14. ročník, úloha I . 2 ... *kondenzátor v kapalině* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 51 studentů)*

Do kapalného dielektrika jsou svisle ponořeny dvě čtvercové paralelní vodivé desky o straně a. Nejsou-li desky nabity, vystoupí hladina mezi deskami do výšky h_0 (měřeno od dolního okraje desek). O jakou vzdálenost Δh se zvýší hladina kapaliny mezi deskami, nabijeme-li desky na napětí U? Permitivita kapaliny je ε, hustota je ϱ a vzdálenost desek je d ($d \ll a$).

Jan Prokleška se inspiroval sbírkou úloh Příklady z elektřiny a magnetismu.

Tato úloha byla asi nejsnáze řešitelná přes energie. Jedna z definic rovnováhy je, že se systém ustálí v takové poloze, v níž je jeho celková potenciální energie minimální.

V případě nenabitého kondenzátoru působí na kapalinu ve vertikálním směru tíhová a kapilární síla, které způsobí ustálení hladiny ve výšce h_0. Kapilární jevy závisí pouze na kolmém průřezu „kapiláry“, hustotě a povrchovém napětí, a ty se v našem případě nemění (zanedbáme-li změnu teploty způsobenou průchodem proudu). Dále tedy kapilární sílu nemusíme uvažovat.

Předpokládejme, že po připojení zdroje se kondenzátor nabije rychleji, než se hladina stačí pohnout. Při nabíjení se jistá část energie ztratí na odporech vodičů a zdroje. Od okamžiku, kdy je kondenzátor nabitý, již ale k žádným ztrátám energie nedochází, protože je napětí na vodičích nulové. Můžeme tedy spočítat celkovou potenciální energii systému, která bude součtem tíhové potenciální energie kapaliny, energie nabitého kondenzátoru a energie zdroje.

Tíhová energie je rovna tíze vystouplé kapaliny násobené výškou jejího těžiště nad místem, v němž zvolíme nulovou hladinu této energie. Nejjednodušší pro výpočet je volit nulovou hladinu ve výšce h_0. Kapalina zaujímá objem tvaru kvádru, a má tedy hmotnost $m = \varrho V = \varrho d a \Delta h$. Poloha těžiště je v polovině výšky Δh, odtud

$$E_G = \frac{1}{2}\varrho d a g (\Delta h)^2 \,.$$

Elektrostatická energie kondenzátoru se spočítá dle vztahu $E_C = CU^2/2$. Kondenzátor je tvořen dvěma nabitými deskami, mezi nimiž je v části kapalina a v části vzduch. Zanedbáme-li vzájemné ovlivňování kapaliny a vzduchu jako dielektrik, můžeme si kondenzátor představit jako paralelní spojení kondenzátoru s kapalným dielektrikem a vzduchového kondenzátoru. Plocha kondenzátoru s kapalinou je $a(h_0 + \Delta h)$, plocha kondenzátoru se vzduchem je $a\,(a - h_0 - \Delta h)$. Pro kapacitu kondenzátoru s dielektrikem o permitivitě ε, plochou S a vzdálenostmi desek d platí $C = \varepsilon S/d$ (za předpokladu, že jsou rozměry desek hodně větší než jejich vzdálenost). Protože kapacita paralelního spojení dvou kondenzátorů je rovna součtu jejich kapacit, je celková kapacita našeho kondenzátoru rovna

$$C = \varepsilon\,\frac{a(h_0 + \Delta h)}{d} + \varepsilon_0\,\frac{a\,(a - h_0 - \Delta h)}{d} = \frac{a\,(h_0 + \Delta h)\,(\varepsilon - \varepsilon_0) + a^2 \varepsilon_0}{d} \,.$$

Energie zdroje je rovna součinu napětí a kapacity zdroje. (Kapacita zdroje je náboj, který je zdroj schopný přenést, na akumulátorech bývá uvedena v A·h.) Označme Q_0 kapacitu zdroje před připojením ke kondenzátoru a $Q = CU$ náboj přenesený na kondenzátor. Po nabití kondenzátoru potom pro energii zdroje platí

$$E_z = U(Q_0 - Q) = UQ_0 - CU^2 \,.$$

Celková potenciální energie systému je tedy

$$E_p = \frac{1}{2}\varrho d a g (\Delta h)^2 + \frac{1}{2} C U^2 + UQ_0 - CU^2 \,.$$

Hladina se ustálí v takové výšce, ve které je tato energie minimální, dosadíme tedy za C

$$E_p = \frac{1}{2}\varrho dag(\Delta h)^2 - \frac{1}{2}U^2\,\frac{a\,(h_0+\Delta h)\,(\varepsilon-\varepsilon_0)+a^2\varepsilon_0}{d} + UQ_0$$

a doplníme vztah na úplný čtverec

$$E_p = \frac{1}{2}\varrho dag\left((\Delta h)^2 - 2\cdot\frac{U^2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varrho d^2 g}\cdot\Delta h + \frac{U^4(\varepsilon-\varepsilon_0)^2}{4\varrho^2 d^4 g^2}\right) + K =$$

$$= \frac{1}{2}\varrho dag\left(\Delta h - \frac{U^2(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varrho d^2 g}\right)^2 + K\,,$$

kde K nezávisí na Δh. Minimální energie bude tedy pro

$$\Delta h = \frac{U^2\,(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varrho d^2 g}\,.$$

Protože $\varepsilon > \varepsilon_0$, bude $\Delta h > 0$ a hladina stoupne.

Martin Zdráhal & Jana Čurdová & Jan Houštěk

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.