v^4)][1 + \alpha(T - T_v)]^3 2\pi^2} .$$

Nyní, známe-li r_{min} vypočteme maximální délku drátu L (za normální teploty) takto tenkého drátu o hmotnosti $m = 50$ kg. Zřejmě platí $L = m/\varrho \pi r_{min}^2$ a tedy

$$L = \frac{m \pi^{1/3} [1 + \alpha(T - T_v)]^2}{\varrho} \left(\frac{[\gamma(T - T_v) + \sigma(T^4 - T_v^4)]}{\varrho_0[1 + \beta(T - T_0)]I^2} \right)^{2/3} .$$

Po dosazení tabulkových hodnot $\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $\gamma = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, $T = 1356 \text{ K}$, $T_0 = 273 \text{ K}$, $\varrho = 8930 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a námi dané teploty vzduchu $T_v = 293 \text{ K}$ a hmotnosti $m = 50$ kg lze získat odhad $L \approx 2200 \text{ km}$.

Proto, abychom mohli spojit vznik tepla uvnitř vodiče a jeho ochlazení na povrchu, je třeba uvážit tepelnou vodivost drátu, díky níž se dostane teplo k povrchu. Aby tomu tak bylo, musí být ale určitý rozdíl teplot mezi středem a povrchem drátu, čímž ale vznikne i rozdílný měrný el. odpor a tím i nižší výkon uprostřed drátu, který tak částečně zpětně reguluje zvýšenou teplotu.

Samozřejmě lze problém řešit diferenciální rovnicí 2.řádu v polárních souřadnicích, která však nakonec ukáže, že díky velmi dobré tepelné vodivosti mědi a velmi malé závislosti odporu na teplotě bude rozdíl teplot zanedbatelný. Navíc relativně špatné ochlazování na povrchu limituje teplotní spád uvnitř drátu.

Další problémy s řešením se objevily v souvislosti s konstantou přestupu tepla. Jednak byl problém ji najít a jednak tato konstanta už zahrnuje výměnu tepla zářením. Ale lze tedy předpokládat, že platí pro malé teploty a tím pádem při vyšších teplotách, kdy tok zářením roste se čtvrtou mocninou, přejde lineární vztah pouze ve vztah pro výměnu tepla vedením.

Úloha IV.4 ... zvířátko

Představte si zvířátko, jehož charakteristický rozměr je L . Odhadněte, jak na L závisí vzdálenost, kterou je schopné urazit po poušti.

A jak závisí na L jeho rychlost běhu po rovině a do kopce? Určete také, jak závisí na velikosti zvířátka výška jeho výskoku.

Nápověda: Uvažte, že $s = vt$. Dále např. uveďte, jak závisí hmotnost zvířátka na L : Víme, že $m = \rho V$, kde ρ uvažujme konstantní a V je úměrné L^3 , tedy $m \sim \rho L^3 \sim L^3$, hmotnost zvířátka tedy závisí přímo úměrně na L^3 .

Předpokládejme, že zvířátko je savec, dále předpokládejme, že frekvence kroků zvířátka, při klidné chůzi, nezávisí na jeho velikosti (tj. na L), a že zvířátka se neliší v tělesné stavbě, ale pouze ve velikosti.

Nejdříve se zabývejme otázkou, jak daleko je schopno dojít na poušti. Pravděpodobně nejvíce limitujícím faktorem pro zvířátko je voda (například člověk bez jídla vydrží asi tak měsíc, bez vody nanejvýš pět dní), tu zvířátko jdoucí po poušti spotřebovává hlavně na ochlazování svého organismu. Množství vody v těle zvířátka je úměrné jeho objemu, tedy: $M_{voda} \sim L^3$. Hlavním zdrojem ohřevu organismu zvířátka je teplo, které se v něm uvolňuje (pokud zanedbáme slunce — jeho vliv se dá těžko popsat, nevíme, kde poušť je, jak dlouho tam trvá den...), množství uvolněného tepla je zřejmě úměrné objemu organismu a tudíž dostáváme vztah: $Q \sim L^3$. Toto odpadní teplo je třeba odvést právě pomocí vody. Pro hmotnost ztracené (vypocené) vody za jednotku času tedy dostáváme: $M_{vyp} \sim L^3$.

Vidíme tedy, že doba, po kterou je zvířátko schopno jít po poušti, nezávisí na L (zásoby vody jsou úměrné L^3 a rychlost, s jakou je zvířátko ztrácí, také).

Jediné, v čem se tedy zvířátka budou lišit, je délka kroku, ta je úměrná L . Pro celkovou vzdálenost tedy můžeme psát: $s \sim L$ (všechna zvířátka udělají stejný počet kroků, které mají délku přímo úměrnou L).

Nyní se zabývejme tím, jak rychle je zvířátko schopno běžet. Pravděpodobně nejvýraznější vliv na rychlost zvířátka má maximální frekvence kroků (nezaměňovat s frekvencí kroků při klidné chůzi) zvířátka. Pokusme se určit, jak závisí na L .

Na to, aby zvířátko udělalo krok, musí posunout končetinu směrem dopředu, tento pohyb je obecně nerovnoměrně zrychlený. Hmotnost končetiny je úměrná L^3 , síla, která ji urychluje, je úměrná L^2 (síla svalů závisí na počtu svalových vláken, a tedy na jeho průřezu), celkově tedy pro zrychlení máme: $a \sim L^{-1}$. Pokud použijeme vztah pro rovnoměrně zrychlený pohyb (řekněme, že si pohyb končetiny "rozsekáme" tak, že v jednotlivých částech celkového pohybu se pohybuje rovnoměrně zrychleně) $t = \sqrt{2s/a}$ a uvědomíme si, že $s \sim L$, dostaneme pro délku trvání kroku $T \sim L$ a protože délka kroku je rovněž přímo úměrná L , zjišťujeme, že z tohoto pohledu rychlost nezávisí na L .

Pokud započítáváme odporovou sílu, musíme si uvědomit, že $F_{odp} \sim L^2 \cdot v^2$ pro sílu, kterou je schopno působit zvířátko platí $F \sim L^2$ a tedy dostáváme, že rychlost nezávisí na L .

Při běhu do kopce se ve vyjádření odporové síly objeví další člen popisující sklon kopce, dostaneme tedy $F_{odp} \sim L^2 \cdot v^2 + L^3 \sin \alpha$ pro rychlost máme $v \sim \sqrt{k_1 - k_2 L \sin \alpha}$, kde k_1, k_2 jsou konstanty.

Při výskoku musí platit zákon zachování energie, tedy to, že práce vykonaná zvířátkem se spotřebuje na jeho přemístění do větší výšky. Pro práci máme: $W = F \cdot s$ a tedy při uvážení $F \sim L^2$ a $s \sim L$ (s je dráha, po které můžou svaly zvířátko urychlovat, nezaměňujte ji s výsledkem první části — jak daleko dojde zvířátko na poušti) dostaneme $W \sim L^3$. Pro změnu potenciální energie zvířátka máme $\Delta E = mgh$, víme, že $m \sim L^3$, celkově tedy opět dostáváme, že výška výskoku nezávisí na L .

Pokud se vám výsledky zdají podivné, není to nic zvláštního, aby se tato úloha dala vůbec nějak řešit, musíme zanedbat spoustu podstatných vlivů, které neumíme jednoduše popsat.

Úloha IV . P ... míček ve vodě

Máme trubku ve tvaru písmene V, jedno rameno je svislé a na konci otevřené, druhé s ním svírá ostrý úhel a je na konci (nahore) zatavené. Trubka je téměř plná vody a v zataveném rameni nahore plave míček. Vymyslete způsob, jak dostat míček ven tak, aby voda nevytekla. Nesmíte ji vypustit, svislé rameno musí zůstat pořád svislé a do trubky nesmíte nic strkat.

Vyskytlo se několik zajímavých návrhů. Ale fungovaly jenom dva. Oba využívaly setrvačných sil. Stačí si uvědomit, že vztlaková síla působí opačným směrem než síla působící v systému (výslednice tíhové a zdánlivých sil $F = F_G + F_Z$). Uvažujme, že se síla moc nemění na rozměrech míčku, potom si to můžeme představit jako ekvivalentní k normální vztlakové síle v kapalině, jenom místo tíhového zrychlení vezmeme zrychlení $g' = F/m$. Takže vztlaková síla bude působit opačným směrem než F . Stačí nám tedy najít takovou zdánlivou sílu, aby výslednice směřovala do středu zkumavky.

První návrh: Setrvačnou sílu vytvoříme pohybem zkumavky směrem dolů větším zrychlením než tíhovým. Potom výsledná síla v soustavě zkumavky bude působit směrem nahoru a míček se bude pohybovat opačným směrem — ke spojení trubek, potom bychom zastavili a kulička by vyplavala správnou trubkou. Toto řešení má trochu technické problémy, protože je celkem těžké pohybovat se velkým zrychlením dost dlouho.

Druhý návrh: Jako setrvačnou sílu vezmeme odstředivou. Třeba když jedete v autě v zatáčce, tak na vás působí odstředivá síla. V tomto návrhu potřebujeme, aby projekce síly na směr stěny trubky působila směrem nahoru (výsledná síla na míček potom působí opačně — směrem dolů k spojnicí): $F_0 > F_G \operatorname{tg} \alpha$. To můžeme dosáhnout velkými otáčkami, nebo velkou vzdáleností osy rotace od zkumavky.

Vtipné, ale špatné řešení bylo, že uzavřeme zkumavku a ohřejeme až se všechna voda vypaří, a potom míček spadne dolů. Má to však problém, že hustota té páry bude stejná jako vody, takže vztlaková síla stejná jako u vodě.

Úloha V . 1 ... ošklivá sonda

Představte si rovinný povrch nějakého materiálu, zaveďme souřadnou soustavu tak, že povrch splývá s rovinou $z = 0$. Každý bod povrchu popíšeme odrazivostí R , což je poměr odražené a dopadající intenzity záření. Víme, že ve směru osy x je R konstantní a ve směru osy y je $R(y)$ periodickou funkcí s periodou P . Máme k dispozici sondu, která

svítí na povrch a zpětně snímá odraženou intenzitu. Můžeme s ní pohybovat ve směru osy y . Sonda však není nekonečně "jemná", svazek nemůžeme zaostřit do jednoho bodu, vždy budeme mít stopu o nenulové šířce D . Sonda tedy snímá průměr odražené intenzity z oblasti, na kterou svítí. Vaším úkolem je napsat, jak pomocí takové sondy zjistit periodu odrazivosti P . Lze to pro všechny rozměry sondy?

Protože sonda není schopna zaostřit světelný svazek do jednoho bodu, odpovídá naměřená odrazivost R_m průměrné hodnotě odrazivosti R v oblasti, na kterou sonda svítí. Funkce $R(y)$ má periodu P (základní perioda), a proto bude mít i naměřená odrazivost $R_m(y)$ periodu P . Tato perioda však nemusí být základní. To znamená, že pro základní periodu P_m naměřené odrazivosti platí: $P_m = P/n$, kde n je přirozené číslo, nebo naměřená odrazivost je konstantní funkce. O tom, že periody P a P_m se obecně nerovnají, se můžeme jednoduše přesvědčit v případě, kdy má stopa tvar čtverce o straně délky D . Pokud je totiž rozměr sondy D roven celočíselnému násobku periody P , potom je naměřená odrazivost $R_m(y)$ vždy konstantní funkcí a nemůžeme tedy určit periodu odrazivosti P .

Perioda P_m naměřené odrazivosti je tudíž dolním odhadem periody P odrazivosti povrchu. Odhad periody P lze zlepšit, pokud použijeme různé rozměry a tvary stop (změnu tvaru nebo rozměru stopy lze docílit použitím clon).

Pokud bude rozměr sondy mnohem menší než je perioda odrazivosti povrchu, potom naměřená odrazivost $R_m(y)$ bude mít prakticky stejný tvar jako odrazivost povrchu $R(y)$. V tomto případě se tedy periody P_m a P budou rovnat. V opačném případě, kdy budou rozměry sondy mnohem větší než je perioda odrazivosti, bude naměřená odrazivost prakticky konstantní funkce a periodu odrazivosti povrchu nebude možno určit.

Abychom mohli určit periodu odrazivosti povrchu, je tedy nutné, aby tato perioda nebyla mnohem menší než rozměr stopy sondy. Dolním odhadem periody odrazivosti povrchu je perioda naměřené odrazivosti. Odhad lze zlepšit použitím různých tvarů a rozměrů sond. Pokud se tvary naměřených odrazivostí $R_m(y)$ od sebe příliš neliší a všechny mají stejnou periodu, potom je velmi pravděpodobné, že je tato perioda rovna periodě odrazivosti povrchu. V případě, že všechny naměřené odrazivosti jsou konstantní funkce, je zřejmě perioda odrazivosti povrchu mnohem menší než je rozměr stop.

K provedení důkladnější analýzy problému „ošklivé sondy“ je potřeba užít trochu „složitější“ matematický aparát. Uvažujme tvar stopy, který je osově symetrický vzhledem k osám x a y . Tento tvar popíšeme sudou funkcí $f(z)$ definovanou na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Funkce $g(z)$, která popisuje stopu, jejíž rozměr ve směru osy y je roven $2D$, je dána vztahem $g(z) = Df(z/D)$. Pro naměřenou odrazivost potom platí:

$$R_m(y) = \frac{\int_{-D}^D 2g(z)R(y+z) dz}{\int_{-D}^D 2g(z) dz} = \frac{\int_{-1}^1 f(z)R(y+Dz) dz}{\int_{-1}^1 f(z) dz} .$$

Pokud je odrazivost $R(y)$ dostatečně hladká funkce, potom lze užít rozvoj do Fourierovy řady, neboť $R(y)$ je periodická funkce s periodou P :

$$R(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \exp\left(\frac{2\pi i n y}{P}\right) .$$

Je-li $R(y)$ dostatečně hladká, potom je možno zaměnit pořadí sumace a integrace (řadu je možno integrovat člen po členu). Koeficienty A_n jsou jednoznačně určeny funkcí $R(y)$, neboť platí:

$$\int_0^P R(y) \exp\left(-\frac{2\pi i m y}{P}\right) dy = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \int_0^P \exp\left(\frac{2\pi i (n - m)y}{P}\right) dy = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n P \delta_{mn} = P A_m,$$

kde δ_{mn} je Kroneckerův symbol, který je roven jedné pro $m = n$ a nule pro $m \neq n$. Pro koeficienty Fourierovy řady tedy dostáváme vztah:

$$A_n = \frac{1}{P} \int_0^P R(y) \exp\left(-\frac{2\pi i n y}{P}\right) dy.$$

Pokud je funkce $R(y)$ reálná, potom platí: $A_n = A_{-n}^*$.

Užitím Fourierovy řady dostaneme:

$$\int_{-1}^1 f(z) R(y + Dz) dz = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \exp\left(\frac{2\pi i n y}{P}\right) \int_{-1}^1 f(z) \exp\left(\frac{2\pi i n D z}{P}\right) dz.$$

Ze sudosti funkce $f(z)$ plyne:

$$\int_{-1}^1 f(z) \exp\left(\frac{2\pi i n D z}{P}\right) dz = \int_{-1}^1 f(z) \left(\cos \frac{2\pi n D z}{P} + i \sin \frac{2\pi n D z}{P} \right) dz = 2 \int_0^1 f(z) \cos\left(\frac{2\pi n D z}{P}\right) dz.$$

Definujme novou funkci $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{\int_0^1 f(z) \cos(\omega z) dz}{\int_0^1 f(z) dz}.$$

Naměřenou odrazivost $R_m(y)$ je tedy možno vyjádřit jako následující Fourierovu řadu:

$$R_m(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n F\left(\frac{2\pi n D}{P}\right) \exp\left(\frac{2\pi i n y}{P}\right).$$

Vlivem konečných rozměrů stopy sondy dojde ke „zkreslení“ průběhu odrazivosti.

Je-li hodnota ω blízká nule, potom je hodnota $F(\omega)$ blízká jedné. To znamená, že v případě $P \gg D$ má naměřená odrazivost prakticky stejný tvar jako odrazivost povrchu a naměřená perioda odrazivosti tedy odpovídá skutečné periodě. Pro $\omega \rightarrow \infty$ je $F(\omega) \rightarrow 0$. Pokud tedy platí $P \ll D$, potom je naměřená odrazivost prakticky konstantní funkcí a nelze tudíž určit periodu odrazivosti povrchu.

K tomu, aby se perioda naměřené odrazivosti rovnala periodě P nezávisle na tvaru funkce $R(y)$, je nutnou a zároveň postačující podmínkou nenulovost funkce $F(\omega)$. (Pokud má funkce $F(\omega)$ nulový bod, potom existuje rozměr stopy D , při kterém se „smaže alespoň jedna Fourierova frekvence v rozvoji odrazivosti“, což pro určitý tvar odrazivosti povrchu způsobí zmenšení periody naměřené odrazivosti.) Tuto nepříjemnou vlastnost má například tvar čtverce nebo kruhu. Existují však tvary, pro které je $F(\omega)$ nenulová. Příkladem je tvar popsáný funkcí $f(z) = (1 - z)^2$, pro který dostaneme:

$$F(\omega) = 6 \frac{\omega - \sin \omega}{\omega^3},$$

což je nenulová funkce. V tomto případě je perioda naměřené odrazivosti vždy rovna skutečné periodě P . To však platí pouze v případě, kdy měříme nekonečně přesně. Pokud měříme s konečnou přesností, potom pro $D \gg P$ nebo pro „málo zvlněnou“ odrazivost povrchu bude naměřená odrazivost konstantní funkcí a nebudeme tudíž schopni určit periodu odrazivosti.

V našem řešení jsme předpokládali rovnoměrné osvětlení povrchu v osvětlené oblasti. Pokud bychom uvažovali nerovnoměrné osvětlení, potom by byl postup řešení obdobný, pouze bychom dostali složitější vztah pro funkci $F(\omega)$.

Úloha V.2 ... dělo na lodi

Děla na bitevních lodích se nabíjejí následujícím způsobem: do hlavně se dá střela o hmotnosti M a za ní určitý počet balíků s výbušninou (objem jednoho balíku je V_0), podle toho jak daleko chceme střílet. Kolikrát se zvětší dostřel takového děla, když nabijeme dvojnásobné množství výbušniny? Výbuch si představujte tak, že najednou se místo výbušniny objeví dvouatomový plyn o teplotě T_0 a tlaku p_0 . Ráže děla je deset palců. Odpor vzduchu zanedbejte.

Nejdříve určíme, jak daleko je vlastně možné dostřelit, pokud je počáteční rychlost střely v , maximálního dosřelu dosáhneme, pokud vystřelíme pod úhlem 45° k vodorovné rovině, střela poletí po dobu $t = \sqrt{2}v/g$ a dopadne do vzdálenosti $s = v^2/g$. Tedy dostřel je přímo úměrný počáteční energii náboje ($s \sim E = 1/2mv^2$). Nyní určíme jakou energii získá náboj v hlavni. Výbuch je věc poměrně rychlá (každý, kdo už nějaký viděl, jistě souhlasí), takže nejlepší přiblížení toho, co se děje s plynem v hlavni při výstřelu, je adiabatický děj.

Předpokládejme, že hlaveň má délku l průřez S a že jeden balík výbušniny má délku x_0 . Na střelu v hlavni působí síla $F = pS$, pro tlak máme z rovnice pro adiabatický děj vztah: $p = p_0 V_0^\kappa / V^\kappa$. Pokud ještě označíme x vzdálenost zadní strany střely od začátku hlavně, můžeme pro sílu působící na střelu psát:

$$F = S \frac{p_0 x_0^\kappa}{x^\kappa}.$$

Energii střely dostaneme jednoduchou integrací $E = \int_{x_0}^l F dx$. Takže energie střely, pokud dáme do hlavně jeden balík výbušniny je:

$$E_1 = \frac{1}{1 - \kappa} S p_0 x_0^\kappa (l^{1-\kappa} - x_0^{1-\kappa})$$

a pokud tam dáme dva:

$$E_2 = \frac{1}{1 - \kappa} S p_0 (2x_0)^\kappa (l^{1-\kappa} - (2x_0)^{1-\kappa}).$$

Takže pro poměr dostřelů máme:

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{E_2}{E_1} = 2^\kappa \frac{l^{1-\kappa} - (2x_0)^{1-\kappa}}{l^{1-\kappa} - x_0^{1-\kappa}},$$

což už je požadované řešení.

Ještě pár poznámek na závěr:

1. Výbuch neprobíhá, tak jak se s ním tady počítalo, ve skutečnosti hoří směs celou dobu, po kterou je náboj v hlavni. Pokud bychom dělo nabili něčím, co vybuchuje takto (tj. všechna výbušnina se najednou změní v plyn), dělo by se s největší pravděpodobností roztrhlo, což je efekt, který při námořní bitvě nepotěší (samozřejmě za předpokladu, že nastane na naší lodi, na nepřátelské je vítán).
2. Při výbuchu je tlak plynu v hlavni řádově větší než atmosférický, takže ten se může s klidem zanedbat.
3. Ještě asi nikdo nevyrobil tak dlouhé dělo, aby tlak v hlavni při výstřelu poklesl na hodnotu srovnatelnou s atmosférickým, i tehle jev se dá s klidným svědomím zanedbat.
4. Loď s desetipalcovými děly není loď bitevní, ale křižník. Za toto pochybení se vám všem omlouváme a děkujeme Vladimíru Fukovi, za to že nás na něj upozornil.

Úloha V.3 ... rozlišení radaru

Mějme radar, který je schopný rozlišit těleso s průměrem 10 km ve vzdálenosti Měsíce. Jak velké těleso je schopen rozlišit ve vzdálenosti Slunce? Jaká je teoretická vzdálenost, do které je radar schopný "vidět"?

Jsou dvě možnosti, jak nahlížet na pojem rozlišitelnosti. Uvažujeme-li, že u radaru existuje mezní úhlové rozlišení, pak těleso u Slunce a u Měsíce musí být vidět pod stejným úhlem. Potom z podobnosti trojúhelníku máme:

$$r_S = \frac{r_M}{R_M} R_S = 3,9 \cdot 10^3 \text{ km},$$

kde velkými písmeny jsou označeny vzdálenosti a malými poloměry těles.

Pojem rozlišení taky můžeme chápat, jako existuje minimální odražená intezita, kterou může radar zachytit. Víme, že intenzita, která dopadne na těleso, je úměrná $\pi r^2/R^2$, kde πr^2 je plocha tělesa zachycující záření. Tam uvažujeme, že se intenzita rozptýlí všemi směry a těleso se tak stane zářičem. Intenzita, která potom dojde z tělesa na radar je tedy úměrná $1/R^2$. Takže poměr intezity, která se vrátí na radar k radarem vyslané je úměrný $\pi r^2/R^4$. Z předpokladu víme, že minimální intenzita je potom

$$I_{min} = c \frac{\pi r_m^2}{R_m^4},$$

kde c je nějaká konstanta úměrnosti. Minimální poloměr, který je u Slunci vidět:

$$r_s = \sqrt{\frac{I_{min} R_s^4}{\pi}} = r_m \frac{R_s^2}{R_m^2} = 1526 \text{ km}.$$

A řádový odhad viditelnosti dostaneme, když za πr^2 , nahradíme plochou celé koule ve vzdálenosti R , $4\pi R^2$. Potom dostáváme pro tuto vzdálenost

$$I_{min} = \frac{4\pi R^2}{R^4}.$$

Odtud pro R vyjde:

$$R = 2 \frac{R_m^2}{r_m} = 1,475 \cdot 10^{10} \text{ km} .$$

Ve větší vzdálenosti už radar jakkoli větší těleso neuvidí.

Úloha V.4 ... rychlejší než smrt

Ve Švýcarsku plánují vybudování celostátního „metra“. Vlaky mají jezdit na magnetickém polštáři tunelem, ze kterého je částečně vyčerpáný vzduch, a dosahovat rychlosti kolem $500 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Tunel však nelze dokonale utěsnit. Předpokládejme, že chceme udržet tlak na hodnotě $0,05 p_a$, ale bez neustálého odčerpávání by za 1 den vzrostl na $0,5 p_a$. Spočtete výkon, jaký je nutný na odčerpávání vzduchu ze 100 km tohoto tunelu, je-li jeho průměr 5 m, účinnost odčerpávání oproti ideálně pracujícímu stroji je 10% a teplota 6°C . S čím lze takový výkon porovnat?

Abychom spočítali výkon čerpadla, musíme vypočítat, rychlost, kterou do tunelu proniká vzduch, a minimální práci potřebnou k odčerpání 1 molu plynu z tunelu.

Nejprve spočítejme práci. Tlak uvnitř tunelu označme p_1 , tlak vně p_2 . Nejmenší práci zřejmě vykonáme, postupujeme-li takto: Nejprve ve válci o objemu V_1 izotermicky stlačíme plyn na objem V_2 , tak aby jeho tlak vzrostl na hodnotu p_2 . Při tom vykonáme práci

$$W_1 = \int_{V_2}^{V_1} \Delta p \, dV = \int_{V_2}^{V_1} \left(\frac{nRT}{V} - p_1 \right) dV = nRT \ln \frac{p_2}{p_1} - p_1(V_1 - V_2) ,$$

kde Δp je rozdíl tlaků v pístu a v tunelu.

Děj je izotermický takže platí $p_1 V_1 = p_2 V_2$. Potom spojíme válec s okolím a plyn vytlačíme z válce ven. Vykonaná práce bude

$$W_2 = (p_2 - p_1)V_2 = p_1(V_1 - V_2) .$$

Celková práce potřebná k vytlačení n molů plynu je tedy

$$W = W_1 + W_2 = nRT \ln \frac{p_2}{p_1} .$$

Musíme ještě spočítat jakou rychlostí proniká vzduch do tunelu. Uvažujme takto: pokud bychom přestali vzduch z tunelu odčerpávat, tlak v tunelu by začal růst. Rychlost, jakou by vzduch do tunelu proudil, by byla úměrná rozdílu tlaků v tunelu a v okolí. Platilo by tedy

$$\frac{d(\Delta p)}{dt} = -k\Delta p ,$$

kde Δp je rozdíl tlaků a k je nějaká konstanta. Řešením této diferenciální rovnice je funkce

$$\Delta p = \Delta p_0 e^{-kt} .$$

Ze zadání víme, že za jeden den by bez odčerpávání vzrostl tlak na $p_2/2$. Platí tedy

$$\frac{0,5}{0,95} = e^{-kt_d} ,$$

kde t_d je doba jednoho dne. Konstantu k tedy spočteme jako

$$k = \frac{\ln 1,9}{t_d} .$$

Rychlost pronikání vzduchu do tunelu bude časová derivace tlaku při $t = 0$. Tedy

$$\left. \frac{dp}{dt} \right|_{t=0} = - \left. \frac{d(\Delta p)}{dt} \right|_{t=0} = k \Delta p_0 .$$

Podle stavové rovnice je

$$n = \frac{pV}{RT} ,$$

tedy

$$\frac{dn}{dt} = \frac{V}{RT} \frac{dp}{dt} .$$

Práci potřebnou na odčerpání n molů jsme ale spočetli už nazačátku. Po dosazení tedy pro výkon dostáváme

$$P = \frac{1}{\eta} V_t k \Delta p_0 \ln \frac{p_2}{p_1} ,$$

kde V_t je objem daného úseku tunelu a $\Delta p_0 = 0,95 p_2$. Po dosazení zadaných hodnot a vydělení teoretického výkonu účinností dostaneme $P = 13,2$ MW.

Úloha V. P ... upíři

Fyzikálně zdůvodněte, proč není upír vidět v zrcadle, a taktéž navrhněte vynálezy, které by této skutečnosti mohly využít.

Na začátku malá omluva těm, kterým připadá, že taková úloha nemá v semináři co pohledávat. A pro ty ostatní: Jsme rádi, že fantazie je něco, co vám není cizí. Nebýt vás, byl by svět plný bruchounů. A nyní některé nápady z vašich řešení.

Podle Ivy Kouřilové není upír vidět v zrcadle, neboť se pohybuje za zrcadlem (viz Alenka v říši divů) nebo proto, že používá generátoru pole 'problému někoho jiného' a zvláštní lidské vlastnosti si problému někoho jiného nevšímá. Často jste uváděli prozaičtější důvody jako např., že v místnosti je tma nebo že upír je jen lidská představa a tu v zrcadle pochopitelně neuvidíme.

Z nápadů inspirovaných fyzikou: Tělo upíra je složeno z anizotropních krystalků, které se natáčí tak, aby ve směru k zrcadlu byly propustné. Existence takových krystalků je vcelku pravděpodobná, možná by ale nešlo zařídit, aby v přímém pohledu nebyl upír zdeformován. Pokud by se dívali dva lidé z různých úhlů, měl by upír problém.

Jiné vysvětlení je, že upír je pro běžné záření průhledný. Vydává své vlastní speciálně upíří vlny, které se v zrcadle absorbují, oko ale oklamou, takže v přímém pohledu upíra vidět lze.

Někoho (Lukáše Chvátala) překvapilo, že upír v zrcadle vidět není. On se prý, když si každé ráno čistí zuby, v zrcadle vidí celkem dobře.

A co se využití upírů týče - Není-li upír vidět v zrcadle, měl by s jeho rozpoznáním problémy i radar či fotobuňka. Americká armáda by tedy za upíra dala jmění, na druhou stranu by měl chudák problémy na WC, které je splachováno fotobuňkou (nápad Vítka Šípala).

Úloha VI.1 ... dielektrikum

Mějme deskový kondenzátor a uvnitř něj dielektrickou desku s relativní permitivitou $\varepsilon_r = 6$. Na kondenzátor přivedeme napětí $U = 10$ kV a necháme systém ustálit. Poté desku vyndáme a kondenzátor zkratujeme. Jaké napětí naměříme na kondenzátoru po vrácení desky? Materiál desky BaTiO₃ je feroelektrikum, zůstane zelektrizovaný!

Označme \mathbf{E}_v intenzitu elektrického pole, která bude mezi deskami kondenzátoru po nabití. \mathbf{E}_v je součtem intenzity \mathbf{E}_0 , která by byla mezi deskami kondenzátoru v případě, že by mezi nimi bylo vakuum, a intenzity \mathbf{E}_i , která vzniká díky polarizaci nábojů v dielektrické desce. Pro velikosti platí $E_v = E_0 - E_i$. Permitivita prostředí udává, jak moc se náboje ve vnějším poli zpolarizují, konkrétně $E_i = (\varepsilon_r - 1)E_v$. Před vytažením desky bude na kondenzátoru napětí $U_0 = E_v d$, kde d je vzdálenost desek kondenzátoru. Po vytažení desky, vybití (zkratování) kondenzátoru a opětovném vrácení desky bude intenzita pole v kondenzátoru E_i (náboj na samotných deskách kondenzátoru bude nula) a napětí $U_x = E_i d$. Po dosazení tedy $U_x = U_0 E_i / E_v = U_0 (\varepsilon_r - 1) = 50$ kV.

Nejčastějšími chybami, které se vyskytovaly ve vašich řešeních, bylo nesprávné užití vztahu pro napětí $U_0 = E_0 d$, což samozřejmě není, musíme dosazovat celkovou intenzitu E_v . Dále pak využívání zákona zachování energie před a po vytažení desky, k čemuž jste ovšem nepřipočetli to, že při vytahování desky konáme práci (oddalujeme opačné náboje).

Úloha VI.2 ... elektron u desky

Mějme nekonečnou vodivou uzeměnou desku. Ve vzdálenosti h od ní je umístěn náboj Q . Spočítejte, jakou silou je náboj přitahován k desce.

Protože je deska vodivá a uzemněná (resp. spojená s nekonečnem), musí na ní být potenciál neustále roven nule (předpokládáme-li nulovou hladinu potenciálu na zemi resp. v nekonečnu). Okrajová podmínka pro rozložení potenciálu v našem systému je tedy jeho nulovost na desce. Je-li u desky umístěn bodový náboj Q ve vzdálenosti h , rozloží se na ní náboj tak, aby jeho potenciálový příspěvek přesně vyrušil příspěvek od Q . Kdyby se na desce žádný náboj neindukoval, ale jen bychom za ni, zrcadlově ke Q , umístili náboj $-Q$, byl by potenciál na desce také roven nule, tedy byla by splněna naše okrajová podmínka. Z vlastností elektromagnetického pole se dá matematicky odvodit, že vytvořili-li jsme nějakým způsobem před deskou potenciálové pole splňující okrajovou podmínku (v našem případě součet pole od Q a $-Q$), neexistuje jiné různé pole, které by ji splňovalo také. Tedy před deskou bude příspěvek náboje naindukovaného na desce stejný, jako by byl od tzv. zrcadlového náboje $-Q$ za deskou. Tedy i síla, kterou bude k desce přitahován náboj Q bude mít velikost:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q^2}{(2h)^2}.$$

Uvědomíme-li si, že vzhledem k osové symetrii příspěvku naindukovaného náboje, se jeho pole za deskou přesně vyruší s polem od Q , dostáváme mimoděk vysvětlení principu Faradayovy klece – dokonalé vodivé bedny, která odstíní veškeré elektromagnetické pole zvenku (v kovovém výtahu by mobilní telefon neměl mít signál apod.)

Úloha VI.3 ... galaxie

Začátkem století existoval kosmologický model vesmíru, podle kterého byl vesmír homogenní (v každém místě stejný) a izotropní (v každém směru stejný). Takový vesmír v sobě zahrnoval rovnoměrně rozmístěné galaxie.

Předpokládejme, že všechny galaxie jsou co do množství vyzařovaného světla stejné. Spočítejte, kolikrát více galaxií uvidíme, jestliže se místo pouhým okem budeme dívat na oblohu triedrem, kterým lze pozorovat objekty s magnitudou až 8,5.

Magnitudou se v astronomii měří jasnost objektu. Čím větší magnituda, tím slabší objekt vidíme. Slunce má -27 magnitud, Měsíc v úplňku -13^{mag} , nejjasnější hvězdy 0^{mag} a nejslabší hvězdy viditelné pouhým okem mají 6 magnitud.

Pomoci vám může Pogsonova rovnice, která porovnává magnitudy a pozorované intenzity dvou objektů:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \left(\frac{I_1}{I_2} \right) .$$

Zamyslete se nad tím, jak se změní řešení, když budou galaxie vyzařovat různé množství světla.

Jestliže dosadíme do vzorečku v zadání za rozdíl magnitud $2,5^{\text{mag}}$ (oko vidí do 6^{mag} , triedr do $8,5^{\text{mag}}$)

$$2,5^{\text{mag}} = -2,5 \log \frac{I_{8,5}}{I_6} ,$$

dostaneme pro podíl intenzit

$$\frac{I_{8,5}}{I_6} = 0,1 .$$

Triedrem uvidíme tedy objekty desetkrát slabší. Intenzita klesá s druhou mocninou vzdálenosti,

$$\frac{I_{8,5}}{I_6} = \frac{r_6^2}{r_{8,5}^2} = 0,1 \implies \frac{r_{8,5}}{r_6} = \sqrt{10} ,$$

uvidíme jím tedy objekty $\sqrt{10}$ krát vzdálenější. Jestliže jsou galaxie ve vesmíru rovnoměrně rozděleny, potom počet galaxií, které vidíme, je přímo úměrný té části vesmíru, ve které je můžeme vidět.

Tedy poměr počtu galaxií je

$$p = \frac{V_{8,5}}{V_6} = \left(\frac{r_{8,5}}{r_6} \right)^3 \approx 31,6 .$$

Pokud by každá galaxie vyzařovala různé množství světla, řešení se nezmění. Rozdělme si všechny galaxie do přihrádek, kde v každé budou jenom galaxie se stejnou (OK, prakticky se stejnou) jasností. Pak v každé přihrádce uvidíme triedrem 31,6-krát více galaxií než volným okem. Protože toto platí pro každou přihrádku, bude to platit i pro všechny dohromady.

Úloha VI.4 ... rychlý proton

Jednou zaregistrovali v Utahu (USA) detektorem kosmického záření proton s energií 51 J. Spočítejte jeho rychlost (nebo spíše o kolik se její rychlost liší od rychlosti světla). Odhadněte také zakřivení jeho dráhy v magnetickém poli 10 T.

Energie protonu je dána relativistickým vztahem

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ,$$

z čehož dostaneme přímo vztah pro rychlost

$$v = \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}}. \quad (4)$$

Po použití přibližného vzorce $\sqrt{1 - \varepsilon} \approx 1 - 1/2\varepsilon$, který platí tím lépe, čím menší je ε , dostaneme, že se rychlost protonu liší od rychlosti světla o $4 \cdot 10^{-24} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

V magnetickém poli se proton pohybuje po kružnici, v rovnováze je magnetická a odstředivá síla:

$$evB = m \frac{v^2}{r},$$

$$evB = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{v^2}{r},$$

kde za v dosadíme z (4) a vyjádříme poloměr r

$$r = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{Bec},$$

přičemž platí $m_0^2 c^4 \ll E^2$ a můžeme tedy psát $r = \frac{E}{Bec}$, číselně $r = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ m}$, což je přibližně 1,4 násobek vzdálenosti Země od Slunce.

Úloha VI. P ... domino

Určitě už jste si někdy hráli s dominem, tedy kvádry postavenými v řadě za sebou, které po shoení prvního z nich lavinovitě padají. Pokuste se odhadnout rychlost, kterou se tato vlna šíří, a jak tato rychlost závisí na rozměrech a hmotnosti kvádrů, vzdálenosti kvádrů ... Popište podrobně model, který ve svých úvahách použijete, a posuďte, nakolik odpovídá realitě.

Řešení této úlohy bychom asi těžko hledali v nějaké běžné sbírce příkladů z fyziky. Uspokojivé, vyčerpávající a dostatečně jednoduché řešení totiž zřejmě neexistuje. Toto je bohužel častým rysem úloh vycházejících z praxe. Nicméně je třeba se umět i s takovými úlohami vyrovnat a v následujících odstavcích se o to pokusíme.

Nejprve učiníme několik pozorování, která úlohu poněkud zjednoduší. Předně, pokud (jak předpokládáme) stojí kostky ekvidistantně, v jedné přímce a jednotlivé kostky nejsou vůči této přímce natočené, lze úlohu řešit jen jako rovinný problém, na rozměru kostky ve směru kolmém na tuto rovinu nezáleží.

Dále zřejmě nezáleží na hmotnosti kostek (pochopitelně předpokládáme, že kostky jsou homogenní, a že hmotnost všech je stejná). To plyne například z rozměrové analýzy. Vstupními parametry úlohy je jistě tíhové zrychlení g , výška kostek h , poměr mezi tloušťkou kostky b a její výškou $\beta = b/h$, poměr mezi vzdáleností těžišť sousedních kostek a a výškou kostky $\alpha = a/h$, hmotnost kostky m , a pak řada bezrozměrných parametrů popisujících interakci podložky a kostek a jednotlivých kostek mezi sebou (vlastnosti nárazů a tření).

Jaké budeme uvažovat tření a nárazy upřesníme později. Nyní tedy máme k dispozici čísla g , h , α , β , m a naším cílem je spočítat ustálenou rychlost šíření vlny v . Snadno rozmyslíme, že jediná možnost, jak to zařídit, je

$$v = f(\alpha, \beta) \sqrt{gh}.$$

Nadále tedy uvažujeme $h = 1, g = 1, m = 1$ a hledíme rychlost šíření vlny v závislosti na tloušťce kostky β a vzdálenosti kostek α .

Nejschůdnější cesta k výsledkům vede přes energetické úvahy (abych byl upřímný, nic jiného mě nenapadlo). Předpokládáme ustálený stav, tedy velmi dlouhou řadu, ve které šířící se vlna už nezrychluje ani nezpomaluje. Uvažme děj od okamžiku, kdy do dosud stojící kostky narazí vlna, do chvíle, kdy tato kostka narazí na další stojící kostku. Při tomto ději se potenciální energie systému v důsledku poklesu těžišť kostek snížila o hodnotu, kterou označíme ΔE . Pro jeho výpočet naštěstí nemusíme počítat změnu polohy všech kostek, uvědomíme-li si, že ke stejnému poklesu potenciální energie dojde, nahradíme-li jednu stojící kostku ležící kostkou. Platí

$$\Delta E = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \varphi_\infty - \frac{\beta}{2} \cos \varphi_\infty = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\alpha} \left(1 + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right),$$

kde φ_∞ je sklon ležící kostky vůči podložce.

Protože předpokládáme ustálený stav, musí být kinetická energie na konci uvažovaného děje stejná jako na začátku, a tedy se někde během děje musí odevzdat teplo ΔE . Učiníme první speciální předpoklady (dosud jsme dělali jen naprosto obecné úvahy) a prohlásíme, že veškeré toto teplo se odevzdá při nárazu na stojící kostku, vliv tření mezi jednotlivými kostkami považujeme za zanedbatelný. Dále prohlásíme srážky za nepružné, tedy že po nárazu jsou již kostky v trvalém kontaktu, a do třetice uvažujeme, že hrubost podložky je dostatečná, aby hrany, kolem kterých se kostky otáčejí, zůstaly stále na místě. Úvahu o tom, nakolik jsou takové předpoklady opodstatněné, přenecháme laskavému čtenáři.

Nechť se dopadající kostka otáčí s úhlovou rychlostí ω_1 . Po nepružném nárazu stojící kostka získá úhlovou rychlost, kterou označíme ω_0 . Podaří-li se nám vyjádřit pomocí ω_0 úbytek kinetické energie soustavy při nárazu, budeme schopni srovnáním tohoto úbytku s ΔE dopočítat ω_0 , pomocí kterého již budeme přímo moci soudit na rychlost šíření vlny.

Po této poněkud obsáhlejší přípravě se konečně pustíme do výpočtu. Splňují-li kostky podmínky, že sousední kostky jsou neustále v kontaktu, a že hrany, kolem kterých se otáčejí, jsou neustále v kontaktu s podložkou a sousední mají vzdálenost α , platí pro úhel sklonu jednotlivých kostek vůči podložce ze sinové věty

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \arcsin(\alpha \sin \varphi_n - \beta).$$

Přitom $\varphi_0 = \pi/2$ je úhel sklonu stojící kostky, do které právě narazí vlna.

Nyní pomocí ω_1 vyjádříme kinetickou energii kostek těsně před nárazem. K tomu nejprve vyjádříme poměr mezi úhlovými rychlostmi sousedních kostek.

$$\lambda_n = \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \frac{\frac{d\varphi_{n+1}}{dt}}{\frac{d\varphi_n}{dt}} = \frac{d\varphi_{n+1}}{d\varphi_n} = 1 - \frac{\alpha \cos \varphi_n}{\sqrt{1 - (\alpha \sin \varphi_n - \beta)^2}}.$$

Dále vyjádříme moment setrvačnosti kolem hrany, kolem které se kostky otáčejí. Nahlédneme-li do poslední kapitoly seriálu, můžeme po krátké úvaze bez potřeby složitých výpočtů psát $I = (1 + \beta^2)/3$. Nyní již snadno vyjádříme kinetickou energii.

$$T = \frac{1}{2}I (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \dots) = \frac{1}{2}I\omega_1^2 (1 + \lambda_1^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 + \dots) = \frac{1}{2}\Lambda I\omega_1^2.$$

Výpočet Λ je technicky nejobtížnější částí úlohy, nicméně s využitím počítače to zjevně není větší problém, zejména uvědomíme-li si, že významně přispívá pouze několik prvních kostek.

Teoreticky nejobtížnější částí úlohy bude popis nepružné srážky. Během srážky na sebe padající a stojící kostka působí krátkou dobu velkými silami ve vodorovném směru. Podstatné pro nás je, že se jedná o akci a reakci, tedy časový průběh velikostí obou sil je stejný. Nejprve zjistíme, jak se při krátkodobém působení konstantní síly F ve vodorovném směru chová padající část kostek (tedy kostky 1, 2, ...).

Působící síla odpovídá potenciální energii $V = F \cos \varphi_1$. Použijeme-li zákon zachování energie (to je v pořádku, protože kromě síly F na soustavě žádná síla práci nekoná), dostáváme

$$T + V = \text{konst.} \quad \Rightarrow \quad \dot{T} + \dot{V} = \Lambda I \omega_1 \dot{\omega}_1 - F \omega_1 \sin \varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega}_1 = \frac{F \sin \varphi_1}{\Lambda I}.$$

Ve výrazu by měl ještě figurovat člen s časovou derivací Λ , avšak po snadné úvaze zjistíme, že při uvažovaném krátkodobém působení velké síly tento člen odpadá.

Nyní podobně odvodíme, jak působení síly F ovlivní kostku s $n = 0$. Potenciální energie v tomto případě je $V_0 = -F \sin \varphi_1 \cos \varphi_0 - F \beta \sin \varphi_0$, kde φ_1 uvažujeme konstantní. Platí tedy

$$\dot{T}_0 + \dot{V}_0 = I \omega_0 \dot{\omega}_0 + F \omega_0 \sin \varphi_1 \sin \varphi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega}_0 = -\frac{F \sin \varphi_1}{I}$$

(na několika místech jsme v tomto výpočtu dosadili $\varphi_0 = \pi/2$).

V každém okamžiku tedy pro velikosti úhlových zrychlení platí $\dot{\omega}_0/\dot{\omega}_1 = \Lambda$. Stejný vztah bude platit i pro celkové změny úhlových rychlostí. Výsledná úhlová rychlost nulté kostky je ω_0 a první kostky $\lambda_0 \omega_0$. Pišme tedy

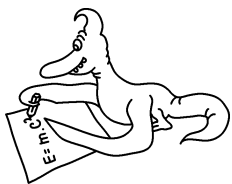
$$\frac{\omega_1 - \lambda_0 \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{\Lambda} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \left(\frac{1}{\Lambda} + \lambda_0 \right) \omega_0.$$

Nyní je již výpočet snadný. Pro úbytek kinetické energie platí

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Lambda I \omega_1^2 - \frac{1}{2} \Lambda I \lambda_0^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2 \left(\frac{1}{\Lambda} + 2\lambda_0 - 1 \right).$$

Z tohoto vztahu již lze dopočíst ω_0 . Dosazovat za jednotlivé veličiny nemá větší smysl, neboť minimálně Λ budeme stejně muset dopočíst numericky. Zbývá pomocí ω_0 určit rychlost v . V nejjednodušším případě můžeme položit $v = \omega_0$, lepší je nějakým způsobem zkombinovat ω_0 a ω_1 , buď jako aritmetický průměr, nebo jako na základě složitějšího modelu odvozený vztah $1/\omega = (2/\omega_0 + 1/\omega_1)/3$. První možnost bude dávat nižší rychlost než je skutečná, druhá zase zejména pro malé α bude poněkud nadsazená.

Tím je řešení úlohy hotové. Kdo se prokousal až sem a úloha ho zaujala, jistě si sám pro nějaké parametry rychlost vlny spočítá. Zejména zajímavá je závislost na α při pevném β . Je ovšem na místě upozornit i na jeden teoretický aspekt. Vztah pro úbytek části kinetické energie jsme odvodili pomocí dvojího aplikování zákona zachování energie! Rozmyšlení, že je to skutečně v pořádku, a proč se energie v našem modelu ztratila, nechávám na hloubavém čtenáři.



Řešení experimentálních úloh

Chyby měření

Z praktických důvodů zde uvádíme základní poznatky z teorie chyb.

Chyby systematické

Jde o chyby způsobené použitou metodou, měřicími přístroji a některé chyby experimentátora. Systematické chyby obvykle zkreslí výsledek, buď k trvale vyšším nebo trvale nižším hodnotám.

- 1) Chyby metody — např. považujeme odpor spirály za konstantní a on se s teplotou mění.
- 2) Chyba měřidla — nedokonalost a nepřesnost stupnic (např. vzdálenost mezi jednotlivými dílky teploměru odpovídá 0,99 K namísto 1 K).
- 3) Některé chyby osobní — jsou dány nedokonalostí našich smyslů apod.

Systematické chyby nelze zmírnit velkým počtem měření!

Chyby náhodné

Při opakování měření za týchž podmínek zjistíte, že jednotlivé výsledky se navzájem poněkud liší. Měření je ovlivněno malými změnami teploty či tlaku, změnou polohy oka, prouděním vzduchu, ... Takových navzájem nezávislých jevů bývá mnoho a těžko bychom hledali přesnou příčinu odchylky, proto náhodné chyby připisujeme skutečně náhodě. Několikerým opakováním měření je můžeme potlačit.

Chyby hrubé

Jsou to velké chyby, které vznikají nedostatečným soustředěním experimentátora. Objevíme je, jestliže měření opakujeme vícekrát (viz níže). Měření zatížené hrubou chybou vyřadíme ze souboru hodnot.

Zpracování výsledku dostatečné k řešení experimentální úlohy

Uvádíme zde jednoduchý algoritmus, který vám doporučujeme použít na zpracování dostatečného počtu měření (alespoň deseti). Body 1) až 5) se týkají jen statistické chyby.

- 1) Určíme z naměřených hodnot aritmetický průměr.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Dá se dokázat, že za jistých předpokladů je pro nekonečně mnoho měření aritmetický průměr shodný se střední hodnotou měřené veličiny (viz literatura).

- 2) Stanovíme pro každou hodnotu odchylku od průměru Δx_i .
- 3) Vypočteme standardní odchylku

$$s_{\text{st}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}.$$

4) Vyloučíme hrubé chyby. K tomu se používá takzvané 3-s kritérium. Vyloučíme všechny hodnoty, které se od aritmetického průměru liší o více jak $3s_{\text{st}}$ a opakujeme předchozí body.

5) Určíme směrodatnou odchylku aritmetického průměru (statistickou odchylku)

$$s_{\text{sm}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}.$$

6) Určíme systematickou chybu. Za chybu přístrojů můžeme považovat např. půlku nejmenšího dílku stupnice. Chybu metody, kterou neumíme spočítat, musíme alespoň fundovaně odhadnout.

7) Určíme celkovou chybu dle vzorce

$$s_{\text{celk}} = \sqrt{(3s_{\text{sm}})^2 + s_{\text{sys}}^2},$$

pro malý počet měření dle přibližného vzorce $s_{\text{celk}} = 3s_{\text{sm}} + s_{\text{sys}}$.

8) Chybu zaokrouhlíme na jednu platnou číslici, jen je-li jí jednička, na dvě. Aritmetický průměr zaokrouhlíme na řád poslední platné cifry chyby.

9) Výslednou hodnotu uvádíme jako $x = (\bar{x} \pm s_{\text{celk}})$.

Ještě byste měli vědět, k čemu se vůbec chyby počítají. Odchylka nám udává, jak přesně jsme danou veličinu změřili. Dá se odvodit, že přesná hodnota leží v uváženém intervalu s pravděpodobností 99,7%.

Literatura: J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření (I), SPN, Praha 1967

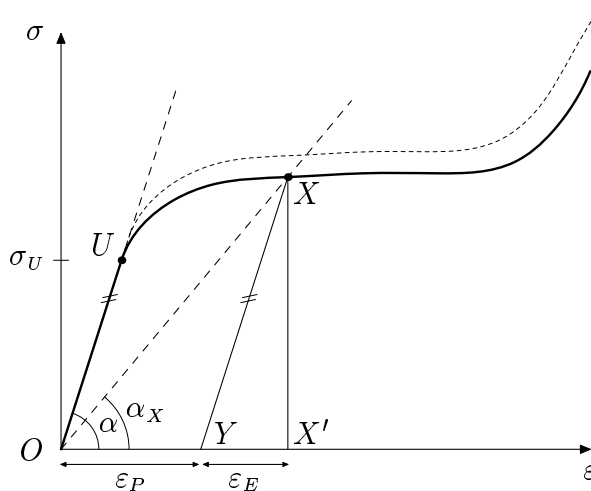
E. Svoboda: Přehled středoškolské fyziky, Prometheus, Praha 1996

Úloha I. Exp ... natahování špaget

Určete Youngův modul pružnosti v tahu uvařených špaget.

Vypracování experimentální úlohy by mělo obsahovat na začátku trochu teorie popisující danou problematiku, následuje stručný, ale srozumitelný popis měření, na škodu není ani výčet pomůcek. Nezbytná je tabulka naměřených hodnot, výpočet odchylky měření (viz Chyby měření) a závěr s diskuzí výsledku, kde srovnáváte jednotlivé metody, výsledky apod.

Tato experimentální úloha, jako první v pořadí, byla spíše na procvičení měření a zpracování získaných výsledků. Většina z řešitelů věděla, co má měřit a i to naměřila. Takže vrhněme se do toho.



Obr. 12

Teorie

Každý z vás už potkal Hookův zákon pro pevná tělesa, který píšeme ve tvaru $\sigma = E\varepsilon$, kde $\varepsilon = \Delta l/l_0$ je poměrné prodloužení, které určíme jako poměr skutečného prodloužení Δl a původní délky l_0 , $\sigma = F/S$ je napětí, které vypočteme jako podíl zatěžující síly F a průřezu $S = \pi(d/2)^2$, E je Youngův modul pružnosti. Z toho máme:

$$E = \frac{F}{S} \cdot \frac{l_0}{l - l_0}. \quad (5)$$

Tento vztah ovšem platí jen do napětí σ_U , tzv. meze úměrnosti, dokud závislost σ na ε je lineární (viz obr. 12).

Na obr. 12 je schématicky znázorněna závislost σ na ε (od σ_U vůbec nezáleží na tom, jaký má přesný průběh), kde plná čára představuje závislost tzv. smluvního napětí, které počítáme jako poměr zatěžující síly a původního průřezu. Přerušovaná čára naopak představuje napětí závisící na aktuálním průřezu. Vidíme, že do napětí σ_U se smluvní napětí téměř rovná skutečnému napětí ve špagetě. Z toho pak vidíme, že dokud nenastává trvalá deformace, a ta nastává jakmile překročíme napětí σ_U , poloměr špagety se významněji nemění.

Jestliže napínané těleso (tyč, drát, špagetu, ...) v libovolném bodě X odlehčíme, odpruží se dle úsečky $XY \parallel OU$. (Pokud by OU neexistovala, pak by XY byla rovnoběžná s tečnou v bodě O .) Úsečka $|X'Y| = E\varepsilon$ představuje pružnou část, úsečka $|OY| = \varepsilon_P$ plastickou část celkové poměrné deformace odpovídající bodu X . Vidíme, že

$$\varepsilon_P + \varepsilon_E = \frac{l_2 - l_0}{l_0} \quad \text{a} \quad \varepsilon_P = \frac{l_{02} - l_0}{l_0}$$

a z toho plyne $\varepsilon_E = (l_2 - l_{02})/l_0$ a také

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_X}{\varepsilon_E} = E .$$

Nyní upravíme vztah (5):

$$E = \frac{F}{S} \frac{l_0}{l - l_{02}} .$$

Ti z vás, kteří překročili napětí σ_U , tj. měřili prodloužení až do přetrhnutí, určovali vlastně

$$E = \operatorname{tg} \alpha_X = \frac{\sigma_X}{\varepsilon_X} ,$$

což vedlo k nesprávnému výsledku. Naším úkolem bude tedy špagetu připravit, zatížit, odlehčit a po každém tomto kroku změřit její délku. Budeme muset zachovávat linearitu experimentu (nepřekročit mez úměrnosti), což se dá dosáhnout tím, že si pokaždé zjistíme deformaci, a když bude trvalé prodloužení větší než 1 mm (tedy nejmenší dílek měřidla), pak měření vyloučíme.

Pomůcky

Bezvažečné špagety, milimetrový papír, mikrometr, sponky na papír, nit, papír, lepicí páska, 3 velké mikroténové sáčky, sada lehkých závaží, přesný odhad.

Postup měření

1. Uvaříme několik špaget podle návodu (tedy s olejem a se solí). Musíme zabezpečit, aby před každým měřením byly čerstvě uvařené, jinak mohou velice změnit své vlastnosti, takže pro více měření je potřeba opakovaně vařit nové špagety.

2. Mezitím na vodorovnou podložku připevníme ocejchované milimetrové papíry (v rozsahu minimálně 40 cm kolmo ke hraně stolu) a přikryjeme je rozstříhnutými sáčky, napneme a přilepíme je na stůl. Z niti a sponek vytvoříme háčky se závěsem na uchycení špagety na stůl a na spojení špagety se závažím - dosti dlouhým, neboť závaží musí viset ze stolu.

3. Z igelitového sáčku odstříhneme roh, složíme do jakéhosi nového sáčku a propíchneme dalším háčkem ze sponky (vidíte, kde všude se hodí sponky?).



Obr. 13

4. Uvařenou a vybranou špagetu opláchneme v teplé vodě a její konce upravíme podle obr. 2. Konec ovineme několikrát proužkem papíru, mezi to zavineme ohnutou sponku a obtočíme lepící páskou. Papír nám zabezpečí, že závěs ze špagety nesklouzne (obr. 13).

5. Mikrometrem změříme její průměr a to tak, že mikrometr utahujeme dokud je ještě špageta mezi čelistmi volná (pootočíme o 1 – 2 dílky a zkontrolujeme, zda je volná, znovu pootočíme a zkontrolujeme, ...).

6. Místo, kam budeme ukládat špagetu, polejeme tenkou vrstvou oleje – jedlého, pak špagetu zahákneme na háček na stole, volně uložíme na olejovou vrstvu a změříme její délku l_0 . Na její druhý konec zahákneme druhou soustavu háček–nit–háček. Na ze stolu visící háček zavěsíme připravený sáček se závažíčky a zaznamenáme její novou délku l_1 . Následně ji uvolníme a znovu zjistíme její novou délku a deformaci Δl_{def} .

7. Toto uděláme pro více špaget a různé zatížení. Zatížení volíme tak, aby deformace nebyla moc veliká. Dbáme taky na to, aby špagety, již uvařené, nestály ve vodě víc jak 20 minut, jinak napuchnou a změknou a při další manipulaci se velmi lehce lámou a trhají.

Naměřené údaje

Při výpočtu použito $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

č. m.	$d/10^{-5}\text{m}$	l_0/mm	m/g	l_2/mm	$\Delta l/\text{mm}$	def	E/Pa	$\Delta E/\text{Pa}$	$(\Delta E)^2/\text{Pa}^2$
1	254	261	5	282	21	x	–	–	–
2	241	273	2,90	282	21	x	–	–	–
3	237	247	2,65	285	12	x	–	–	–
4	240	332	1,40	339	7	–	143900	-5570	31024900
5	246	303	1,35	309	6	–	140660	-2330	5428900
6	260	330	1,80	339	9	x	–	–	–
7	257	249	1,30	245	5	–	122390	15940	254083600
8	248	211	1,20	215	4	–	128510	9820	96432400
9	239	155	1,35	159	4	–	152470	-1414	1999396
10	244	317	1,00	322	5	–	132970	5360	28729600
11	241	281	0,90	285	4	–	135920	2410	5808100
12	254	290	0,75	293	3	–	140310	-1980	3920400
13	250	282	1,40	287	5	–	157750	-19420	377136400
14	252	326	0,80	330	4	–	129200	10130	102616900
15	250	292	0,95	296	4	–	138550	-220	48400

Kolónka def je zaškrtnutá a ostatní údaje se nevypočítávají, jestliže trvalá deformace překročila 1 mm.

Aritmetický průměr: $\bar{E} = 138330 \text{ Pa}$.

Standardní odchylka: $s_{st} = 9500 \text{ Pa}$, k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka: $s_{sm} = 2900 \text{ Pa}$.

Systematická chyba měření průřezu: 5%,

měření změny délky: 25%,

s_{sys} tedy asi 30 kPa.

Celková chyba: $s_{celk} = 35 \text{ kPa}$.

Diskuze a závěr

Námi naměřená hodnota Youngova modulu pružnosti patří do intervalu $(140 \pm 40) \text{ kPa}$. Největší chybou je chyba systematická, která je způsobená nepřesným měřením prodlou-

žení $\Delta l = l_2 - l_0$. Ta se dá snížit jenom přesnějším délkovým měřidlem (otázka je jakým), ale v žádném případě ne zvětšováním napětí σ .

Jiné možné metody (nebo něco na zamyšlení): Mnozí z vás špagetu pověsili za jeden konec, a pak měřili prodloužení. Málakdo si přitom dělal těžkou hlavu z hmotnosti špagety. A to byla chyba. Délková hustota průměrné špagety je asi $0,08 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-1}$ (průměrná hodnota z vašich řešení), tedy 25 cm dlouhá špageta má hmotnost 2 g. A při takové váze je horní část špagety už dávno zdeformována.

Jaroslava Schovancová se pokoušela určit E ze svislých kmitů tělesa o hmotnosti M zavěšeného na špagety. Pro periodu těch kmitů vychází:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Ml_0}{S_{\text{aktuální}}E}} .$$

Pro jemnost špagety je však zapotřebí pracovat s lehkým tělesem a malými kmity. Tady pak hraje roli i relaxační čas materiálu – špagety.

Nabízejí se i jiné možnosti realizace:

Miloslav Havelka navrhl a Petr Houštek i naměřil takovéto provedení: Narovnat špagety, připevnit její konce a natahovat její střed. Tato metoda však vyžaduje přesnější měření kolmo působící tahové síly.

Jan Kratochvíl a Pavol Mikčo navrhli zjistit E z naměřeného modulu pružnosti ve smyku metodou dynamickou (met. torzních kmitů), přičemž platí vztahy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2lJ}{\pi Gr^4}} ,$$

$$G = \frac{mE}{2(m+1)} ,$$

kde J je moment setrvačnosti zavěšeného tělesa, G je torzní modul pružnosti, m je Poissonova konstanta, pro každou látku jiná.

Nápověda pro toho, kdo má chuť zjistit si Poissonovou konstantu pro špagetu:

$$m = -\frac{\varepsilon}{\eta} ,$$

kde η je relativní příčné zkrácení. Pokud se průměr špagety zkrátí z původního poloměru r_0 na poloměr r pak, platí

$$\eta = \frac{r - r_0}{r_0} .$$

Eva Skopalová a Zdeněk Čejka jako jediní zjišťovali E i v závislosti na času vaření. Vyšlo jim, že dvakrát méně vařené špagety mají třikrát menší modul pružnosti – jsou tvrdší a méně jedlé.

Nějaká statistika vašich měření: Naměřené hodnoty se pohybovaly v rozmezí od 75 Pa do 16 MPa. Dají se rozdělit do dvou velkých skupin: okolo 120 kPa a okolo 400 kPa.

Na závěr Vám ještě děkujeme za slovní hříčky typu: Moje naměřená hodnota $E = 144550,28 \pm 35504,37 \text{ Pa}$ je velice nepřesná ...

Úloha II . Exp ... zvuk

Změřte rychlost zvuku ve vzduchu.

Úkolem této úlohy bylo změřit co nejlépe rychlost zvuku. Většina z vás to zvládla velmi dobře. Přístup k věci je v zásadě možný dvojit. Buď měříme rychlost šíření zvuku jako rychlost šíření informace (různé petardové metody) nebo využijeme vlnových vlastností (rezonance, interference, ...)

První přístup však naráží na problém s přesností. Vzhledem k tomu, že všichni v této metodě měřili čas stopkami ovládanými člověkem a časy se pohybovaly v řádu 1s, tak reakční doba člověka byla nezanedbatelná vůči měřenému času. Proto tato metoda dávala největší chybu (až 20%).

V druhém přístupu v podstatě všichni využili možnosti vzniku stojatého vlnění v nějakém rezonátoru (od skleněných trubiček až po rouru z vysavače.) Buď hledali maximální rezonanci s nějakým zdrojem harmonického tónu (ladila se buď frekvence, nebo délka rezonátoru) nebo foukali do trubice a měřili frekvenci ozývajícího se tónu. Tato metoda dávala daleko přesnější výsledky, bylo možno dosáhnout i chyby 1%. Největší nepřesnost byla v nalezení rezonančního maxima.

Já jsem měřil rychlost šíření zvuku ve vzduchu dvěma metodami, obě využívají vlnových vlastností.

První metoda využívá vzniku interferenčních obrazců při skládání vlnění ze dvou koherentních blízkých zdrojů. Použil jsem dva malé reproduktory, vzdáleny od sebe 10 až 40 cm a pouštěl jsem do nich sinusový signál o frekvenci 3 až 5 kHz. Jako zdroj sloužil počítač, resp. WinAmp (speciální plugin, stačí zadat URL tone://5000 a je to :-). Při pohybu místostí bylo již slyšet, že intenzita se mění. Abych mohl snímat intenzitu jen z jednoho bodu a ne ze dvou uší, zapojil jsem do počítače mikrofon a jeho signál jsem zesílený opět přes zvukovku pouštěl do náhlavních sluchátek. (Mám zvukovku SB Live!, která umožňuje připojit 4 reproduktory, takže dva na výstupy na generování tónu a dva na sluchátka.) Mikrofonem jsem pohyboval po dvou rovnoběžkách se spojnicí reproduktorů vzdálených 33 a 80,2 cm. Hledal jsem místa s minimální intenzitou. Občas se povedlo najít místo s tichem, ale vzhledem k odrazům od okolí, minima nebyla úplně tichá. Odrazy jsem minimalizoval rozvěšením dek po pokoji a otevřením skříní s oblečením. Po nalezení minim už stačí pro každé spočítat dráhový rozdíl mezi vzdálenostmi k obou reproduktorům. Ten souvisí s vlnovou délkou vztahem

$$\Delta l = \lambda \left(k - \frac{1}{2} \right) ,$$

kde k je řád minima a Δl dráhový rozdíl. Rychlost šíření pak snadno dostaneme, jako

$$v = \lambda f ,$$

kde f je frekvence vlnění. Tady jsou moje výsledky:

$d(\text{cm})$	20	20	20	10	10	10	5	5	5
$f(\text{kHz})$	5	4	3	5	4	3	5	4	3
$v(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	345,5	340,6	328,4	341,2	340,5	340,3	342,9	336,6	321,7

Každá z hodnot rychlostí je průměrem pro různé řady minim a různé vzdálenosti od reproduktorů. U každé frekvence a vzdálenosti se dal naměřit jiný počet minim. Vážený průměr těchto hodnot vychází

$$v = (340 \pm 10) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Chyba do výsledku vnáší nejen měření vzdáleností, ale i různé odrazy a s tím související problémy s lokalizací minima. Přesto je daná metoda relativně přesná. Tabulková hodnota pro rychlost šíření zvuku ve vzduchu je pro 23°C , ve kterých jsem měřil, $346,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pro druhou metodu jsem jen tak pro zajímavost použil flétnu. Nahrál jsem její co nejstabilnější tón C (všechny díry zakryté) pro dvě délky flétny (ta jde nastavit - tím se flétna ladí) a pomocí CoolEditu zjistil základní frekvenci, která odpovídá kmitnám na obou koncích a jednomu uzlu uvnitř. Ta pak už jen stačí vynásobit vlnovou délkou, která je dvojnásobkem délky celé flétny.

$d(\text{cm})$	32,9	33,5
$f(\text{Hz})$	524,4	510,4
$v(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	345,1	342,0

Průměr je $v = (344 \pm 3) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Tabulková hodnota pro 25°C je $347,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Chyba byla způsobena fluktuací frekvence flétny během hraní a také tvarem flétny, neboť to není přesný válec. Přesto byla tato velmi primitivní metoda velmi přesná.

Úloha III. Exp ... kapacita člověka

Změřte co nejvíce zdraví neohrožujícími způsoby elektrickou kapacitu člověka.

Teoretický úvod

Nejprve je teba si uvědomit, co vlastně máme měřit. Elektrická kapacita C je schopnost vodiče akumulovat volný náboj. Rozlišujeme kapacitu osamoceného nabitého vodiče a kapacitu soustavy dvou navzájem izolovaných vodičů nabitých stejně velkým opačným nábojem (kondenzátoru).

Kapacita osamoceného vodiče C vyjadřuje, že potenciál φ_0 na povrchu vodiče je úměrný volnému el. náboji Q tohoto vodiče $Q = C\varphi_0$ (přičemž se předpokládá, že φ_0 je nulový v nekonečnu). Kapacita vodiče závisí na jeho tvaru a velikosti a na charakteru nevodivého prostředí, které vodič obklopuje. Například nabitá vodivá koule o poloměru R ve vakuu má kapacitu $C = 4\pi\epsilon_0 R$. Pro $R = 0,50 \text{ m}$, což přibližně odpovídá poloměru koule, která by se uplácala z člověka dostáváme $C = 56 \text{ pF}$.

Kapacita soustavy dvou navzájem izolovaných vodičů nabitých opačným nábojem Q , mezi nimiž je el. pole odstíněné od vnějších el. polí, je dána vztahem $C = q/|\varphi_{02} - \varphi_{01}|$, kde φ_{01} , φ_{02} jsou potenciály uvažovaných těles. Například pro kondenzátor tvořený dvěma rovnoběžnými vodivými deskami o ploše S a vzdálenosti d ($S \gg d^2$), mezi nimiž je vakuum, je $C = S\epsilon_0/d$.

Kdybychom chtěli měřit kapacitu člověka coby osamoceného vodiče, museli bychom ho odizolovat, nabít a změřit jeho potenciál vzhledem k nekonečnu, což samozřejmě neumíme, ale umíme změřit jeho potenciál vzhledem k zemi. Uděláme-li to a zároveň změříme náboj na člověku, můžeme spočítat kapacitu člověka jako kapacitu kondenzátoru, kde jednu desku tvoří člověk a druhou země.

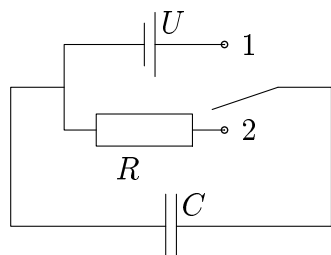
Uvědomte si, že měřit kapacitu člověka tak, že vezmu nějaký přístroj či metodu pro měření kapacity kondenzátorů a člověka zapojím do elektrického obvodu tak, že se např. každou rukou chytne jeden z přívodových drátů, je naprostý nesmysl, neboť člověk sám o sobě není žádný kondenzátor.

Metody a výsledky měření

Pro měření jsme vybrali jednu z nejpřímočařejších metod měření kapacity, neboť např. měření kapacitoměrem může být zatíženo obrovskou systematickou chybou vyplývající z toho, že všechny běžné přístroje jsou konstruovány pro měření běžných kondenzátorů.

Těžko zhodnotit, zda by kapacita kondenzátoru člověk–země šla změřit např. hojně používanou rezonanční metodou.

Zapojíme obvod podle obr. 14. Kondenzátor na obrázku je kondenzátor člověk–země, konkrétně jeden drát vede na topení, druhý držíme v ruce a on země jsme odizolováni např. gumovou podrážkou a kobercem. Nejprve kondenzátor nabijeme přes voltmetr zdrojem stejnosměrného napětí (v našem provedení $U = 20\text{ V}$), tomu odpovídá poloha spínače 1. Též by bylo možné se nabíjet statickou elektřinou, kupodivu pouhým třením ponožky o koberec se lze nabít až na několik voltů. Poté zdroj odpojíme a kondenzátor se začne přes voltmetr o odporu R vybíjet, na voltmetru pozorujeme klesající napětí.



Obr. 14

Pro napětí na kondenzátoru v každém okamžiku platí, že jeho úbytek je úměrný úbytku náboje, tj. proudu procházejícímu obvodem $dU = dQ/C = -Idt/C$, z Ohmova zákona známe proud, a tedy $dU/dt = -U/RC$, což je jednoduchá diferenciální rovnice, jejíž řešením je $U = U_0 e^{-t/RC}$. Pokud za čas t klesne napětí na voltmetru z hodnoty U_1 na U_2 , platí pro kapacitu kondenzátoru

$$C = \frac{t}{R \ln \frac{U_1}{U_2}} .$$

Kondenzátor člověk–země se vybíjel velmi rychle, proto jsme za čas t zvolili vzorkovací frekvenci voltmetru, která v našem případě byla $t = 0,5\text{ s}$ (vyčteno z manuálu a ověřeno přibližným měřením na stopkách). Za hodnotu U_1 jsme brali první hodnotu, která se na voltmetru objevila po zapojení spínače do polohy 2. Za hodnotu U_2 tu, která se tam objevila po ní, tj. po půl sekundě. Předtím jsme samozřejmě ověřili, že pokud voltmetr např. rychle připojíme (či odpojíme) na zdroj napětí, tak hned první hodnota, která se na něm objeví odpovídá vcelku přesně té, která se posléze ustálí. Odpor voltmetru je $R = 10\text{ M}\Omega$ (vyčteno z manuálu a přibližně přeměřeno). Několik měření je uvedeno v následující tabulce:

$U_1(\text{ V})$	0,99	1,70	1,22	0,68	0,94	0,69	1,34	1,26
$U_2(\text{ V})$	0,70	0,79	0,70	0,47	0,69	0,49	0,74	0,70
$C(\mu\text{F})$	0,14	0,07	0,09	0,14	0,16	0,15	0,08	0,09

Průměrně tedy $C = 0,11\ \mu\text{F}$. Statistickou odchylku nemá smysl počítat, neboť systematická je mnohem větší. Jedná se spíše o řádový odhad měřené kapacity člověka než o její přesné měření.

Závěr a diskuze výsledků

Vybíjecí křivku kondenzátoru a tudíž i kapacitu bychom mohli určit mnohem přesněji při použití např. osciloskopu, na kterém by se křivka přímo zobrazila. Aby se kondenzátor vybíjel pomaleji, potřebovali bychom větší odpor, ten jsme ovšem k dispozici neměli. Navíc při pomalejším vybíjení by velkou chybu do měření vnášel fakt, že kondenzátor není ideální, resp. že desky nejsou ideálně odizolovány, a tedy se kondenzátor vybíjí i při nezapojeném voltmetru (náboj oteče podlahou do země).

Samotná kapacita člověka velmi závisí na tom, jak dobře je odizolován, jak stojí, na čem, v čem je oblečen atd.

Úloha IV . Exp ... změřte ho!

Ledová královna žije v říši, kde je všechno kromě lidí, živočichů, rostlin a několika málo dalších věcí z ledu. Chudinka královna zjistila, že potřebuje nové brýle. Jenže její dvorní brusič brýlí umí jenom brýle ze skla a snad by si vzpomněl, jak je udělat z ledu, ale potřeboval by na to znát jeho index lomu. A jelikož všechny MF tabulky v království jsou z ledu, nejde z nich nic přečíst, a tak mu nezbývá, než ho změřit, jenže neví jak. A tak vás prosí o pomoc. Poradte mu a pro jistotu i danou veličinu změřte sami, neboť on je nešika a nic jiného než brousit brýle neumí.

Teorie:

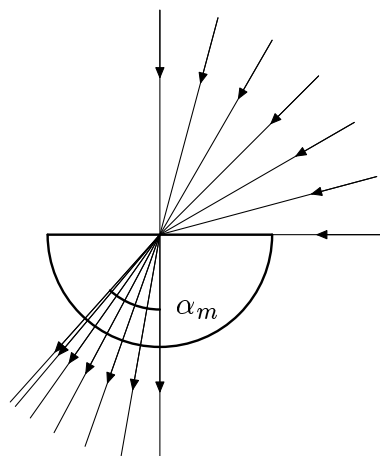
Pro index lomu světla platí Snellův zákon lomu

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2},$$

kde n_1 a n_2 jsou indexy lomu světla jednotlivých materiálů a α_1 a α_2 jsou úhly, pod kterými paprsek na rozhraní vchází a vychází.

My jsme použili Abbeův polokulový refraktometr. Měří se ním mezní úhel, pro který, po položení kousku neznámého materiálu s indexem n_2 na polokouli s indexem lomu n_1 , platí ($\alpha_1 = 90^\circ$)

$$n_2 = n_1 \sin \alpha_m.$$



Obr. 15

Základ refraktometru tvoří průhledná polokoule o známém indexu lomu (ze silně lámavého flintového skla), jejíž rovina je po krajích zabroušena. Polokoule je uložena na podstavci otočném kolem svislé osy tak, aby její rovinná plocha byla vodorovná. Proti oblé ploše polokoule je umístěn dalekohled otočný kolem vodorovné osy procházející středem polokoule (na obr. proti směru paprsků). Poloha dalekohledu se odečítá na svislé úhlověrné stupnici.

Vzorek zkoumané látky, který musí mít alespoň jednu plochu rovinnou a dobře vyčištěnou, se klade do středu rovinné plochy polokoule. Pak se přístroj osvětlí ze strany rozptýleným monochromatickým světlem zvolené vlnové délky (pro nižší přesnost stačí bílé světlo). Dalekohled se nastaví do takové polohy, aby rozhraní tmavého a světlého pole procházelo středem nitkového kříže v dalekohledu. Na stupnici je pak možné odečíst žádaný mezní úhel α_m .

Nezáleží na čirosti materiálu. Jediné, co potřebujeme, je jedna hladká plocha. Ta se zajistí ponecháním ledové kostky chvíli na skle. To je velká výhoda, protože s přípravou pravidelného ledového tělesa jsou velké potíže. Když bychom chtěli měřit úhel dopadu a lomu na rozhraní vzduch – led klasickou metodou, potřebujeme čirý exemplář ledu s hladkými a rovnoběžnými stěnami, jinak se dopustíme chyby. Protože my se do toho ledu budeme z některé strany i dívat.

Vybíráme z dalších metod, které byly v experimentálce použity. Vezmeme si na pomoc učebnici fyziky třetího ročníku – proto k sestavě jen krátce. Vyrobit si ledový půlkruh a úhly α_1 a α_2 vyznačujeme špendlíky, přičemž všechny mají být při pohledu z boku na půlkruh v zákrytu. Záleží na tom s jakou přesností byl vyroben ten půlkruh. Nejpřesněji se dá vyrobit, když máme přesnou půlkruhovou formu. I tady se dal měřit mezní úhel.

Měříme tzv. Brewsterův úhel. Pro něj platí $\sin \alpha_p = n$. Je to úhel, při kterém se světlo (např. ze svíčky) úplně zpolarizuje. Jsou alespoň dva způsoby provedení. Rovná ledová

plocha a polarizační sklíčko nebo dvě ledové plochy. Ten druhý je složitější. Potřebujeme zajistit, aby nám světlo dopadalo na led pod úhlem α_p a odtud odražené na druhou ledovou plochu taky pod úhlem α_p . V každém případě hledáme úhel, při kterém se nám světlo ze svíčky po odrazu(ech) ztratí.

”Jak vyrobit čirý led?”, se ptali někteří z vás. Nejčirější led se dá vyrobit podchlazením vody a následným drbnutím do nádoby s ní. Pomalé mražení je taky řešením, ale nejlhčí snad je zajít si k některému rybníku nebo koupališti a poohlídnout se tam. Led bude zaručeně čistý, ale zpracovat ho na pravidelný útvar nám dá nemalou práci.

Naměřené a získané hodnoty:

Index lomu skla, ze kterého byla vyrobená polokoule: $n_1 = 1,737 \pm 0,002$

č.m.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
α_m	49°41'	49°45'	49°40'	49°45'	48°30'	50°00'	49°50'	49°42'	49°35'	49°40'
n_2	1,324	1,326	1,324	1,326	1,301	1,331	1,327	1,325	1,322	1,324
$\Delta n_2 / 10^{-3}$	1	3	1	3	22	8	4	2	1	1
$(\Delta n_2)^2 / 10^{-6}$	1	9	1	9	484	64	16	4	1	1

Průměrná hodnota: $\bar{n}_2 = 1,323$.

Standardní odchylka: $\sigma_{stand} = 8 \cdot 10^{-3}$ ke hrubé chybě dle $3\sigma_{stand}$ kritéria nedošlo

Statistická odchylka: $\sigma_{stat} = 3 \cdot 10^{-3}$.

Systematická odchylka: $\sigma_{syst} = 1 \cdot 10^{-3}$ což můžeme zanedbat.

Selková chyba: $\sigma_{celk} = 9 \cdot 10^{-3}$,

Hledaná hodnota: $n_2 = 1,32 \pm 0,01$.

Diskuse: Chyb jsme se dopouštěli, když jsme určovali přechod mezi tmou a světlem. Totiž to rozhraní někdy nebylo ostré, vadila tam voda, která se tála z ledu a stékala skrz hranu polokoule. To by se dalo obejít, kdybychom jsme pracovali při teplotách pod nulou, nejlepší tedy venku (získat dostatečně veliký mrazák by byl docela problém).

Závěr: Hodnota indexu lomu ledu, kterou jsme naměřili pro žluté světlo, je $1,32 \pm 0,01$. Chyba měření vyšla 0,7%, což je velice dobré.

Na závěr ještě básnička od Lucie Vasické, která se nám velice líbila.

Já chudáček malinký,
sedím tady v zmrzlé díře,
očička mám malinký,
od pláče a bédování.

Po ta léta nedělání,
já brusič zlenivěl,
kdo pak mi jen poradí,
to, co já už zapomněl?

Jak řek, tak udělal,
starý brusič zajásal,
zachvilenu už zase znal index lomu ledu,
že je 1,31 vůči vzduchu pro žluté světlo.

Královnička zmrzlé říše,
brejličky potřebuje,
avšak já hlupák starý,
index lomu zapomněl.

Nedělej si hlavu starý,
já ti to přec poradím,
kouknu do tabulek starých,
index lomu ledu prozradím.

Pár chvil na to, celý šťastný
brejličky vyráběl,
od krále a královničky
pochválení obdržel.

Úloha V. Exp ... za mřížemi

Určete mřížkovou konstantu (vzdálenost dvou nejbližších vláken) u vzorku kovové mřížky, který najdete přilepený někde na letáku, jež držíte v ruce. Použijte co možná nejvíce různých metod a jejich výsledky porovnejte.

Měření mikroskopem

Měřili jsme mřížkovou konstantu přímo pod mikroskopem. Nejdřív bylo potřeba nakalibrovat mikroskop pomocí etalonu. Pak už byla známa vzdálenost mezi dvěma vrypy

na měřidlo v mikroskopu a jen jsme spočítali počet oček v mřížce na známou vzdálenost. To nám vyšlo na $d = (66,0 \pm 0,3) \mu\text{m}$.

Chyby se mohly vlnit napočítáním chybného počtu vláken na jistou vzdálenost.

Měření interferenčního obrazce

Určitě se všichni z vás dívali skrze mřížku proti žárovce nebo lampičce. Jistě jste si všimli, že interferenční obrazec je mnohem složitější než u obyčejné šterbiny nebo drátku.

Tloušťka drátků, ze kterých je mřížka utkaná, je porovnatelná s jejich vzájemnou vzdáleností. Přesto jsou vidět jistá výrazná maxima — jsou seřazena do čtverce 3×3 .

Když si posvítíme na mřížku monochromatickým světlem, nejlépe z laseru, uvidíme interferenční maxima. Jejich vzdálenost je $a = ld/\lambda$, kde l je vzdálenost stínítka od mřížky, d je mřížková konstanta a λ vlnová délka světla vycházejícího z laseru. Odečítání vzdáleností maxim nám dělal elektronický snímač, kterého chyba změny rychlosti byla zanedbatelná.

Toto měření nám dalo hodnotu $d = (69 \pm 1) \mu\text{m}$. Největší chyba byla v určení vzdálenosti d .

Úloha VI. Exp ... zase domino

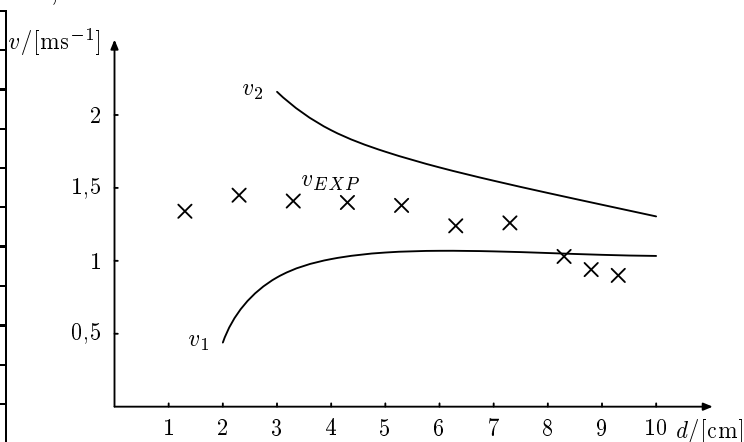
Proměřte rychlost padání dominových kostek z problémové úlohy pro různé podmínky. Můžete např. změřit závislost na vzdálenosti, hmotnosti či výšce kostek. Pokud budete řešit i problémovou úlohu, nezapomeňte porovnat vaši teorii s experimentem.

Tato úloha „plynule“ navazuje na problémovou úlohu VI.P, ve které byla nastíněna teorie pádu kostiček domina. V experimentální úloze bylo naším úkolem tuto rychlost změřit v závislosti na různých rozměrech dominových kostek.

Měření bylo velmi přímočaré: Postavíme kostičky ve stejné vzdálenosti od sebe, do krajní cvrkneme a měříme čas. Čím více máme kostiček, tím je měřený čas delší a relativní přesnost větší. Vynalézavější jedinci mohli měření času zautomatizovat pomocí domácí elektroniky (videokamera, ...). Kvalita experimentálních výsledků je pak dána tím, jak přesně jsme schopni změřit čas a tím, kolik různých sad dominových kostiček máme k dispozici. Jako dominové kostičky bylo možné použít i například audio a videokazety.

Zde uvádíme příklad experimentálních výsledků pro jedny konkrétní dominové kostičky o výšce $h = 10,8 \text{ cm}$ a tloušťce $a = 1,7 \text{ cm}$.

$a + d$ [cm]	l [m]	t [s]	v_{EXP} [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$]
3	1,5	1,12	1,34
4	2	1,38	1,45
5	3	2,13	1,41
6	3	2,14	1,40
7	3,1	2,18	1,38
8	2,96	2,38	1,24
9	2,97	2,36	1,26
10	3	2,92	1,03
10,5	2,94	3,14	0,94
11	2,97	3,3	0,90



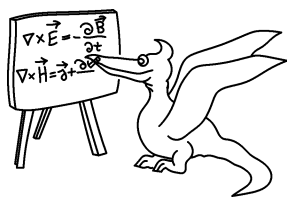
Obr. 16

Závislost rychlosti šíření vlny na vzdálenosti kostiček d jsme vynesli do grafu na obrázku 16. V grafu jsou vyneseny i příslušné teoretické odhady rychlostí v_1 a v_2 podle

vztahů odvozených v úloze VI.P. Rychlost v_1 je určena pomocí předpokladu, že se ω_0 padající kostky nemění. Rychlost v_2 je spočtena pomocí odhadnutí průběhu změny ω_0 . Vidíme, že použité modely nejsou špatné, naměřená rychlost v_{EXP} leží podle očekávání mezi hodnotami v_1 a v_2 .

Správné řešení experimentální úlohy samozřejmě obsahovalo další měření pro jiné velikosti kostiček. Někteří provedli měření i pro různé hmotnosti stejně velkých kostiček, zde se však závislost rychlosti na hmotnosti nepodařilo (v souladu s teoretickým modelem) prokázat.

V autorském řešení této úlohy byla použita experimentální data získaná Mirkem Hejnou neboť provedl všechny experimenty velmi pečlivě (nezanedbatelnou roli však také hraje přirozená lenost opravovatelů získávat vlastní experimentální výsledky...).



Seriál o mechanice

Klasická mechanika

Úvod

Tento rok v seriálu na pokračování zabrousíme do jednoho z nejstarších oborů fyziky. Budeme se zabývat klasickou mechanikou, jejíž dnešní podoba je z většiny dílem Isaaca Newtona. Newton dosavadní fyzikální pozorování shrnul do ucelené matematické teorie, jeho mechanika se stala teoretickým základem novodobé fyziky.

Základní pojmy

V této kapitole se budeme zabývat mechanikou *hmotného bodu*, čímž myslíme těleso, které má nekonečně malé rozměry, ale nenulovou hmotnost. Jedná se o idealizaci reálných těles, kterou můžeme použít v případě, když zkoumané těleso je velmi malé, nebo nám nejde o jeho rotaci či deformaci, ale jen o jeho pohyb podél nějaké křivky. K určení polohy hmotného bodu používáme *polohový vektor*, což je spojnice počátku soustavy souřadnic s popisovaným bodem, budeme ho značit \mathbf{r}^*). Tento vektor často s výhodou rozkládáme do složek $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$. Jde-li o pohyb po přímce, stačí nám k popisu polohy pouze jediná souřadnice, poloha v rovině je daná dvěma souřadnicemi. Při svém pohybu hmotný bod opisuje křivku, které říkáme *trajektorie*, délka trajektorie mezi dvěma body je pak *dráha*, kterou hmotný bod urazil.

Rychlost a zrychlení

Rychlost je veličina, která určuje, jak rychle se mění poloha hmotného bodu, resp. jeho polohový vektor. *Průměrnou rychlostí* v časovém intervalu (t_1, t_2) nazýváme podíl

$$\mathbf{v}_p = \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

je to tedy posunutí dělené časem. Abychom zjistili okamžitou rychlost v čase t , musíme zjistit průměrnou rychlost na intervalu $(t, t + \Delta t)$, kde Δt zmenšujeme k nule.

Příklad 1: Hmotný bod se pohybuje po přímce a jeho polohu udává souřadnice $x = kt^3$, kde k je konstanta (její jednotka je $\text{m}\cdot\text{s}^{-3}$). Průměrná rychlost na intervalu $(t, t + \Delta t)$ je

$$v_p = \frac{k(t + \Delta t)^3 - kt^3}{\Delta t} = \frac{k(t^3 + 3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3) - kt^3}{\Delta t} = 3kt^2 + 3kt\Delta t + k(\Delta t)^2.$$

Zmenšujeme-li Δt k nule, dostáváme okamžitou rychlost $v = 3kt^2$.

Proces, kterým jsme z funkce $x = kt^3$ dostali funkci $v = 3kt^2$ se nazývá derivování, funkce $v(t)$ je derivací funkce $x(t)$ podle času, což značíme $v = \dot{x}$ *). V dalším textu budeme o derivacích potřebovat tyto poznatky:

- derivace konstantní funkce je nula (nulová funkce)

*) Vektory značíme tučně, případně šipkou nad písmenem v ručně psaném textu.

*) Takto se značí derivace podle času, obecně se derivace funkce $y(x)$ podle x značí $\frac{d}{dx}y(x)$ nebo zkráceně $\frac{dy}{dx}$

- derivace součtu dvou funkcí je součet derivací těchto funkcí, tedy $\frac{d}{dt}(f+g) = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt} = \dot{f} + \dot{g}$
- konstantu lze vytknout před derivaci, $\frac{d}{dt}(cf) = c\frac{d}{dt}f$
- funkce $y = t^r$, kde $r \in \mathbb{R}$ má derivaci $\dot{y} = rt^{r-1}$, obecněji $y = (at+b)^r$ má derivaci $\dot{y} = ra(at+b)^{r-1}$

Zrychlení je derivace rychlosti podle času, $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ *). Zrychlení tedy udává, jak rychle se mění rychlost.

Příklad 2: Hmotný bod při pohybu po přímce zpomaloval se zrychlením $a = -\sqrt{k(t_1-t)}$, a v čase t_1 zastavil. Chceme určit jeho počáteční rychlost. K tomu budeme hledat funkci $v(t)$ tak, aby $\dot{v} = a$. Vzhledem k tomu, že platí $\frac{d}{dt}(t_1-t)^{3/2} = -\frac{3}{2}(t_1-t)^{1/2}$, vyhovuje funkce $v = \frac{2}{3}\sqrt{k(t_1-t)^3} + c$ podmínce $\dot{v} = a$. Konstantu c určíme tak, že za t dosadíme t_1 , pak dostaneme $v(t_1) = c$, a tedy $c = 0$. Hledaná počáteční rychlost je $v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{kt_1^3}$.

Pohybová rovnice

Newtonova teorie je založena na třech zákonech. Asi nejdůležitější je druhý, který říká, že celková síla, která působí na hmotný bod je rovna časové derivaci jeho hybnosti, $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$. Hybnost je definovaná jako $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, a protože m je konstantní, platí $\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a}$, můžeme tedy psát $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Proto je zrychlení tak důležitá veličina, známe-li totiž sílu, která na těleso působí, snadno spočítáme jeho zrychlení. Působící sílu vyjádříme jako funkci polohy, rychlosti a času, po dosazení do 2. Newtonova zákona dostaneme pohybovou rovnici

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{a}$$

kde $\ddot{\mathbf{r}}$ značí druhou derivaci (derivaci derivace) \mathbf{r} , tedy zrychlení. Řešením pohybové rovnice získáme závislost polohy hmotného bodu na čase.

Příklad 3: Volný pád. Těleso je z výšky h vrženo rychlostí v_0 k zemi. Působí na něj konstantní síla $F = -mg$. Pro popis polohy nám stačí y -ová souřadnice, počátek volíme na povrchu Země. Pohybová rovnice je tedy $-mg = ma = m\ddot{y}$. Nejprve budeme hledat rychlost $v(t) = \dot{y}(t)$. Derivace této funkce musí být $-g$, proto $v = -gt + c$, kde konstanta c je rovna počáteční rychlosti $-v_0$, tedy $v = -gt - v_0$. Podobně najdeme $y(t)$. Jeho derivace je $v(t)$, odtud $y = -gt^2/2 - v_0t + h$. Z tohoto vztahu lze již snadno spočítat např. dobu pádu či rychlost dopadu.

Druhy sil

Gravitační síla: Na základě Keplerových pozorování odvodil*) Newton, že planety jsou ke Slunci přitahovány silou, která je přímo úměrná jejich hmotnosti a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti. Zobecnění tohoto poznatku — Newtonův gravitační zákon — tvrdí, že každé dva hmotné body se přitahují silou o velikosti

$$F = G\frac{m_1m_2}{r^2}, \quad G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}.$$

Tento vztah platí nejen pro hmotné body, ale i pro koule se sféricky symetricky rozloženou hmotností*), za vzdálenost r pak bereme vzdálenost středů. Tělesa na povrchu Země jsou proto přitahována silou $F = m(GM_Z/R_Z^2) = mg$.

*) Vektor derivujeme tak, že zderivujeme každou jeho složku. Výsledkem je tedy opět vektor.

*) Viz strana 62.

*) Tzn. že hustota závisí pouze na vzdálenosti od středu, což splňuje většina vesmírných těles.

Síly pružnosti: Další silou s širokým využitím je síla pružnosti, která se dá vyjádřit jako $F = -kx$, kde $k > 0$ je konstanta pružnosti závislejší na vlastnostech pružné soustavy, x je výchylka z rovnovážné polohy. Může se jednat buď přímo o pružinu nebo například o železnou tyč. U té ale bude konstanta k výrazně větší, lze jí z Hookova zákona spočítat jako $k = SE/l$, kde S je průřez tyče, l její délka a E Youngův modul pružnosti materiálu. Většinou není závislost síly na výchylce přesně lineární, přesto s výhodou používáme vztah $F = -kx$ jako dobrou aproximaci.

Třecí síly: Je nutné rozlišovat dva druhy třecích sil — statickou a dynamickou. Statická třecí síla mezi dvěma pevnými povrchy brání jejich vzájemnému pohybu (její velikost a směr jsou tomu přizpůsobeny). Maximální velikost této síly je $F = f_s F_n$, kde F_n je síla, kterou jsou povrchy přitlačovány k sobě v normálovém směru, f_s je statický koeficient tření závislejší na materiálech. Působí-li na povrchy v tečném směru větší síla než $f_s F_n$, začnou po sobě klouzat, jejich pohyb je ale brzděn dynamickou třecí silou. Její směr je opačný než směr pohybu povrchů a pozoruhodné je, že její velikost téměř nezávisí na rychlosti pohybu povrchů, je rovna $F = f_d F_n$, f_d je dynamický koeficient tření (také se používá termín koeficient smykového tření), pro dané materiály je dynamický koeficient menší než statický, proto je také brzdění automobilu účinnější, když kola nesmýkají.

Odporové síly: Na tělesa pohybující se v tekutém prostředí působí proti směru rychlosti odporové síly. Pro malé rychlosti lze přibližně tvrdit, že odporová síla je přímo úměrná rychlosti, pro kouli o poloměru r pohybující se pomalu v tekutině o viskozitě η odvodil Stokes vztah $F = 6\pi r\eta v$. Pro vyšší rychlosti, kdy začíná být proudění turbulentní odvodil Newton vztah $F = \frac{1}{2} C S \rho v^2$, kde S je plocha kolmého průřezu tělesa, ρ hustota prostředí a C je bezrozměrný koeficient závislejší na geometrii tělesa (pro kouli $C \approx 0,4$).

Oba vztahy však platí pouze přibližně. Přesný výpočet odporových sil je značně komplikovaný, jedná se stále o otevřený problém. Clayův matematický institut nedávno vypsal za důkaz existence a hladkosti řešení Navier-Stokesových rovnic odměnu \$1,000,000! Právě tyto rovnice exaktně popisují proudění tekutin (od vody v jezeře, která obtéká vaši loďku, přes víno, co si ležete do skleničky, až po chování vzduchu, kterým poletují ptáci).

Úloha S.I ... autíčka

a) Autíčko o hmotnosti m se rozjíždí z klidu tak, že výkon P je konstantní. Určete závislost zrychlení, rychlosti a polohy na čase. Návod: znáte-li výkon, je jednoduché určit závislost kinetické energie autíčka na čase.

b) Autíčko jede při maximálním výkonu do kopce rychlostí $v_1 = 95 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Ze stejného kopce dolů jede při plném výkonu rychlostí $v_2 = 162 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Jak rychle pojede po rovině? Odporová síla je úměrná v^2 .

a) Práce motoru se mění na kinetickou energii autíčka, tedy

$$Pt = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}.$$

Tento vztah odvodili téměř všichni řešitelé správně a udělovali jsme za něj jeden bod. Zrychlení autíčka je derivací jeho rychlosti podle času. Stačí tedy zderivovat vzorec pro v podle t a dostaneme

$$a = \sqrt{\frac{2P}{m}} \cdot \frac{1}{2} t^{-1/2} = \sqrt{\frac{P}{2mt}}.$$

Tento vztah však můžeme odvodit i elegantněji bez použití derivace dosazením $P = Fv = mav$. Dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{2mavt}{m}}, \quad \text{tedy} \quad a = \frac{v}{2t} = \sqrt{\frac{P}{2mt}}.$$

Dráhu, kterou urazí autíčko za čas t , vypočteme integrací jeho rychlosti od 0 do t , tj.

$$s = \int_0^t \sqrt{\frac{2Pt}{m}} dt = \sqrt{\frac{2P}{m}} \cdot \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2Pt^3}{m}} .$$

Nejfrekventovanější chybou bylo používání vzorců pro rovnoměrně zrychlený pohyb při výpočtu a a s (typicky $a = v/t = \sqrt{2P/mt}$). Ale takto postupovat nemůžete!!! Vzorce $v = at$ a $s = at^2/2$ platí pouze za předpokladu, že $a = \text{const}$, což pro naše autíčko není splněno.

b) Označme F složku tíhové síly působící na autíčko rovnoběžnou s vektorem jeho rychlosti a k konstantu úměrnosti ve vztahu $F_o = kv^2$, kde F_o je odporová síla. Protože výkon je součin síly a rychlosti, můžeme psát

$$P = kv_1^3 + Fv_1, \quad P = kv_2^3 - Fv_2 .$$

Vydělením první rovnice v_1 druhé v_2 a jejich sečtením dostaneme

$$P \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right) = k (v_1^2 + v_2^2) ,$$

$$\frac{P}{k} = \frac{(v_1^2 + v_2^2) v_1 v_2}{v_1 + v_2} .$$

Při jízdě po rovině platí $P = kv^3$. Rychlost jízdy po rovině je tedy

$$v = 3 \sqrt{\frac{(v_1^2 + v_2^2) v_1 v_2}{v_1 + v_2}} = 128 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} .$$

Kmity

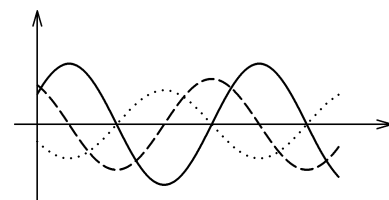
Tato kapitola seriálu je věnována systémům v rovnováze, které mají tendenci se při vychýlení do této polohy vracet (říká se tomu stabilní rovnováha). Díky silám, které tento návrat způsobují, se však soustava po vychýlení v rovnováze většinou nezastaví, ale začne kolem ní oscilovat. S takovými systémy se setkáváme takřka na každém kroku, a vlastně velká část fyziky zkoumá jen různé druhy těchto systémů.

Pohybová rovnice kmitů

My se budeme zabývat jen takovými soustavami, jejichž konfiguraci lze popsat jedinou souřadnicí. Učebnicovým příkladem je závažíčko zavěšené na pružince. Při vychýlení z rovnovážné polohy o x působí pružinka na závažíčko silou $F = -kx$ (viz minulá kapitola). Pohybová rovnice má po úpravě tvar

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (6)$$

kde $\omega^2 = k/m$. Uvidíte-li kdykoliv při svém fyzikálním bádání rovnici podobnou této, **JÁSEJTE!**



Obr. 17. Závislosti x, v, a na t .

Tato rovnice, která se nazývá *rovnice harmonických kmitů*, má totiž velmi jednoduché řešení, závislost výchylky x na čase je

$$x = A \sin(\omega t + \gamma) , \quad (7)$$

kde A a γ jsou konstanty závislé na počátečních podmínkách. Veličina ω má rozměr $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ a nazývá se *úhlová frekvence*. O tom, že (7) je řešením rovnice (6) se lze přesvědčit dosazením*). Na obr. 17 je znázorněna časová závislost výchylky (plná čára) společně s rychlostí (čárkovaná čára) a zrychlením (tečkovaná čára), platí

$$v = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \gamma) , \quad (8)$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \gamma) .$$

Příklad 4: Jaká bude perioda kmitů vodní hladiny v duté trubici tvaru písmene „U“ ?

V rovnováze je hladina v obou částech trubice ve stejné výšce. Označme x vychýlení hladiny z této polohy. Celý vodní sloupec pak do rovnováhy vrací síla $F = -2Sx\rho g$, kde S je průřez trubice. Pohybová rovnice pro sloupec vody je $ma = -2Sx\rho g$. Označíme l délku sloupce, pro jeho hmotnost lze psát $m = Sl\rho$, po dosazení dostáváme

$$\ddot{x} + \frac{2g}{l} x = 0$$

a můžeme jásat. Úhlová frekvence těchto kmitů je $\omega = \sqrt{2g/l}$, z čehož pro periodu dostáváme $T = 2\pi/\omega = \pi\sqrt{2l/g}$.

Energie kmitů

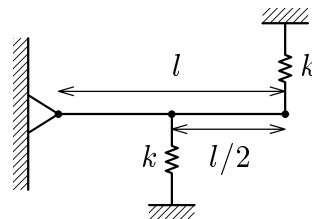
Podíváme se nyní na energetickou bilanci pro případ závažíčka na pružince. Kinetická energie závaží je $E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Potenciální energie pružiny je rovna práci, kterou musíme vykonat, abychom závažíčko vychýlili do polohy x . Tato práce je rovna obsahu plochy pod grafem závislosti síly na výchylce $F' = kx$, tedy $E_p = \frac{1}{2}kx^2$. Protože jsme zatím nevzali v úvahu žádné energetické ztráty, měl by platit zákon zachování mechanické energie. Ověřit ho lze výpočtem celkové energie $E_{\text{celk}} = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + kx^2)$, kde za x a \dot{x} dosadíme ze vztahů (7) a (8). To nám napovídá další důležitý vztah mezi rychlostí a výchylkou kmitavého pohybu:

$$\omega^2 x^2 + \dot{x}^2 = \text{konst.} \quad (9)$$

Platnost posledního vzorečku nám zejména u složitějších soustav dává možnost elegantněji hledat ω . Nejlépe si to ukážeme na příkladu.

Příklad 5: Nalezněte úhlovou frekvenci kmitů soustavy na obr. 18. Tyč je homogenní a má hmotnost m , obě pružiny mají tuhost k .

Vzhled soustavy je popsán jedním parametrem – úhlovou výchylkou z vodorovné polohy (pružiny jsou nastaveny tak, aby vodorovná poloha tyče byla rovnovážná). Maximální výchylku označíme A , maximální úhlovou rychlost (při průchodu rovnovážnou polohou) označíme Ω . Protože



Obr. 18

*) K tomu je třeba umět derivovat. Kdo to ještě neumí, nechť nahlédne např. do knižky Matematika a řešení fyzikálních úloh od Z. Ungermanna (knihovnička FO), nebo do učebnic matematiky pro 4. ročník gymnázia. Určitě se vám to ještě bude (nejen) při čtení seriálu hodit.

při maximální výchylce je kinetická energie nulová a při nulové výchylce je zase nulová potenciální energie, můžeme ZZE psát ve tvaru

$$\frac{1}{2}J\Omega^2 = E_{k,\max} = E_{p,\max} = \frac{1}{2}k(Al)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{Al}{2}\right)^2.$$

Z (9) plyne $\omega = \Omega/A$, tento podíl vyjádříme z předchozího vztahu, ve kterém dosadíme $J = \frac{1}{3}ml^2$. Výsledek je

$$\omega = \sqrt{\frac{15k}{4m}}.$$

Fyzické kyvadlo

Fyzickým kyvadlem rozumíme tuhé těleso, které se může volně otáčet kolem osy o neprocházející těžištěm T . Sestavme pohybovou rovnici pro kyvy takového tělesa. Za parametr popisující polohu tělesa zvolme opět úhlovou výchylku z rovnovážné polohy a označme ji φ . Vzhledem k ose o je těleso vráceno do rovnováhy momentem tíhové síly $M = -mgd \sin \varphi$, kde d je vzdálenost těžiště T od osy o . Podle 2. impulsové věty*) způsobuje tento moment úhlové zrychlení $\varepsilon = \ddot{\varphi} = M/J$, kde J je moment setrvačnosti tělesa kolem osy o . Pohybová rovnice má tedy tvar

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgd}{J} \sin \varphi = 0.$$

Toto je rovnice tvaru $\ddot{\varphi} + f(\varphi) = 0$, zde konkrétně je $f(\varphi) = (mgd/J) \sin \varphi$. Taková rovnice nemá rozdíl od (6) obecně jednoduché řešení. Přesto se ji pokusíme řešit alespoň pro malé výchylky. Aby soustava měla pro $\varphi = 0$ stabilní rovnovážnou polohu, musí být $f(\varphi)$ v nule nulová, pro kladné výchylky kladná a pro záporné záporná. Tuto funkci většinou lze nahradit funkcí $f^*(\varphi) = \omega^2 \varphi$, která pro malá φ dává přibližně stejné hodnoty jako $f(\varphi)$, a to tím přesněji, čím je φ bližší nule. Nejlepší možností je, když volíme $\omega^2 = \frac{d}{dx}f(x)$ v bodě $x = 0$, což je ostatně vidět i z grafů obou funkcí.*) Dosadíme-li do pohybové rovnice místo $f(\varphi)$ funkci $f^*(\varphi)$, dostáváme již rovnici harmonických kmitů s úhlovou frekvencí ω .

Konkrétně pro fyzické kyvadlo nahradíme funkci $\sin \varphi$ funkcí φ a pro úhlovou frekvenci dostáváme

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{J}}.$$

Notoricky známý vztah pro periodu matematického kyvadla dostaneme dosazením $J = md^2$.

Na závěr tohoto dílu se zmíníme o tom, jak moc přesná je výše uvedená aproximace. Při přesném výpočtu se zjistí, že perioda závisí na amplitudě výchylky, pro malé výchylky ovšem náš přibližný vztah platí celkem přesně, pro rozkmit 5° se vypočtená a skutečná perioda liší asi jen 0,05%. Jakkoliv se to zdá málo, kyvadlové hodiny, které bychom zkonstruovali podle tohoto vztahu, by se za den zpožďovaly o necelou minutu. Pokud tento efekt uvážíme a chceme, aby hodiny šly s přesností 1 s/den a amplituda byla asi 5° , musíme ji nastavit s přesností $0,06^\circ$.

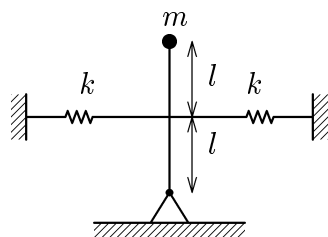
*) Je to analogie 2. Newtonova zákona pro otáčivý pohyb.

*) Derivace funkce v bodě x je směrnici tečny k jejímu grafu v tomto bodě.

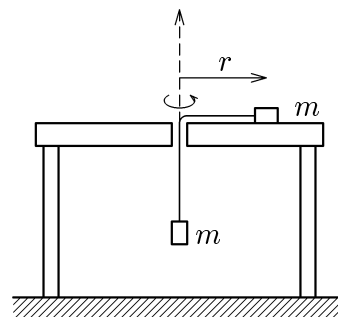
Úloha S . II ... kyvy

a) Určete periodu kmitů soustavy na obr. 19. Tyčka je nehmotná.

b) Mějme dvě stejná závažíčka hmotnosti m spojené vláknem, které prochází dírou ve stole (viz obr. 20). Závažíčko na stole obíhá bez tření kolem díry ve vzdálenosti r od ní tak, že soustava je v rovnováze. Zjistěte, co se bude dít, zatáhneme-li nepatrně za visící závaží.



Obr. 19



Obr. 20

a) Úlohu vyřešíme přes energie. Označíme maximální úhlovou výchylku A a maximální úhlovou rychlost tyčky Ω . Mezi těmito veličinami platí (viz seriál) $\omega = \Omega/A$. Celkovou energii lze vyjádřit buď jako kinetickou energii při nulové výchylce, nebo potenciální energii při nulové rychlosti,

$$\frac{1}{2}I\Omega^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}k(Al)^2 - 2mgl(1 - \cos A) .$$

Pokud dosadíme za $I = 4ml^2$ a aproximujeme $\cos A \approx 1 - A^2/2$, dostáváme pro úhlovou frekvenci

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m} - \frac{g}{2l}} .$$

Všimněte si, že pro $kl < mg$ soustava vůbec kmitat nebude, protože jde o labilní polohu. Nejčastější chybou bylo, že jste zapomněli na potenciální energii kuličky.

b) Ze ZZMH plyne, že $\omega r^2 = \omega_0 r_0^2$ a z rovnováhy sil $r_0 \omega_0^2 = g$. Spočítáme celkovou energii soustavy:

$$E = E_{k,\text{horní}} + E_{k,\text{dolní}} + E_{p,\text{dolní}} = \frac{1}{2}m(v_t^2 + v_n^2) + \frac{1}{2}mv_n^2 - mg(l - r) .$$

Pro tečnou složku rychlosti horního tělesa můžeme psát

$$v_t^2 = (\omega r)^2 = \frac{\omega_0^2 r_0^4}{r^2} = \frac{gr_0^3}{r^2} ,$$

pro normálovou složku platí $v_n = \dot{r}$. Dosadíme do ZZE a dostaneme

$$\frac{1}{2}mg \frac{r_0^3}{r^2} + m\dot{r}^2 + mgr = \text{konst} .$$

Po zderivování a vydělení $2m\dot{r}$ dostáváme

$$\ddot{r} + \frac{g}{2} \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) = 0 .$$

Po linearizaci druhého členu dostáváme rovnici

$$\ddot{r} + \frac{3g}{2r_0}(r - r_0) = 0 ,$$

což je rovnice harmonických kmitů kolem polohy r_0 s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2r_0}} .$$

Spodní závažíčko tedy začne kmitat. Ke stejnému výsledku se samozřejmě dalo dospět i rozborem sil.

Mnozí řešitelé dospěli k závěru, že po zatáhnutí spodní závaží bude nezadržitelně klesat, protože odstředivá síla nestačí dorovnávat jeho tíhu. Tento závěr je chybný, neboť v důsledku ZZMH se v_t a s ní i odstředivá síla po zatažení zvýší.

Zákony zachování

Na úvod třetí kapitoly seriálu si připomeneme základní pojmy z vyšší matematiky, které je dobré znát. Derivace funkce f v bodě x je

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{pro } h \rightarrow 0 .$$

Pro derivace platí následující vztahy

$$\begin{aligned} (f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x) , \\ (cf(x))' &= cf'(x) , \\ (fg)' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) , \\ (f(g(x)))' &= f'(g(x))g'(x) . \end{aligned}$$

Derivace mocninných a goniometrických funkcí jsou

$$\begin{aligned} y = x^r &\rightarrow y' = rx^{r-1} , \\ y = \sin x &\rightarrow y' = \cos x , \\ y = \cos x &\rightarrow y' = -\sin x . \end{aligned}$$

S derivacemi se ve fyzice setkáváme na každém kroku, neboť udávají rychlost změny veličin. Např. rychlost je derivace dráhy podle času, proud derivace náboje podle času, síla je (až na znaménko) derivace potenciální energie podle souřadnice . . .

Inverzní operace k derivování se nazývá integrování. Zintegrovat nějakou funkci znamená najít funkci, jejíž derivaci máme předem danou, tedy např. spočítat uraženou dráhu, známe-li závislost rychlosti na čase. Tato funkce je zřejmě určena až na konstantu, protože derivace konstanty je nula. Symbolicky integrál zapíšeme například takto:

$$\int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + c$$

(To znamená to samé jako $(\sin x - \cos x + c)' = \cos x + \sin x$).

Pokud je vám některý z pojmů zmíněných v předchozích odstavcích cizí, pročtěte pozorně minulé díly seriálu, popřípadě se poraďte s odbornou literaturou nebo se svým učitelem fyziky či matematiky. Nebojte se, není to nijak zvlášť obtížné, a pokud se chcete intenzivněji zabývat fyzikou, stejně na derivace a integrály dříve či později (raději dříve) narazíte. Navíc jde o velice užitečné prostředky, pomocí kterých lze jednoduše vyřešit mnoho na první pohled složitých problémů.

Zákon zachování hybnosti

Při řešení problémů je vždy výhodné najít nějakou veličinu, jejíž hodnota se nemění, ať se se systémem děje cokoliv. V případě, že na soustavu hmotných bodů nepůsobí žádné vnější síly, je takovou veličinou celková hybnost soustavy. 2. N. z. pro i -tý bod soustavy je

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \sum \mathbf{F}_{ij} ,$$

kde \mathbf{F}_{ij} je síla, kterou působí j -tý bod na i -tý. Podle 3. N. z. je ale $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0}$, odtud pro celkovou hybnost soustavy dostáváme

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0} .$$

Z poslední rovnice zřejmě plyne, že se \mathbf{p} s časem nemění. Toho lze s výhodou využít např. při řešení různých srážek.

Zákon zachování energie

Další veličinou, která se za určitých okolností zachovává, je celková mechanická energie. Její definice je

$$E = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 + V_i(\mathbf{r}_i) \right) .$$

Potenciální energie i -tého bodu V_i má tu vlastnost, že její derivace*) podle souřadnic je až na znaménko rovna síle působící na i -tý bod, tedy

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = -F_{i,x} \quad \text{podobně pro } y, z .$$

Derivujeme-li*) definici energie podle času (pro jednoduchost předpokládejme, že máme pouze souřadnici x), dostáváme

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \left(m_i v_{i,x} \dot{v}_{i,x} + \frac{dV_i}{dx_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \right) = \sum_i v_{i,x} (m_i a_{i,x} - F_{i,x}) .$$

Závorka je ovšem podle 2. N. z. nulová, energie se proto s časem nemění.

Příklad 6: Najděte potenciální energii pro homogenní a radiální gravitační pole a zapište zákon zachování energie.

Síla působící na hmotný bod v homogenním gravitačním poli je $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ (\mathbf{g} je konstanta co do velikosti i do směru). V kartézských souřadnicích, kde osa z míří proti směru \mathbf{g} , pak musí platit

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial z} = mg .$$

To je splněno pro $V = mgz$, což znáte již ze základní školy.

V radiálním poli působí na hmotný bod síla závisící pouze na vzdálenosti r od centrálního tělesa o hmotnosti M (předpokládáme, že $M \gg m$, takže se toto těleso

*) Značka ∂ místo d značí, že derivovaná funkce může být funkcí více proměnných a my derivujeme podle jedné z nich, přičemž ostatní proměnné považujeme za konstanty.

*) Použijeme dvakrát pravidlo pro derivaci složené funkce, jednou pro funkci $(v_{i,x}(t))^2$, podruhé pro funkci $V_i(x(t))$.

nepohybuje). Síla působí směrem do centra a její velikost je podle Newtonova gravitačního zákona $F = GMm/r^2$, kde G je gravitační konstanta někdy též označovaná κ . Pro potenciál musí platit

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow V = GMm \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{GMm}{r} + V_0 .$$

Konstantu V_0 můžeme volit libovolně, je ale výhodné položit ji rovnou nule. Zákon zachování energie má tedy tvar

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E .$$

Zákon zachování momentu hybnosti

Moment hybnosti hmotného bodu je definován jako vektorový součin*) $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Předpokládejme, že na hmotný bod působí pouze nějaká centrální síla. Časová derivace jeho momentu hybnosti \mathbf{L} pak je

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} ,$$

neboť vektor rychlosti je rovnoběžný s vektorem hybnosti a centrální síla působí ve směru \mathbf{r} . Našli jsme tedy veličinu, která se zachovává, působí-li pouze centrální síly. Pro pohyb v rovině můžeme velikost \mathbf{L} vyjádřit pomocí úhlové rychlosti ω . Platí totiž $r\omega = v_t = v \sin \alpha$, kde v_t je složka rychlosti kolmá na \mathbf{r} (viz obr. 21), odtud $L = mrv \sin \alpha = mrv_t = mr^2\omega$.

Keplerovy zákony

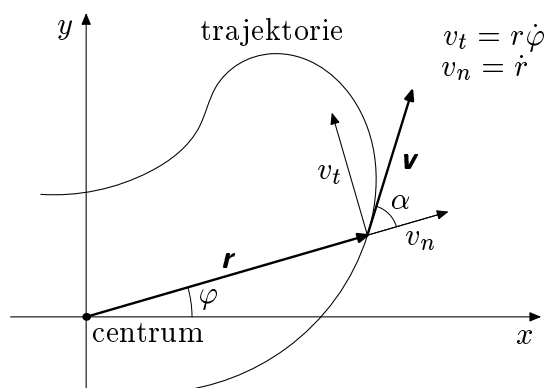
Teď si konečně ukážeme nějakou pořádnou aplikaci předchozích poznatků. Odvodíme ze ZZE a ZZMH vám dobře známé Keplerovy zákony pro pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli.

Polohu tělesa popíšeme jeho vzdáleností r od centra a úhlem φ , který svírá jeho průvodič s osou x . Gravitační síla je centrální silou, tedy platí $mr^2\omega = L = \text{konst.}$ Po vydělení obou stran rovnice $2m$ dostáváme $w = rv_t/2 = L/2m$. Veličina w má význam plochy opsané průvodičem za jednotku času. Odvodili jsme tedy 2. Keplerův zákon, který říká, že $w = \text{konst.}$

Nyní zapíšeme zákon zachování energie. Potenciální energii jsme již odvodili, kinetická energie je $mv^2/2$. Rychlost rozložíme na tečnou složku v_t a normálovou složku v_n . Už víme, že $v_t = \omega r$. Pro v_n zřejmě platí $v_n = \dot{r}$. Po dosazení vypadá ZZE takto:

$$\frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\omega^2) - \frac{GMm}{r} = E .$$

Naším cílem je nalézt vztah, který udává, jak r závisí na φ , tím je totiž dán tvar trajektorie. Abychom si zjednodušili práci, zavedeme veličinu u tak, že $r = 1/u$, a místo $r(\varphi)$



Obr. 21

*) Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je vektor kolmý na \mathbf{a} a \mathbf{b} a jeho velikost je $c = ab \sin \alpha$, kde α je úhel sevřený vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} . Vektorový součin se derivuje jako obyčejný součin.

budeme hledat $u(\varphi)$. Derivujeme-li r podle času, dostáváme

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{u(\varphi(t))} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du(\varphi(t))}{dt} = -r^2 \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi} = -\frac{L}{m} u' ,$$

protože $\dot{\varphi} = \omega$. Označili jsme u' derivaci u podle φ . Protože platí také $r\omega = (L/m)u$, můžeme do ZZÉ za všechna r dosadit a dostáváme

$$\frac{L^2}{2m} (u'^2 + u^2) - GMmu = E .$$

Derivujme nyní tuto rovnici podle φ

$$\frac{L^2}{2m} (2u'u'' + 2uu') - GMmu' = 0 ,$$

dělením výrazem L^2u'/m dostáváme tzv. Binetův vzorec

$$u'' + u = \frac{GMm^2}{L^2} .$$

Výraz na pravé straně má rozměr m^{-1} , označme tedy jeho převrácenou hodnotu p . Po dosazení za L pomocí plošné rychlosti w dostáváme

$$p = \frac{4w^2}{GM} . \tag{10}$$

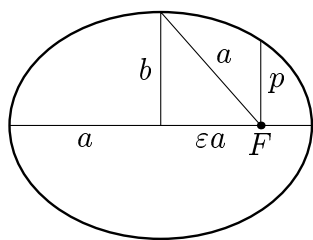
Z minulého dílu víme, že řešení rovnice $u'' + u = 0$ je $u = A \cos(\varphi + B)$, kde A, B jsou konstanty závislé na počátečních podmínkách. Řešení stejné rovnice s pravou stranou $1/p$ dostaneme z těchto řešení pouze přičtením $1/p$. Volíme-li navíc souřadnou soustavu tak, že $B = 0$, a označíme-li $\varepsilon = Ap$, můžeme řešení zapsat ve tvaru $u = (1 + \varepsilon \cos \varphi)/p$, tedy

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} . \tag{11}$$

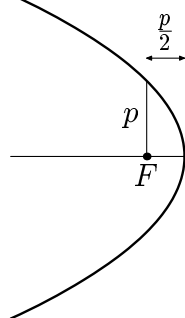
Tato rovnice je pro $\varepsilon = 0$ rovnicí kružnice, pro $0 < \varepsilon < 1$ elipsy, pro $\varepsilon = 1$ paraboly a pro $\varepsilon > 1$ hyperboly. Ohnisko kuželosečky leží vždy v centru. Tím je dokázán 1. Keplerův zákon.

Na následujících obrázcích jsou zobrazeny některé parametry těchto křivek, přitom jsme označili

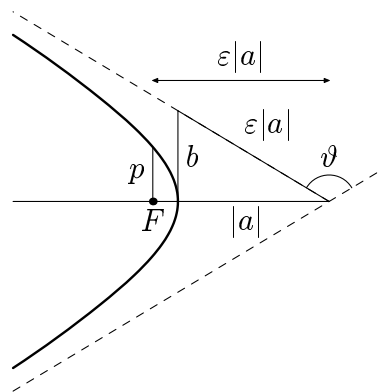
$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} , \quad b = \sqrt{p|a|} .$$



$\varepsilon < 1$, elipsa



$\varepsilon = 1$, parabola



$\varepsilon > 1$, hyperbola

Ze školy možná znáte popis kuželoseček v kartézských souřadnicích. Není těžké odvodit, že je našemu popisu ekvivalentní, a že platí uvedené vztahy mezi a, b, p, ε . Pokud vás to zajímá, nahlédněte do nějaké matematické knížky nebo si zkuste pohrát s programem, který kreslí grafy v polárních souřadnicích.

Příklad 7: Určete parametry trajektorie tělesa, které vypustíme ve vzdálenosti R od středu Země rychlostí v kolmou na spojnici tělesa a středu Země. Rychlost v je větší, než kruhová rychlost $v_k = \sqrt{GM/R}$.

Plošná rychlost tělesa je $w = vR/2$. Podle (10) platí

$$p = \frac{4w^2}{GM} = \frac{v^2 R^2}{GM} .$$

Dosadíme-li $\varphi = 0$ do (11), dostáváme

$$R = \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{p}{R} - 1 = \left(\frac{v}{v_k} \right)^2 - 1 .$$

Vidíme, že pro $v < v_u = \sqrt{2}v_k$ je $\varepsilon < 1$, trajektorií je elipsa, pro $v = v_u$ je $\varepsilon = 1$ a trajektorií je parabola a pro $v > v_u$ se těleso pohybuje po hyperbole. Dopočítat parametry trajektorie je už jen technickou záležitostí.

Všimněme si, jak užitečný je zde vztah (10) a rovnice kuželoseček v polárních souřadnicích. Před důkazem 3. Keplerova zákona odvodíme ještě jeden velmi užitečný vzoreček.

Vyjádríme celkovou mechanickou energii E pomocí parametrů trajektorie. V bodě $\varphi = 0$ platí $r = p/(1 + \varepsilon)$ a $v = 2w/r$, tedy

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{4w^2}{p^2}(1 + \varepsilon)^2 - \frac{GMm}{p}(1 + \varepsilon) = \frac{GMm}{2p}(\varepsilon^2 - 1) = -\frac{GMm}{2a} .$$

Podle ZZE je ale energie stejná pro každý bod, vyjádříme tedy v pomocí r a dostáváme

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} .$$

Právě tento vztah použijeme k výpočtu periody oběhu po eliptické trajektorii. Pro rychlost v_a ve vzdálenosti a od ohniska platí

$$v_a = \sqrt{\frac{GM}{a}} .$$

Vyjádríme nyní w a periodu oběhu T :

$$w = \frac{1}{2}v_a b , \quad T = \frac{S}{w} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}bv_a} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} .$$

Z posledního vzorce již jasně plyne $T^2 : a^3 = \text{konst}$, což je přesně tvrzení 3. Keplerova zákona.

Gratulujeme všem, kteří se dočetli až na konec této poněkud obsáhlejší kapitoly. Nešlo rozhodně o triviální věci, takže pokud jste nějaká odvození nepochopili, nic se neděje, zkuste si nejprve spočítat různé příklady. Pokud se vám naopak odvození zdálo pochopitelné, zkuste zopakovat stejný postup pro odpuzující se tělesa, např. atomové jádro a α -částice ze známého Rutherfordova experimentu.

Úloha S. III ... sonda k Jupiteru

Uvažujme družici letící k Jupiteru kolmo na jeho dráhu. Její rychlost ve velké vzdálenosti od Jupitera je $v_0 = 10000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Družice proletí za Jupiterem, její minimální vzdálenost od jeho středu je přitom rovna trojnásobku Jupiterova poloměru. Určete výsledný směr a velikost rychlosti sondy.

Využijeme-li poznatky ze seriálu, stane se z této na první pohled obtížné úlohy pouze geometrický problém. Víme, že v soustavě spojené s Jupiterem má sonda ve velké vzdálenosti rychlost $v = \sqrt{v_0^2 + v_J^2}$, kde v_J je oběžná rychlost Jupitera. Podle vztahu pro celkovou energii, která je ve velké vzdálenosti rovna pouze kinetické energii sondy, platí

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow |a| = \frac{GM}{v^2}.$$

Z geometrie hyperboly plyne pro minimální vzdálenost R vztah $R = (\varepsilon - 1)|a|$ a pro úhel ϑ platí $\sin(\vartheta/2) = 1/\varepsilon$. Odtud snadno odvodíme

$$\vartheta = 2 \arcsin \frac{GM}{GM + Rv^2}.$$

Zbývá provést přechod zpět do původní soustavy. Zvolíme např. následující konfiguraci: V původní soustavě se Jupiter pohybuje v záporném směru po ose x a sonda míří směrem vzhůru. V nové soustavě je vektor rychlosti sondy $\mathbf{v} = (v_J, v_0)$. Po průletu po hyperbole se velikost tohoto vektoru nezmění, pouze se vektor otočí o úhel ϑ v kladném smyslu.

Toto otočení nejsnáze provedeme tak, že si \mathbf{v} představíme jako komplexní číslo a násobíme jej výrazem $\cos \vartheta + i \sin \vartheta$ a výsledné komplexní číslo opět chápeme jako vektor. Lze to provést i jinak, např. přechodem do polárních souřadnic, ale tento způsob je asi nejrychlejší a navíc si nemusíme pamatovat žádné další vzorce. Výpočet je

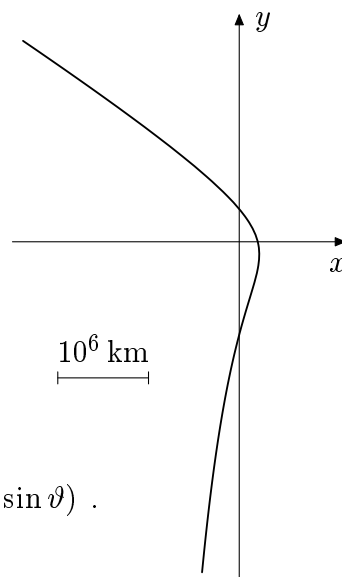
$$(v_J + iv_0)(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = (v_J \cos \vartheta - v_0 \sin \vartheta) + i(v_0 \cos \vartheta + v_J \sin \vartheta).$$

Výsledný vektor ještě převedeme do původní soustavy přičtením rychlosti Jupitera a dostáváme výslednou rychlost po průletu:

$$\mathbf{v}'_0 = (-v_0 \sin \vartheta - v_J(1 - \cos \vartheta), v_0 \cos \vartheta + v_J \sin \vartheta).$$

Pro numerický výpočet jsme použili následující data: $v_J = 13,06 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_0 = 10,00 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, $R = 214\,000 \text{ km}$ a $GM = 126\,900\,000 \text{ km}\cdot\text{s}^{-2}$. Postupně vychází $\varepsilon = 1,457$, $\vartheta = 86^\circ 42'$ a $\mathbf{v}'_0 = (-22, 29; 13,61) \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Odtud už snadno spočteme velikost výsledné rychlosti $v'_0 = 26,12 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ a úhel odklonu $\varphi = 58^\circ 35'$.

Poznámky k vašim řešením: Podle počtu řešitelů lze usuzovat, že úloha byla obtížná. Ti, kdo ji poslali, si s ní ovšem poradili dobře. Nejčastější chybou bylo řešení úlohy přímo v původní soustavě. To je problematické, neboť v této soustavě neplatí ZZE ve tvaru $E_{k, \text{sonda}} + E_p = \text{konst}$, ale musí se započítat i kinetická energie Jupitera. Navíc nelze použít geometrii popsanou v seriálu, neboť v této soustavě se sonda vůbec nepohybuje po hyperbole. Při čtení těchto řešení mě ale napadlo zjistit, jak vypadá trajektorie sondy v původní soustavě. Přestože závislost polohy sondy na čase nelze analyticky vyjádřit ani v soustavě spjaté s Jupiterem, v parametrickém tvaru lze (poněkud komplikovaným



Obr. 22

výpočtem) přesně zjistit tvar trajektorie. Tvar trajektorie pro naše konkrétní hodnoty vidíme na obr. 22. Je použita stejná konfigurace, jako v řešení, počátek má význam polohy Jupitera v okamžiku, kdy k němu je planeta nejbližší. Na první pohled je jasné, že trajektorie má k hyperbole hodně daleko. Výpočet jsem provedl v programu *Maple*, takže pokud si chcete dál hrát, napište mi email a já vám pošlu zdroják.

Mechanika tuhého tělesa

Dosud jsme popisovali pouze hmotné body. Nyní se budeme zabývat popisem tuhého tělesa. Pod tímto pojmem si budeme představovat soustavu hmotných bodů, jejichž vzájemné vzdálenosti se nemění.

Častěji než se soustavou hmotných bodů se ovšem v praxi setkáme s tělesy, jejichž hmota je spojitě rozložena v nějakém objemu. I na takovéto těleso lze použít výsledky získané pro soustavu hmotných bodů, představíme-li si jej jako soustavu velkého množství málo hmotných bodů. V řadě výpočtů je potom ale nutné místo sum počítat integrály (zejména při výpočtech hmotného středu a momentu setrvačnosti). V této kapitole integrovat nebudeme, zvědavější z vás se určitě zkusí sami.

1. impulzová věta

Nyní podobně jako při odvození ZZH v minulém díle označíme \mathbf{F}_{ij} sílu, kterou působí j -tý bod na i -tý a navíc \mathbf{F}_i vnější sílu působící na i -tý bod. 2. Newtonův zákon pro i -tý bod tělesa je

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij} .$$

Už víme, že ze zákona akce a reakce plyne, že součet sil, kterými na sebe vzájemně působí jednotlivé body tělesa, je nulový. Pro celkovou hybnost pak platí

$$\dot{\mathbf{p}} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} ,$$

kde \mathbf{F} jsme označili celkovou vnější sílu. Toto tvrzení se nazývá 1. impulzová věta. Aby nám byla nějak užitečná, musíme umět vyjádřit \mathbf{p} jednodušeji, než jako součet hybností jednotlivých bodů.

Hmotný střed

Zavedeme tedy pojem hmotného středu*) jako vážený průměr poloh všech bodů tělesa, přičemž váhou bodu je jeho hmotnost, tedy

$$\mathbf{r}_s = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i . \quad (12)$$

Důležitou vlastností hmotného středu je to, že jeho poloha vzhledem k tělesu je pevná. Z (12) plyne, že celkovou hybnost tělesa můžeme zapsat pomocí rychlosti hmotného středu jako $\mathbf{p} = m \mathbf{v}_s$.

Nyní lze 1. impulzovou větu psát ve tvaru $m \mathbf{a}_s = \mathbf{F}$. To neznamená nic jiného, než že se hmotný střed pohybuje stejným způsobem, jakým by se podle 2. Newtonova zákona pohyboval hmotný bod s hmotností rovnou hmotnosti celého tělesa.

*) Existuje drobná nuance mezi pojmy hmotného středu a těžiště, v převážné většině případů jsou však tyto pojmy zaměnitelné.

2. impulzová věta

Pomocí 1. impulzové věty umíme popsat pohyb hmotného středu. Nás ovšem také zajímá, jak bude těleso kolem hmotného středu rotovat. V minulém díle jsem zavedli moment hybnosti hmotného bodu. Jistě již tušíte, že moment hybnosti celého tělesa bude

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i .$$

Podívejme se, jak bude vypadat jeho derivace.

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{p}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{v}_i \times (m_i \mathbf{v}_i) + \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij} \right) .$$

První člen je nulový, neboť se jedná o vektorový součin rovnoběžných vektorů. Druhý člen lze s užitím zákona akce a reakce upravit na tvar

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i < j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} .$$

Předpokládáme-li, že síly mezi body mají směr jejich spojnice, dostáváme ve druhé sumě opět vektorový součin rovnoběžných vektorů. Zbývá tedy první suma, kterou značíme \mathbf{M} a nazýváme moment vnějších sil. Tvrzení 2. impulzové věty není nic jiného než že časová derivace celkového momentu hybnosti je rovna celkovému momentu působících sil, $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$.

Úhlová rychlost

Stejně jako u 1. impulzové věty je nyní třeba vyjádřit \mathbf{L} jednodušším způsobem. Bohužel, pro obecný pohyb tuhého tělesa se jedná o netriviální problém. Omezíme se tedy pouze na rovinný pohyb, což je pohyb, při kterém existuje význačný směr \mathbf{k} takový, že každý bod tělesa se pohybuje stále ve stejné rovině kolmé na tento směr*). Směr souřadné osy z volíme ve směru \mathbf{k} .

Zvolme bod tělesa O a označme \mathbf{r}'_i polohový vektor i -tého bodu tělesa vzhledem k O . Hledejme rychlost \mathbf{v}'_i i -tého bodu vzhledem k O . Jelikož vzdálenost obou bodů musí být konstantní, je \mathbf{v}'_i kolmá na spojnici bodů, tedy na \mathbf{r}_i . Zároveň víme, že oba dva body se pohybují v rovině kolmé na \mathbf{k} a proto \mathbf{v}'_i je i na \mathbf{k} kolmá. Existuje tedy vektor $\boldsymbol{\omega}_i \parallel \mathbf{k}$ tak, že

$$\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}'_i . \quad (13)$$

Nyní ukážeme, že vektory $\boldsymbol{\omega}_i$ jsou stejné pro všechny body tělesa. Zřejmě to platí pro dva body, pro něž $\mathbf{r}'_i \parallel \mathbf{r}'_j$. Vezměme tedy různoběžné $\mathbf{r}'_i, \mathbf{r}'_j$. Vztah (13) platí i pro vzájemný pohyb těchto dvou bodů, existuje tedy $\boldsymbol{\omega}_{ij}$ tak, že

$$\boldsymbol{\omega}_{ij} \times (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) = \mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_j = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}'_i - \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}'_j ,$$

z čehož po roznásobení a přeskupení dostáváme

$$(\boldsymbol{\omega}_{ij} - \boldsymbol{\omega}_i) \times \mathbf{r}'_i = (\boldsymbol{\omega}_{ij} - \boldsymbol{\omega}_j) \times \mathbf{r}'_j .$$

Protože $\mathbf{r}'_i \not\parallel \mathbf{r}'_j$ a všechny omegy jsou rovnoběžné, lze tuto rovnici splnit pouze tak, že $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_{ij}$. Existuje tedy jediný vektor $\boldsymbol{\omega}$ ve směru \mathbf{k} , který nazýváme *úhlová rychlost*. Můžeme tedy vztah (13) napsat přímo pro „nečárkovanou“ rychlost i -tého bodu:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_O) .$$

Tento vztah umožňuje spočítat rychlost libovolného bodu tělesa, známe-li rychlost bodu O .

*) Různé body se mohou pohybovat v různých rovinách.

Moment setrvačnosti

Nejprve nechť bod O je v klidu a $\mathbf{r}_O = \mathbf{0}$, jde tedy o rotaci kolem pevné osy z . Pro moment hybnosti můžeme psát

$$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = m_i [(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i] .$$

Poslední rovnost platí díky vektorové identitě $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$. Pro složku L_z celkového momentu hybnosti platí

$$L_z = \sum_i m_i [(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \omega - z_i^2 \omega] = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \omega = I \omega ,$$

kde I nazýváme momentem setrvačnosti tělesa (k příslušné ose). Z posledního vzorce je patrné, jak se I počítá. Častěji než sumu ale pro spojitá tělesa počítáme integrály (viz úvodní poznámka).

Steinerova věta

Nyní vyjádříme \mathbf{L} pro obecný rovinný pohyb. Platí $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$. Za O volíme hmotný střed S a užitím vztahů $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_S + \mathbf{r}'_i$ a $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_S + \mathbf{v}'_i$ dostáváme

$$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_S + \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{r}_S \times m_i \mathbf{v}_i - \mathbf{r}_S \times m_i \mathbf{v}_S .$$

Nyní uděláme sumu přes i . První, třetí a čtvrtý člen je roven $\mathbf{r}_S \times \mathbf{p}_S$ (čtvrtý se záporným znaménkem), jejich součet je tedy také $\mathbf{r}_S \times \mathbf{p}_S$, což si lze představit jako moment hybnosti hmotného středu. Druhý člen má význam momentu hybnosti vůči hmotnému středu, který počítáme jako v minulém odstavci*). Dostáváme tedy důležitý vztah

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_S + \mathbf{r}_S \times \mathbf{p}_S . \quad (14)$$

Opět uvažujme, že nějaký bod O je v klidu a $\mathbf{r}_O = \mathbf{0}$. Podle (14) platí $\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_S + \mathbf{r}_S \times \mathbf{p}_S$. Pro z -ové složky máme $I_O \omega = I_S \omega + m (x_S^2 + y_S^2) \omega$, kde poslední člen jsme odvodili stejně jako při výpočtu I . Protože výraz v závorce je zřejmě čtverec vzdálenosti os jdoucích body O a S , můžeme formulovat užitečnou větu*). Moment setrvačnosti I kolem nějaké osy je o md^2 větší než moment setrvačnosti I_S kolem rovnoběžné osy jdoucí hmotným středem, kde d je vzdálenost os.

Kinetická energie

Kinetickou energii i -tého bodu můžeme pomocí polohy a rychlosti hmotného středu napsat jako

$$E_i = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 = \frac{1}{2} m_i \{ \mathbf{v}_S^2 + 2 \mathbf{v}_S \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S)] + [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_S)]^2 \} .$$

Celkovou kinetickou energii všech bodů tělesa dostaneme sumací přes všechna i ,

$$E_k = \sum_i E_i = \frac{1}{2} \mathbf{v}_S^2 \sum_i m_i + \mathbf{v}_S \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \sum_i m_i \mathbf{r}_i) - \mathbf{v}_S \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_S) \sum_i m_i + \frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{\omega} \cdot [m_i \mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)] ,$$

kde poslední člen jsme získali na základě vektorové identity $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$. První člen na pravé straně rovnosti má význam kinetické energie hmotného středu. Druhý a třetí

*) Jeho z -ová složka je $I_S \omega$.

*) Steinerova věta. V anglosaské literatuře též „parallel axis theorem“.

člen jsou stejné a tedy se navzájem vyruší. z -ová složka*) výrazu v hranatých závorkách u čtvrtého členu dává, jak už jsme jednou odvodili, z -ovou složku momentu hybnosti, tedy $I_S\omega$. Máme tedy výsledný výraz pro kinetickou energii, který se v literatuře často nazývá *Königova věta*,

$$E_k = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}I_S\omega^2 . \quad (15)$$

Příklad 8: Jojo je rotačně symetrické těleso s hmotností m , momentem setrvačnosti kolem rotační osy I a poloměrem r vnitřního válečku, na kterém je navinuto vlákno. Jak se bude pohybovat, pustíme-li ho z klidu v tíhovém poli.

Na těleso působí tíhová síla a síla vlákna. Abychom nemuseli počítat sílu vlákna, zvolíme za bod O , ke kterému budeme počítat momentové veličiny, bod kde se vlákno odděluje od joja. Je-li v rychlost středu, platí pro úhlovou rychlost $\omega = v/r$. Podle (14) a 2. impulzové věty je

$$L = mvr + \frac{Iv}{r} , \quad \dot{L} = M = mgr .$$

Z toho dostáváme, že zrychlení je konstatní a má velikost

$$a = \frac{mg}{m + I/r^2} .$$

Příklad 9 (těžký symetrický setrvačnick): Mějme rotačně symetrické tuhé těleso, jehož moment setrvačnosti kolem osy symetrie je I . Co se bude dít, roztočíme-li toto těleso velkou úhlovou rychlostí Ω kolem osy symetrie a uchyťme ho v jednom bodě O vzdáleném d od hmotného středu? Rotační osa svírá s vertikálou úhel ϑ .

Protože je úhlová rychlost je velká, lze moment hybnosti psát jako $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}$, příspěvek dalšího pohybu k momentu hybnosti zanedbáme. Na těleso působí moment tíhové síly (vzhledem k O). Jeho velikost je $M = mgd \sin \vartheta$. Vektor \mathbf{M} je kolmý na \mathbf{L} a leží ve vodorovné rovině. Z toho podle 2. impulzové věty plyne, že svislá složka \mathbf{L} se bude zachovávat, vodorovná složka se bude stáčet úhlovou rychlostí $\omega = M/(L \sin \vartheta)$. Je to analogie s rovnoměrným pohybem po kružnici, kde platí $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, v našem případě poloze odpovídá \mathbf{L} a rychlosti \mathbf{M} . Rotační osa tedy bude opisovat kuželovou plochu s úhlovou frekvencí

$$\omega = \frac{mgd}{I\Omega} .$$

Příklad 10: Na dokonale hladké podložce leží tyč o hmotnosti M a délce l . Do jednoho jejího konce na ni kolmo rychlostí v narazí náboj o hmotnosti $m \ll M$ a zůstane v ní zavrtnatý. Co se bude dít?

Na tyč zřejmě po určitou dobu působí síla ve směru \mathbf{v} a ta podle 1. impulzové věty způsobí, že se střed*) začne pohybovat rychlostí v' ve stejném směru. Máme-li stále na paměti $m \ll M$, snadno rozmyslíme, že platí $v' = (m/M)v$. Tyč se také roztočí úhlovou rychlostí ω . Celková změna momentu hybnosti, kterou zapříčiní moment působící síly, je $\Delta L = (l/2) \Delta p = lmv/2$, a platí tedy

$$\omega = \frac{\Delta L}{I} = \frac{\frac{lmv}{2}}{\frac{1}{12}Ml^2} = \frac{6mv}{Ml} .$$

*) Jiná nás nezajímá, neb hranatou závorku skalárně násobíme $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$.

*) V důsledku $m \ll M$ považujeme i nadále střed tyče za hmotný střed.

Úloha S.IV ... draci

a) Vžijte se do role prince, který se chystá useknout drakovi hlavu. Má dlouhý těžký meč. Jakým místem meče má vést úder, aby ho náraz nepraštil do ruky? Meč můžete považovat za homogenní, nebo navrhnout lepší model.

b) Vymyslete co nejreálnější model, jak draci chrlí oheň. Pokud nevěříte, že draci existují, můžete místo toho vymyslet, jak poznat směr rotace turbíny ve vysavači (aniž byste ho rozebírali).

a) Uvažujme, že princovo zápěstí je zároveň osa otáčení meče. Před úderem do drakovy hlavy nechť se konec meče pohybuje rychlostí v , úhlová rychlost vzhledem k ose otáčení bude $\omega v/l$, kde l je délka meče. Nechť meč narazí do drakovy hlavy ve vzdálenosti d od prince, bod nárazu se při úderu zastaví, aby princ nebyl praštěn do ruky, nesmí se změnit rychlost bodu, který drží, tj. meč se musí zastavit celý. Celkový impuls momentu vzhledem k ose otáčení tedy bude $M\Delta t = I_0\Delta\omega = F\Delta t d = \Delta p d$, kde $I_0 = ml^2/3$ je moment setrvačnosti tyče, $\Delta p = mv/2$ je celková změna hybnosti, $\Delta\omega$ je celková změna úhlové rychlosti. Po dosazení a vyjádření dostáváme pro vzdálenost místa úderu od princovy ruky $d = 2l/3$.

b) Modelů, podle kterých draci chrlí oheň, se nám sešlo opravdu mnoho. Nejčastěji jste navrhovali, že drak má nějaké speciální plynové vaky, do kterých shromažďuje hořlavý plyn (methan, páry ethanolu atd.), jež vzniká v jeho útrokách při rozkladu potravy. V hubě má pak drak buďto křesátko na zubech nebo elektrický orgán jako mořští úhoři, jímž plyn po vytlačení ze zásobního vaku zapálí. Tlamu musí mít drak prorostlou nejlépe drahokamy, aby se nespálil.

Co se týče vysavače měli jsme při zadávání úlohy na mysli následující: Vezmeme vysavač do ruky (osa rotace motoru jde vodorovně) a otočíme ho kolem svislé osy kolmé na osu rotace turbíny. Změníme tím směr vektoru \mathbf{L} . Chceme-li uržet vysavač ve vodorovné poloze, musíme na něj podle druhé impulsové věty působit momentem sil ve směru změny $\Delta\mathbf{L}$. Tedy např. směřuje-li \mathbf{L} před nás a točíme-li doleva, budeme muset tlačit předeč vysavače dolů, piloti letadel říkají, že vysavač bude lehký na čumák.

Ve vašich řešeních se však nejčastěji objevil následující postup. Vysavač zavěsíme na provázek tak, aby osa rotace motoru byla svislá a zapneme ho. V počáteční fázi sebou vysavač škubne na jednu stranu a to na stranu opačnou než se točí motor, stane se tak v důsledku reakční síly.

Inerciální a neinerciální systémy

Tuto kapitolu seriálu zaměříme na popis pohybu v neinerciálních systémech.*) Připomeňme si, že inerciální systém je takový souřadný systém, vůči němuž se každý volný hmotný bod*) pohybuje rovnoměrně přímočaře. Možná vám to připomíná 1. Newtonův zákon. Skutečně, precizní formulace tohoto zákona je následující: *Existuje souřadný systém takový, že volný hmotný bod se v něm pohybuje rovnoměrně přímočaře.* 1.N.z. tedy říká pouze to, že existuje inerciální systém. V tomto systému pak platí 2.N.z. v obvyklém tvaru a při znalosti působících sil můžeme sestavit pohybovou rovnici.

Často ale potřebujeme popsat fyzikální děje i při pohledu z jiných než inerciálních systémů. Tyto systémy se nazývají neinerciální a vůči inerciálním konají zrychlený pohyb. Jistě, můžeme celý děj popsat z pohledu systému inerciálního a pak provést přechod

*) Používá se i termín soustava.

*) Hmotný bod, na který nepůsobí žádné vnější síly.

do libovolného systému (to už je jen matematika a geometrie). Tento postup si můžete vyzkoušet při řešení úlohy seriálu. Často je takový postup příliš komplikovaný a je efektivnější hledat pohybovou rovnici přímo pro neinerciální systém.

Setrvačná síla

Nejprve označme \mathbf{F}_p sílu, která působí na hmotný bod v inerciálním systému. Může to být jedna z sil zmiňovaných v první kapitole (gravitační, třecí apod.), reakce podložky nebo jiná, takzvaná *pravá* síla. V inerciálním systému platí $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_p$, v neinerciálním však nikoliv. Představme si např. vlak, který se rozjíždí po rovných kolejích. Jirka, který na vlak přiběhl pozdě, už jen nehybně stojí na nástupišti. Při pohledu z vlaku se pohybuje zrychleným pohybem, přestože na něj ve vodorovném směru žádná pravá síla nepůsobí. Modifikujeme tedy pohybovou rovnici tak, že do ní přidáme formální člen \mathbf{F}_z nazývaný zdánlivá síla, $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_z$. V případě vlaku zřejmě stačí volit $\mathbf{F}_z = -m\mathbf{a}_v$, kde \mathbf{a}_v je zrychlení vlaku. S tímto členem bude pohybová rovnice „fungovat“ nejen pro nehybné předměty na nástupišti, ale pro libovolný pohyb konající tělesa, např. pro Káju mávajícího na Jirku z vlaku. Tako zdánlivá síla se nazývá setrvačná.

Je velmi důležité si uvědomit, že zdánlivé síly působí pouze v neinerciálním systému a jsou to skutečně „zdánlivé“ síly, které zavádíme proto, aby pohybová rovnice platila ve stejném tvaru jako v systémech inerciálních.

Odstředivá a Eulerova síla

V případě, že pohyb neinerciálního systému vůči inerciálnímu (dále jen pohyb systému) není přímočarý, je situace podobná. Představme si kolotoč rotující rovnoměrně úhlovou rychlostí ω . Dita sedící na kolotoči se v inerciálním systému pohybuje po kružnici o poloměru r a působí na ní tedy (pravá) odstředivá síla o velikosti $F_d = m\omega^2 r$. Při pohledu z kolotoče je však Dita v klidu, výsledná síla působící na ni v neinerciálním systému je tudíž nulová a proto musí na Ditu působit zdánlivá síla stejné velikosti a opačného směru než síla odstředivá. Tato síla je vám jistě dobře známá odstředivá síla \mathbf{F}_o .

Na čtenáři již necháme, aby si rozmyslel, že v případě nerovnoměrně rotujícího kolotoče musíme přidat zdánlivou Eulerovu sílu $\mathbf{F}_e = -m\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}$, kde $\boldsymbol{\epsilon}$ je úhlové zrychlení kolotoče. Zamysleme se ale, jak je to z pohledu kolotoče s Pavlem, který podobně jako Jirka zůstal stát u kolotoče. Nepůsobí na něj žádná pravá síla a v neinerciálním systému na něj tedy působí pouze odstředivá síla. Pavel se v tomto systému ale pohybuje rovnoměrně po kružnici což nesouhlasí s pohybovou rovnicí. Je tedy nutné přidat v pořadí již čtvrtou a také poslední zdánlivou sílu, sílu Coriolisovu.

Coriolisova síla

Nejprve rekapitujeme naše dosavadní výsledky. Vzhledem k tomu, že každý pohyb lze rozložit na translaci a rotaci kolem pevného bodu, bude v libovolném neinerciálním systému na hmotný bod působit zdánlivá síla $\mathbf{F}_z = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_e$. Dosadíme-li do tohoto vzorce za jednotlivé složky zdánlivé síly, zjistíme, že můžeme psát $\mathbf{F}_z = -m\mathbf{a}_0$, kde \mathbf{a}_0 je okamžité zrychlení bodu X neinerciálního systému, ve kterém se nachází pozorovaný hmotný bod, při sledování z inerciálního systému. Pozor, je rozdíl mezi bodem X a pozorovaným hmotným bodem. X je pevný bod neinerciálního systému, pozorovaný hmotný bod se může vůči tomuto systému pohybovat. Přitom je zřejmé, že pro hmotný bod, který je vůči neinerciálnímu systému v klidu, platí pohybová rovnice $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_z$, v takovém případě je stejně jako u Dity na kolotoči $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{F}_z = -\mathbf{F}_p$.

Pro tělesa, která se v neinerciálním systému pohybují, ale pohybová rovnice v tomto tvaru neplatí. To je právě případ Pavla stojícího u kolotoče. Síla, která zaručí, že pohybová rovnice bude platit i pro tato tělesa, je již zmiňovaná zdánlivá síla Coriolisova, pro

kterou dále v textu odvodíme vztah $\mathbf{F}_c = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$, kde \mathbf{v} je rychlost hmotného bodu v neinerciálním systému a $\boldsymbol{\omega}$ je okamžitá úhlová rychlost rotace systému. Všimněme si, že v případě vlaku, kde je $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ je také $\mathbf{F}_c = 0$, proto jsme byli oprávněni tvrdit, že v takovém případě stačí pro libovolně se pohybující hmotný bod uvažovat pouze setrvačnou sílu. Zároveň snadno nahlédneme, že problém Pavla je zavedením \mathbf{F}_c vyřešen.

Coriolisova, která je důsledkem rotace Země, způsobuje řadu zajímavých jevů, od těch známých, jako je existence pasátů, přes stáčení roviny kmitů Foucaltova kyvadla až po takové kuriozity, jako asymetrické vyjždění severojižních kolejí, po kterých jezdí velkou rychlostí vlaky stále ve stejném směru (u nás například koridorová dvoukolejná trať v úseku Brno – Česká Třebová).

Obecné odvození zdánlivých sil

V tomto odstavci provedeme obecné odvození vztahů pro zdánlivé síly. Vezměme inerciální systém a zvolme jeden jeho pevný bod O . Neinerciální systém, v němž budeme vyšetřovat zdánlivé síly, nevolíme úplně libovolně, ale tak, aby O byl i jeho pevný bod (zobecnění na libovolný systém se provede už pouze přidáním translace). Pohyb, který může tento systém konat, je vlastně pohyb tuhého tělesa upevněného v jednom bodě, a pro ten vždy existuje vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ zavedený v minulém dílu seriálu.

Označme nyní \mathbf{r} polohový vektor hmotného bodu vzhledem k bodu O a hledejme časové derivace tohoto vektoru. Derivace se ovšem liší při pozorování z inerciálního a neinerciálního systému (tělesa, která jsou v jednom systému v klidu se mohou v druhém pohybovat a naopak), označme proto svislou čarou za derivací a indexem i nebo n systém, ve kterém derivaci počítáme. Pročteme-li pozorně minulý díl seriálu, snadno nahlédneme, že platí

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_n + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} . \quad (16)$$

Tento vztah platí nejen pro \mathbf{r} , ale pro libovolný vektor \mathbf{w} ,

$$\left. \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right|_i = \left. \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right|_n + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} ,$$

dosadíme do tohoto vztahu $\mathbf{w} = (d\mathbf{r}/dt)|_i$,

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i \right) \right|_n + \boldsymbol{\omega} \times \left(\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_i \right) .$$

Označíme nyní $\mathbf{v} = (d\mathbf{r}/dt)|_n$, $\mathbf{a} = (d\mathbf{v}/dt)|_n$ a $\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$. Vektory \mathbf{v} a \mathbf{a} značí rychlost a zrychlení hmotného bodu v neinerciálním systému a vztah (16) lze psát ve tvaru $(d\mathbf{r}/dt)|_i = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Dosadíme tento výraz a chvíli upravujeme:

$$\left. \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|_i = \left. \frac{d}{dt} (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right|_n + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{a} + \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) .$$

Levá strana udává zrychlení hmotného bodu v inerciálním systému a je zřejmě rovna \mathbf{F}_p/m . Násobíme-li tedy celou rovnici hmotností a převedeme-li vše kromě $m\mathbf{a}$ na levou stranu, dostáváme

$$\mathbf{F}_p - m\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = m\mathbf{a} ,$$

což je hledaná pohybová rovnice v neinerciálním systému. Jednotlivé členy za \mathbf{F}_p mají po řadě význam \mathbf{F}_e , \mathbf{F}_c a \mathbf{F}_o (rozmyslete si zejména vztah pro odstředivou sílu).

Příklady řešené pomocí setrvačných sil

Příklad 11: K α -částici o hmotnosti $4m$ a náboji $2e$ se rychlostí v přibližuje proton o hmotnosti m a náboji e . Do jaké nejmenší vzdálenosti se proton přiblíží?

Úlohu vyřešíme v soustavě spojené s α -částicí. Označme F sílu, kterou na sebe částice podle Coulombova zákona působí. V inerciálním systému se tedy α -částice pohybuje se zrychlením $F/4m$. Na proton v neinerciální soustavě působí pravá síla F a setrvačná síla $m \cdot F/4m = F/4$. Obě síly míří od α -částice celý systém se jeví, jako kdyby soustava byla inerciální, ale α -částice měla náboj $5e/4$.

Nyní je již řešení jednoduché. Nejbližše bude proton v okamžiku, kdy je jeho kinetická energie nulová a veškerá celková energie je rovna energii potenciální, tedy

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{16\pi\epsilon} \frac{5e^2}{r_{\min}} \quad \Rightarrow \quad r_{\min} = \frac{5e^2}{8\pi\epsilon mv^2}.$$

Příklad 12 (zploštění Země): Zjistěte, jak moc je Země zploštělá v důsledku vlastní rotace.

Úlohu vyřešíme v soustavě spojené s rotující Zemí. Předpokládáme, že v této soustavě jsou všechny její části v klidu a že rotuje rovnoměrně, a tak musíme ze zdánlivých sil uvažovat pouze sílu odstředivou. Označme R polární poloměr Země. A zvolme v tomto bodě nulovou hladinu gravitační potenciální energie. Půjdeme-li nyní po ustáleném povrchu na rovník, který je od středu vzdálen $R+h$, musí se zvýšení potenciální energie o mgh rovnat práci odstředivých sil, protože my sami při chůzi po ustáleném povrchu práci nekonáme. Odstředivá síla ve vzdálenosti r od osy je rovna $F_o = m\omega^2 r$ a platí tedy

$$mgh = \int_0^R m\omega^2 r dr = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Dosadíte-li do tohoto vztahu a porovnáte výsledek se skutečným měřením, zjistíte, že zploštění Země je o něco větší, než by podle našeho výpočtu mělo být. Země totiž v důsledku působení slapových sil zpomaluje svou rotaci a tak se zploštění postupně snižuje. Díky značné viskozitě ale změna vykazuje jisté zpoždění a tak v současnosti tvar Země odpovídá rotaci, kterou měla před přibližně 10 mil. let.

Příklad 13 (volný pád): Spočtete, o kolik se při volném pádu odchýlí těleso ve vodorovném směru v důsledku působení Coriolisovy síly.

Tato úloha byla řešena z pohledu inerciální i neinerciální soustavy v minulém ročníku Fykosu. Zde ji proto vyřešíme pouze rychle z pohledu systému neinerciálního. Coriolisova síla vychylující těleso při pádu mu uděluje ve východním směru zrychlení o velikosti $a = 2\omega v \cos \varphi$, kde φ je zeměpisná šířka. Dosadíme-li $v = gt$ a dvakrát integrujeme, dostáváme pro posunutí $d = (1/3)\omega gt^3 \cos \varphi$.

Poznamenejme, že v dobách antického Řecka byl jedním z největších protiargumentů rotace Země fakt, že při upuštění tělesa se pod ním Země „nepootočí“ o stovky metrů a těleso neletí na západ. Správným důsledkem rotace je přitom velmi nepatrné posunutí na východ, které bylo ve 20. století dokonce experimentálně měřeno.

Příklad 14 (Foucaultovo kyvadlo): Zjistěte, jak rychle se v závislosti na zeměpisné šířce stáčí rovina kmitů matematického kyvadla.

Tento příklad bude závěrem této kapitoly seriálu a ukážeme na něm, jak výhodné je pozorovat stejný děj z různých soustav. Jak plyne ze zadání, Foucaultovo kyvadlo není

žádný tajemný přístroj, který najdeme jen ve fyzikální laboratoři, ale naprosto obyčejné kyvadlo kývající ovšem na rotující zeměkouli. Kýve-li takovéto kyvadlo na pólu, nemá v inerciální soustavě důvod měnit rovinu kmitů. Při pohledu ze Země se proto tato rovina stáčí rychlostí otáčka za den. Nevisí-li kyvadlo na pólu, dochází k podobnému jevu, ale jeho zdůvodnění už není tak snadné.

Nyní máme 2 možnosti: Jednak řešit v inerciálním systému pohyb kyvadla v radiálním poli, jehož bod uchycení rotuje konstantní úhlovou rychlostí kolem pevné osy, nebo provést přechod do systému neinerciálního a řešit pohyb pevně uchyceného kyvadla pod vlivem zdánlivých sil. První možnost je nesrovnatelně složitější jak pro výpočet, tak pro následnou interpretaci výsledků a volíme proto druhý způsob.

Na hmotný bod kyvadla působí tyto síly: gravitační síla \mathbf{F}_g , síla vlákna \mathbf{F} , odstředivá síla \mathbf{F}_o a Coriolisova síla \mathbf{F}_c . Výslednici $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_o = \mathbf{F}_G$ (tíhovou sílu) lze v daném místě považovat za konstantní. Úhlovou rychlost rotace Země nyní rozložíme do směru tíhové síly $\boldsymbol{\omega}_n$ a směru kolmého na tuto sílu $\boldsymbol{\omega}_t$. Pro Coriolisovu sílu pak lze psát $\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_{ct} + \mathbf{F}_{cn}$, kde $\mathbf{F}_{ct} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_n$ a $\mathbf{F}_{cn} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_t$. Protože $\mathbf{v} \perp \mathbf{F}_G$, je $\mathbf{F}_{ct} \perp \mathbf{F}_G$ a $\mathbf{F}_{cn} \parallel \mathbf{F}_G$. \mathbf{F}_{cn} lze zřejmě vůči \mathbf{F}_G zanedbat.

Protože očekáváme stáčení roviny kmitů, zkusíme přejít do další soustavy, která určitou rychlostí rotuje kolem svislé osy, a ve které vymizí síla \mathbf{F}_{ct} stáčejší rovinu kmitů. Rychlost rotace této soustavy pak bude hledanou rychlostí stáčení kmitů.

Takovou vlastnost má rychlost $-\boldsymbol{\omega}_n$. Přechodem do soustavy rotující touto rychlostí přibude odstředivá a Coriolisova síla. Odstředivá síla $\mathbf{F}'_o = m\omega_n^2 \mathbf{r}$ (\mathbf{r} značí vychýlení konce kyvadla z rovnovážné polohy) má stejný směr jako výslednice \mathbf{F}_G a \mathbf{F} a je vzhledem k ní zanedbatelná. Coriolisova síla je $\mathbf{F}'_c = -2m\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}_n = -2m(\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}_n = -\mathbf{F}_{ct} - 2\mathbf{F}'_o$, z čehož je vidět, že výslednice sil \mathbf{F}_{ct} , \mathbf{F}'_c je $-2m\omega_n^2 \mathbf{r}$ a stejně jako \mathbf{F}'_o ji lze zanedbat. Jediné nezanedbatelné síly, které v nové soustavě na kyvadlo působí, jsou tedy \mathbf{F}_G a \mathbf{F} , kyvadlo zde kýve jako v inerciální soustavě a nestáčí rovinu kmitů.

Rychlost stáčení roviny kmitů Foucaltova kyvadla vůči povrchu Země je tedy $\omega_f = \omega \sin \varphi$, kde ω je úhlová rychlost rotace Země.

Úloha S.V ... kolotoč

a) Mojmír a Anežka sedí přesně proti sobě na točícím se kolotoči. Ještě je sníh a tak si Mojmír připravil sněhovou kouli a na kolotoči ji chce hodit po Anežce. Poradte mu, jakou rychlostí a jakým směrem (vzhledem ke kolotoči) má kouli hodit, aby Anežku zasáhl. Údaje jsou: vzdálenost obou od osy $R = 3$ m, úhlová rychlost kolotoče $\omega = 1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Rychlost hodů koule odhadněte.

b) Jak vypadá trajektorie koule v soustavě spojené s kolotočem a jaké síly působí na kouli v této soustavě.

c) Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou nepravdivá, a proč.

1. Z pohledu inerciální soustavy působí na rotující hmotný bod odstředivá síla, která vyrovnává dostředivou sílu, a proto se hmotný bod pohybuje rovnoměrně.
2. Odstředivá síla je reakcí na dostředivou sílu, neboť má stejnou velikost a opačný směr.
3. Když v inerciálním systému náhle přestane na rovnoměrně rotující těleso působit dostředivá síla, bude těleso pokračovat v pohybu po tečné přímce. Z pohledu neinerciálního systému se bude v důsledku působení odstředivé síly pohybovat po radiální přímce.

a) Nechtě doba letu koule je t . Za tuto dobu se Anežka pootočí o úhel ωt a snadno dopočteme, že vzdálenost mezi polohou Mojmíra v okamžiku hodů a polohou Anežky v okamžiku zásahu je $2R \cos(\omega t/2)$. Pohyb koule je za předpokladu zanedbatelného odporu

vzduchu v inerciální soustavě rovnoměrný a přímočarý, pro rychlost pohybu koule v této soustavě tedy platí

$$v = \frac{2R}{t} \cos \frac{\omega t}{2}.$$

Vzhledem ke kolotoči musí Mojmír hodit kouli rychlostí, která je vektorovým rozdílem rychlosti \mathbf{v} a rychlosti Mojmíra vůči inerciální soustavě. Z kosinové a sinové věty pak snadno dopočteme, že pro velikost v_0 této rychlosti a pro její odklon φ od spojnice Mojmíra a středu kolotoče platí

$$v_0 = \sqrt{v^2 + \omega^2 R^2 + 2v\omega R \sin \frac{\omega t}{2}}, \quad \cos \varphi = \frac{v}{v_0} \cos \frac{\omega t}{2}.$$

Nyní přistupme k numerickému výpočtu. Ideální by bylo vyjádřit φ pomocí v_0 , odhadnout v_0 a provést výpočet. To je ale bohužel nemožné. Proto zvolíme následující cestu. Odhadneme t a pomocí něj dopočteme v_0 a φ (na to máme 3 výše odvozené vzorce). Pokud usoudíme, že v_0 je „rozumné“, budeme dvojici v_0, φ považovat za řešení úlohy. Pro $t = 0,5 \text{ s}$ vychází $v_0 = 12,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $\varphi = 27,5^\circ$. To by měl Mojmír zvládnout!

b) V neinerciální soustavě nebude trajektorie přímka, ale křivá čára spojující dva protilehlé body kolotoče. Zkonstruovat ji lze snadno – vždyť přece známe v každém okamžiku polohu koule i kolotoče vůči zemi, můžeme tedy dopočítat i polohu koule vůči kolotoči. Jediné síly, které ve vodorovném směru v této soustavě na kouli působí, jsou Coriolisova a odstředivá. Právě tyto síly mají na svědomí zakřivení trajektorie přesně podle Newtonových zákonů.

c) Všechna tvrzení jsou úplné nesmysly. V prvním jsou hned 2 lži: v inerciální soustavě na bod nepůsobí odstředivá síla a bod se také nepohybuje rovnoměrně (myšleno rovnoměrně přímočaře). Druhé tvrzení také nemůže platit, protože akce a reakce působí na různá tělesa. Navíc nemůže existovat jedna bez druhé, což u odstředivé a dostředivé síly neplatí. Třetí tvrzení bylo probráno v textu seriálu. V neinerciálním systému se sice těleso začne pohybovat v radiálním směru, ale jakmile získá nějakou rychlost, tak ho Coriolisova síla začne od tohoto směru odklánět.

Fundamentální principy mechaniky

Úvod

V prvním kapitole seriálu jsme formulovali základní „axiomy“ mechaniky – Newtonovy zákony, z nich jsme dosud vycházeli. V této předposlední části si ukážeme alternativní formulace základních principů klasické mechaniky. Naše cesta se bude ubírat od Newtonova vektorového formalismu k formalismu analytickému, v němž základní veličiny mají skalární charakter a pohybové rovnice získáme jen derivováním těchto veličin podle vhodných proměnných. Význam alternativních formulací Newtonových pohybových zákonů spočívá zejména v tom, že podobným způsobem se popisují i nemechanické jevy (najdeme je např. v teorii pole či obecné relativitě). Dále nám tyto formulace (využívaje diferenciálního a variačního počtu *) dávají nástroj na řešení složitých úloh. A v neposlední řadě jsou krásné a elegantní. Vzhledem k obtížnosti matematiky spojené s principy, které budeme uvádět, nebudeme většinou vztahy odvozovat či matematicky zdůvodňovat

*) Narozdíl od diferenciálního počtu, kde jsou proměnnými čísla, jsou ve variačním počtu proměnnými funkce.

Vazby

Síly, které působí na hmotné body, můžeme rozdělit do dvou skupin. Na jedné straně jsou to síly vtištěné (pochivé) \mathbf{F} , např. gravitace, elektromagnetická síla, odpor vzduchu atd. Na druhé straně jsou to síly vazbové \mathbf{R} , tj. reakce podložek či obecnějších vazeb. Pod pojmem vazba si představujeme určité omezení pohybu např. matematické kyvadlo se musí pohybovat tak, aby vzdálenost závaží od osy otáčení byla stále stejná. Často je vazba dána pohybem po povrchu jiného tělesa. Matematicky zapisujeme vazby následovně: Pohyb po kouli o poloměru a se středem v počátku je omezen vazbou $\varphi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$. Pohyb po nakloněné rovině $\varphi(\mathbf{r}) = z - x \tan \alpha = 0$. Obecně vazby závisí na poloze, čase a rychlosti. Dále se budeme zabývat pouze popisem pohybu podrobeného tzv. holonomním (tzn. na rychlosti nezávislým) vazbám. Platí totiž velmi užitečné pravidlo, totiž že síly holonomních vazeb jsou k vazbám kolmé.

d'Alembertův princip

Uvažujme tedy pohyb podrobený holonomním vazbám. Označme $\delta \mathbf{x}$ malé posunutí, které je v souladu s vazbami. Toto posunutí skalárně vynásobíme vazbovou silou \mathbf{R} . Víme, že \mathbf{R} je kolmá na $\delta \mathbf{x}$, tedy $\delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{R} = 0$. Vazbovou sílu můžeme psát jako $\mathbf{R} = m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}$. Po rozepsání do kartézských složek tedy pro pohyb hmotného bodu dostáváme podmínku

$$\sum_{i=1}^3 (m\ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = 0 .$$

Ukazuje se, že tento vztah lze zobecnit pro N hmotných bodů v tzv. d'Alembertův princip mechaniky: Soustava N hmotných bodů se vyvíjí takovým způsobem, že

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i) \delta x_i = 0 \quad (17)$$

pro každé tzv. virtuální posunutí δx_i , čímž míníme nekonečně malé posunutí, které je v každém okamžiku v souladu s holonomními vazbami ($\varphi_k(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0, k = 1, \dots, v$, kde v je počet vazeb). Jinak řečeno virtuální posunutí je libovolný vektor ležící v tečném prostoru k vazbám. Poznamenejme ještě pro ujasnění, že $m_{3j-2} = m_{3j-1} = m_{3j}, j = 1, \dots, N$. D'Alembertův princip je ekvivalentní Newtonovým pohybovým zákonům. Pro řešení úloh sám o sobě tento princip příliš užitečný není, ale odvozují se z něj dále uváděné principy.

Dva důsledky d'Alembertova principu

a) Není-li pohyb omezen žádnými vazbami, tj. vazbové síly nejsou (jsou nulové), musí (17) platit pro všechny δx_i , a tedy (17) přechází v Newtonovy rovnice $m_i \ddot{x}_i = F_i$.

b) Zkoumáme-li systém bez pohybů, je pro všechny $i \ddot{x}_i = 0$ a tedy se (17) redukuje na tzv. princip virtuálních prací

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i \delta x_i = 0 . \quad (18)$$

Slovně se dá (18) formulovat asi takto: Práce vykonaná při nekonečně malém virtuálním posunutí z rovnovážné polohy je nulová. Princip virtuálních prací se s výhodou používá při hledání rovnovážných poloh systému. V konzervativním poli (tj. pole, kde existuje potenciál) je řešení (18) ekvivalentní hledání polohy, ve které má potenciál stacionární bod (nejčastěji minimum).

Příklad 15: tyčka

Najděte rovnovážnou polohu tyčky délky $2l$ opřené o hranu stolu a stěnu (viz obr. 19).

Zavedeme soustavu souřadnic, viz obr. 19. Princip virtuálních prací zapíšeme jako $F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z = 0$. Jelikož jedinou vtištěnou silou je tíha \mathbf{G} , která má směr osy y , redukuje se princip na $\delta y = 0$. Neboli rovnovážná poloha je tam, kde má souřadnice y (výška těžiště) extrém. Parametrizujme polohu tyčky úhlem θ , pak $y(\theta) = -a \tan \theta + l \sin \theta$, zderivováním dostaneme $\delta y = (-a/\cos^2 \theta + l \cos \theta)\delta \theta = 0$, což platí pro

$$\cos \theta = (a/l)^{\frac{1}{3}},$$

pro takový úhel je tedy tyč v rovnovážné poloze.

Lagrangeovy rovnice

Jedním z nejčastějších prostředků používaných při řešení složitějších mechanických úloh, jsou tzv. Lagrangeovy rovnice II. druhu. Mají totiž dvě zásadní výhody. Jednak se dají snadno sestavit (postup je téměř manuální činností), což oceníme zejména u složitých systémů, ve kterých bychom se při sestavování newtonovských rovnic do té spousty sil určitě zamotali. Druhá výhoda spočívá v tom, že Lagrangeův formalismus není vázaný na kartézské souřadnice, můžeme si tedy zvolit takové souřadnice, které se nejlépe hodí na daný problém. Drobná nevýhoda je skutečnost, že k používání formalismu je nutné umět derivovat a řešit diferenciální rovnice*).

Podle vlastností systému se rozlišuje mnoho variant Lagrangeových rovnic, my se však zaměříme na nejjednodušší a nejužitečnější případ, kdy existuje potenciální energie (označme V). Celkovou kinetickou energii systému označme T^*). Klíčovou veličinou je pak rozdíl $L = T - V$, který budeme nazývat Lagrangeova funkce nebo krátce *lagrangian* [čti lagránzián].

Pro popis systému si můžeme zvolit libovolnou sadu veličin, pomocí kterých umíme popsat každý možný stav systému. Volíme jich co nejméně a tak, aby co nejlépe „pasovaly“ na daný problém, tedy pro matematické kyvadlo kývající v jedné rovině nevolíme x, y, z , ale úhel vychýlení ze svislé polohy. Tím jsme zároveň vyřešili popis vazeb. Čísly popisujícím stav systému budeme říkat *zobecněné souřadnice* a označíme je $q_1 \dots q_n$. Většinou to budou vzdálenosti, poměry vzdáleností, nebo úhly.

Jediné, co musíme při řešení úlohy pomocí Lagrangeova formalismu udělat, je vyjádření L pomocí zobecněných souřadnic. Obecně to bude funkce zobecněných souřadnic q_i , jejich derivací \dot{q}_i a času. Tuto funkci postupně parciálně zderivujeme podle všech q_i a \dot{q}_i . Tím dostaneme $2n$ jakýchsi výrazů, které chápeme již pouze jako funkce času a sestavíme celkem n rovnic tohoto tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 . \tag{19}$$

To jsou již pohybové rovnice, jejichž řešením dostaneme závislost zobecněných souřadnic na čase. Uvedme tedy několik příkladů:

Příklad 16: volný pád

Pro řešení volného pádu potřebujeme jedinou zobecněnou souřadnici h – výšku nad zemí. Vyjádřit lagrangian je snadné, je totiž $T = m\dot{h}^2/2$, $V = mgh$ a tedy $L = T - V = m\dot{h}^2/2 - mgh$. Příslušné parciální derivace jsou $\partial L/\partial h = -mg$ a $\partial L/\partial \dot{h} = m\dot{h}$. Nyní

*) Rovnice, ve které vystupuje neznámá funkce a její derivace. V podstatě každá pohybová rovnice je diferenciální rovnicí.

*) Koho to mate, necht' klidně píše E_p a E_k , varianta bez indexů je ale rychlejší na psaní.

zderivujeme druhý výraz podle času a dosadíme do (19). Dostáváme $m\ddot{h} + mg = 0$, tedy to samé, co bychom dostali z II. Newtonova zákona.

Příklad 17: matematické kyvadlo

Kývá-li kyvadlo v jedné rovině, stačí nám stačí jediná zobecněná souřadnice – úhel vychýlení ze svislé polohy φ . Má-li kyvadlo délku l a hmotnost m , platí $T = ml^2\dot{\varphi}^2/2$ a $V = -mgl \cos \varphi$. Sestavíme tedy Lagrangeovy rovnice:

$$\frac{d}{dt} (ml^2\dot{\varphi}) + mgl \sin \varphi = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

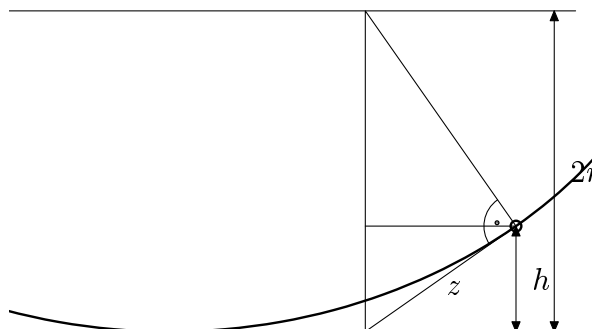
Dostali jsme naši známou rovnici pro matematické kyvadlo, kterou řešíme pro malé kmity linearizací (nahradíme $\sin \varphi$ argumentem φ).

Příklad 18: Huygensovo kyvadlo

Řešme pohyb kvádrů, který dokonale klouzá bez tření uvnitř cykloidy (u kuličky by nám trochu komplikovaly život rotace). Cykloida je křivka, kterou opisuje bod kružnice, která se bez prokluzu valí po přímce. Na této úloze si ukážeme, jak je výhodná možnost volby zobecněné souřadnice. Za zobecněnou souřadnici zvolíme v tomto případě vzdálenost z (viz obr. 23), protože pomocí ní snadno vyjádříme L . Velikost rychlosti kvádrů je totiž rovna dvojnásobku rychlosti, kterou se zvětšuje úsečka z (viz úloha seriálu), tedy $T = 2m\dot{z}^2$. Z Eukleidovy věty zase snadno vyjádříme výšku kvádrů nad nejnižším bodem cykloidy, $h = z^2/2r$. Máme tedy lagrangian $L = 2m\dot{z}^2 - mgz^2/2r$, ze kterého dostáváme Lagrangeovu rovnici

$$4m\ddot{z} + \frac{mg}{r}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \frac{g}{4r}z = 0.$$

Dostali jsme rovnici harmonických kmitů s periodou $T = 2\pi\sqrt{4r/g}$. Přitom jsme nikde nic nezanedbávali ani nelinearizovali! Možná vás zarazilo slovo „kyvadlo“ v názvu této úlohy. Pokud bychom totiž přinutili závazí matematického kyvadla místo pohybu po kružnici k pohybu po cykloidě, mělo by takové kyvadlo periodu nezávislou na výchylce i pro velké úhly. Zkuste se zamyslet, jak by se to dalo udělat, v příští a poslední kapitole vám prozradíme řešení.



Obr. 23

Hamiltonův variační princip

V mechanice existují ještě obecnější principy, než Lagrangeovy rovnice. Většinou se již tolik nehodí k řešení úloh, ale mají velký teoretický význam. Jedním takovým principem je takzvaný *Hamiltonův variační princip* nebo též princip minimální akce.

Předpokládejme, že známe výchozí a konečnou konfiguraci systému (např.: v čase 0 je hmotný bod v počátku a v čase 10 s je v bodě [10 m, 20 m]). Princip minimální akce pak tvrdí, že si systém ze všech možných pohybů, kterými lze přejít z výchozího do konečného stavu, vybral právě ten, při kterém byla střední hodnota L^* nejmenší možná.

*) Střední hodnota funkce na intervalu je definovaná jako plocha pod grafem této funkce lomeno šířka intervalu.

Taková formulace vám možná připomíná Fermatův princip minimálního času, ze kterého lze odvodit zákony paprskové optiky – přímočaré šíření, odraz i lom. Stejně tak lze z principu minimální akce odvodit Lagrangeovy rovnice a z nich Newtonovy zákony.

My si zde pro ilustraci ukážeme, že pro nejjednodušší pohyb – pohyb volného tělesa – je střední hodnota lagrangianu pro skutečný pohyb opravdu menší než pro jakýkoliv jiný pohyb. Protože nemáme dostatek prostředků na řešení tohoto problému pomocí integrálů, rozdělíme si časový interval $(0, t)$ na n stejně širokých částí (n je velké) a označme v_i rychlost v i -tém intervalu. Nechť počáteční poloha je v počátku a koncová v bodě se souřadnicemi $[d, 0, 0]$. Pro rychlosti pak platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{t}{n} v_i = d \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i = \frac{d}{t}.$$

Lagrangian pro volné těleso je pouhá kinetická energie, neboť potenciální je konstantní. Vyjádříme tedy jeho střední hodnotu:

$$L_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{m}{2} v_i^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2 = \frac{2L_s}{m}.$$

Z matematiky možná znáte nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2},$$

kde rovnost nastává pouze v případě $v_1 = v_2 = \dots = v_i$. Dosadíme-li do této nerovnosti, dostáváme po snadné úpravě

$$L_s \geq \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{t} \right)^2.$$

Střední hodnota lagrangianu je tedy větší nebo rovna konstantě, která nezávisí na průběhu pohybu. Minimální bude tedy v případě, že nastane rovnost. Pak jsou ale všechny rychlosti stejné a jde o rovnoměrný přímočarý pohyb s rychlostí $v = d/t$. Vlastně jsme tedy pomocí Hamiltonova variačního principu dokázali I. Newtonův zákon.

Úloha S. VI ... principy mechaniky

a) Podobně jako v příkladu v seriálu je $\delta y = 0$. Nyní ovšem platí

$$(M + m)y = m(l \sin \theta - a \operatorname{tg} \theta) + M(2l \sin \theta - a \operatorname{tg} \theta)$$

$$m \left(l \cos \theta - \frac{a}{\cos^2 \theta} \right) + M \left(2l \cos \theta - \frac{a}{\cos^2 \theta} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \left(\frac{a(M + m)}{l(2M + m)} \right)^{1/3}.$$

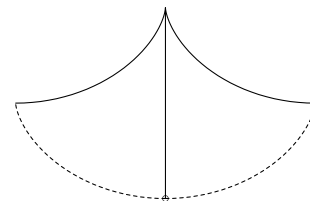
b) Označme a vzdálenost bodu cykloidy a bodu dotyku valící se kružnice s vodorovnou přímkou, po které se odvaluje. Zřejmě platí $v = a\omega$, kde ω je rychlost odvalování kružnice (bod dotyku kružnice je pólem pohybu). Protože se úhel v trojúhelníku proti odvěsně z zvětšuje rychlostí $\omega/2$ (je to obvodový úhel a příslušný středový se zvětšuje rychlostí ω), platí také $\dot{z} = a\omega/2$. Dostáváme tedy $v = 2\dot{z}$.

Meze platnosti klasické mechaniky

Seriál zakončíme tím, čím jsme ho začali. Totiž ještě jednou uvedeme předpoklady, které činí klasická mechanika, a podíváme se, jak se o jejich platnosti vyjadřuje moderní fyzika. Než se do toho ale pustíme, dořešíme několik drobností, které zbyly z minulých kapitol.

Konstrukce Huygensova kyvadla

Víme, že těleso pohybující se po cykloidě vzniklé při valení kružnice o poloměru r kývá se stejnou periodou jako matematické kyvadlo délky $4r$. Tato perioda ovšem vůbec nezávisí na výchylce. Zajímavé je, že toto kyvadlo lze poměrně snadno sestavit, stačí k němu podle obrázku 24 přiložit dvě stejné cykloidy příslušející opět poloměru r . Není těžké se přesvědčit, že pak je křivka opsaná koncem kyvadla opravdu cykloida. Pokud se pustíte do výpočtu, poradíme vám, že délka oblouku cykloidy od jejího středu do bodu odpovídajícího odvalení kružnice φ je $l = 4r \sin(\varphi/2)$.



Obr. 24

Počítání momentů setrvačnosti

Dále si povíme několik „fint“, pomocí kterých lze snadno a bez integrálů určit momenty setrvačnosti tuhých těles. Začneme využitím Steinerovy věty. Hledejme moment setrvačnosti homogenní tyčky délky l a hmotnosti m kolem osy na tyčku kolmé a procházející jedním jejím koncem. Ten je zřejmě roven $I = \alpha ml^2$, kde α je bezrozměrná konstanta. Poloviční tyčka má zřejmě osminový moment setrvačnosti a moment setrvačnosti původní tyčky kolem osy jdoucí středem je pak $I_T = (\alpha/4)ml^2$. Aplikujeme-li nyní Steinerovu větu, dostáváme

$$I = I_T + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{4}\alpha ml^2 = \frac{1}{4}ml^2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}.$$

Podobně lze pro moment setrvačnosti trojúhelníka kolem osy kolmé na jeho rovinu a jdoucí těžištěm odvodit vztah $I = (m/27)(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = (m/36)(a^2 + b^2 + c^2)$. Stačí trojúhelník rozdělit středními příčkami na 4 shodné trojúhelníčky a aplikovat Steinerovu větu.

Nyní hledejme moment setrvačnosti čtverce kolem osy jdoucí jeho středem a rovnoběžné s dvěma jeho stranami. Pokud tento čtverec „splácneme“ ve směru osy, nic se na momentu setrvačnosti nezmění, platí proto $I = ma^2/12$. Dále hledejme moment setrvačnosti tohoto čtverce kolem osy jdoucí středem, která je na jeho rovinu kolmá. Uvažme obecně rovinný útvar ležící v rovině xy a I_x, I_y, I_z momenty setrvačnosti kolem příslušných os. Každý hmotný bod přispívá k I_x hodnotou $m_i y_i^2$, k I_y hodnotou $m_i x_i^2$ a k I_z hodnotou $m_i(x_i^2 + y_i^2)$, platí tedy $I_z = I_x + I_y$. Proto je hledaný moment setrvačnosti čtverce roven $I' = ma^2/6$. Stejný moment setrvačnosti má i krychle, neboť ze čtverce vznikne pouze protažením ve směru osy.

Vzorec $I_z = I_x + I_y$ pro rovinná tělesa lze také použít pro výpočet momentu setrvačnosti kruhu kolem osy ležící v jeho rovině a jdoucí středem. Umístíme-li totiž čtverec do roviny xy , platí $I_x = I_y = mr^2/4$, neboť $I_z = mr^2/2$.

Nakonec povězte pár vět o tenzoru setrvačnosti. Pokud problém velmi zjednodušíme, lze říct, že libovolné těleso lze z hlediska setrvačných vlastností nahradit homogenním elipsoidem. Uvěříme-li tomuto tvrzení, můžeme zjistit mnoho zajímavých věcí o symetrických tělesech. Například předpokládejme, že jsme našli příslušný elipsoid pro krychli. Protože je moment setrvačnosti krychle kolem 3 navzájem kolmých os stejný a elipsoid musí mít stejnou vlastnost, nezbývá než aby tímto elipsoidem byla koule. Ta má ale stejný moment setrvačnosti kolem libovolné osy jdoucí středem. Stejnou vlastnost bude ale mít i krychle! Můžete toto tvrzení ověřit například výpočtem momentu setrvačnosti kolem tělesové úhlopříčky. Podobné úvahy lze provádět i pro rovinná tělesa, např. pravidelné n -úhelníky musí mít moment setrvačnosti stejný kolem libovolné osy ležící v jejich rovině a jdoucí středem.

Omezení při použití základních pojmů

Nyní se ale už věnujme slíbenému srovnání klasické fyziky s moderními disciplinami. V klasické mechanice mají základní pojmy přibližně charakter.

- **Prostor**

Předpokládáme, že je spojitý, trojrozměrný, homogenní a izotropní a že je popsán eukleidovskou geometrií.

- **Čas**

Předpokládáme, že je také spojitý, jednorozměrný, homogenní a společný pro všechny pozorovatele.

- **Tělesa**

Jsou rozlišitelná. Dají se nahradit soustavou hmotných bodů.

- **Stav**

Je dán hybností a polohou každého hmotného bodu.

- **Časový vývoj**

Určuje časové změny stavu tělesa v závislosti na stavu systému, v němž se těleso nachází. Je popsán pohybovou rovnicí.

Klasická mechanika předpokládá existenci inerciálního systému. Nezajímá ji původ sil, se kterými pracuje, ale klade na ně následující omezení: Platí princip akce a reakce, princip superpozice a síly závisí pouze na okamžitém stavu systému.

Jak je tomu ve skutečnosti (resp. v modernějších teoriích)

- **Prostor**

Zůstává spojitý a trojrozměrný, ale nikoliv eukleidovský. Velké „kusy“ prostoru jsou zakřivené a popisujeme je riemanovskou geometrií (v ní např. neplatí obvyklým způsobem Pythagorova věta). Podle současných představ se dokonce geometrie vesmíru se mění s časem. Pro dostatečně malé oblasti vesmíru (Sluneční soustava), dostatečně vzdálené od těles s velkou hmotností (Slunce má malou hmotnost) a dost dlouho po vzniku vesmíru (nyní) lze ovšem prostor za eukleidovský, homogenní a izotropní a neproměnný v čase považovat.

- **Čas**

Spojitý a jednorozměrný zůstává. Společný pro všechny pozorovatele ale v žádném případě není. Uvažujeme-li nepříliš rozlehlé systémy neobsahující tělesa velkých hmotností, lze časy jednotlivých pozorovatelů v klidu rozumně synchronizovat. Ovšem pokud se pozorovatelé vůči sobě pohybují, jsou jejich časy různé. Klasický předpoklad o shodnosti časů pro všechny pozorovatele se dá použít pouze, jsou-li vzájemné rychlosti mnohem menší, než rychlost světla.

Poznamenejme, že s modelem časově proměnné riemanovské geometrie prostoru a s lokálním časem pracuje obecná teorie relativity. Matematický aparát této teorie je velmi velmi složitý.

Tzv. speciální teorie relativity pracuje s eukleidovskou geometrií prostoru, ale s časem, který je přiřazen jednotlivým inerciálním systémům.

- **Stav**

Není dán hybností a polohou hmotného bodu. Podle kvantové teorie popisuje stav částice vlnová funkce, jež je definována v celém prostoru. Tato vlnová funkce dovoluje určit pouze pravděpodobnost výsledků měření prováděných na částici. Navíc podle jednoho z důsledků kvantové mechaniky, Heisenbergových relací neurčitosti, nelze zároveň přesně změřit hybnost i polohu jedné částice. Postačujícími podmínkami pro aproximaci vlnové funkce klasickým stavem je dostatečně velká hmota částice (pra-

chové zrnko o hmotnosti několika ng), její dostatečná velikost (mikrometry) a velká teplota systému (pokojová bohatě stačí).

- **Tělesa**

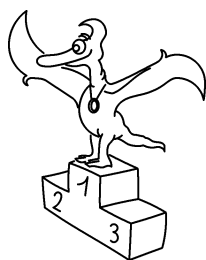
I v případě více částic je systém popsán jedinou vlnovou funkcí. Ne vždy lze pak jednotlivé částice rozlišit.

- **Časový vývoj**

Protože stav v kvantové mechanice je podstatně odlišný od stavu klasického, je i jeho časový vývoj popsán zcela jinou diferenciální rovnicí. Vývoj klasických hodnot pak odpovídá vývoji středních hodnot kvantových veličin.

Dále narozdíl od předpokladů klasické mechaniky není pravda, že síly závisí pouze na okamžitém stavu soustavy. Důvodem je fakt, že síly se šíří konečnou rychlostí a musí proto záviset na minulosti systému. Tento problém se ovšem dá odstranit zavedením pole popisujícího šíření interakcí, pak síly závisí na okamžitém stavu systému a onoho pole. Nesplněny jsou i další požadavky. Např. gravitační síla nespĺňuje princip superpozice.

Jak tedy vidíme, celou dobu jsme se zabývali teorií založenou na předpokladech, které nejsou přesně splněny nikdy, ale prakticky vždy dost přesně na to, aby klasická mechanika šla použít.



Pořadí nejlepších řešitelů

Kategorie čtvrtých ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	202
1	Jan	Kunc	4.A	Gymnázium Kolín	140
2	Miroslav	Kozel	4.A	Gymnázium Č. Budějovice - J. V. Jirsíka	77
3	Peter	Čendula	4.B	Gymnázium Liptovský Mikuláš	69
4	Vladimír	Fuka	7.A	Gymnázium Rakovník - Zikmunda Wintera	68
5	Martin	Beránek		Gymnázium Praha - Ohradní	66
6	Zoltán	Mics	4.B	Gymnázium Šahy	53
7	Juraj	Feilhauer	B	Gymnázium Bratislava - Gröslingova	52
8	Jan	Kratochvíl	4.K	SPŠST sdělovací techniky Praha	32
9 - 10	Zdeněk	Cejnar	4.A	Gymnázium Říčany	31
9 - 10	Pavol	Mikčo	4.B	Gymnázium Stropkov	31

Kategorie třetích ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	202
1	Eva	Skopalová		G Poprad	138
2	Miroslav	Šulc	6.B	Gymnázium Ústí nad Labem - Stavbařů	90
3	Michael	Komm	7.	Gymnázium Praha - Jana Keplera	87
4	Ľuboš	Bednárik	3.F	Gymnázium Trenčín	79
5	Michal	Hajn		Gymnázium Jihlava	65
6	Miroslav	Frost	6.A	Gymnázium Brno - Elgartova	61
7 - 8	Matej	Dubový	3.B	Gymnázium Trenčín	55
7 - 8	Ondřej	Vencálek	3.B	Gymnázium Frýdek-Místek - P.Bezruče	55
9	Jakub	Galgonek		GPB Frýdek-Místek	54
10	Zdeněk	Čejka		Gymnázium Praha - U Libeňského zámku	50

Kategorie druhých ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	202
1	Miroslav	Hejna	6A8	Gymnázium Rychnov	176
2	Michal	Bareš	6.A	Gymnázium Plzeň - Mikulášské nám.	117
3	Lukáš	Chvátal	6A8.	Gymnázium Brno - Bystrc	115
4	Václav	Cviček	2.A	Gymnázium Frýdek-Místek - Petra Bezruče	97
5	Tibor	Vansa		Gymnázium Moravská Ostrava	96
6	Jan	Prachař		Gymnázium Rychnov	91
7	Karel	Tůma	6.A	Gymnázium Moravská Ostrava	89
8	Jaroslav	Trnka	2.B	Gymnázium Praha - Pražáčka	80
9	Luboš	Matásek	6.A	Gymnázium Plzeň - Mikulášské náměstí	76
10	Jaroslav	Kudlička	6.A	Gymnázium Hodonín	66

Kategorie prvních ročníků

Pořadí	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	Body
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	202
1	Alexandr	Kazda		Gymnázium Praha - Nad Alejí	111
2	Petr	Houštěk	4.	Gymnázium Pelhřimov	89
3	Hana	Suchomelová	9.A	ZŠ Trenčín	18
4 - 5	Mária	Šedivá	1.A	ZŠ Trenčín	16
4 - 5	Martin	Váňa	1.D	SPSS Praha - Betlémská	16
6	Lucie	Vasická		Gymnázium Most	14
7	Michal	Havel		COP Hronov	12
8	Jan	Kuchař		Gymnázium Brno - tř. Kpt. Jaroše	11
9 - 10	Lukáš	Voleský	1.B	COP Hronov	8
9 - 10	Jana	Vrábelová		G Trenčín	8

Obsah

Předmluva	5
Zadání úloh	6
Řešení teoretických úloh	12
Řešení experimentálních úloh	41
Seriál o mechanice	53
Pořadí nejlepších řešitelů	83
Obsah	85

JAN PROKLEŠKA A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XIV. ročník – 2000/2001

Předmluva: Jan Prokleška

Náměty na úlohy:

Pavel Augustinský (V.Exp), Milan Berta (IV.Exp), Jiří Franta (V.1),
Pavol Habuda (VI.3, V.3), Jan Houšťek (I.Exp, III.1, III.3, V.4, V.P),
Miroslav Kladiva (I.1, I.4), Karel Kouřil (II.4, III.4, III.P, IV.1, IV.P, V.2),
Jiří Libra (III.Exp), Miroslav Panoš (IV.3), Jan Prokleška (II.Exp, IV.4, I.2),
Rudolf Sýkora (II.3), Lenka Zdeborová (I.3, I.P, II.2, II.P, IV.2)

Autoři řešení úloh:

Pavel Augustinský (II.2, III.4, V.4), Milan Berta (I.Exp, IV.Exp, V.Exp),
Jana Čurdová (I.2), Jiří Franta (VI.Exp), Pavol Habuda (VI.3),
Karel Honzl (III.2, VI.2), Jakub Holovský (I.5, IV.3), Jan Houfek (I.3, III.1, VI.5),
Jan Houšťek (I.2, VI.5), Miroslav Kladiva (II.1, IV.5, V.3),
Karel Kolář (I.1, IV.1, V.1), Karel Kouřil (I.1, II.4, III.5, IV.4, V.2),
Jiří Libra (II.Exp), Ladislav Michnovič (III.3),
Miroslav Pištěk (I.4), Jan Prokleška (VI.4), Rudolf Sýkora (II.3),
Lenka Zdeborová (II.5, III.Exp, IV.2, V.5, VI.1, VI.2), Martin Zdráhal (I.2)

Seriál na pokračování: Jan Houšťek a Lenka Zdeborová

Sazba: Karel Honzl, Jan Prokleška

Obrázky: Jan Houšťek, Karel Honzl

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
Oddělení vnějších vztahů a propagace
Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2
Praha 2001

86 stran, 24 obrázků

Sazba písmem Computer Modern v programu \TeX

Vydání první

Náklad 300 výtisků

Pro potřeby fakulty