14. ročník, úloha II . 2 ... *skoky do nebe* *(4 body; průměr ?; řešilo 57 studentů)*

Ze střechy 10 m vysokého domu pouštíme s nulovou počáteční rychlostí gumové míčky na chodník. Míčky jsou všechny stejně velké, mají však hodně rozdílné hmotnosti. Do jaké maximální výšky může některý z míčků vyskočit, máme-li jich k dispozici a) 2, b) n. Všechny rázy považujme za dokonale pružné, veškeré odpory prostředí zanedbejme.

zadala Lenka Zdeborová

Nejprve spočítejme jak se změní rychlost míčku při srážce s jiným o mnoho těžším míčkem. Označme v_1 rychlost těžší míčku (ta se při srážce nezmění) v_2 a v_3 rychlost lehčího míčku před a po srážce. Pokud srážku pozorujeme ze souřadné soustavy spojené s těžším míčkem, vidíme jak se lehčí míček odrazí rychlostí $v_2 + v_1$. Když se vrátíme do souřadné soustavy spojené se zemí, musíme navíc k původní rychlosti přičíst rychlost v_1. Platí tedy, že

$$v_3 = 2v_1 + v_2 \,.$$

Změna kinetické energie lehčího míčku při srážce je

$$v_3^2 - v_2^2 = 4v_1^2 + 4v_1 v_2 \,.$$

Tedy je tím větší, čím větší je v_1 a v_2, takže nejvíce energie získá lehčí míček pokud dojde ke srážce těsně nad zemí.

a) V tomto případě je $v_1 = v_2$, tj. $v_3 = 3v_2$. Ze ZZE plyne, že výška do které míček vyletí je

$$h_1 = \left(\frac{v_3}{v_1}\right)^2 h_0 = 9h_0 = 90\,\mathrm{m}\,.$$

b) V tomto případě je nejvýhodnější pustit všechny míčky společně, a to tak že budou padat těsně nad sebou a pod každým míčkem bude míček výrazně těžší. Bude tedy postupně docházet ke srážkám mezi míčky a to v pořadí od nejtěžších po nejlehčí. Před každou srážkou bude vždy rychlost lehčího míčku stejná (v_1) takže pokud se srazí $(n+1)$=vý a n-tý míček, bude rychlost $(n+1)$-tého míčku

$$v_{n+1} = 2v_n + v_1 \,.$$

Tato posloupnost se dá explicitně (tj. jako $v_n = f(n)$ a nikoliv $v_{n+1} = f(v_n)$) vyjádřit jako

$$v_n = \left(2^n - 1\right) v_1 \,.$$

Maximálním výška do které může vystoupit n-tý míček je tedy

$$h_n = \left(2^n - 1\right)^2 h_0 \,.$$

Pavel Augustinský

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.